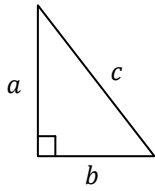

อัตราส่วน ตรีโกณมิติ

สารบัญ

ทบทวนสามเหลี่ยมมุมฉาก	1
อัตราส่วนตรีโกณมิติ	5
มุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$	10
สูตรอัตราส่วนตรีโกณมิติ.....	12
ตาราง	16
การประยุกต์	18

บททวนสามเหลี่ยมมุมฉาก

พีทาโกรัส



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ด้านซุดที่พบบ่อย

3, 4, 5

5, 12, 13

7, 24, 25

8, 15, 17

9, 40, 41

11, 60, 61

12, 35, 37

13, 84, 85

16, 63, 65

20, 21, 29

28, 45, 53

33, 56, 65

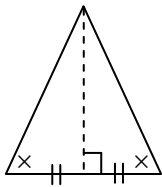
36, 77, 85

39, 80, 89

48, 55, 73

65, 72, 97

สามเหลี่ยมหน้าจั่ว

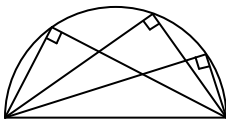


มุมที่ฐาน เท่ากัน

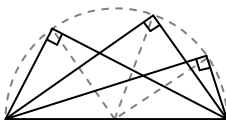
ด้านประกอบมุมยอด เท่ากัน

ส่วนสูง แบ่งครึ่ง และตั้งฉาก กับฐาน

ครึ่งวงกลม



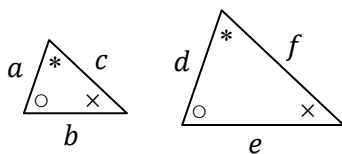
มุมในครึ่งวงกลม = 90° เสมอ



รัศมีของวงกลม ยาวเท่ากันทุกเส้น

→ ทำให้เกิดสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

สามเหลี่ยมคล้าย



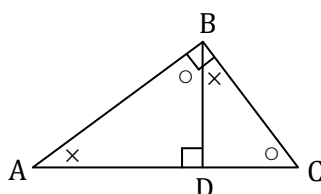
มีมุมทุกคู่ เท่ากัน → อัตราส่วนด้านที่เข้าคู่กัน จะเท่ากัน

เช่น $\frac{a}{b} = \frac{d}{e}$, $\frac{b}{c} = \frac{e}{f}$, $\frac{a}{d} = \frac{c}{f} = \frac{b}{e}$

หมายเหตุ: 1. ถ้ามุม 2 คู่เท่ากัน แล้ว อีกคู่จะเท่ากันโดยอัตโนมัติ

2. ด้านที่เข้าคู่กัน จะอยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากัน

สามเหลี่ยมที่นิยมออกข้อสอบ



สามเหลี่ยมมุมฉาก → พีทาโกรัส

พื้นที่ Δ หาได้ 2 แบบ → $\frac{1}{2} \times AC \times BD$ กับ $\frac{1}{2} \times AB \times BC$

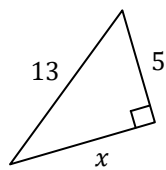
$$\Delta ABD \sim \Delta CBD \sim \Delta ABC$$

ดังนั้น $\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{BC}$ เป็นต้น

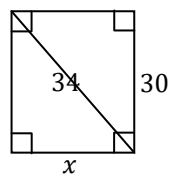
แบบฝึกหัด

1. จงหาค่า x

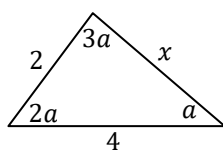
1.



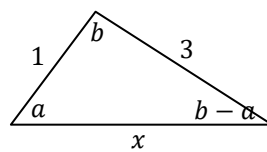
2.



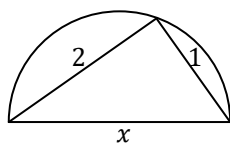
3.



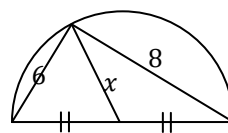
4.



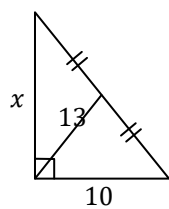
5.



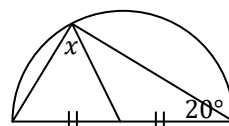
6.



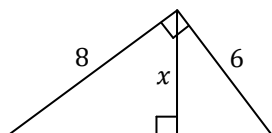
7.



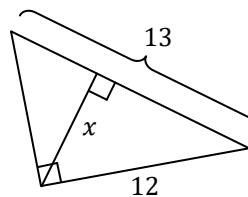
8.



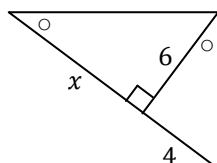
9.



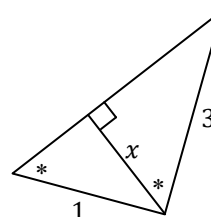
10.



11.

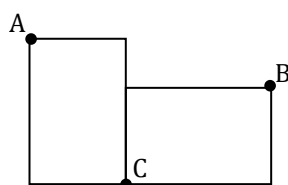


12.



2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มีด้าน BC ยาวเท่ากับ $10\sqrt{3}$ หน่วย และด้าน AB ยาวเท่ากับ 20 หน่วย ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ไปตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D แล้ว จะได้ว่าด้าน CD ยาวเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-22]

3. รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าสองรูป มีขนาดเท่ากัน โดยมีเส้นทแยงมุมยาวเป็นสองเท่าของด้านกว้าง ถ้านำรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าทั้งสองมาวางต่อกันดังรูป จุด A และจุด B อยู่ห่างกันเป็นระยะทางกี่เท่าของด้านกว้าง [O-NET 53/16]



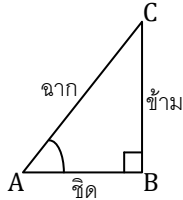
5. กำหนดให้สามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $\hat{C} = 90^\circ$ ให้ D เป็นจุดบนด้าน AB ซึ่งทำให้ CD ตั้งฉากกับ AB ถ้า AB ยาว 20 หน่วย และ CD ยาว 8 หน่วย แล้ว AD มีความยาวมากที่สุดเท่าใด [O-NET 54/14]

6. กำหนดให้สามเหลี่ยม ABC มี $\hat{B} = \hat{A} + \hat{C}$ ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC
ถ้า $\hat{A} = 20^\circ$ แล้ว $\widehat{ADB}$ มีขนาดเท่ากับกี่องศา [O-NET 54/13]

อัตราส่วนตรีโกณมิติ

เรื่องนี้ จะอยู่กับสามเหลี่ยม “มุมฉาก” ก่อนข้างเยอะ

ก่อนอื่น ต้องรู้วิธีเรียกด้านทั้งสามในสามเหลี่ยมมุมฉาก “โดยอิงกับมุมที่สนใจ” ก่อน

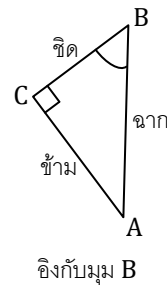
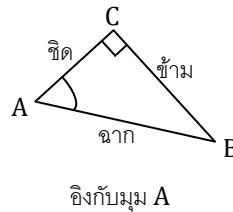
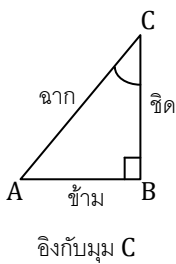


เราจะเรียกด้านตรงข้ามมุมฉาก ว่า “ฉาก” ด้านนี้จะเป็นด้านที่ยาวที่สุดเสมอ
ที่เหลือ 2 ด้าน เราจะเรียกโดย “อิงกับมุมที่สนใจ”

เช่น ถ้าสนใจมุม A เราจะเรียกด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ว่า “ข้าม”

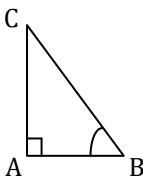
และเรียกด้านที่ชิดทั้งมุม A และชิดทั้งมุมฉาก ว่า “ชิด”

จะเห็นว่า ชื่อเรียกของด้าน จะเปลี่ยนไปตามมุมที่อิง ดังนั้น ก่อนอื่น ต้องแม่นยำเรื่องชื่อเรียกพวกนี้ก่อน



ตัวอย่าง สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้าใช้มุม B เป็นมุมอ้างอิง จงหาว่าด้านไหนเป็น “ข้าม” “ชิด” และ “ฉาก”

วิธีทำ



วาดรูปดูก่อน

จะเห็นว่าด้าน BC อยู่ตรงข้ามมุมฉาก ดังนั้น ด้าน BC คือ “ฉาก”

ข้อนี้สนใจมุม B เนื่องจากด้าน AC อยู่ตรงข้ามมุม B ดังนั้น ด้าน AC คือ “ข้าม”

ด้าน AB อยู่ชิดทั้งมุม B และมุมฉาก ดังนั้น ด้าน AB คือ “ชิด”

#

ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิตินี้ จะมี “อัตราส่วน” อยู่ 6 อันที่ต้องท่อง ดังนี้

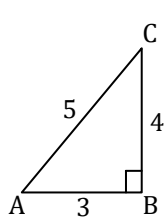
$\sin \rightarrow \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$	$\cos \rightarrow \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$	$\tan \rightarrow \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}}$
$\text{cosec} \rightarrow \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}}$	$\sec \rightarrow \frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}}$	$\cot \rightarrow \frac{\text{ชิด}}{\text{ข้าม}}$

หมายเหตุ: 1. บางโรงเรียน อาจใช้ตัวย่อ “csc” แทน cosec

2. ปกติ มักจะจำแค่ sin cos และ tan แล้วจำเพิ่มว่า cosec เป็นส่วนกลับกับ sin
sec เป็นส่วนกลับกับ cos
cot เป็นส่วนกลับกับ tan

อัตราส่วนทั้ง 6 นี้ จะเขียนลยๆไม่ได้ ต้องตามด้วยมุม (เช่น $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$)

และเราจะใช้มุมดังกล่าวเป็นมุมอ้างอิง เพื่อระบุ “ข้าม” “ชิด” และ “ฉาก” เพื่อนำมาเข้าอัตราส่วนหาค่าที่ต้องการ



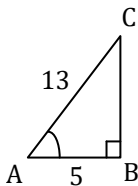
เช่น	$\sin A = \frac{4}{5}$	$\cos A = \frac{3}{5}$	$\tan A = \frac{4}{3}$
	$\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$	$\sec A = \frac{5}{3}$	$\cot A = \frac{3}{4}$
	$\sin C = \frac{3}{5}$	$\cos C = \frac{4}{5}$	$\tan C = \frac{3}{4}$
	$\operatorname{cosec} C = \frac{5}{3}$	$\sec C = \frac{5}{4}$	$\cot C = \frac{4}{3}$

อย่างไรก็ตาม โจทย์ส่วนใหญ่จะไม่บอกความยาวด้านทุกด้านมาให้

และเรามักจะต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับพีทาโกรัสมาหาด้านที่ขาดไปเสมอ

ตัวอย่าง สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $AB = 5$ $AC = 13$ จงหา $\sin A$

วิธีทำ



วาดรูปดูก่อน จะเห็นว่า $\sin A = \frac{BC}{AC}$ แต่โจทย์ไม่ได้บอกว่า BC ยาวเท่าไร

ข้อนี้ ต้องใช้ความรู้เรื่องพีทาโกรัส หา BC ออกมาก่อน

$$\text{จะได้ } BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{13}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\operatorname{cosec} A = \frac{5}{4}$ จงหา $\sin A$

วิธีทำ ถ้าจำได้ จะรู้ว่า cosec กับ $\sin$ เป็นส่วนกลับกัน

$$\text{ดังนั้น ถ้า } \operatorname{cosec} A = \frac{5}{4} \text{ จะได้ } \sin A = \frac{4}{5}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sec A = \frac{17}{8}$ จงหา $\sin A$

วิธีทำ ข้อนี้ ยากกว่าข้อที่แล้ว เพราะ $\sec$ ไม่ได้เป็นส่วนกลับกับ $\sin$

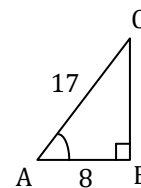
จากที่กำหนด $\sec A = \frac{17}{8}$ มาให้ จะทำให้เรารู้ว่า $\frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{17}{8}$

เราจะวาดสามเหลี่ยมที่มี $\frac{\text{ฉาก}}{\text{ชิด}} = \frac{17}{8}$

เนื่องจาก $\sin A = \frac{BC}{AC}$ เราต้องหา BC ออกมาก่อน

$$\text{จะได้ } BC = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15$$

$$\text{ดังนั้น } \sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{15}{17}$$



#

ตัวอย่าง สามเหลี่ยม ABC มีมุม C เป็นมุมฉาก ถ้า $\operatorname{cosec} A = 2$ จงหา $\sin B + \cos A$

วิธีทำ ข้อนี้ระวังดีๆ โจทย์ถามถึง $\sin B$ (ไม่ใช่ $\sin A$) จะเอา $\operatorname{cosec} A$ มากลับเศษส่วนไม่ได้

ก่อนอื่น ต้องรู้ว่า 2 เขียนในรูปเศษส่วนได้เป็น $\frac{2}{1}$

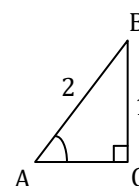
จากที่กำหนด $\operatorname{cosec} A = 2 = \frac{2}{1} = \frac{\text{ฉาก}}{\text{ข้าม}}$ จะวาดสามเหลี่ยมได้ดังรูป

$$\text{และจะได้ } AC = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{4 - 1} = \sqrt{3}$$

อีกจุดที่ต้องระวังคือ ตอนหา $\sin B$ ต้องใช้ B เป็นมุมอ้างอิง

ตอนหา $\cos A$ ต้องใช้ A เป็นมุมอ้างอิง

$$\text{ดังนั้น } \sin B + \cos A = \frac{\text{ข้าม}_B}{\text{ฉาก}_B} + \frac{\text{ชิด}_A}{\text{ฉาก}_A} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$



#

แบบฝึกหัด

1. สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $AB = 8$, $AC = 10$ จงหา $\cot A$

2. สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า $AB = 4$, $AC = 5$ จงหา $\sec B$

3. ถ้า $\sin A = \frac{5}{13}$ จงหา $\cos A$
4. ถ้า $\tan A = 2$ จงหา $\sec A$

5. ถ้า $\cot A = 2$ จงหาค่าของ $\sin A$
6. ถ้า $13 \cos A = 5$ จงหาค่าของ $\operatorname{cosec} A$

7. สามเหลี่ยม ABC มีมุม A เป็นมุมฉาก ถ้า $\sec C = \sqrt{3}$ จงหา $\cot B$

8. สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้า $\sin A = 0.8$ แล้ว ข้อใดถูกต้อง

1. $\cos A < \frac{1}{2}$

2. $\cos C > 0.6$

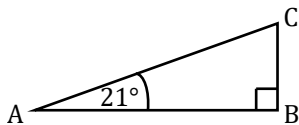
3. $\tan C > 1$

4. $\sec A < \sec C$

9. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก

ถ้า $\cot A = \frac{12}{5}$ แล้ว $10 \operatorname{cosec} A + 12 \sec A$ มีค่าเท่าใด [O-NET 49/2-3]

10. จากรูป



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [O-NET 52/7]

1. $\sin 21^\circ = \cos 69^\circ$

2. $\sin 21^\circ = \cos 21^\circ$

3. $\cos 21^\circ = \tan 21^\circ$

4. $\tan 21^\circ = \cos 69^\circ$

11. ให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมี E เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน CD

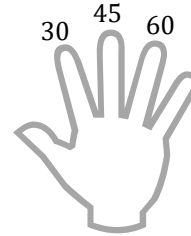
ถ้ามุม $\widehat{AEB} = 90^\circ$ แล้ว $\sin \widehat{BAC}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/17]

12. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \frac{3}{5}$ แล้ว $\cos(B - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
[O-NET 49/2-4]

มุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$

ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ เราจะต้องเจอกับ 3 มุมนี้บ่อยๆ
ทำให้เราต้องท่องค่า $\sin, \cos, \tan$ ของมุม 3 มุมนี้ให้ขึ้นใจ

	30°	45°	60°	
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$= \frac{\sqrt{\text{ซ้าย}}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$= \frac{\sqrt{\text{ขวา}}}{2}$
$\tan A$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$= \frac{\sqrt{\text{ซ้าย}}}{\sqrt{\text{ขวา}}}$



ถ้าอยากได้ cosec, sec, cot ก็เอาค่า $\sin, \cos, \tan$ มากลับเศษส่วนเอา

และถ้าเห็นเลขชี้กำลัง อยู่ที่ $\sin, \cos, \tan, \cot, \text{cosec}, \sec$ เช่น $\sin^2 30^\circ$

หมายถึงให้หาค่า $\sin, \cos, \tan, \cot, \text{cosec}, \sec$ ออกมาก่อน แล้วค่อยยกกำลัง

$$\text{เช่น } \sin^2 30^\circ = (\sin 30^\circ)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ตัวอย่าง ข้อใดมีค่ามากที่สุด

- 1) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ$
- 2) $\text{cosec } 30^\circ + \sec 60^\circ$
- 3) $\cot^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ$
- 4) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ$

วิธีทำ

- 1) $\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- 2) $\text{cosec } 30^\circ + \sec 60^\circ = \frac{2}{1} + \frac{2}{1} = 4$
- 3) $\cot^2 30^\circ - \sin^2 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$
 $= 3 - \frac{2}{4} = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$
- 4) $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$
 $= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

ดังนั้น $\text{cosec } 30^\circ + \sec 60^\circ$ มีค่ามากที่สุด

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ

1. $\cos^2 30^\circ$
2. $\sin^2 45^\circ$

3. $\operatorname{cosec} 30^\circ - \cot 45^\circ$

4. $\tan^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ$

5. $\sec 60^\circ - \operatorname{cosec}^2 45^\circ$

6. $\sin^2 45^\circ - \tan^2 60^\circ + \cos 60^\circ$

2. จงหาค่า θ ที่ทำให้ $4 \sin^2 \theta - 3 = 0$ เมื่อกำหนดให้ $0 \leq \theta \leq 90^\circ$

3. ถ้า $2 \cos^2 \theta + \cos \theta = 1$ โดยที่ $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ แล้ว θ เป็นมุมกี่องศา [O-NET 54/28]

สูตรอัตราส่วนตรีโกณมิติ

ในเรื่องนี้ มีสูตรต้องท่องดังนี้

- สูตรส่วนกลับ

$$\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

- สูตรเปลี่ยนทุกอย่างให้เป็น $\sin$ กับ $\cos$

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} & \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A} & \sec A &= \frac{1}{\cos A} \end{aligned}$$

- สูตรโคฟังก์ชัน: ถ้ามุมสองมุมรวมกันได้ 90° แล้ว “โคฟังก์ชัน” จะเท่ากัน

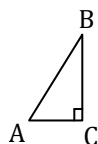
$$\begin{aligned} \cos &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \sin \\ \cot &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \tan \\ \operatorname{cosec} &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \sec \end{aligned}$$

เช่น $\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$

$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ$

$\cot 45^\circ = \tan 45^\circ$

$\sec 54^\circ = \operatorname{cosec} 36^\circ$



$$\sin A = \cos B$$

$$\cos A = \sin B$$

$$\tan A = \cot B$$

$$\cot A = \tan B$$

$$\operatorname{cosec} A = \sec B$$

$$\sec A = \operatorname{cosec} B$$

- สูตรกำลังสอง

$$\begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \tan^2 A + 1 &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned}$$

หมายเหตุ: 1. เราใช้คำว่า “เอกลักษณ์” แทนคำว่า “สูตร” ได้

2. นิยมใช้สัญลักษณ์ θ เป็น “ตัวแปรแทนมุม”

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin 35^\circ \operatorname{cosec} 35^\circ$

วิธีทำ ข้อนี้ ถึงเราจะหา $\sin 35^\circ$ ไม่ได้ แต่เรารู้ว่า $\operatorname{cosec} 35^\circ$ เป็นส่วนกลับกับ $\sin 35^\circ$

นั่นคือ $\sin 35^\circ \operatorname{cosec} 35^\circ = \sin 35^\circ \times \frac{1}{\sin 35^\circ} = 1$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cot^2 15^\circ - \sec 75^\circ \operatorname{cosec} 15^\circ$

วิธีทำ ข้อนี้มีทั้งมุม 15° และ 75° เรานิยมทำให้เป็นมุมเดียวกัน

ด้วยสูตรโคฟังก์ชัน จะได้ว่า $\sec 75^\circ = \operatorname{cosec} 15^\circ$

$$\begin{aligned}\cot^2 15^\circ - \sec 75^\circ \operatorname{cosec} 15^\circ &= \cot^2 15^\circ - \operatorname{cosec} 15^\circ \operatorname{cosec} 15^\circ \\ &= \cot^2 15^\circ - \operatorname{cosec}^2 15^\circ \\ &= -1\end{aligned}$$

#

← จากสูตร $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$
จะได้ $\cot^2 A - \operatorname{cosec}^2 A = -1$

ตัวอย่าง ถ้า $\tan \theta - \cot \theta = 2$ จงหา $\tan^2 \theta + \cot^2 \theta$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\tan \theta - \cot \theta &= 2 \\ (\tan \theta - \cot \theta)^2 &= 2^2 \\ \tan^2 \theta - 2 \tan \theta \cot \theta + \cot^2 \theta &= 4 \\ \tan^2 \theta - 2 \tan \theta \cdot \frac{1}{\tan \theta} + \cot^2 \theta &= 4 \\ \tan^2 \theta - 2 + \cot^2 \theta &= 4 \\ \tan^2 \theta + \cot^2 \theta &= 4 + 2 = 6\end{aligned}$$

#

นอกจากนี้ เรายังสามารถใช้สูตรข้างต้น เพื่อ “พิสูจน์”เอกลักษณ์ที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นไปได้

วิธีพิสูจน์คือ เราจะพยายามเปลี่ยนรูปทางซ้ายและทางขวาของเครื่องหมายเท่ากับให้เหมือนกัน

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $\frac{\sec \theta}{1 - \cos \theta} = \frac{\sec \theta + 1}{1 - \cos^2 \theta}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{\sec \theta}{1 - \cos \theta} &= \frac{\sec \theta + 1}{1 - \cos^2 \theta} \\ \sec \theta (1 - \cos^2 \theta) &= (\sec \theta + 1)(1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{\cos \theta} (1 - \cos^2 \theta) &= \left(\frac{1}{\cos \theta} + 1 \right) (1 - \cos \theta) \\ \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - 1 + 1 - \cos \theta \\ \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta &= \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta\end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\cos 71^\circ \sec 71^\circ$

2. $\frac{\cot 20^\circ \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ}$

3. $\sec 12^\circ \sin 12^\circ \cot 12^\circ$

4. $\sin 18^\circ \sec 72^\circ$

5. $\cos 40^\circ \sin 45^\circ \operatorname{cosec} 50^\circ$

6. $\sin 18^\circ \cos 72^\circ + \sin^2 72^\circ$

7. $2 \sec^2 12^\circ - 2 \tan^2 12^\circ - 2$

8. $\sec A - \cos A - \sec A \sin^2 A$

9. $\cos 22^\circ \operatorname{cosec} 68^\circ$

10. $\sin^2 31^\circ + \sin^2 59^\circ$

11. $\operatorname{cosec}^2 49^\circ - \tan^2 41^\circ$

12. $\sin 5^\circ \cos 5^\circ \tan 5^\circ \cot 5^\circ \sec 5^\circ \operatorname{cosec} 5^\circ$

13. $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$

14. $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$

2. $\operatorname{cosec} 30^\circ \left(\frac{\sin 31^\circ \sin 35^\circ}{\cos 35^\circ \cos 59^\circ} \right) \tan 55^\circ$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 54/29]

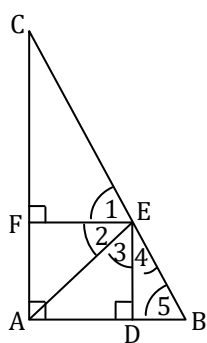
3. พิจารณารูปสามเหลี่ยมต่อไปนี้ โดยที่มุม $\widehat{CFE}$, $\widehat{CAB}$, $\widehat{AEB}$ และ $\widehat{EDB}$ ต่างเป็นมุมฉาก ข้อใดต่อไปนี้ผิด
[O-NET 51/26]

1. $\sin(\widehat{1}) = \sin(\widehat{5})$

2. $\cos(\widehat{3}) = \cos(\widehat{5})$

3. $\sin(\widehat{2}) = \cos(\widehat{4})$

4. $\cos(\widehat{2}) = \sin(\widehat{3})$



ตาราง

ในเรื่องนี้ จะฝึกการอ่านค่า $\sin$, $\cos$, $\tan$ ของมุมบวกที่น้อยกว่า 90° จากตารางเพื่อนำไปใช้

A ($^\circ$)	sin	cos	tan	A ($^\circ$)	sin	cos	tan
1	0.017	0.999	0.017	46	0.719	0.694	1.035
2	0.034	0.999	0.034	47	0.731	0.681	1.072
3	0.052	0.998	0.052	48	0.743	0.669	1.110
4	0.069	0.997	0.069	49	0.754	0.656	1.150
5	0.087	0.996	0.087	50	0.766	0.642	1.191
6	0.104	0.994	0.105	51	0.777	0.629	1.234
7	0.121	0.992	0.122	52	0.788	0.615	1.279
8	0.139	0.990	0.140	53	0.798	0.601	1.327
9	0.156	0.987	0.158	54	0.809	0.587	1.376
10	0.173	0.984	0.176	55	0.819	0.573	1.428
11	0.190	0.981	0.194	56	0.829	0.559	1.482
12	0.207	0.978	0.212	57	0.838	0.544	1.539
13	0.224	0.974	0.230	58	0.848	0.529	1.600
14	0.241	0.970	0.249	59	0.857	0.515	1.664
15	0.258	0.965	0.267	60	0.866	0.500	1.732
16	0.275	0.961	0.286	61	0.874	0.484	1.804
17	0.292	0.956	0.305	62	0.882	0.469	1.880
18	0.309	0.951	0.324	63	0.891	0.453	1.962
19	0.325	0.945	0.344	64	0.898	0.438	2.050
20	0.342	0.939	0.363	65	0.906	0.422	2.144
21	0.358	0.933	0.383	66	0.913	0.406	2.246
22	0.374	0.927	0.404	67	0.920	0.390	2.355
23	0.390	0.920	0.424	68	0.927	0.374	2.475
24	0.406	0.913	0.445	69	0.933	0.358	2.605
25	0.422	0.906	0.466	70	0.939	0.342	2.747
26	0.438	0.898	0.487	71	0.945	0.325	2.904
27	0.453	0.891	0.509	72	0.951	0.309	3.077
28	0.469	0.882	0.531	73	0.956	0.292	3.270
29	0.484	0.874	0.554	74	0.961	0.275	3.487
30	0.500	0.866	0.577	75	0.965	0.258	3.732
31	0.515	0.857	0.600	76	0.970	0.241	4.010
32	0.529	0.848	0.624	77	0.974	0.224	4.331
33	0.544	0.838	0.649	78	0.978	0.207	4.704
34	0.559	0.829	0.674	79	0.981	0.190	5.144
35	0.573	0.819	0.700	80	0.984	0.173	5.671
36	0.587	0.809	0.726	81	0.987	0.156	6.313
37	0.601	0.798	0.753	82	0.990	0.139	7.115
38	0.615	0.788	0.781	83	0.992	0.121	8.144
39	0.629	0.777	0.809	84	0.994	0.104	9.514
40	0.642	0.766	0.839	85	0.996	0.087	11.430
41	0.656	0.754	0.869	86	0.997	0.069	14.300
42	0.669	0.743	0.900	87	0.998	0.052	19.081
43	0.681	0.731	0.932	88	0.999	0.034	28.636
44	0.694	0.719	0.965	89	0.999	0.017	57.289
45	0.707	0.707	1.000				

จากตาราง ถ้าเป็นของมุมบวกที่น้อยกว่า 90° จะสังเกตเห็นว่า

- $\sin$ กับ $\tan$ จะเพิ่มเมื่อมุมเพิ่ม เช่น $\sin 20^\circ < \sin 50^\circ < \sin 75^\circ$
 $\tan 15^\circ < \tan 40^\circ < \tan 70^\circ$
 $\cos$ จะลดลง เมื่อมุมเพิ่มขึ้น เช่น $\cos 20^\circ > \cos 25^\circ > \cos 80^\circ$
- $\sin$ กับ $\cos$ จะเป็นบวกที่ไม่เกิน 1
 cosec กับ $\sec$ จะเป็นบวกที่มากกว่า 1 (เพราะมันคือ $\frac{1}{\text{ไม่เกิน } 1}$)
 $\tan$ กับ $\cot$ จะเป็นอะไรก็ได้ ไม่มีขีดจำกัด

- เมื่อ $45^\circ < \theta < 90^\circ$ จะได้ $\tan \theta > \cot \theta$

#

4) $\cos 15^\circ > \cos 20^\circ$

#

4. $\sin 40^\circ =$

8. $\sin 1^\circ \dots\dots\dots \cos 1^\circ$

4. $\tan 60^\circ < \cot 60^\circ$

การประยุกต์

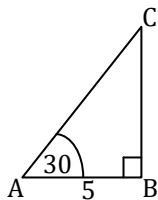
เราสามารถนำความรู้เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปคำนวณด้านหรือมุมของสามเหลี่ยมได้

ในสามเหลี่ยมมุมฉาก ถ้าเรารู้ด้าน 1 ด้าน และมุม 1 มุม (ที่ไม่ใช่มุมฉาก) เราจะหาด้านอีกสองด้านที่เหลือได้

วิธีทำคือ ให้เลือกอัตราส่วนที่เกี่ยวข้องกับ “ด้านที่รู้” “มุมที่รู้” และ “ด้านที่จะหา” มาเข้าสมการ

ตัวอย่าง สามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก ถ้ามุม A มีขนาด 30° และ $AB = 5$ จงหาความยาว AC

วิธีทำ



วาดรูปก่อน จะได้ดังรูป ใจหายให้หา AC

ถ้าใช้มุม A เป็นมุมอ้างอิง จะได้ AB คือ “ชิด” และ AC คือ “ฉาก”

เนื่องจากอัตราส่วนที่เกี่ยวข้องกับ ชิด และ ฉาก คือ $\cos$ ดังนั้น เราจะใช้ $\cos$ เข้าสมการ

$$\text{จะได้ } \cos A = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{AB}{AC}$$

$$\text{แทนค่า } \cos A = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{และ} \quad AB = 5 \quad \text{จะได้} \quad \cos A = \frac{AB}{AC}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{AC}$$

$$AC = \frac{10}{\sqrt{3}}$$

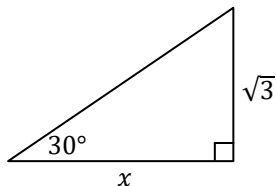
$$\text{ดังนั้น } AC = \frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

#

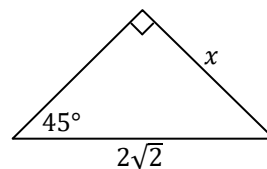
แบบฝึกหัด

1. จงหาค่า x

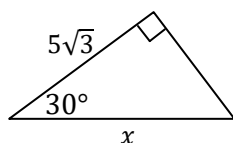
1.



2.

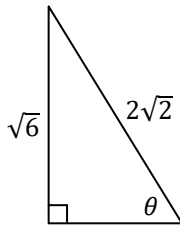


3.

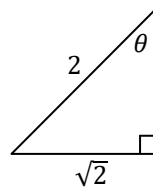


2. จงหาค่า θ

1.



2.



3. ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 1 หน่วย แล้ว ด้านของรูปสามเหลี่ยมรูปนี้ยาวเท่ากับเท่าใด
[O-NET 51/11]

4. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และด้าน BC ยาว 6 นิ้ว ถ้า D เป็นจุดบนด้าน AC โดยที่ $\widehat{BDC} = 70^\circ$ และ $\widehat{ABD} = 10^\circ$ แล้ว ด้าน AB ยาวเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/11]

5. วงกลมรัศมี 6 หน่วย และ A, B, C เป็นจุดบนเส้นรอบวงของวงกลม ถ้า AB เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม และ $\widehat{CAB} = 60^\circ$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [O-NET 50/30]

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ $\cos B = \frac{2}{3}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/12]

7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว โดยมีมุมยอด $C = 120^\circ$ ลากเส้นจาก A มาตั้งฉากกับกับด้าน BC ที่ต่อออกไปที่จุด D ถ้า AD ยาว 3 หน่วย จงหาความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC
8. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ซึ่งมีมุม A เป็นมุมฉาก และมีมุม $B = 30^\circ$ ถ้า D และ E เป็นจุดบนด้าน AB และ BC ตามลำดับ ซึ่งทำให้ DE ขนานกับ AC โดยที่ DE ยาว 5 หน่วย และ EC ยาว 6 หน่วย แล้ว AC ยาวเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/29]
9. ซิงค์อันหนึ่ง มีเชือกยาว 120 ซม. มีเบาะรองนั่งอยู่สูงจากพื้น 30 ซม. ถ้าต้องการไล่ซิงค์ให้เบาะรองนั่งลอยสูงจากพื้น 90 ซม. จะต้องไล่ซิงค์ไปจากแนวเริ่มต้นเป็นมุมกี่องศา
10. โดยการใช้ตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้

θ	$\sin \theta$	$\cos \theta$
72°	0.951	0.309
73°	0.956	0.292
74°	0.961	0.276
75°	0.966	0.259

มุมภายในที่มีขนาดเล็กที่สุดของรูปสามเหลี่ยมที่มีด้านทั้งสามยาว 7, 24 และ 25 หน่วย มีขนาดใกล้เคียงกับข้อใดมากที่สุด [O-NET 53/17]

1. 15° 2. 16° 3. 17° 4. 18°

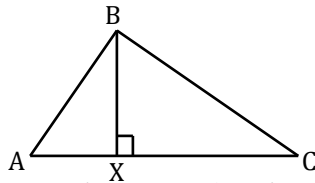
11. กำหนดให้ตาราง A ตาราง B และตาราง C เป็นตารางหาอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมขนาดต่างๆ ดังนี้

ตาราง A	
θ	$\sin \theta$
40°	0.643
41°	0.656
42°	0.669

ตาราง B	
θ	$\cos \theta$
40°	0.766
41°	0.755
42°	0.743

ตาราง C	
θ	$\tan \theta$
40°	0.839
41°	0.869
42°	0.900

ถ้ารูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม B เป็นมุมฉาก มุม C มีขนาด 41° และส่วนสูง BX ยาว 1 หน่วย แล้ว



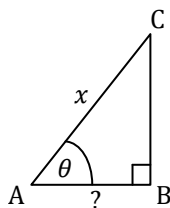
ความยาวของส่วนของเส้นตรง AX เป็นดังข้อใดต่อไปนี้ [O-NET 52/9]

1. ปรากฏอยู่ในตาราง A
2. ปรากฏอยู่ในตาราง B
3. ปรากฏอยู่ในตาราง C
4. ไม่ปรากฏอยู่ในตาราง A, B และ C

ในโจทย์ที่มีความซับซ้อน เราอาจต้องใช้ความรู้ในเรื่องสมการมาช่วย

โดยเราจะสมมติให้ด้านบางด้าน เป็น x แล้วหาด้านอื่นๆให้อยู่ในรูปของ x แล้ว สร้างสมการ และแก้หา x ออกมา
ทักษะที่จำเป็นต้องทำได้ คือ การหาด้านอื่นๆในรูปของ x

เช่น

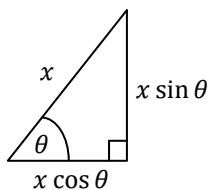


ถ้าเราสมมติให้ $AC = x$ แล้วต้องการหา AB ในรูปของ x

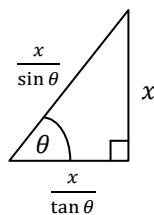
เราจะใช้ความสัมพันธ์ $\frac{?}{x} = \cos \theta$ จะได้ $? = x \cos \theta$

ดังนั้น เขียน AB ในรูปของ x ได้เป็น $x \cos \theta$

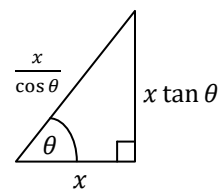
ตัวอย่างของการเขียนด้านต่างๆ ในรูปของ x เช่น



ควรจำ - คล้ายกับเรื่องการ
แตกแรงในวิชาฟิสิกส์

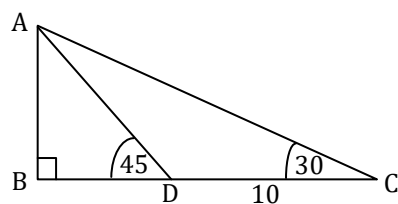


ไม่ต้องจำก็ได้
(แต่ต้องทำได้)



ไม่ต้องจำก็ได้
(แต่ต้องทำได้)

ตัวอย่าง จากรูป จงหาความยาว AB



วิธีทำ ข้อนี้ เราจะสมมติให้ $AB = x$ แล้วเขียน BD กับ BC ในรูปของ x จากนั้น เข้าสมการ $BC - BD = 10$

$$\begin{aligned} \text{ให้ } AB = x \text{ จะได้ } BD &= \frac{x}{\tan 45} & \text{และ } BC &= \frac{x}{\tan 30} \\ &= \frac{x}{1} & &= \frac{x}{1/\sqrt{3}} \\ &= x & &= \sqrt{3}x \end{aligned}$$

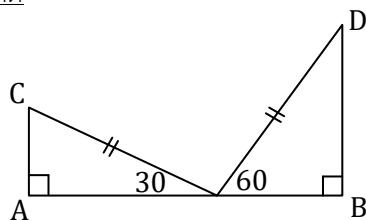
$$\begin{aligned} \text{นำไปแทนใน } DC &= BC - BD \\ 10 &= \sqrt{3}x - x \\ 10 &= (\sqrt{3} - 1)x \\ \frac{10}{\sqrt{3}-1} &= x \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } AB = \frac{10}{\sqrt{3}-1} = \frac{10}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = \frac{10(\sqrt{3}+1)}{2} = 5\sqrt{3} + 5$$

#

แบบฝึกหัด

12.



กำหนดให้ $AB = 10$ จงหาความยาว AC

13. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เท่ากับ 45 องศา และ D เป็นจุดบนด้าน BC ที่ทำให้ AD เป็นเส้นความสูงของสามเหลี่ยม ถ้าด้าน BD ยาว a หน่วย และด้าน AB ยาว $3a$ หน่วย แล้ว ด้าน AC มีความยาวเท่ากับเท่าใด (ตอบในรูปของ a) [O-NET 56/16]

14. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก ด้าน BC ยาว a หน่วย และ ด้าน AC ยาว $a + 8$ หน่วย
ถ้า $\cot(90^\circ - B) = 3$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/18]
15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มีมุม A เท่ากับ 30° และมีพื้นที่เท่ากับ $24\sqrt{3}$ ตาราง
หน่วย ความยาวของด้าน AB เท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-21]
16. มุมมุมหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีขนาดเท่ากับ 60° องศา ถ้าเส้นรอบรูปของรูปสามเหลี่ยมนี้ยาว $3 - \sqrt{3}$ ฟุต
แล้ว ด้านที่ยาวเป็นอันดับสองมีความยาวเท่ากับกี่ฟุต [O-NET 53/18]
17. กำหนดให้ $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่เท่ากับ 12 ตารางหน่วย และ $\tan \widehat{ABD} = \frac{1}{3}$ ถ้า AE ตั้งฉากกับ
 BD ที่จุด E แล้ว AE ยาวเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/25]

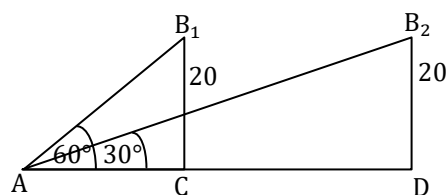
18. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมีพื้นที่เท่ากับ 15 ตารางหน่วย และมีมุม C เป็นมุมฉาก
ถ้า $\sin B = 3 \sin A$ แล้ว ด้าน AB ยาวเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-23]

นอกจากนี้ เรายังสามารถนำอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้กับโจทย์ปัญหาได้ด้วย
โดยจะต้องวาดรูปจากคำบรรยายในโจทย์ออกมาให้ได้ก่อน
ในโจทย์ปัญหา เราจะพบคำศัพท์ใหม่ 2 คือ คำว่า “มุมก้ม” และ “มุมเงย”
ทั้งสองมุมนี้ จะเป็นมุมที่วัดจากระดับสายตาในแนวราบ ดังรูป



ตัวอย่าง เด็กคนหนึ่ง มองบอลลูกที่อยู่สูง 20 เมตรจากพื้นดินด้วยมุมเงย 60° ต่อมา บอลกลิ้งลื่นออกจากตัวเด็กโดย
ยังคงระดับความสูงจากพื้นเท่าเดิม จนกระทั่งมุมเงยที่ได้มองบอลลูกลดลงเหลือ 30° จงหาว่าบอลกลิ้งลื่นออก
ห่างจากเด็กเป็นระยะทางเท่าไร

วิธีทำ ให้จุด A เป็นจุดที่เด็กยืน จุด B_1 เป็นจุดเริ่มต้นของบอลกลิ้ง จุด B_2 เป็นจุดสุดท้ายของบอลกลิ้ง



ในสามเหลี่ยม AB_1C จะได้ $\tan 60^\circ = \frac{20}{AC}$ ดังนั้น $AC = \frac{20}{\tan 60^\circ} = \frac{20}{\sqrt{3}}$

ในสามเหลี่ยม AB_2D จะได้ $\tan 30^\circ = \frac{20}{AD}$ ดังนั้น $AD = \frac{20}{\tan 30^\circ} = \frac{20}{1/\sqrt{3}} = 20\sqrt{3}$

จะได้ $CD = AD - AC = 20\sqrt{3} - \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{60-20}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น บอลกลิ้งลื่นออกไป $= \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ เมตร

#

แบบฝึกหัด

19. กล้องวงจรปิดซึ่งถูกติดตั้งอยู่สูงจากพื้นถนน 2 เมตร สามารถจับภาพได้ต่ำที่สุดที่มุมก้ม 45° และสูงที่สุดที่มุมก้ม 30° ระยะทางบนพื้นถนนในแนวกว้าง ที่กล้องนี้สามารถจับภาพได้คือกี่เมตร (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.73$)

[O-NET 53/19]

20. อิทธิยืนอยู่บนยอดประภาคารสูง 30 เมตร เห็นเรือสองลำจอดอยู่ในทะเลทางทิศตะวันออกในแนวเส้นตรงเดียวกัน โดยที่สายตาของเขาทำมุมก้ม α องศา เมื่อมองเรือลำที่หนึ่ง และทำมุมก้ม β องศาเมื่อมองเรือลำที่สอง ถ้าเรือสองลำอยู่ห่างกัน 80 เมตร และ $\alpha + \beta = 90$ องศา แล้ว เรือลำที่อยู่ไกลจากฝั่งที่สุดอยู่ห่างจากจุดที่ตั้งประภาคารกี่เมตร [O-NET 56/19]

21. นาย ก และ นาย ข ยืนอยู่บนพื้นราบซึ่งห่างจากกำแพงเป็นระยะ 10 เมตร และ 40 เมตร ตามลำดับ ถ้านาย ก มองหลอดไฟบนกำแพงด้วยมุมเงย α องศา ในขณะที่นาย ข มองหลอดไฟดวงเดียวกันด้วยมุมเงย $90 - \alpha$ องศา ถ้าไม่คิดความสูงของนาย ก และ นาย ข แล้วหลอดไฟอยู่สูงจากพื้นราบกี่เมตร [O-NET 54/15]

- | | | | |
|----------|----------|-------|-------|
| 9. 1 | 10. 1 | 11. 1 | 12. 1 |
| 13. 44.5 | 14. 44.5 | | |
| 2. 2 | 3. 3 | | |

ตาราง

- | | | | |
|-------------|----------|----------|----------|
| 1. 1. 0.945 | 2. 0.267 | 3. 0.034 | 4. 0.642 |
| 2. 1. < | 2. > | 3. < | 4. > |
| 5. < | 6. < | 7. > | 8. < |
| 3. 1 | | | |

การประยุกต์

- | | | | |
|--------------------------|---------------------|----------------------------|-------------------------|
| 1. 1. 3 | 2. 2 | 3. 10 | |
| 2. 1. 60° | 2. 45° | | |
| 3. $2\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 4. $4\sqrt{3}$ | 5. $18\sqrt{3}$ | 6. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ |
| 7. $6 + 4\sqrt{3}$ | 8. 8 | 9. 60° | 10. 2 |
| 11. 3 | 12. $5\sqrt{3} - 5$ | 13. $4a$ | 14. 4 |
| 15. 12 | 16. $2\sqrt{3} - 3$ | 17. $\frac{3}{5}\sqrt{10}$ | 18. 10 |
| 19. 1.46 | 20. 90 | 21. 20 | |

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Zaachat Chatthammarak

และ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของชีท ครับ