
ฟังก์ชัน

ตรีโกณมิติ

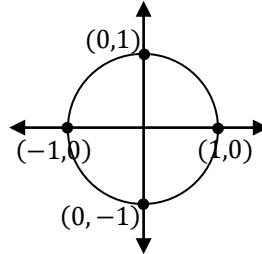
สารบัญ

การวัดมุมในหน่วยเรเดียน	1
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ	5
การวัดมุมในหน่วยองศา	7
การแปลงมุมเป็นรูปอย่างง่าย	9
ตาราง	14
กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ	21
ทบทวนสูตรเก่า	25
สูตรผลบวกผลต่างมุม	29
สูตรมุมสองเท่า สามเท่า ครึ่งเท่า	36
สูตรแปลงผลคูณกับผลบวกกลับ	46
สมการตรีโกณมิติ	55
ฟังก์ชันอาร์ค	62
การนำไปใช้กับสามเหลี่ยม	74

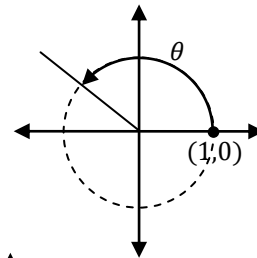
การวัดมุมในหน่วยเรเดียน

เมื่อก่อน เราจะวัดมุม θ ในหน่วยองศา แต่จากนี้ไป เราจะมีวิธีวัดมุมแบบใหม่ เป็นหน่วย “เรเดียน”
จะวัดมุมเป็นเรเดียนได้ ต้องรู้จัก “วงกลมหนึ่งหน่วย” ก่อน

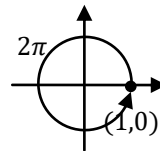
“วงกลมหนึ่งหน่วย” หมายถึง วงกลมที่มีรัศมี 1 หน่วย
ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ ในระนาบ XY ดังรูป



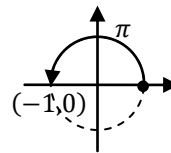
การวัดมุมในหน่วยเรเดียน จะนับพิกัด $(1, 0)$ เป็น “จุดเริ่มต้น”
“มุมที่ทาง θ เรเดียน” จะหมายถึง มุมที่เริ่มเดินจาก $(1, 0)$
ในทิศ “ทวนเข็มนาฬิกา” ไปตามเส้นรอบวงกลมเป็น “ระยะทาง” θ หน่วย



เนื่องจากวงกลมหนึ่งหน่วย มีความยาวเส้นรอบวง $= 2\pi(1) = 2\pi$
ดังนั้น มุมที่ทาง 2π เรเดียน จะวนครบ 1 รอบพอดี มาหยุดที่ $(1, 0)$



เนื่องจาก 1 รอบ $= 2\pi$ ดังนั้น ครึ่งรอบ $= \pi$
นั่นคือ มุมที่ทาง π เรเดียน จะเดินได้แค่ครึ่งรอบ มาหยุดที่ $(-1, 0)$



จากนี้ไป เรานิยมจำว่า $\pi = 180^\circ$ และถ้าเจอมุมอื่นๆ ก็ให้แทน π ด้วย 180°

เช่น $\frac{\pi}{2}$ เรเดียน $= \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$\frac{\pi}{3}$ เรเดียน $= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

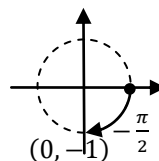
$\frac{\pi}{4}$ เรเดียน $= \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

$\frac{\pi}{6}$ เรเดียน $= \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ$

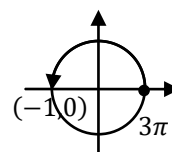
$\pi = 180^\circ$

หมายเหตุ: เรานิยมจำขนาดของมุม $2\pi, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ ให้ขึ้นใจ ชนิดที่นี้ภาพพจน์โดยไม่ต้องแทน $\pi = 180^\circ$
และถ้าไม่บอกหน่วยของมุมมาให้ เราจะถือว่าเป็นหน่วยเรเดียน

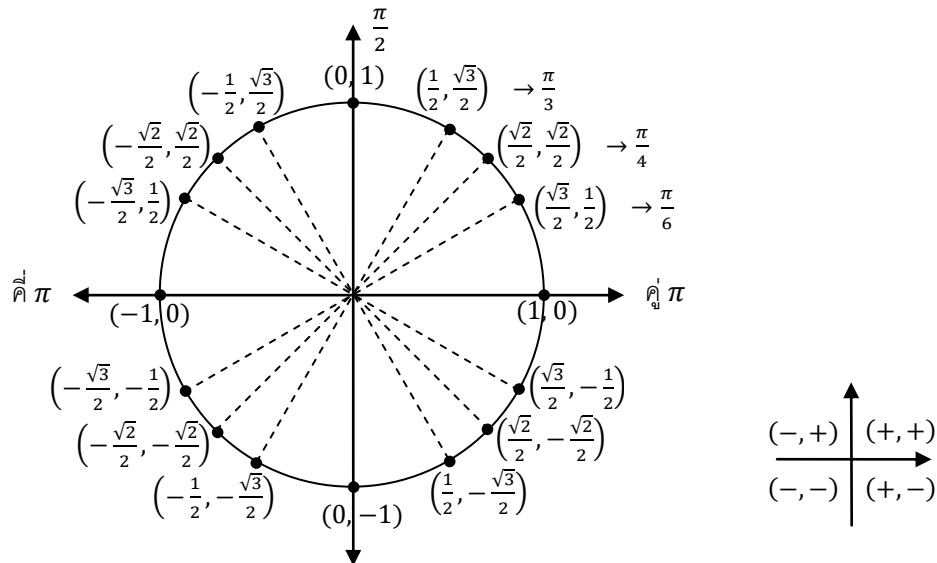
- ในกรณีที่มุมติดลบ ให้วัดโดยเดิน “ตาม” เข็มมนาฬิกาแทน
เช่น มุม $-\frac{\pi}{2}$ เรเดียน จะหยุดอยู่ที่ $(0, -1)$ ดังรูป



- ในกรณีที่มุมใหญ่เกิน 2π เรเดียน ก็ให้วนทบรอบสอง รอบสาม ไปเรื่อยๆ
เช่น มุม 3π เรเดียน จะเป็นมุมที่เกิน 1 รอบไปอีกครึ่งรอบ ดังรูป
จะเห็นว่า มุม $\pi, 3\pi, 5\pi, 7\pi, \dots$ จะหยุดที่จุดเดียวกัน
มุม $0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ จะหยุดที่จุดเดียวกัน
คนส่วนใหญ่มักจะท่องว่า คู่ $\pi =$ หนึ่งรอบ และ คี่ $\pi =$ ครึ่งรอบ



สิ่งแรกที่ต้องทำให้ได้ในเรื่องนี้ คือ ต้องหา “จุดหยุด” ทั้ง 16 จุด ของมุมพื้นฐานให้ได้ ดังนี้



จะเห็นว่าตัวเลขพิกัด (x, y) จะเป็นค่าเดียวกันกับ $\sin$ และ $\cos$ ของ มุม $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ที่เคยเรียนในเลขพื้นฐาน โดย เรานิยมใช้สัญลักษณ์ $P(\theta)$ แทน พิกัดของจุดปลายมุม θ

เช่น $P\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1)$

$P\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P(\pi) = (-1, 0)$

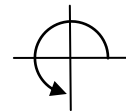
$P\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ในกรณีที่ θ เป็นมุมใหญ่ๆ การแทน π ด้วย 180° อาจต้องคิดเลขเยอะ

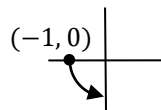
ในกรณีนี้ เรานิยมแบ่งมุมเป็น $n\pi \pm \theta$ แล้วเริ่มต้นเดินจาก $n\pi$ แล้วต่อด้วย $\pm\theta$

ตัวอย่าง จงหา $P\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

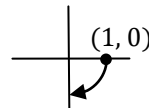
วิธีทำ จะใช้วิธีแทน π ด้วย 180° ก็ได้ จะได้ $\frac{3\pi}{2} = \frac{3 \times 180}{2} = 270^\circ$



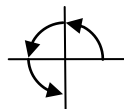
หรือจะมองว่า $\frac{3\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2} = (-1, 0) + 90^\circ$



หรือจะมองว่า $\frac{3\pi}{2} = 2\pi - \frac{\pi}{2} = (1, 0) - 90^\circ$



จะมองว่า $\frac{3\pi}{2}$ คือ $\frac{\pi}{2}$ สามครั้งก็ได้



ไม่ว่าจะมองแบบไหน ก็จะได้ $P\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1)$

#

กระบวนการดังกล่าว ควรทำให้คล่อง ขนาดที่นี้กรูปวงกลม + จุดหยุด ในใจได้ โดยที่ไม่ต้องวาดรูป

เช่น $P\left(\frac{4\pi}{3}\right) = P\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = (-1, 0) + 60^\circ = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$$P\left(\frac{17\pi}{6}\right) = P\left(3\pi - \frac{\pi}{6}\right) = (-1, 0) - 30^\circ = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$P\left(-\frac{2009\pi}{4}\right) = P\left(-502\pi - \frac{\pi}{4}\right) = (1, 0) - 45^\circ = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาพิกัดต่อไปนี้

1. $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2. $P(\pi)$

3. $P(3\pi)$

4. $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$

5. $P\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$

6. $P\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7. $P\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$

8. $P\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

9. $P\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$

10. $P\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

11. $P\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$

12. $P\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

13. $P\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

14. $P\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$

15. $P\left(\frac{103\pi}{2}\right)$

16. $P\left(-\frac{55\pi}{3}\right)$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ คือ ฟังก์ชันที่มี $\sin$, $\cos$, $\tan$, $\cot$, cosec , $\sec$ อยู่ในสมการฟังก์ชัน
สมัยก่อน เราได้เรียนวิธีหา $\sin \theta$ กับ $\cos \theta$ จากสามเหลี่ยมมุมฉาก แต่วิธีนี้จะมีข้อจำกัดนิดหน่อย
เพราะมุมในสามเหลี่ยมมุมฉากจะเกิน 90° ไม่ได้ เป็นมุมติดลบก็ไม่ได้

ในเรื่องนี้ จะมีวิธีหา $\sin \theta$ กับ $\cos \theta$ อีกวิธี โดย

$\sin \theta$ จะหาจาก “พิกัด y ” ของ $P(\theta)$

$\cos \theta$ จะหาจาก “พิกัด x ” ของ $P(\theta)$

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{ดังนั้น } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ P(-\pi) = (-1, 0) & \text{ดังนั้น } \sin(-\pi) = 0 \text{ และ } \cos(-\pi) = -1 \\ P\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) & \text{ดังนั้น } \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2} \text{ และ } \cos \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ P\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{ดังนั้น } \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ และ } \cos \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

เนื่องจาก $P(\theta)$ เป็นพิกัดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนั้น พิกัด x และ พิกัด y ของ $P(\theta)$ จะอยู่ระหว่าง -1 และ 1 เสมอ
ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $-1 \leq \sin \theta \leq 1$ และ $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ เสมอ

เมื่อได้ $\sin$ กับ $\cos$ เราจะหาฟังก์ชันตรีโกณมิติที่เหลืออื่นๆ ได้ ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\tan \theta} \\ \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} & \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \text{เช่น } P\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{ดังนั้น } \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{\sqrt{3}} & \sec \frac{2\pi}{3} = -\frac{2}{1} = -2 \\ & \tan \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}/2}{-1/2} = -\sqrt{3} & \cot \frac{2\pi}{3} = \frac{-1/2}{\sqrt{3}/2} = -\frac{1}{\sqrt{3}} & \text{เป็นต้น} \end{array}$$

หมายเหตุ: $\cot \theta$ กับ $\operatorname{cosec} \theta$ จะหาค่าไม่ได้ เมื่อ $\sin \theta = 0$

$\tan \theta$ กับ $\sec \theta$ จะหาค่าไม่ได้ เมื่อ $\cos \theta = 0$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin \frac{\pi}{2} =$

2. $\cos(-\pi) =$

3. $\tan \frac{\pi}{3} =$

4. $\sec \left(-\frac{\pi}{4}\right) =$

5. $\operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} =$

6. $\cot \frac{4\pi}{3} =$

7. $\cos \frac{2\pi}{3} =$

8. $\operatorname{cosec}^2 \left(-\frac{5\pi}{2}\right) =$

9. $\sin \frac{11\pi}{6} =$

10. $\sec^2 \frac{7\pi}{6} =$

11. $\tan \frac{3\pi}{2} =$

12. $\cot^2 \left(-\frac{34\pi}{3}\right) =$

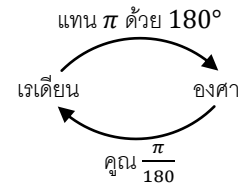
การวัดมุมในหน่วยองศา

ปกติ หน่วยวัดมุมหลักที่ใช้กันในเรื่องนี้ คือหน่วย เรเดียน

อย่างไรก็ตาม เราสามารถแปลงมุมระหว่างหน่วย เรเดียน และ องศา ดังนี้

แปลงเรเดียน เป็นองศา $\rightarrow$ แทน π ด้วย 180°

แปลงองศา เป็นเรเดียน $\rightarrow$ คูณด้วย $\frac{\pi}{180}$



เช่น $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน $= \frac{2 \times 180}{3} = 120^\circ$

$\frac{16\pi}{9}$ เรเดียน $= \frac{16 \times 180}{9} = 320^\circ$

$225^\circ = \frac{225\pi}{180} = \frac{5\pi}{4}$ เรเดียน

$50^\circ = \frac{50\pi}{180} = \frac{5\pi}{18}$ เรเดียน

นอกจากนี้ ในการวัดมุมแบบองศา ยังซอย 1 องศา เป็นหน่วยที่ย่อยเล็กลงไปได้อีก ดังนี้

1° (องศา) $= 60'$ (ลิปดา)

$1'$ (ลิปดา) $= 60''$ (ฟิลิปดา)

หมายเหตุ: ความสัมพันธ์ของ องศา ลิปดา ฟิลิปดา จะคล้ายๆกับ ชั่วโมง นาที วินาที

เช่น 1.5 ชั่วโมง $= 1$ ชั่วโมง 30 นาที

1.5 องศา $= 1$ องศา 30 ลิปดา เป็นต้น

แบบฝึกหัด

1. จงแปลงมุมต่อไปนี้ ให้มีหน่วยเป็นองศา

1. $\frac{7\pi}{3}$

2. $\frac{4\pi}{5}$

3. 101π

4. $-\frac{10\pi}{4}$

2. จงแปลงมุมต่อไปนี้ ให้มีหน่วยเป็นเรเดียน

1. 150°

2. 180°

3. 40°

4. -2700°

3. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin 150^\circ$

2. $\cos(-150^\circ)$

3. $\tan 300^\circ$

4. $\operatorname{cosec}(-2700^\circ)$

การแปลงมุมเป็นรูปอย่างง่าย

ในเรื่องนี้ เราจะเรียนรู้วิธีแปลงฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมยุ่งๆ ให้เป็นมุมที่ง่ายขึ้น
แต่ก่อนอื่น ต้องรู้วิธีหา “เครื่องหมาย” ของฟังก์ชันตรีโกณมิติในจุดภาคต่างๆ ก่อน ดังนี้

$\sin, \operatorname{cosec}$	$\cos, \sec$	$\tan, \cot$
+ + — —	— + — +	— + + —

เรามักนิยมใช้แผนภาพ $\frac{\sin}{\tan} \mid \frac{\text{all}}{\cos}$ เพื่อช่วยจำว่าฟังก์ชันไหนเป็นบวกในจุดภาคไหน
โอ ซานตาคลอส

ตัวอย่าง ถ้า $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta > 0$ แล้ว จงหาว่า θ อยู่ในจุดภาคใด

วิธีทำ $\sin \theta < 0$ แสดงว่า θ อยู่ในจุดภาคที่ 3 หรือ 4

$\cos \theta > 0$ แสดงว่า θ อยู่ในจุดภาคที่ 1 หรือ 4

ดังนั้น θ ต้องอยู่ในจุดภาคที่ 4 จึงจะทำให้ $\sin \theta < 0$ และ $\cos \theta > 0$ จริงทั้งสองเงื่อนไข

#

ตัวอย่าง ถ้า $\tan^2 \theta = \frac{1}{5}$ และ θ เป็นมุมในจุดภาคที่ 2 แล้ว จงหาค่า $\cot \theta$

วิธีทำ ถอดรูททั้งสองข้าง จะได้ $\tan \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$

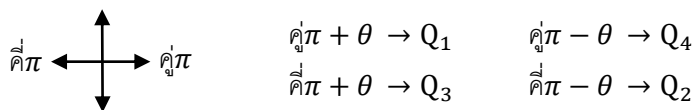
แต่เนื่องจาก θ เป็นมุมในจุดภาคที่ 2 ดังนั้น $\tan \theta$ ต้องเป็นลบ ดังนั้น $\tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

จะได้ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = -\frac{\sqrt{5}}{1} = -\sqrt{5}$

#

ในเรื่องนี้ เราจะแปลงมุม 2 แบบ คือ “แกน $X \pm \theta$ ” กับ “แกน $Y \pm \theta$ ”

มุมที่อยู่ในรูป “แกน $X \pm \theta$ ” ได้แก่ มุมที่อยู่ในรูป $n\pi \pm \theta$ มุมพวกนี้ จะสามารถแปลงเป็น “ฟังก์ชันเดิมของมุม θ ” ได้
แต่ต้องใส่เครื่องหมายบวกหรือลบ ตามจุดภาคที่มุมนั้นตกอยู่



หมายเหตุ: เวลาคิดจุดภาค จะสมมติให้ θ เป็นมุมน้อยๆ แต่ผลลัพธ์สุดท้าย จะเป็นจริงสำหรับมุม θ ใหญ่ๆ ด้วย

$$\text{เช่น } \sin(3\pi + \theta) = \sin Q_3 = -\sin \theta$$

$$\cos(2\pi + \theta) = \cos Q_1 = \cos \theta$$

$$\tan(5\pi - \theta) = \tan Q_2 = -\tan \theta$$

$$\cot(\theta - \pi) = \cot(-\pi + \theta) = \cot Q_3 = \cot \theta$$

$$\sec(-2\pi - \theta) = \sec Q_4 = \sec \theta$$

$$\operatorname{cosec}(10\pi - \theta) = \operatorname{cosec} Q_4 = -\operatorname{cosec} \theta$$

$$\sin(-\theta) = \sin(0 - \theta) = \sin Q_4 = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos(0 - \theta) = \cos Q_4 = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = \tan(0 - \theta) = \tan Q_4 = -\tan \theta$$

} สามอันนี้ควรจำ

$$\begin{aligned}\cot\left(\frac{9\pi}{5}\right) &= \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{5}\right) = \cot Q_4 = -\cot\frac{\pi}{5} \\ \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) &= \cos\left(3\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos Q_2 = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{cosec}\left(-\frac{13\pi}{6}\right) &= \operatorname{cosec}\left(-2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec} Q_4 = -\operatorname{cosec}\frac{\pi}{6} = -2\end{aligned}$$

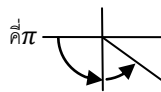
มุมที่อยู่ในรูป “แกน $Y \pm \theta$ ” ได้แก่ มุมที่อยู่ในรูป $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ มุมพวกนี้ จะสามารถแปลงเป็น “โคฟังก์ชันของมุม θ ” ได้ โดยต้องใส่เครื่องหมายบวกหรือลบ ตามจุดภาคที่มุมนั้นตกอยู่

คราวนี้ จะดูยากขึ้นนิดหน่อย ว่า $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ อยู่ใน จุดภาคไหน

วิธีการ คือ ให้แตก $\frac{n\pi}{2} \pm \theta$ เป็น $k\pi \pm \frac{\pi}{2} \pm \theta$ แล้วค่อยๆ เดินทีละส่วน

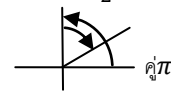
$$\begin{aligned}\sin &\leftrightarrow \cos \\ \tan &\leftrightarrow \cot \\ \sec &\leftrightarrow \operatorname{cosec}\end{aligned}$$

เช่น $\sin\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} + \theta\right)$



$$\begin{aligned}&= \sin Q_4 \\ &= -\cos \theta\end{aligned}$$

$$\cot\left(-\frac{7\pi}{2} - \theta\right) = \cot\left(-4\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

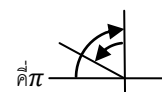


$$\begin{aligned}&= \cot Q_1 \\ &= \tan \theta\end{aligned}$$

$$\sec\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right) =$$

$$\begin{aligned}&= \sec Q_3 \\ &= -\operatorname{cosec} \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(-\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \\ &= \cos\left(-\pi - \frac{\pi}{2} + \theta\right)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}&= \cos Q_2 \\ &= -\sin \theta\end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sin \theta = 0.1$ จงหาค่าของ $\sin(4\pi - \theta)$

วิธีทำ $\sin(4\pi - \theta) = \sin Q_4$

$$\begin{aligned}&= -\sin \theta \\ &= -0.1\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\cos \theta = 0.5$ จงหาค่าของ $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right)$

วิธีทำ $\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \theta\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin Q_1$

$$\begin{aligned}&= \cos \theta \\ &= 0.5\end{aligned}$$

#

ในบางกรณี เราอาจเลือกได้ว่าจะใช้สูตร “แกน $X \pm \theta$ ” หรือ “แกน $Y \pm \theta$ ”

ปกติแล้ว เราจะนิยมใช้สูตร “แกน $X \pm \theta$ ” มากกว่า เพราะคิดง่ายกว่า

เราจะใช้สูตร “แกน $Y \pm \theta$ ” ก็เมื่อเราต้องการเปลี่ยน ให้เป็นโคฟังก์ชัน

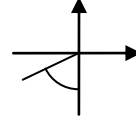
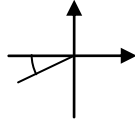
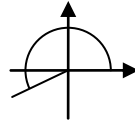
ตัวอย่าง จงแปลง $\sin 190^\circ$ ให้เป็นมุมในจุดภาคที่ 1

วิธีทำ ก่อนอื่น วาดมุม 190° ก่อน จะได้ดังรูป

ดังนั้น $\sin 190^\circ = \sin Q_3 \rightarrow$ เป็นลบ

ข้อนี้ จะใช้สูตร “แกน $X \pm \theta$ ” หรือ “แกน $Y \pm \theta$ ” ก็ได้

เนื่องจาก เราอาจมองว่า $190^\circ = \text{แกน } X + 10^\circ$ ก็ได้ หรือจะมองว่า $190^\circ = \text{แกน } Y - 80^\circ$ ก็ได้



ดังนั้น $\sin 190^\circ = \text{แกน } X + 10^\circ = -\sin 10^\circ$

หรือ $\sin 190^\circ = \text{แกน } Y - 80^\circ = -\cos 80^\circ$

#

แบบฝึกหัด

1. จงแปลงให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1. $\sin(\pi - \theta)$

2. $\cos(\pi - \theta)$

3. $\tan(\pi + \theta)$

4. $\cos(\pi + \theta)$

5. $\sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

6. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

7. $\cot\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

8. $\operatorname{cosec}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$

9. $\sec\left(\frac{7\pi}{2} - \theta\right)$

10. $\tan(-\theta)$

11. $\sec(-\theta)$

12. $\operatorname{cosec}\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$

13. $\tan(\theta - \frac{3\pi}{2})$

14. $\cot(\theta - \pi)$

15. $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

16. $\sin(\theta - \pi)$

17. $\operatorname{cosec}(2\pi - \theta)$

18. $\cos(2\pi - \theta)$

19. $\tan(-5\pi + \theta)$

20. $\sec(-\frac{5}{2}\pi - \theta)$

21. $\sin(-72\pi - \theta)$

22. $\cot(-\frac{73}{2}\pi + \theta)$

23. $\sin 100^\circ$

24. $\cos 220^\circ$

25. $\tan(-15^\circ)$

26. $\sec 170^\circ$

27. $\operatorname{cosec} 305^\circ$

28. $\cot 3710^\circ$

2. จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin 40^\circ - \sin 140^\circ$

2. $\cos 80^\circ + \cos 100^\circ$

3. จงหาค่าของ $\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ + \cos^3 60^\circ + \dots + \cos^3 160^\circ$

ตาราง

ตอน ม.4 จะมีตารางสำหรับเปิด $\sin$, $\cos$, $\tan$ ของมุมต่างๆ ใน ม.5 ก็จะมีตารางคล้ายๆกัน

แต่คราวนี้ ค่ามุมที่เปิดได้ จะซอยย่อยลงไปในระดับลิปดา และจะมีมุมในหน่วยเรเดียนให้เปิดด้วย (แทน $\pi = 3.1416$)

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec			
0° 00'	0.0000	0.0000	1.0000	0.0000	-	1.0000	-	1.5708	90°	00'
10	0.0029	0.0029	1.0000	0.0029	343.7737	1.0000	343.7752	1.5853		50
20	0.0058	0.0058	1.0000	0.0058	171.8854	1.0000	171.8883	1.5824		40
30	0.0087	0.0087	1.0000	0.0087	114.5887	1.0000	114.5930	1.5795		30
40	0.0116	0.0116	0.9999	0.0116	85.9398	1.0001	85.9456	1.5766		20
50	0.0145	0.0145	0.9999	0.0145	68.7501	1.0001	68.7574	1.5737		10
1° 00'	0.0175	0.0175	0.9998	0.0175	57.2900	1.0002	57.2987	1.5533	89°	00'
10	0.0204	0.0204	0.9998	0.0204	49.1039	1.0002	49.1141	1.5679		50
20	0.0233	0.0233	0.9997	0.0233	42.9641	1.0003	42.9757	1.5650		40
30	0.0262	0.0262	0.9997	0.0262	38.1885	1.0003	38.2016	1.5621		30
40	0.0291	0.0291	0.9996	0.0291	34.3678	1.0004	34.3823	1.5592		20
50	0.0320	0.0320	0.9995	0.0320	31.2416	1.0005	31.2576	1.5563		10
2° 00'	0.0349	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	1.5359	88°	00'
10	0.0378	0.0378	0.9993	0.0378	26.4316	1.0007	26.4505	1.5504		50
20	0.0407	0.0407	0.9992	0.0407	24.5418	1.0008	24.5621	1.5475		40
30	0.0436	0.0436	0.9990	0.0437	22.9038	1.0010	22.9256	1.5446		30
40	0.0465	0.0465	0.9989	0.0466	21.4704	1.0011	21.4937	1.5417		20
50	0.0495	0.0494	0.9988	0.0495	20.2056	1.0012	20.2303	1.5388		10
3° 00'	0.0524	0.0523	0.9986	0.0524	19.0811	1.0014	19.1073	1.5184	87°	00'
10	0.0553	0.0552	0.9985	0.0553	18.0750	1.0015	18.1026	1.5330		50
20	0.0582	0.0581	0.9983	0.0582	17.1693	1.0017	17.1984	1.5301		40
30	0.0611	0.0610	0.9981	0.0612	16.3499	1.0019	16.3804	1.5272		30
40	0.0640	0.0640	0.9980	0.0641	15.6048	1.0021	15.6368	1.5243		20
50	0.0669	0.0669	0.9978	0.0670	14.9244	1.0022	14.9579	1.5213		10
4° 00'	0.0698	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	1.5010	86°	00'
10	0.0727	0.0727	0.9974	0.0729	13.7267	1.0027	13.7631	1.5155		50
20	0.0756	0.0756	0.9971	0.0758	13.1969	1.0029	13.2347	1.5126		40
30	0.0785	0.0785	0.9969	0.0787	12.7062	1.0031	12.7455	1.5097		30
40	0.0814	0.0814	0.9967	0.0816	12.2505	1.0033	12.2913	1.5068		20
50	0.0844	0.0843	0.9964	0.0846	11.8262	1.0036	11.8684	1.5039		10
5° 00'	0.0873	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	1.4835	85°	00'
10	0.0902	0.0901	0.9959	0.0904	11.0594	1.0041	11.1045	1.4981		50
20	0.0931	0.0929	0.9957	0.0934	10.7119	1.0043	10.7585	1.4952		40
30	0.0960	0.0958	0.9954	0.0963	10.3854	1.0046	10.4334	1.4923		30
40	0.0989	0.0987	0.9951	0.0992	10.0780	1.0049	10.1275	1.4893		20
50	0.1018	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	1.0052	9.8391	1.4864		10
6° 00'	0.1047	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	1.4661	84°	00'
10	0.1076	0.1074	0.9942	0.1080	9.2553	1.0058	9.3092	1.4806		50
20	0.1105	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	1.0061	9.0652	1.4777		40
30	0.1134	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	1.0065	8.8337	1.4748		30
40	0.1164	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	1.0068	8.6138	1.4719		20
50	0.1193	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	1.0072	8.4047	1.4690		10
7° 00'	0.1222	0.1219	0.9925	0.1228	8.1443	1.0075	8.2055	1.4486	83°	00'
10	0.1251	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	1.0079	8.0156	1.4632		50
20	0.1280	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	1.0082	7.8344	1.4603		40
30	0.1309	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	1.0086	7.6613	1.4573		30
40	0.1338	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	1.0090	7.4957	1.4544		20
50	0.1367	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	1.0094	7.3372	1.4515		10
8° 00'	0.1396	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	1.4312	82°	00'
10	0.1425	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	1.0102	7.0396	1.4457		50
20	0.1454	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	1.0107	6.8998	1.4428		40
30	0.1484	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	1.0111	6.7655	1.4399		30
40	0.1513	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	1.0116	6.6363	1.4370		20
50	0.1542	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	1.0120	6.5121	1.4341		10
9° 00'	0.1571	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	1.4137	81°	00'
10	0.1600	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	1.0129	6.2772	1.4283		50
20	0.1629	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	1.0134	6.1661	1.4254		40
30	0.1658	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	1.0139	6.0589	1.4224		30
40	0.1687	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	1.0144	5.9554	1.4195		20
50	0.1716	0.1708	0.9853	0.1733	5.7694	1.0149	5.8554	1.4166		10
10° 00'	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	1.3963	80°	00'
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees	

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec			
10° 00'	0.1745	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	1.3963	80° 00'	
10 10	0.1774	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	1.0160	5.6653	1.4108	50	
20	0.1804	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	1.0165	5.5749	1.4079	40	
30	0.1833	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	1.0170	5.4874	1.4050	30	
40	0.1862	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	1.0176	5.4026	1.4021	20	
50	0.1891	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	1.0181	5.3205	1.3992	10	
11° 00'	0.1920	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	1.3788	79° 00'	
10	0.1949	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	1.0193	5.1636	1.3934	50	
20	0.1978	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	1.0199	5.0886	1.3904	40	
30	0.2007	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	1.0205	5.0159	1.3875	30	
40	0.2036	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	1.0211	4.9452	1.3846	20	
50	0.2065	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	1.0217	4.8765	1.3817	10	
12° 00'	0.2094	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	1.3614	78° 00'	
10	0.2123	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	1.0230	4.7448	1.3759	50	
20	0.2153	0.2136	0.9769	0.2186	4.5736	1.0236	4.6817	1.3730	40	
30	0.2182	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	1.0243	4.6202	1.3701	30	
40	0.2211	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	1.0249	4.5604	1.3672	20	
50	0.2240	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	1.0256	4.5022	1.3643	10	
13° 00'	0.2269	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	1.3439	77° 00'	
10	0.2298	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	1.0270	4.3901	1.3584	50	
20	0.2327	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	1.0277	4.3362	1.3555	40	
30	0.2356	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	1.0284	4.2837	1.3526	30	
40	0.2385	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	1.0291	4.2324	1.3497	20	
50	0.2414	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	1.0299	4.1824	1.3468	10	
14° 00'	0.2443	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	1.3265	76° 00'	
10	0.2473	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	1.0314	4.0859	1.3410	50	
20	0.2502	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	1.0321	4.0394	1.3381	40	
30	0.2531	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	1.0329	3.9939	1.3352	30	
40	0.2560	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	1.0337	3.9495	1.3323	20	
50	0.2589	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	1.0345	3.9061	1.3294	10	
15° 00'	0.2618	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	1.3090	75° 00'	
10	0.2647	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	1.0361	3.8222	1.3235	50	
20	0.2676	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	1.0369	3.7817	1.3206	40	
30	0.2705	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	1.0377	3.7420	1.3177	30	
40	0.2734	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	1.0386	3.7032	1.3148	20	
50	0.2763	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	1.0394	3.6652	1.3119	10	
16° 00'	0.2793	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	1.2915	74° 00'	
10	0.2822	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	1.0412	3.5915	1.3061	50	
20	0.2851	0.2812	0.9596	0.2931	3.4124	1.0421	3.5559	1.3032	40	
30	0.2880	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	1.0429	3.5209	1.3003	30	
40	0.2909	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	1.0439	3.4867	1.2974	20	
50	0.2938	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	1.0448	3.4532	1.2945	10	
17° 00'	0.2967	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	1.2741	73° 00'	
10	0.2996	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	1.0466	3.3881	1.2886	50	
20	0.3025	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	1.0476	3.3565	1.2857	40	
30	0.3054	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	1.0485	3.3255	1.2828	30	
40	0.3083	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	1.0495	3.2951	1.2799	20	
50	0.3113	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	1.0505	3.2653	1.2770	10	
18° 00'	0.3142	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	1.2566	72° 00'	
10	0.3171	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	1.0525	3.2074	1.2712	50	
20	0.3200	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	1.0535	3.1792	1.2683	40	
30	0.3229	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	1.0545	3.1515	1.2654	30	
40	0.3258	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	1.0555	3.1244	1.2625	20	
50	0.3287	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	1.0566	3.0977	1.2595	10	
19° 00'	0.3316	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	1.2392	71° 00'	
10	0.3345	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	1.0587	3.0458	1.2537	50	
20	0.3374	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	1.0598	3.0206	1.2508	40	
30	0.3403	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	1.0608	2.9957	1.2479	30	
40	0.3432	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	1.0619	2.9713	1.2450	20	
50	0.3462	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	1.0631	2.9474	1.2421	10	
20° 00'	0.3491	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	1.2217	70° 00'	
10	0.3520	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	1.0653	2.9006	1.2363	50	
20	0.3549	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	1.0665	2.8779	1.2334	40	
30	0.3578	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	1.0676	2.8555	1.2305	30	
40	0.3607	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	1.0688	2.8334	1.2275	20	
50	0.3636	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	1.0700	2.8117	1.2246	10	
21° 00'	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	1.2043	69° 00'	
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees	

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec		
21° 00'	0.3665	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	1.2043	69° 00'
10	0.3694	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	1.0723	2.7695	1.2188	50
20	0.3723	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	1.0736	2.7488	1.2159	40
30	0.3752	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	1.0748	2.7285	1.2130	30
40	0.3782	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	1.0760	2.7085	1.2101	20
50	0.3811	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	1.0773	2.6888	1.2072	10
22° 00'	0.3840	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	1.1868	68° 00'
10	0.3869	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	1.0798	2.6504	1.2014	50
20	0.3898	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	1.0811	2.6316	1.1985	40
30	0.3927	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	1.0824	2.6131	1.1956	30
40	0.3956	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	1.0837	2.5949	1.1926	20
50	0.3985	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	1.0850	2.5770	1.1897	10
23° 00'	0.4014	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	1.1694	67° 00'
10	0.4043	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	1.0877	2.5419	1.1839	50
20	0.4072	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	1.0891	2.5247	1.1810	40
30	0.4102	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	1.0904	2.5078	1.1781	30
40	0.4131	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	1.0918	2.4912	1.1752	20
50	0.4160	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	1.0932	2.4748	1.1723	10
24° 00'	0.4189	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	1.1519	66° 00'
10	0.4218	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	1.0961	2.4426	1.1665	50
20	0.4247	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	1.0975	2.4269	1.1636	40
30	0.4276	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	1.0989	2.4114	1.1606	30
40	0.4305	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	1.1004	2.3961	1.1577	20
50	0.4334	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	1.1019	2.3811	1.1548	10
25° 00'	0.4363	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	1.1345	65° 00'
10	0.4392	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	1.1049	2.3515	1.1490	50
20	0.4422	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	1.1064	2.3371	1.1461	40
30	0.4451	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	1.1079	2.3228	1.1432	30
40	0.4480	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	1.1095	2.3088	1.1403	20
50	0.4509	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	1.1110	2.2949	1.1374	10
26° 00'	0.4538	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	1.1170	64° 00'
10	0.4567	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	1.1142	2.2677	1.1316	50
20	0.4596	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	1.1158	2.2543	1.1286	40
30	0.4625	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	1.1174	2.2412	1.1257	30
40	0.4654	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	1.1190	2.2282	1.1228	20
50	0.4683	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	1.1207	2.2153	1.1199	10
27° 00'	0.4712	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	1.0996	63° 00'
10	0.4741	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	1.1240	2.1902	1.1141	50
20	0.4771	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	1.1257	2.1779	1.1112	40
30	0.4800	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	1.1274	2.1657	1.1083	30
40	0.4829	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	1.1291	2.1537	1.1054	20
50	0.4858	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	1.1308	2.1418	1.1025	10
28° 00'	0.4887	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	1.0821	62° 00'
10	0.4916	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	1.1343	2.1185	1.0966	50
20	0.4945	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	1.1361	2.1070	1.0937	40
30	0.4974	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	1.1379	2.0957	1.0908	30
40	0.5003	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	1.1397	2.0846	1.0879	20
50	0.5032	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	1.1415	2.0736	1.0850	10
29° 00'	0.5061	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	1.0647	61° 00'
10	0.5091	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	1.1452	2.0519	1.0792	50
20	0.5120	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	1.1471	2.0413	1.0763	40
30	0.5149	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	1.1490	2.0308	1.0734	30
40	0.5178	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	1.1509	2.0204	1.0705	20
50	0.5207	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	1.1528	2.0101	1.0676	10
30° 00'	0.5236	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	1.0472	60° 00'
10	0.5265	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	1.1566	1.9900	1.0617	50
20	0.5294	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	1.1586	1.9801	1.0588	40
30	0.5323	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	1.1606	1.9703	1.0559	30
40	0.5352	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	1.1626	1.9606	1.0530	20
50	0.5381	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	1.1646	1.9511	1.0501	10
31° 00'	0.5411	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	1.0297	59° 00'
10	0.5440	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	1.1687	1.9323	1.0443	50
20	0.5469	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	1.1707	1.9230	1.0414	40
30	0.5498	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	1.1728	1.9139	1.0385	30
40	0.5527	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	1.1749	1.9048	1.0356	20
50	0.5556	0.5275	0.8496	0.6208	1.6107	1.1770	1.8959	1.0327	10
32° 00'	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	1.0123	58° 00'
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec		
32° 00'	0.5585	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	1.0123	58° 00'
10	0.5614	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	1.1813	1.8783	1.0268	50
20	0.5643	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	1.1835	1.8697	1.0239	40
30	0.5672	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	1.1857	1.8612	1.0210	30
40	0.5701	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	1.1879	1.8527	1.0181	20
50	0.5730	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	1.1901	1.8443	1.0152	10
33° 00'	0.5760	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	0.9948	57° 00'
10	0.5789	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	1.1946	1.8279	1.0094	50
20	0.5818	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	1.1969	1.8198	1.0065	40
30	0.5847	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	1.1992	1.8118	1.0036	30
40	0.5876	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	1.2015	1.8039	1.0007	20
50	0.5905	0.5568	0.8307	0.6703	1.4919	1.2039	1.7960	0.9977	10
34° 00'	0.5934	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	0.9774	56° 00'
10	0.5963	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	1.2086	1.7806	0.9919	50
20	0.5992	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	1.2110	1.7730	0.9890	40
30	0.6021	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	1.2134	1.7655	0.9861	30
40	0.6050	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	1.2158	1.7581	0.9832	20
50	0.6080	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	1.2183	1.7507	0.9803	10
35° 00'	0.6109	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	0.9599	55° 00'
10	0.6138	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	1.2233	1.7362	0.9745	50
20	0.6167	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	1.2258	1.7291	0.9716	40
30	0.6196	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	1.2283	1.7221	0.9687	30
40	0.6225	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	1.2309	1.7151	0.9657	20
50	0.6254	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	1.2335	1.7081	0.9628	10
36° 00'	0.6283	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	0.9425	54° 00'
10	0.6312	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	1.2387	1.6945	0.9570	50
20	0.6341	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	1.2413	1.6878	0.9541	40
30	0.6370	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	1.2440	1.6812	0.9512	30
40	0.6400	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	1.2467	1.6746	0.9483	20
50	0.6429	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	1.2494	1.6681	0.9454	10
37° 00'	0.6458	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	0.9250	53° 00'
10	0.6487	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	1.2549	1.6553	0.9396	50
20	0.6516	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	1.2577	1.6489	0.9367	40
30	0.6545	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	1.2605	1.6427	0.9338	30
40	0.6574	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	1.2633	1.6365	0.9308	20
50	0.6603	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	1.2661	1.6303	0.9279	10
38° 00'	0.6632	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	0.9076	52° 00'
10	0.6661	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	1.2719	1.6183	0.9221	50
20	0.6690	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	1.2748	1.6123	0.9192	40
30	0.6720	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	1.2778	1.6064	0.9163	30
40	0.6749	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	1.2807	1.6005	0.9134	20
50	0.6778	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	1.2837	1.5948	0.9105	10
39° 00'	0.6807	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	0.8901	51° 00'
10	0.6836	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	1.2898	1.5833	0.9047	50
20	0.6865	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	1.2929	1.5777	0.9018	40
30	0.6894	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	1.2960	1.5721	0.8988	30
40	0.6923	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	1.2991	1.5666	0.8959	20
50	0.6952	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	1.3022	1.5611	0.8930	10
40° 00'	0.6981	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	0.8727	50° 00'
10	0.7010	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	1.3086	1.5504	0.8872	50
20	0.7039	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	1.3118	1.5450	0.8843	40
30	0.7069	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	1.3151	1.5398	0.8814	30
40	0.7098	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	1.3184	1.5345	0.8785	20
50	0.7127	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	1.3217	1.5294	0.8756	10
41° 00'	0.7156	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	0.8552	49° 00'
10	0.7185	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	1.3284	1.5192	0.8698	50
20	0.7214	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	1.3318	1.5141	0.8668	40
30	0.7243	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	1.3352	1.5092	0.8639	30
40	0.7272	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	1.3386	1.5042	0.8610	20
50	0.7301	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	1.3421	1.4993	0.8581	10
42° 00'	0.7330	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	0.8378	48° 00'
10	0.7359	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	1.3492	1.4897	0.8523	50
20	0.7389	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	1.3527	1.4849	0.8494	40
30	0.7418	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	1.3563	1.4802	0.8465	30
40	0.7447	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	1.3600	1.4755	0.8436	20
50	0.7476	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	1.3636	1.4709	0.8407	10
43° 00'	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	0.8203	47° 00'
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec		
43° 00'	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	0.8203	47° 00'
10	0.7534	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	1.3711	1.4617	0.8348	50
20	0.7563	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	1.3748	1.4572	0.8319	40
30	0.7592	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	1.3786	1.4527	0.8290	30
40	0.7621	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	1.3824	1.4483	0.8261	20
50	0.7650	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	1.3863	1.4439	0.8232	10
44° 00'	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	0.8029	46° 00'
10	0.7709	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	1.3941	1.4352	0.8174	50
20	0.7738	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	1.3980	1.4310	0.8145	40
30	0.7767	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	1.4020	1.4267	0.8116	30
40	0.7796	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	1.4061	1.4225	0.8087	20
50	0.7825	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	1.4101	1.4183	0.8058	10
45° 00'	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	0.7854	45° 00'
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees

จะเห็นว่าช่องซ้ายสุดของตาราง มีมุมให้เปิดได้ตั้งแต่ 45°

นั่นเป็นเพราะมุมที่เกิน 45° เราจะเปิดจาก “โคฟังก์ชัน” ของมุมที่น้อยกว่า 45° ได้เสมอ

เช่น ถ้าต้องการหา $\cos 56^\circ$ เราจะหาได้จาก $\sin 34^\circ$

ถ้าต้องการหา $\tan 74^\circ 40'$ เราจะหาได้จาก $\cot 15^\circ 20'$

ถ้าต้องการหา $\sec 88^\circ 50'$ เราจะหาได้จาก $\csc 1^\circ 10'$

เพื่อความสะดวก จึงมีคอลัมน์ทางขวา ที่ไล่มุมตั้งแต่ 45° ขึ้นไปถึง 90° ซึ่งจะใช้คู่กับ “หัวตาราง” อีกอันทางด้านล่าง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 43^\circ 20' + \cot 46^\circ 10'$

วิธีทำ มุม $43^\circ 20'$ ยังน้อยกว่า 45° จะเปิดด้วยคอลัมน์ทางซ้ายตามปกติได้

แต่มุม $46^\circ 10'$ เกิน 45° ต้องเปิดด้วยคอลัมน์ทางขวา + หัวตารางด้านล่าง ดังนี้

Degrees	Radians	sin	cos	tan	cot	sec	cosec		
43° 00'	0.7505	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	0.8203	47° 00'
10	0.7534	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	1.3711	1.4617	0.8348	50
20	0.7563	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	1.3748	1.4572	0.8319	40
30	0.7592	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	1.3786	1.4527	0.8290	30
40	0.7621	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	1.3824	1.4483	0.8261	20
50	0.7650	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	1.3863	1.4439	0.8232	10
44° 00'	0.7679	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	0.8029	46° 00'
10	0.7709	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	1.3941	1.4352	0.8174	50
20	0.7738	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	1.3980	1.4310	0.8145	40
30	0.7767	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	1.4020	1.4267	0.8116	30
40	0.7796	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	1.4061	1.4225	0.8087	20
50	0.7825	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	1.4101	1.4183	0.8058	10
45° 00'	0.7854	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	0.7854	45° 00'
		cos	sin	cot	tan	cosec	sec	Radians	Degrees

$$\text{ดังนั้น } \cos 43^\circ 20' + \cot 46^\circ 10' = 0.7274 + 0.9601 = 1.6875$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin \frac{\pi}{5}$

วิธีทำ ข้อนี้นี้ จะแปลง $\frac{\pi}{5}$ เรเดียน ให้เป็นหน่วยองศา ก่อน แล้วค่อยเปิดตารางก็ได้ หรือจะเปิดจากหน่วยเรเดียนเลยก็ได้

$$\text{ถ้าแปลงเป็นหน่วยองศา จะได้ } \frac{\pi}{5} = \frac{180}{5} = 36^\circ \text{ ดังนั้น } \sin \frac{\pi}{5} = \sin 36^\circ = 0.5878$$

$$\text{หรือถ้าจะเปิดจากหน่วยเรเดียน ก็ให้แทน } \pi = 3.1416 \text{ จะได้ } \frac{\pi}{5} = \frac{3.1416}{5} = 0.6283 \text{ เรเดียน}$$

$$\text{เปิดจากคอลัมน์ Radians = 0.6283 จะได้ } \sin \frac{\pi}{5} = 0.5878$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 12^\circ 32'$

วิธีทำ จะเห็นว่า ไม่มี $12^\circ 32'$ ให้เปิดในตาราง เราจะใช้วิธีเปิดค่าใกล้เคียงมาหาบัญญัติไตรยางศ์

ค่าใกล้เคียง คือ $\cos 12^\circ 30' = 0.9763$ กับ $\cos 12^\circ 40' = 0.9757$

$$\begin{array}{ccc}
 \cos 12^\circ 30' & = & 0.9763 \\
 \text{เพิ่ม } 2' \swarrow & & \text{ลด } x \swarrow \\
 \cos 12^\circ 32' & = & 0.97___ \\
 \text{เพิ่ม } 10' \searrow & & \text{ลด } 0.0006 \searrow \\
 \cos 12^\circ 40' & = & 0.9757
 \end{array}$$

เอาการเพิ่ม - ลด ของทั้งสองฝั่ง (ระวังดีๆ ฝั่งซ้ายเพิ่ม แต่ฝั่งขวาลด) มาเข้าอัตราส่วน

$$\text{จะได้ } \frac{2}{10} = \frac{x}{0.0006} \quad \text{นั่นคือ } x = \frac{2}{10} \cdot 0.0006 = 0.00012$$

$$\text{จะได้ } \cos 12^\circ 32' \text{ คือ } 0.9763 \text{ มาลดลงไป } 0.00012 \text{ นั่นคือ } 0.9763 - 0.00012 = 0.97618 \quad \#$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 310^\circ 20'$

วิธีทำ ข้อนี้ มุมเกิน 90° จะเอาไปเปิดตารางทันทีไม่ได้ ต้องใช้ความรู้ในเรื่องที่แล้วแปลงให้เป็นมุมในจุดภาคที่ 1 ก่อน

$$\tan 310^\circ 20' = \tan(360^\circ - 49^\circ 40') = -\tan 49^\circ 40' \text{ แล้วค่อยเอามุม } 49^\circ 40' \text{ ไปเปิดตาราง}$$

$$\text{เนื่องจาก } \tan 49^\circ 40' = 1.1778 \text{ ดังนั้น } \tan 310^\circ 20' = -\tan 49^\circ 40' = -1.1778 \quad \#$$

ตัวอย่าง 3 จงหาค่าของ $\sin 3$

วิธีทำ ถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่าไม่มี $^\circ$ อยู่หลัง 3 ดังนั้น ข้อนี้คือ 3 เรเดียน ไม่ได้ 3 องศา

$$\text{เนื่องจาก } \frac{\pi}{2} = \frac{3.1416}{2} = 1.5708 \text{ ดังนั้น มุม } 3 \text{ เรเดียน มากกว่า } \frac{\pi}{2} \text{ ไม่ได้อยู่ในจุดภาคที่ 1 เปิดตารางยังไม่ได้}$$

$$\text{ทำให้ให้อยู่ในจุดภาคที่ 1 ได้เป็น } \sin 3 = \sin(3.1416 - 0.1416) = \sin(\pi - 0.1416) = \sin 0.1416$$

$$\begin{array}{ccc}
 \sin 0.1396 & = & 0.1392 \\
 \text{เพิ่ม } 0.0020 \swarrow & & \text{เพิ่ม } x \swarrow \\
 \sin 0.1416 & = & 0.1___ \\
 \text{เพิ่ม } 0.0029 \searrow & & \text{เพิ่ม } 0.0029 \searrow \\
 \sin 0.1425 & = & 0.1421
 \end{array}$$

$$\text{เอาการเพิ่มของทั้งสองฝั่งมาเข้าอัตราส่วน จะได้ } \frac{0.0020}{0.0029} = \frac{x}{0.0029} \quad \text{นั่นคือ } x = 0.0020$$

$$\text{จะได้ } \sin 0.1416 = 0.1392 + 0.0020 = 0.1412$$

$$\text{ดังนั้น } \sin 3 = \sin(\pi - 0.1416) = \sin 0.1416 = 0.1412 \quad \#$$

แบบฝึกหัด

1. จงใช้ตาราง เพื่อหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติต่อไปนี้

1. $\sin 10^\circ 50' =$

2. $\cos 62^\circ 20' =$

3. $\tan 31^\circ =$

4. $\cot 84^\circ 50' =$

5. $\operatorname{cosec} 21^\circ 05' =$

6. $\sec 48^\circ 22' =$

7. $\sin -21^\circ 50' =$

8. $\cos 139^\circ 40' =$

9. $\tan 200^\circ 20' =$

10. $\sec 300^\circ 50' =$

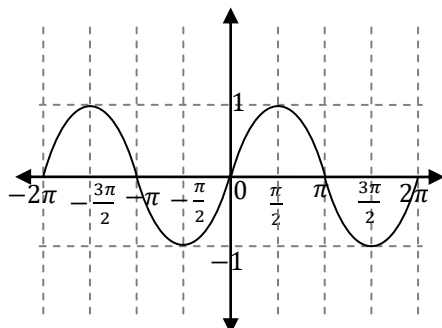
11. $\cot 179^\circ 10' =$

12. $\operatorname{cosec} 400^\circ 30' =$

กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ

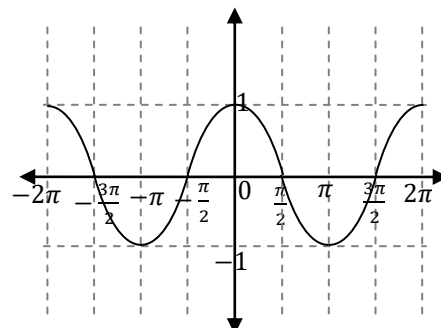
เรื่องนี้ ต้องจำรูปกราฟของฟังก์ชันตรีโกณทั้ง 6 ให้ได้ ดังนี้

$$y = \sin x$$



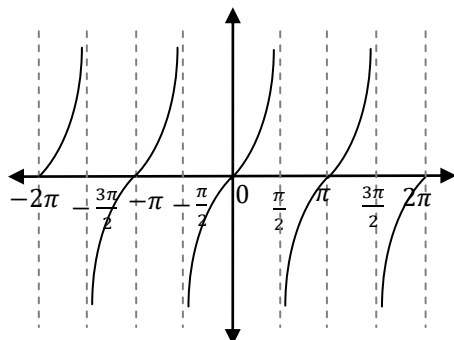
$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} \quad \text{เรนจ์} = [-1, 1]$$

$$y = \cos x$$



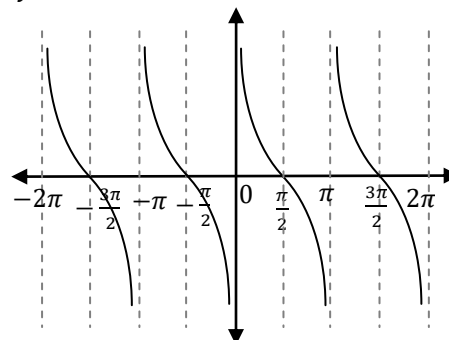
$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} \quad \text{เรนจ์} = [-1, 1]$$

$$y = \tan x$$



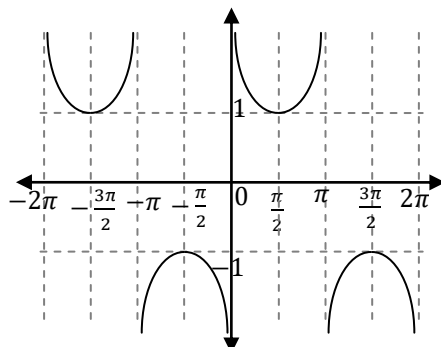
$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \quad \text{เรนจ์} = \mathbb{R}$$

$$y = \cot x$$



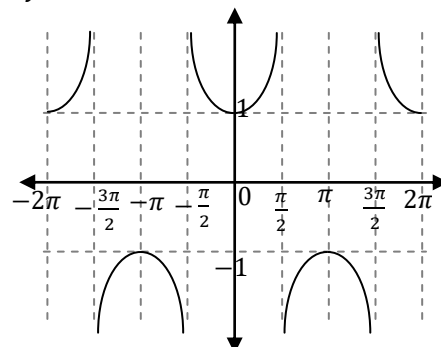
$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} - \{n\pi\} \quad \text{เรนจ์} = \mathbb{R}$$

$$y = \operatorname{cosec} x$$



$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} - \{n\pi\} \\ \text{เรนจ์} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

$$y = \sec x$$



$$\text{โดเมน} = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \\ \text{เรนจ์} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะนำกราฟมาดัดแปลง โดยอาจจะมีตัวเลขอื่น คูณหรือบวกเพิ่มเข้าไป

วิธีวาดกราฟแบบดัดแปลง ให้เราแทนค่า หาจุดที่กราฟผ่านหลายๆจุด

เมื่อได้แนวโน้มของกราฟแล้ว จึงวาดกราฟ โดยอิงกับรูปกราฟพื้นฐานทั้ง 6 แบบ

จะเห็นว่า กราฟ $\sin$ กับ $\cos$ จะมีค่า y ถูกจำกัดในช่วงแคบๆ ต่างจากกราฟอื่นที่ค่า y จะมากหรือน้อยขนาดไหนก็ได้ ดังนั้น โจทย์ของกราฟ $\sin$ กับ $\cos$ มักจะให้เรหาค่า y มากสุด หรือ น้อยสุด ซึ่งจะมีหลักดังนี้

$$\left. \begin{array}{ll} \sin \theta \text{ จะมากที่สุด} = 1 & \text{เมื่อ } \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \\ & \text{จะน้อยที่สุด} = -1 \text{ เมื่อ } \theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2} \\ \cos \theta \text{ จะมากที่สุด} = 1 & \text{เมื่อ } \theta = 2n\pi \\ & \text{จะน้อยที่สุด} = -1 \text{ เมื่อ } \theta = (2n+1)\pi \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{เมื่อ } n \text{ เป็น} \\ \text{จำนวนเต็ม} \\ \text{อะไรก็ได้} \end{array}$$

หมายเหตุ: คลื่นในวิชาฟิสิกส์ จะมีลักษณะเหมือนกราฟ $\sin$ และ $\cos$ และจะนิยมใช้ t เป็นตัวแปรแทน x

ตัวอย่าง กำหนดให้ $0 < t < 2\pi$ และ $y = 2 \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ จงหาค่าต่ำสุดของ y พร้อมทั้งหาค่า t ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด

วิธีทำ เนื่องจาก $y = 2 \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ ดังนั้น y จะต่ำที่สุด เมื่อ $\sin(2t + \frac{\pi}{2})$ ต่ำที่สุด

ไม่ว่า θ จะเป็นอะไรก็ตาม ค่าต่ำสุดของ $\sin \theta$ คือ -1

ดังนั้น $\sin(2t + \frac{\pi}{2})$ จะต่ำที่สุดได้เท่ากับ -1

ดังนั้น $y = 2 \sin(2t + \frac{\pi}{2})$ จะต่ำสุดได้เท่ากับ $2(-1) = -2$

และเนื่องจาก $\sin \theta$ จะเท่ากับ -1 เมื่อ $\theta = 2n\pi + \frac{3\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sin(2t + \frac{\pi}{2}) \text{ จะต่ำที่สุด เมื่อ } 2t + \frac{\pi}{2} &= 2n\pi + \frac{3\pi}{2} \\ 2t &= 2n\pi + \pi \\ t &= n\pi + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

ดังนั้น y จะต่ำสุด เมื่อ $t = n\pi + \frac{\pi}{2}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

แต่เนื่องจาก $0 < t < 2\pi$ ดังนั้น $n = -1$: $t = -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \rightarrow < 0$ ใช้ไม่ได้

$n = 0$: $t = 0\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ใช้ได้

$n = 1$: $t = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ ใช้ได้

$n = 2$: $t = 2\pi + \frac{\pi}{2} \rightarrow > 2\pi$ ใช้ไม่ได้

นั่นคือ y ต่ำสุด เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$ กับ $\frac{3\pi}{2}$

#

คำศัพท์อีกคำที่จะเจอในกราฟ $\sin$ กับ $\cos$ คือ คำว่า “แอมพลิจูด” ซึ่งหาได้จาก $\frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}$

เรามีวิธีหาแอมพลิจูด แบบง่ายๆ ดังนี้

$$\left. \begin{array}{l} y = A \sin(Bx + C) \\ y = A \cos(Bx + C) \end{array} \right\} \text{แอมพลิจูด} = |A|$$

“คาบ” คือ ระยะทางแกน X ที่กราฟเริ่มซ้ำรูปเดิม

$$\left. \begin{array}{l} y = A \sin(Bx + C) \\ y = A \cos(Bx + C) \\ y = A \sec(Bx + C) \\ y = A \operatorname{cosec}(Bx + C) \end{array} \right\} \text{คาบ} = \frac{2\pi}{|B|} \quad \left. \begin{array}{l} y = A \tan(Bx + C) \\ y = A \cot(Bx + C) \end{array} \right\} \text{คาบ} = \frac{\pi}{|B|}$$

เช่น $y = -5 \sin(\pi - 2x) \rightarrow \text{แอมพลิจูด} = |-5| = 5$

$$\rightarrow \text{คาบ} = \frac{2\pi}{|-2|} = \pi$$

$$y = 0.08 \cos(30\pi t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow \text{แอมพลิจูด} = |0.08| = 0.08$$

$$\rightarrow \text{คาบ} = \frac{2\pi}{|30\pi|} = \frac{1}{15}$$

$$y = -\tan(-x + \pi) \rightarrow \text{คาบ} = \frac{\pi}{|-1|} = \pi$$

$$y = -\sec\left(\frac{\pi-x}{2}\right) \rightarrow \text{คาบ} = \frac{2\pi}{|-1/2|} = 4\pi \quad \text{เป็นต้น}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาแอมพลิจูดของกราฟต่อไปนี้

1. $y = \sin(x + \pi)$

2. $y = -\cos(\frac{\pi}{2} - x)$

3. $2y = 0.1 \sin(2x)$

4. $4y = -3 \cos(2\pi t + 30^\circ)$

2. จงหาคาบของกราฟต่อไปนี้

1. $y = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

2. $y = -2\cos(-x)$

3. $y = 3 \tan(2x)$

4. $y = 0.008 \sec(2\pi t - 20^\circ)$

5. $4y = 5 \operatorname{cosec}(\frac{\pi}{3} - 3t)$

6. $2y = -1 \cot(600\pi t + 60^\circ)$

3. กำหนดให้ $0 < x < 2\pi$ และ $y = 5 \sin(2x + \frac{\pi}{2})$ จงหาค่าสูงสุดของ y พร้อมทั้งหาค่า x ที่ทำให้ y มีค่าสูงสุด

4. กำหนดให้ $0 < t < 4\pi$ และ $y = 3 \sin(\frac{\pi}{2} - t)$ จงหาค่าต่ำสุดของ y พร้อมทั้งหาค่า t ที่ทำให้ y มีค่าต่ำสุด

ทบทวนสูตรเก่า

ในหัวข้อถัดไป จะต้องท่อง และหัดใช้สูตรต่างๆ มากมาย
ก่อนอื่น ขอทบทวนสูตรเก่าๆ ที่เคยเรียนมาจนถึงตอนนี้ก่อน

- สูตรส่วนกลับ

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$$

- สูตรเปลี่ยนทุกอย่างให้เป็น sin กับ cos

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cot \theta &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{\sin \theta} & \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} \end{aligned}$$

- สูตรโคฟังก์ชัน: ถ้ามุมสองมุมรวมกันได้ 90° แล้ว “โคฟังก์ชัน” จะเท่ากัน

$$\begin{aligned} \cos &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \sin \\ \cot &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \tan \\ \operatorname{cosec} &\text{ เป็นโคฟังก์ชันของ } \sec \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \sin 18^\circ &= \cos 72^\circ & \cos 30^\circ &= \sin 60^\circ \\ \cot 45^\circ &= \tan 45^\circ & \sec 54^\circ &= \operatorname{cosec} 36^\circ \end{aligned}$$

- สูตรกำลังสอง

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta &= 1 \\ \tan^2 \theta + 1 &= \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta &= \operatorname{cosec}^2 \theta \end{aligned}$$

- สูตรมุมติดลบ

$$\begin{aligned} \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \tan(-\theta) &= -\tan \theta \end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\cos \frac{\pi}{5} \sec \frac{\pi}{5}$

2. $\cot \frac{3\pi}{7} \sin \frac{7\pi}{3} \tan \frac{3\pi}{7}$

3. $\cos \frac{\pi}{8} \tan \frac{\pi}{8} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

4. $\tan 30^\circ \operatorname{cosec} 40^\circ \cos 50^\circ$

5. $\sin \frac{\pi}{10} \sec \frac{4\pi}{10}$

6. $\sin \frac{\pi}{5} \tan \frac{3\pi}{10} \sec \frac{\pi}{5}$

7. $\cot^2 \theta - \operatorname{cosec}^2 \theta$

8. $(\tan \theta - \sec \theta)(\tan \theta + \sec \theta)$

9. $\sin^2 70^\circ + \sin^2 20^\circ$

2. จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{1-\sin A} + \frac{1}{1+\sin A} = 2 + 2 \tan^2 A$

3. กำหนดให้ $4 \sin^2 \theta + 11 \cos \theta - 1 = 0$ แล้ว $\cot^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sec(\theta - 3\pi)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร

4. กำหนด $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ และ $f(x) = 12x - 9x^2$ เมื่อ $0 < x < 1$

ถ้า $\sin \theta = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $f(a)$ มีค่ามากที่สุด แล้ว

ค่าของ $\frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} + \frac{(\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)}{1 + \sec \theta}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/6]

5. ถ้า $\frac{\sin^2 0^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ}{\cos^2 0^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ} = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/32]

6. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$
 ถ้า $(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/28]

สูตรผลบวกผลต่างมุม

สูตรชุดนี้ จะใช้กระจาย $\sin$, $\cos$ เข้าไปใน ผลบวก หรือผลต่าง ของมุม 2 มุม

$$\begin{aligned}\sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{เช่น } \sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\pi + \theta) &= \cos \pi \cos \theta - \sin \pi \sin \theta \\ &= (-1) \cos \theta - (0) \sin \theta = -\cos \theta\end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\frac{\pi}{2} < B < \pi$ ถ้า $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = -\frac{5}{13}$ แล้วจงหา $\cos(A+B)$

วิธีทำ $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

$$= \cos A \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) \sin B \rightarrow \text{ต้องหา } \cos A \text{ กับ } \sin B \text{ เอง}$$

เราจะใช้สูตร $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เพื่อหา $\cos A$ กับ $\sin B$ ที่เหลือ ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2 A &= 1 \\ \cos^2 A &= 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \\ \cos A &= \pm \frac{4}{5} \\ \text{แต่ } \frac{\pi}{2} < A < \pi \text{ ดังนั้น } \cos &\text{ ต้องเป็นลบ} \\ \text{จะได้ } \cos A &= -\frac{4}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin^2 B + \cos^2 B &= 1 \\ \sin^2 B + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 &= 1 \\ \sin^2 B &= 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169} \\ \sin B &= \pm \frac{12}{13} \\ \text{แต่ } \frac{\pi}{2} < B < \pi \text{ ดังนั้น } \sin &\text{ ต้องเป็นบวก} \\ \text{จะได้ } \sin B &= \frac{12}{13}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \left(-\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{3}{5}\right) \left(\frac{12}{13}\right) = \frac{20}{65} - \frac{36}{65} = -\frac{16}{65}\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos 15^\circ + \sqrt{3} \sin 15^\circ$

วิธีทำ เราจะพยายามจัดให้อยู่ในรูป $\sin \cos \pm \cos \sin$ หรือ $\cos \cos \mp \sin \sin$ เพื่อให้เข้าสูตรได้

จะเห็นว่า $\sqrt{3}$ สามารถเปลี่ยนให้เป็น $\cos$ ได้ เนื่องจาก $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$ ดังนั้น $\sqrt{3} = 2 \cos 30^\circ$

$$\text{ดังนั้น } \cos 15^\circ + \sqrt{3} \sin 15^\circ = \cos 15^\circ + 2 \cos 30^\circ \sin 15^\circ$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ\right)$$

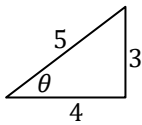
$$= 2 (\sin 30^\circ \cos 15^\circ + \cos 30^\circ \sin 15^\circ)$$

$$= 2 \sin (30^\circ + 15^\circ) = 2 \sin 45^\circ = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่ามากที่สุดของ $3 \cos A + 4 \sin A$

วิธีทำ เราจะพยายามจัดให้อยู่ในรูป $\sin \cos \pm \cos \sin$ หรือ $\cos \cos \mp \sin \sin$ เพื่อให้เข้าสูตรได้



จากรูป จะเห็นว่า $\sin \theta = \frac{3}{5}$ และ $\cos \theta = \frac{4}{5}$

ดังนั้น $\frac{3}{5}$ และ $\frac{4}{5}$ สามารถเขียนเป็น $\sin$ และ $\cos$ ของมุมเดียวกันได้

ดังนั้น เราจะ คูณ $\frac{5}{5}$ แล้วกระจาย $\frac{1}{5}$ เข้าไป เพื่อให้เข้าสูตรได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 3 \cos A + 4 \sin A &= \frac{5}{5} (3 \cos A + 4 \sin A) \\ &= 5 \left(\frac{3}{5} \cos A + \frac{4}{5} \sin A \right) \\ &= 5 (\sin \theta \cos A + \cos \theta \sin A) \\ &= 5 \sin(\theta + A) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sin(\theta + A) \leq 1$ ดังนั้น ค่ามากที่สุดของ $3 \cos A + 4 \sin A$ คือ $5(1) = 5$

#

สำหรับสูตร $\tan$ กับ $\cot$ จะใช้ไม่ค่อยบ่อยเท่า $\sin$ กับ $\cos$ แต่ก็ต้องท่อง

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$	$\cot(A + B) = \frac{\cot B \cot A - 1}{\cot B + \cot A}$
$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$	$\cot(A - B) = \frac{\cot B \cot A + 1}{\cot B - \cot A}$

เช่น $\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + (\sqrt{3})(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

ทำให้ส่วนไม่ติดราก จะได้ $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = 2 - \sqrt{3}$

$$\cot \frac{7\pi}{12} = \cot \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\cot \frac{\pi}{3} \cot \frac{\pi}{4} - 1}{\cot \frac{\pi}{3} + \cot \frac{\pi}{4}} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) (1) - 1}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1}$$

ทำให้ส่วนไม่ติดราก จะได้ $\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{\sqrt{3} - 1 - 3 + \sqrt{3}}{3 - 1} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{2} = \sqrt{3} - 2$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 1^\circ + \tan 44^\circ + \tan 1^\circ \tan 44^\circ$

วิธีทำ จะเห็นว่าข้อนี้ มีทั้ง $\tan$ บวกกัน และ $\tan$ คูณกัน ซึ่งคล้ายกับสูตร $\tan(A + B)$

ดังนั้น เราจะลองตั้งสูตร $\tan(A + B)$ ให้มี 1° และ 44° อยู่ในสูตร จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\tan 1^\circ + \tan 44^\circ}{1 - \tan 1^\circ \tan 44^\circ} &= \tan(1^\circ + 44^\circ) \\ &= \tan 45^\circ \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\tan 1^\circ + \tan 44^\circ = 1 - \tan 1^\circ \tan 44^\circ$$

$$\tan 1^\circ + \tan 44^\circ + \tan 1^\circ \tan 44^\circ = 1$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A + B + C = 180^\circ$ จงพิสูจน์ว่า $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

วิธีทำ เนื่องจาก $A + B + C = 180^\circ$ จะได้ $C = 180^\circ - (A + B)$

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A + B)) \\ &= -\tan(A + B)\end{aligned}$$

$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C \\ \tan A + \tan B - \tan(A + B) &= -\tan A \tan B \tan(A + B) \\ \tan A + \tan B &= -\tan A \tan B \tan(A + B) + \tan(A + B) \\ \tan A + \tan B &= \tan(A + B) (-\tan A \tan B + 1) \\ \tan A + \tan B &= \left(\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \right) (-\tan A \tan B + 1) \\ \tan A + \tan B &= \tan A + \tan B\end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $\sin A = \frac{4}{5}$ และ $\sin B = -\frac{3}{5}$ ถ้า $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\pi < B < \frac{3\pi}{2}$ จงหาค่าของ

1. $\sin(A + B)$
2. $\sin(A - B)$

3. $\cos(A + B)$
4. $\cos(A - B)$

2. กำหนดให้ $\tan A = \frac{3}{4}$ และ $\cot B = \frac{3}{2}$ จงหาค่าของ

1. $\tan(A + B)$
2. $\tan(A - B)$

3. $\cot(A + B)$
4. $\cot(A - B)$

3. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin 15^\circ$

2. $\cos 75^\circ$

3. $\sin \frac{7\pi}{12}$

4. $\cos(-\frac{\pi}{12})$

5. $\tan 105^\circ$

6. $\cot \frac{\pi}{12}$

4. จงเปลี่ยนให้เป็นรูปอย่างง่ายโดยใช้สูตรผลบวกผลต่างมุม

1. $\sin(\frac{\pi}{2} + \theta)$

2. $\cos(\pi - \theta)$

3. $\cos(\frac{3\pi}{2} + \theta)$

4. $\sin(\theta - 2\pi)$

5. $\tan(\pi - \theta)$

6. $\cot(\frac{\pi}{2} + \theta)$

5. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin 20^\circ \cos 25^\circ + \cos 20^\circ \sin 25^\circ$

2. $\cos 105^\circ \cos 60^\circ + \sin 105^\circ \sin 60^\circ$

3. $\sin(60^\circ + \theta) \cos(30^\circ + \theta) - \cos(60^\circ + \theta) \sin(30^\circ + \theta)$

4. $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \cos\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right) \sin\left(\frac{\pi}{6} - \theta\right)$

5. $\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 15^\circ$

6. $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ$

7. $\sqrt{3} \cos 75^\circ + \sin 75^\circ$

8. $\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ$

9. $\tan 10^\circ + \tan 35^\circ + \tan 10^\circ \tan 35^\circ$

10. $(1 + \tan 95^\circ)(1 + \tan 130^\circ)$

11. $(\tan 32^\circ - 1)(\tan 77^\circ + 1)$

12. $(1 - \cot 22^\circ)(1 - \cot 23^\circ)$

6. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $3 \sin(x - y) = 2 \sin(x + y)$
แล้ว $(\tan^3 x)(\cot^3 y)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/23]

7. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ $\sin A = \frac{3}{5}$ และ $\cos B = \frac{5}{13}$ ค่าของ $\cos C$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 54)/6]

8. ถ้า $1 - \cot 20^\circ = \frac{x}{1 - \cot 25^\circ}$ แล้ว x มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-5]

9. ค่าของ $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 44^\circ)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/30*]

สูตรมุมสองเท่า สามเท่า ครึ่งเท่า

สูตรมุมสองเท่า

$$\begin{aligned}\sin 2A &= 2 \sin A \cos A &= \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A} \\ \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A &= \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \\ &= 2 \cos^2 A - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 A \\ \tan 2A &= \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} &\cot 2A = \frac{\cot^2 A - 1}{2 \cot A}\end{aligned}$$

สูตรมุมสามเท่า

$$\begin{aligned}\sin 3A &= 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ \tan 3A &= \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1 - 3 \tan^2 A} \\ \cot 3A &= \frac{\cot^3 A - 3 \cot A}{3 \cot^2 A - 1}\end{aligned}$$

สูตรมุมครึ่งเท่า

$$\begin{aligned}\sin \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}} \\ \cos \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \\ \tan \frac{A}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \frac{\sin A}{1 + \cos A}\end{aligned}$$

หมายเหตุ: ผลลัพธ์จะเป็น บวก หรือ ลบ อย่างใดอย่างหนึ่ง ตามจุดภาคของ $\frac{A}{2}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\tan A = \frac{3}{4}$ จงหา $\sin 2A$

วิธีทำ จากสูตร $\sin 2A = \frac{2 \tan A}{1 + \tan^2 A}$

$$= \frac{2 \times \frac{3}{4}}{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{3}{2} \times \frac{16}{25} = \frac{24}{25}$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\tan 22.5^\circ$

วิธีทำ เนื่องจาก 22.5 เป็นครึ่งหนึ่งของ 45 ดังนั้น เราจะใช้สูตรมุมครึ่งเท่า ดังนี้

$$\begin{aligned}\tan 22.5^\circ &= \tan \frac{45^\circ}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 45^\circ}{1 + \cos 45^\circ}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}{\frac{2 + \sqrt{2}}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2 + \sqrt{2}}} \times \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \pm \sqrt{\frac{4 - 4\sqrt{2} + 2}{4 - 2}} \\ &= \pm \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \pm(\sqrt{2} - 1)\end{aligned}$$

แต่ 22.5° เป็นมุมในจุดภาคที่ 1 จะมีค่า $\tan$ เป็นบวก ดังนั้น $\tan 22.5^\circ = \sqrt{2} - 1$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ และ $\cos A = \frac{3}{5}$ จงหาค่าของ

1. $\sin A$

2. $\sin 2A$

3. $\cos 2A$

4. $\sin 4A$

2. จงใช้สูตรมุมสองเท่า เพื่อหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$

2. $\cos 22.5^\circ \sin 22.5^\circ$

3. $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$

4. $\frac{\sin 1^\circ \sin 88^\circ \sin 89^\circ}{\sin 4^\circ}$

5. $(\sin 15^\circ - \cos 15^\circ)^2$

6. $\operatorname{cosec} 10^\circ - \sqrt{3} \sec 10^\circ$

7. $\frac{\cos 22.5^\circ}{\sin 22.5^\circ} - \frac{\sin 22.5^\circ}{\cos 22.5^\circ}$

8. $2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ$

3. กำหนดให้ $\tan A = 2$ จงใช้สูตรมุมสองเท่า เพื่อหาค่าของ

1. $\sin 2A$

2. $\cos 2A$

3. $\tan 2A$

4. $\cot 2A$

4. กำหนดให้ $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ และ $\sin A = \frac{3}{5}$ จงใช้สูตรมุมสามเท่า เพื่อหาค่าของ

1. $\sin 3A$

2. $\cos 3A$

3. $\tan 3A$

4. $\cot 3A$

5. จงใช้สูตรมุมครึ่งเท่า เพื่อหาค่าของ $\sin 15^\circ$

6. กำหนดให้ $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{8}$ จงหาค่าของ $\cos^2 2\theta$

7. จงพิสูจน์ว่า $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = 1 + \sin 2\theta$

8. จงพิสูจน์ว่า $\sin 1^\circ \sin 2^\circ \sin 3^\circ \dots \sin 89^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2^{45}} \sin 2^\circ \sin 4^\circ \sin 6^\circ \dots \sin 88^\circ$

9. จงพิสูจน์ว่า $\sin^4 \theta - \cos^4 \theta = -\cos 2\theta$

10. ให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า a และ b เป็นค่ามากที่สุดของ $\cos^4 \theta - \sin^4 \theta$ และ $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ ตามลำดับ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/29]

11. ค่าของ $\left(\frac{\sin 30^\circ}{\sin 10^\circ} - \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/11]

12. ถ้า $\cos \theta - \sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$ แล้วค่าของ $\sin 2\theta$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/11]

13. ถ้า $\sec \theta + \operatorname{cosec} \theta = 1$ แล้ว $\sin 2\theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-8]

14. ถ้า $\sin 15^\circ$ และ $\cos 15^\circ$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 + ax + b = 0$ แล้ว ค่าของ $a^4 - b$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ก.ค. 53)/13]

15. $(3 - 4 \sin^2 9^\circ)(3 - 4 \sin^2 27^\circ)(3 - 4 \sin^2 81^\circ)(3 - 4 \sin^2 243^\circ)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 58)/4]

16. ถ้า $2 \cot \frac{\theta}{2} = (1 + \cot \theta)^2$ และ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\frac{(1 + \sin \theta) \sec^2 \theta}{\cos 2\theta}$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 58)/5]

17. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/13]

- ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริง สอดคล้องกับสมการ $\sin^2 B = \sin A \cos A$
แล้ว $\cos 2B = 2 \cos^2(45^\circ + A)$
- ถ้า $0 \leq A, B \leq \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับ $\sin A = \sqrt{2} \sin B$ และ $\sqrt{3} \sec B = \sqrt{2} \sec A$
แล้ว $\sin 10A + \cos 10B = 0.5$

18. ถ้า $\cos 5\theta = a \cos^5 \theta + b \cos^3 \theta + c \cos \theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ
แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/33]

19. ถ้า $\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\cos^4 x}{7} = \frac{1}{12}$ สำหรับบาง $x > 0$ แล้วค่าของ $\frac{\sin^2(2x)}{5} + \frac{\cos^2(2x)}{7}$ ตรงกับเท่าใด
[PAT 1 (พ.ย. 57)/29]

20. ให้ $a = \sec 1^\circ - \tan 1^\circ$, $b = \sec 2^\circ - \tan 2^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้ มีค่ามากที่สุด

1. $\sqrt{a}$ 2. $\sqrt{b}$ 3. a 4. b

21. กำหนดให้ $a, b \in R^+$ และ $\tan \theta = \frac{a}{b}$
 ถ้า $\left(\frac{\cos \theta}{a}\right)^4 + \left(\frac{\sin \theta}{b}\right)^4 = \frac{\sin 2\theta}{ab(a^2+b^2)}$ แล้ว จงหาค่าของ $\left(\frac{3a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/41]

22. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\sin x + \cos x = a$ และ $\sin x - \cos x = b$
 แล้วค่าของ $\sin 4x$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้อยู่ [PAT 1 (มี.ค. 53)/7]

1. $\frac{1}{2}(a^3b - ab^3)$ 2. $\frac{1}{2}(ab^3 - a^3b)$ 3. $ab^3 - a^3b$ 4. $a^3b - ab^3$

23. ให้ θ เป็นจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{1}{\cot^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 7$ แล้ว
 $\tan^2 2\theta$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-6]

24. กำหนดให้ $(\sin 1^\circ)(\sin 3^\circ)(\sin 5^\circ)\dots(\sin 89^\circ) = \frac{1}{2^n}$ ค่าของ $4n$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/32]

25. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 56)/9]

1. $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$
2. $\sqrt{3} \cot 20^\circ = 1 + 4 \cos 20^\circ$

สูตรแปลงผลคูณกับผลบวกกลับ

สูตรแปลงผลคูณเป็นผลบวกกลับ

$$\begin{aligned}
 2 \sin A \cos B &= \sin(A + B) + \sin(A - B) \\
 2 \cos A \sin B &= \sin(A + B) - \sin(A - B) \\
 2 \cos A \cos B &= \cos(A + B) + \cos(A - B) \\
 -2 \sin A \sin B &= \cos(A + B) - \cos(A - B)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น } 2 \sin 15^\circ \cos 75^\circ &= \sin(15^\circ + 75^\circ) + \sin(15^\circ - 75^\circ) \\
 &= \sin 90^\circ + \sin(-60^\circ) = 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} &= \left(2 \cos \frac{5\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\cos\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{12}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi}{12}\right)\right) \left(\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\cos \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \left(0 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos 15^\circ &= \left(2 \cos 15^\circ \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= (2 \cos 15^\circ \sin 45^\circ) \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= (\sin 60^\circ - \sin(-30^\circ)) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\
 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin(\theta + 30^\circ) \sin(\theta - 30^\circ) &= (-2 \sin(\theta + 30^\circ) \sin(\theta - 30^\circ)) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= (\cos(2\theta) - \cos(60^\circ)) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\cos(2\theta)}{2} + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= (-2 \sin 20^\circ \sin 40^\circ) (\sin 80^\circ) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= (\cos 60^\circ - \cos(-20^\circ)) (\sin 80^\circ) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \cos 20^\circ\right) (\sin 80^\circ) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sin 80^\circ}{2} - \cos 20^\circ \sin 80^\circ\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sin 80^\circ}{2} - 2 \cos 20^\circ \sin 80^\circ \left(\frac{1}{2}\right)\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sin 80^\circ}{2} - (\sin 100^\circ - \sin(-60^\circ)) \left(\frac{1}{2}\right)\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sin 80^\circ}{2} - \left(\sin 80^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \\
 &= \left(\frac{\sin 80^\circ}{2} - \frac{\sin 80^\circ}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

สูตรแปลงผลบวกกลับเป็นผลคูณ

$$\begin{aligned}\sin A + \sin B &= 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \\ \sin A - \sin B &= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \\ \cos A + \cos B &= 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right) \\ \cos A - \cos B &= -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)\end{aligned}$$

หมายเหตุ: จะเห็นว่าไม่มีสูตรแปลง $\sin A + \cos B$ กับ $\cos A + \sin B$

ถ้าจะแปลง ต้องใช้โคฟังก์ชันแปลงให้เป็น $\sin$ ทั้งคู่ (หรือ $\cos$ ทั้งคู่) ก่อน

$$\begin{aligned}\text{เช่น } \sin 15^\circ + \sin 75^\circ &= 2 \sin \left(\frac{15^\circ + 75^\circ}{2} \right) \cos \left(\frac{15^\circ - 75^\circ}{2} \right) \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos (-30^\circ) = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12} &= \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right) \\ &= \cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12} \\ &= -2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 20^\circ - \sin 50^\circ + \cos 100^\circ &= \sin 70^\circ - \sin 50^\circ + \cos 100^\circ \\ &= 2 \cos 60^\circ \sin 10^\circ + \cos 100^\circ \\ &= \sin 10^\circ + \cos 100^\circ \\ &= \sin 10^\circ - \sin 10^\circ = 0\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $2 \cos 75^\circ \cos 15^\circ$

2. $\sin \frac{5\pi}{12} \sin \frac{\pi}{12}$

3. $\cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}$

4. $\cos 20^\circ - 2 \sin 70^\circ \sin 50^\circ$

5. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

6. $\cos 10^\circ \sin 40^\circ \cos 70^\circ$

2. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\cos 15^\circ + \cos 75^\circ$

2. $\sin \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$

3. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ - \sin 130^\circ$

4. $\sin 80^\circ - \sin 20^\circ + \cos 230^\circ$

5. $\frac{\cos 20^\circ + \sin 50^\circ}{\sin 80^\circ}$

6. $\sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 50^\circ$
 $- \sin 70^\circ - \sin 80^\circ$

3. จงหาค่าของ $\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 60^\circ + \dots + \cos^2 160^\circ$

4. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ต.ค. 55)/9]

1. $\cos 75^\circ = (2 - \sqrt{3}) \cos 15^\circ$

2. $\cos 10^\circ + \sin 40^\circ = \cos 20^\circ$

3. ถ้า A เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $\frac{\tan 3A}{\cot A} = \frac{\cos 2A + \cos 4A}{\cos 2A - \cos 4A}$

4. ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว $\sin 2A + \cos 2B = 2 \sin(A - B) \cos(A + B)$

5. จงหาค่าของ $2 \sin^2 60^\circ (\tan 5^\circ + \tan 85^\circ) - 12 \sin 70^\circ$ [PAT 1 (มี.ค. 55)/28]

6. $\frac{\sin 25^\circ \sin 85^\circ \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (พ.ย. 57)/6]

1. $\tan 15^\circ$

2. $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$

3. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

4. $\sec 420^\circ$

7. กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 57)/11]

1. $16 \sin^3 \theta \cos^2 \theta = 2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta$
2. $\sin 3\theta = (\sin 2\theta + \sin \theta)(2 \cos \theta - 1)$

8. กำหนดให้ $8 \cos(2\theta) + 8 \sec(2\theta) = 65$ เมื่อ $0 < \theta < 90^\circ$ ค่าของ $160 \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{5\theta}{2})$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (พ.ย. 57)/40]

9. ค่าของ $\arctan\left(\frac{2\cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ}\right)$ เท่ากับกี่องศา [PAT 1 (มี.ค. 58)/8]

10. จงหาค่าของ $(\cos^2 70^\circ + \cos^2 20^\circ)(\cos^2 50^\circ + \cos^2 10^\circ) - \sin 40^\circ \sin 80^\circ$

11. ถ้า α และ θ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0 < \theta < \alpha < 90^\circ$ และสอดคล้องกับสมการ $\tan(\alpha + \theta) = 5 \tan(\alpha - \theta)$ แล้ว $(\sin 2\theta)(\operatorname{cosec} 2\alpha)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/14]

12. จงหาค่าของ $\cos 72^\circ + \cos 144^\circ$

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/8]

1. $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \pi = \frac{1}{2}$

2. $\tan \frac{7\pi}{16} - \tan \frac{3\pi}{8} = \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$

14. จงหาค่าของ $\frac{\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/31]

15. ค่าของ $\frac{\cos 36^\circ - \cos 72^\circ}{\sin 36^\circ \tan 18^\circ + \cos 36^\circ}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/30]

16. ค่าของ $\frac{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ} - \frac{\sum_{n=1}^{44} \sin n^\circ}{\sum_{n=1}^{44} \cos n^\circ}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/29]

สมการตรีโกณมิติ

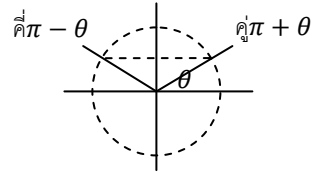
สมการตรีโกณมิติ คือ สมการที่มีฟังก์ชันตรีโกณมิติอยู่ในสมการ
โดยปกติแล้ว สมการตรีโกณมิติ มักจะมี “หลายคำตอบ” เนื่องจาก

- $\sin$ (และ $\csc$) ใช้ค่าจากแกน Y

ดังนั้น “มุมสะท้อนแกน Y” จะมีค่า $\sin$ เท่ากันเสมอ

เช่น $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ$ เป็นต้น

จากรูป สูตรหามุมสะท้อนแกน Y ของ θ คือ $\pi + \theta$ และ $\pi - \theta$

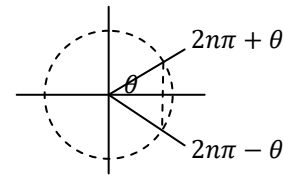


- $\cos$ (และ $\sec$) ใช้ค่าจากแกน X

ดังนั้น “มุมสะท้อนแกน X” จะมีค่า $\cos$ เท่ากันเสมอ

เช่น $\cos 30^\circ = \cos(-30^\circ)$ เป็นต้น

จากรูป สูตรหามุมสะท้อนแกน X ของ θ คือ $2\pi + \theta$ และ $2\pi - \theta$

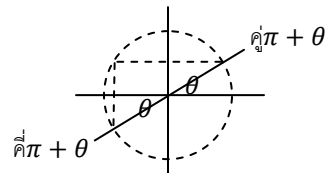


- $\tan$ (และ $\cot$) ใช้ค่าจากแกน Y หาร แกน X

ดังนั้น “มุมสะท้อน 2 แกน” จะมีค่า $\tan$ เท่ากันเสมอ

เช่น $\tan 30^\circ = \tan 210^\circ$ เป็นต้น

จากรูป สูตรหามุมสะท้อน 2 แกนของ θ และ $n\pi + \theta$



หมายเหตุ: $\csc$ คิดเหมือน $\sin$, $\sec$ คิดเหมือน $\cos$, $\cot$ คิดเหมือน $\tan$

ในการแก้สมการตรีโกณ เราจะหา “คำตอบพื้นฐาน” ที่ตัวเลขน้อยๆ ออกมาก่อน

$\sin$, $\tan$, $\csc$ → คำตอบพื้นฐานจะอยู่ในช่วง -90° ถึง 90°

$\cos$, $\cot$, $\sec$ → คำตอบพื้นฐานจะอยู่ในช่วง 0° ถึง 180°

จากนั้น เราจะนำคำตอบพื้นฐานที่ได้ มาสะท้อนหาคำตอบที่เหลือ ในช่วงมุมที่โจทย์ต้องการ

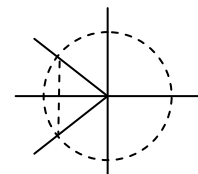
ตัวอย่าง กำหนดให้ $\theta \in [0, 2\pi]$ จงแก้สมการ $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

วิธีทำ หา θ เลขน้อยๆ ซักตัว ที่ทำให้ $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ จะได้ $\theta = 150^\circ$

จากนั้น เราจะสะท้อนมุม 150° เพื่อหาคำตอบที่เหลือ

สมการ $\cos$ ต้องสะท้อนแกน X โดยเฉพาะช่วง $[0, 2\pi]$

จากรูป จะได้คำตอบคือ 150° และ 210°



#

ในกรณีที่โจทย์ไม่ระบุช่วงคำตอบที่ต้องการ เรานิยมใช้สูตรสะท้อน θ ดังนี้

$\sin$, $\csc$ → มุมสะท้อนแกน Y ของ $\theta = n\pi + (-1)^n \theta$

$\cos$, $\sec$ → มุมสะท้อนแกน X ของ $\theta = 2n\pi \pm \theta$

$\tan$, $\cot$ → มุมสะท้อน 2 แกน ของ $\theta = n\pi + \theta$

เมื่อ n เป็นจำนวน
เต็มอะไรก็ได้

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\sin \theta = \frac{1}{2}$

วิธีทำ หา θ เลขน้อยๆ ที่ทำให้ $\sin \theta = \frac{1}{2}$ จะได้ $\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$

สมการ $\sin$ ต้องหามุมสะท้อนแกน Y ของ $\frac{\pi}{6}$

จะได้คำตอบ คือ $\theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)$

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\sin x + \cos x = 1$ เมื่อ $x \in [0, 2\pi]$

วิธีทำ ใช้สูตรผลบวกผลต่างมุม จัดรูป $\sin x + \cos x$ ให้ง่ายขึ้นได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin x + \cos x &= 1 \\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \sin x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos 45^\circ \sin x + \sin 45^\circ \cos x &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(x + 45^\circ) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

สมการ $\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะมีคำตอบพื้นฐานคือ $\theta = 45^\circ$ ดังนั้น คำตอบทั่วไป คือ $n\pi + (-1)^n(45^\circ)$

ดังนั้น $x + 45^\circ = n\pi + (-1)^n(45^\circ)$ จะได้ $x = n\pi + (-1)^n(45^\circ) - 45^\circ$

แทน $n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ แล้วเลือกตอบเฉพาะ $x \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}n = -1: \quad x &= -180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = -270^\circ && \text{ใช้ไม่ได้} \\ n = 0: \quad x &= 0^\circ + 45^\circ - 45^\circ = 0^\circ && \text{ใช้ได้} \\ n = 1: \quad x &= 180^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 90^\circ && \text{ใช้ได้} \\ n = 2: \quad x &= 360^\circ + 45^\circ - 45^\circ = 360^\circ && \text{ใช้ได้} \\ n = 3: \quad x &= 540^\circ - 45^\circ - 45^\circ = 450^\circ && \text{ใช้ไม่ได้}\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้คำตอบคือ $x = 0^\circ, 90^\circ, 360^\circ$

#

เทคนิคทุกอย่างจากเรื่องสมการ สามารถนำมาใช้กับการแก้สมการตรีโกณมิติได้ทั้งหมด

ไม่ว่าจะเป็นเทคนิคการแยกตัวประกอบแล้วจับแต่ละวงเล็บ = 0

หรือ เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร เช่น $\sin^2 \theta + \sin \theta - 2 \rightarrow A^2 + A - 2$

(ถ้าจะให้ $A = \sin \theta$ หรือ $\cos \theta$ ต้องตัดคำตอบ ให้เหลือเฉพาะ $-1 \leq A \leq 1$ เท่านั้น)

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\cos 2x = \cos x$

วิธีทำ ข้อนี้ ทำได้หลายวิธี วิธีแรกคือ กระจาย $\cos 2x$ แล้วแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos x \\ 2 \cos^2 x - 1 &= \cos x \\ 2 \cos^2 x - \cos x - 1 &= 0 \\ (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) &= 0 \\ \swarrow & \quad \searrow \\ \cos x = -\frac{1}{2} & \quad \cos x = 1 \\ x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3} & \quad x = 2n\pi \pm 0 \\ & \quad = 2n\pi\end{aligned}$$

อีกวิธี อาศัยหลักว่า $\cos 2x$ กับ $\cos x$ จะเท่ากันได้ เมื่อ $2x$ และ x เป็นมุมสะท้อนแกน X ซ้ำกันและกัน

นั่นคือ $2x = 2n\pi \pm x$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \begin{array}{l} 2x = 2n\pi + x \\ x = 2n\pi \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x = 2n\pi - x \\ 3x = 2n\pi \\ x = \frac{2n\pi}{3} \end{array} \end{array}$$

โดยทั้งสองวิธี เมื่อแจกคำตอบออกมา จะได้คำตอบชุดเดียวกัน

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $\theta \in [0, 2\pi]$ จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\sin \theta = \frac{1}{2}$

2. $\cos \theta = \frac{1}{2}$

3. $\tan \theta = 1$

4. $\cot \theta = -\sqrt{3}$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\operatorname{cosec} \theta = \sqrt{2}$

2. $\sec \theta = -2$

3. $\tan \theta = \sqrt{3}$

4. $\sin \theta = -\frac{1}{2}$

5. $\sin 2x = \cos x$

3. กำหนดให้ $\theta \in [0, \frac{3\pi}{2}]$ จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $4 \sin^2 \theta = 1$

2. $\sin^2 \theta + \cos \theta + 1 = 0$

3. $\cos 3x = \cos x$

4. กำหนดให้ $\sin A - \sin 2A + \sin 3A = 0$ โดยที่ $0 < A < \frac{\pi}{2}$
แล้ว $\tan A - \tan 2A + \tan 3A$ จะมีค่าเท่าใด

5. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ คือเซตของจำนวนจริง ข้อใดถูกต้องบ้าง
1. $\exists x(\cot 2x - \cot x = 0)$
 2. $\forall x\left(\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right)$
6. สำหรับ $0 \leq x \leq 2\pi$ กำหนดให้ $A = \{x \mid -3 \cos x = 2 \sin^2 x \text{ และ } \cos x < 0\}$
และ $B = \{\sec 3x - \cos 2x \mid x \in A\}$ จงหาค่าของผลบวกของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน B
7. กำหนดให้ $\sin \theta - \sin 2\theta + \sin 3\theta = 0$ โดยที่ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$
ถ้า $a = \frac{\tan \theta - \tan 2\theta}{\cos \theta - \cos 2\theta}$ และ $b = \frac{\sin 3\theta + \sin 4\theta + \sin 5\theta}{\cos 3\theta + \cos 4\theta + \cos 5\theta}$ แล้วค่าของ $a^4 + b^4$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 57)/36]

8. กำหนดให้ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ถ้า $3(2)^{\sin \theta} \left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2 \theta} = 2(3)^{\sin \theta}$ แล้วจงหาค่าของ $3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/8]

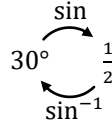
9. ให้ A เป็นเซตคำตอบของ $\cos x = \cos\left(\frac{x}{4}\right)$ จ्ञำนวนสมาชิกในเซต $A \cap (0, 24\pi)$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 54)/33]

10. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ $5(\sin a + \cos a) + 2 \sin a \cos a = 0.04$
 ค่าของ $125(\sin^3 a + \cos^3 a) + 75 \sin a \cos a$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/33]

11. จงแก้สมการ $\frac{4 \sin x}{1+2 \cos 2x} + \frac{12 \sin 3x}{1+2 \cos 6x} + \frac{36 \sin 9x}{1+2 \cos 18x} = \frac{27}{\sin 27x} - 1$

ฟังก์ชันอาร์ค

หัวข้อนี้ จะเรียนเกี่ยวกับ “อินเวอร์ส” ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ซึ่งจะหมายถึง ฟังก์ชันที่ให้ผลลัพธ์กลับกันกับฟังก์ชันปกติ
 เนื่องจาก $\sin, \cos, \tan$ จะเปลี่ยน “มุมเป็นค่า” เช่น $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$
 ดังนั้น อินเวอร์ส จะเปลี่ยนกลับจาก $\frac{1}{2}$ เป็น 30° ดังรูป



เนื่องจากฟังก์ชันตรีโกณ เป็นแบบ many to one (เช่น $\sin 30^\circ$ กับ $\sin 150^\circ$ ได้ $\frac{1}{2}$ เท่ากัน)

ดังนั้น อินเวอร์ส จะมีผลลัพธ์ได้หลายค่า และจะไม่ใช้ฟังก์ชัน (เช่น $\sin^{-1}$ จะโยง $\frac{1}{2}$ ไปที่ $30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, \dots$ เป็นต้น)

อย่างไรก็ตาม นักคณิตศาสตร์ต้องการอินเวอร์สที่ไม่กำกวม จึงกำหนด “ฟังก์ชัน arc” ขึ้นมา

โดยถ้าอยากได้อินเวอร์สของฟังก์ชันไหน เราจะเติม arc เข้าไปข้างหน้า เช่น $\arcsin, \arccos, \arctan$ เป็นต้น

หลักทั่วไปในการหาอินเวอร์สด้วยฟังก์ชัน arc คือ ให้ตอบมุมที่ “เลขน้อยที่สุด” แค่มุมเดียว

เช่น $\sin 30^\circ = \sin 150^\circ = \frac{1}{2}$ แต่ถ้าถาม $\arcsin \frac{1}{2}$ ให้ตอบ 30° มุมเดียว

$\sin(-30^\circ) = \sin 210^\circ = -\frac{1}{2}$ แต่ถ้าถาม $\arcsin(-\frac{1}{2})$ ให้ตอบ -30° มุมเดียว เป็นต้น

ดังนั้น $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = 60^\circ, \cancel{120^\circ}$

$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = 30^\circ, \cancel{330^\circ}$

$\arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) = -60^\circ, \cancel{240^\circ}, \cancel{300^\circ}$

$\arctan(-1) = -45^\circ, \cancel{135^\circ}, \cancel{315^\circ}$

$\operatorname{arccot} \sqrt{3} = 30^\circ, \cancel{210^\circ}$

$\operatorname{arcsec}(-2) = 120^\circ, \cancel{240^\circ}$

โดยเราจะต้องจำว่า $\arcsin, \arctan, \operatorname{arccosec}$ จะได้มุมในช่วง -90° ถึง 90°

$\arccos, \operatorname{arccot}, \operatorname{arcsec}$ จะได้มุมในช่วง 0° ถึง 180°

หรือถ้าตอบในหน่วยเรเดียน เราจะสรุปโดเมน กับ เรนจ์ ของฟังก์ชันอาร์ค ได้ดังนี้

	กลุ่ม -90° ถึง 90°			กลุ่ม 0° ถึง 180°	
	โดเมน	เรนจ์		โดเมน	เรนจ์
$\arcsin$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$	$\arccos$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$	arccot	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
$\operatorname{arccosec}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$	arcsec	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$

เนื่องจากฟังก์ชันอาร์ค เป็นการแปลงย้อนกลับ ดังนั้น $\arcsin(\sin x) = x$ และ $\sin(\arcsin x) = x$

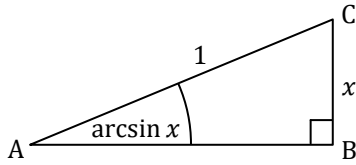
แต่ต้องอย่าลืมว่า ประโยคดังกล่าว จะเป็นจริงเฉพาะเมื่อ x อยู่ในขอบเขตของโดเมนกับเรนจ์ที่ระบุในตารางเท่านั้น

กล่าวคือ $\sin(\arcsin x) = x$ จริงเฉพาะเมื่อ x อยู่ใน “เรนจ์” ของ $\sin$ นั่นคือ เมื่อ $x \in [-1, 1]$

$\arcsin(\sin x) = x$ จริงเฉพาะเมื่อ x อยู่ใน “เรนจ์” ของ $\arcsin$ นั่นคือ เมื่อ $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

ดังจะเห็นได้จาก $\arcsin(\sin 150^\circ) = \arcsin(\frac{1}{2}) = 30^\circ \neq 150^\circ$

และเนื่องจาก $\sin(\arcsin x) = x$ ดังนั้น $\arcsin x$ คือ “มุมที่ $\sin$ แล้วได้ x ” นั่นเอง
เราสามารถใช้อย่างน้อยสามเหลี่ยม แสดง “มุมที่ $\sin$ แล้วได้ x ” ได้ดังรูป



จากพีทาโกรัส จะได้ $AB = \sqrt{1^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$

เมื่อรู้ AB เราจะสามารถหาฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ของมุม $\arcsin x$ ได้

เช่น $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$

$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ เป็นต้น

ในกรณีที่ฟังก์ชันอาร์คของเลขติดลบ ให้แยกคิดเครื่องหมาย กับ ตัวเลข

- ตอนคิดเครื่องหมาย ให้พิจารณาจุดภาคของฟังก์ชันอาร์คเป็นหลักโดยไม่ต้องสนใจตัวเลข
- ตอนคิดตัวเลข ให้เปลี่ยนเลขติดลบเป็นเลขบวก แล้วคิดเป็นมุมในจุดภาคที่ 1 ได้เลย

แล้วจึงเอา เครื่องหมาย กับ ตัวเลข ที่ได้ มาแปะติดกันแล้วตอบ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin\left(\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{4}\right)\right)$

วิธีทำ 1. คิดเครื่องหมาย ตามจุดภาคก่อน

$\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{4}\right)$ คือมุมที่ $\sec$ แล้วได้ $-\frac{5}{4} \rightarrow \sec$ เป็นลบ แปลว่าเป็นมุมใน Q_2 หรือ Q_3

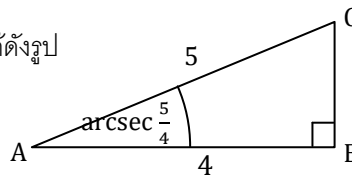
ดังนั้น $\sin\left(\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = \sin Q_2 \rightarrow$ ได้เครื่องหมายเป็นบวก

2. คิดตัวเลข แบบไม่ต้องสนใจเครื่องหมาย

$\operatorname{arcsec} \frac{5}{4}$ คือมุมที่ $\sec$ แล้วได้ $\frac{5}{4} \rightarrow$ วาดได้ดังรูป

จากพีทาโกรัส จะได้ $BC = 3$

ดังนั้น $\sin\left(\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{3}{5}$



รวมเครื่องหมายจาก 1. กับตัวเลขจาก 2. จะได้ $\sin\left(\operatorname{arcsec}\left(-\frac{5}{4}\right)\right) = \frac{3}{5}$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\operatorname{cosec}\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right)$

วิธีทำ 1. คิดเครื่องหมาย ตามจุดภาคก่อน

$\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)$ คือมุมที่ $\tan$ แล้วได้ $-\frac{4}{3} \rightarrow \tan$ เป็นลบ แปลว่าเป็นมุมใน Q_2 หรือ Q_4

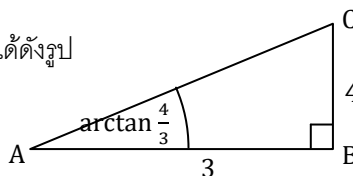
ดังนั้น $\operatorname{cosec}\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = \operatorname{cosec} Q_4 \rightarrow$ ได้เครื่องหมายเป็นลบ

2. คิดตัวเลข แบบไม่ต้องสนใจเครื่องหมาย

$\arctan\left(\frac{4}{3}\right)$ คือมุมที่ $\tan$ แล้วได้ $\frac{4}{3} \rightarrow$ วาดได้ดังรูป

จากพีทาโกรัส จะได้ $AC = 5$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}\left(\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \frac{5}{4}$



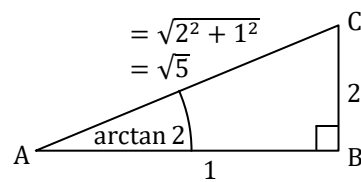
รวมเครื่องหมายจาก 1. กับตัวเลขจาก 2. จะได้ $\operatorname{cosec}\left(\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)\right) = -\frac{5}{4}$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sin(2 \arctan 2)$

วิธีทำ จากสูตร $\sin$ มุม 2 เท่า จะได้

$$\begin{aligned}\sin(2 \arctan 2) &= 2 \sin(\arctan 2) \cos(\arctan 2) \\ &= 2 \times \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{4}{5}\end{aligned}$$



#

อย่างไรก็ตาม มีสูตรที่นิยมท่องกัน ดังนี้

1. สูตรอินเวอร์ส

$$\begin{array}{ll}\sin(\arcsin x) = x & \operatorname{cosec}(\operatorname{arccosec} x) = x \\ \cos(\arccos x) = x & \sec(\operatorname{arcsec} x) = x \\ \tan(\arctan x) = x & \cot(\operatorname{arccot} x) = x\end{array}$$

2. สูตรส่วนกลับ

$$\begin{array}{ll}\sin(\operatorname{arccosec} x) = \frac{1}{x} & \operatorname{cosec}(\arcsin x) = \frac{1}{x} \\ \cos(\operatorname{arcsec} x) = \frac{1}{x} & \sec(\arccos x) = \frac{1}{x} \\ \tan(\operatorname{arccot} x) = \frac{1}{x} & \cot(\arctan x) = \frac{1}{x}\end{array}$$

3. สูตรค่าลบ

$$\begin{array}{ll}\arcsin(-x) = -\arcsin x & \operatorname{arccosec}(-x) = -\operatorname{arccosec} x \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x & \operatorname{arcsec}(-x) = \pi - \operatorname{arcsec} x \\ \arctan(-x) = -\arctan x & \operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x\end{array}$$

4. สูตรโคฟังก์ชัน

$$\begin{array}{ll}\arcsin x + \arccos x &= 90^\circ \\ \arctan x + \operatorname{arccot} x &= 90^\circ \\ \operatorname{arcsec} x + \operatorname{arccosec} x &= 90^\circ\end{array}$$

5. สูตรพิทาгорัส

$$\begin{array}{l}\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2} \\ \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}\end{array}$$

หมายเหตุ : สูตรเหล่านี้ จะเป็นจริงเมื่อ x อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $\arcsin$ ในสูตรเท่านั้น

โจทย์อีกประเภท คือ การแก้สมการอาร์ค

ส่วนใหญ่วิธีแก้ คือ ให้ใส่ฟังก์ชันตรีโกณมิติเข้าไปทั้งสองข้าง เพื่อตัดฟังก์ชันอาร์คให้หายไป

และก่อนตอบ ให้ตรวจคำตอบด้วยเสมอ

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\arcsin x = \arccos x$

วิธีทำ $\arcsin x = \arccos x$

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$$

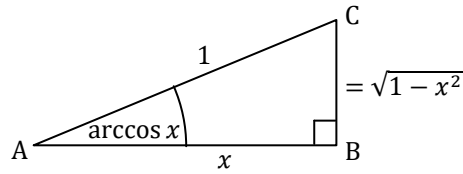
$$x = \sqrt{1 - x^2}$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$



ตรวจคำตอบ: แทน $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้ $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ จริง

แทน $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้ $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -45^\circ$

แต่ $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 135^\circ$ ดังนั้น $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ไม่ใช่คำตอบ

ดังนั้น คำตอบของข้อนี้ จึงมีเพียง $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\arccos 0$

3. $\arctan(-\sqrt{3})$

4. $\operatorname{arccosec}(-1)$

5. $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

2. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sin \left(\arcsin \frac{1}{3}\right)$

2. $\cos \left(\arcsin \frac{3}{4}\right)$

3. $\sin \left(\arccos \left(-\frac{2}{3}\right)\right)$

4. $\sec \left(\arctan -\frac{3}{4}\right)$

5. $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3} + \arccos\frac{1}{2}\right)$

6. $\cot(\operatorname{arccot} 2 - \operatorname{arccot} 3)$

7. $\tan(\arctan 3 + \arctan 2 + \operatorname{arccot} 1)$

3. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\arcsin x = -\frac{\pi}{3}$

2. $\sin(2\arctan x) = \frac{3}{5}$

3. $\arccos 2x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$

4. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่ $0 < x < 1$ และสอดคล้องกับ $\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+2x(1-x)}$ แล้ว ค่าของ $\cos \pi x$ เท่ากับเท่าไร
5. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\arcsin x = \frac{\pi}{4}$ แล้วค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{15} + \arccos(x^2)\right)$ อยู่ในช่วงใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/6]
1. $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 2. $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 3. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 4. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$
6. $\sin(\arctan 2 + \arctan 3)$ เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-7]

7. $\cot\left(\arccos\sqrt{\frac{2}{3}} - \arccos\frac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/12]

8. ค่าของ $\sec^2\left(2\arctan\frac{1}{3} + \arctan\frac{1}{7}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/28]

9. ค่าของ $\sec^2(\arctan 2) + \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} 3) + \operatorname{cosec}\left(2\operatorname{arccot} 2 + \arccos\frac{3}{5}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (ต.ค. 58)/6]

1. $\frac{335}{24}$

2. $\frac{351}{24}$

3. $\frac{375}{24}$

4. $\frac{385}{24}$

5. $\frac{399}{24}$

10. ถ้า $\operatorname{arcsec} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{17}} - 2 \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}$ แล้ว $\cot\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arcsec} x\right)$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 55)/10]

11. ค่าของ $\cot(\operatorname{arccot} 7 + \operatorname{arccot} 13 + \operatorname{arccot} 21 + \operatorname{arccot} 31)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/7]

12. ค่าของ $\frac{\tan\left[\operatorname{arccot} \frac{1}{5} - \operatorname{arccot} \frac{1}{3} + \arctan \frac{7}{9}\right]}{\sin\left[\arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{12}{13}\right]}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/31]

13. กำหนดให้ $A = \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$ และ $0 < B < \frac{\pi}{2}$

$\sin^2 B + \sin^2(A + B) + \sin^2(5A + B)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 58)/7]

1. 0
2. 1
3. $\frac{3}{2} - \sin 2B$
4. $\frac{3}{2} - \cos 2B$
5. $\frac{3}{2} - 2 \cos 2B$

14. กำหนดให้ $0 < \theta < 15^\circ$ ค่าของ $y = \arctan\left(\frac{3 \cos \theta}{1 - 3 \sin \theta}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{\cos \theta}{3 - \sin \theta}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (เม.ย. 57)/12]

1. $\arctan(\cot \theta)$
2. $\arctan(\tan \theta)$
3. $\arctan(\sin \theta)$
4. $\arctan(\cos \theta)$

15. ถ้า $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{3}{2}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ แล้ว $\arccos(\tan 3\theta)$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-6]

16. ถ้า $\arcsin(5x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\tan(\arcsin x)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/13]

17. กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ โดยที่ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right) - \arctan(\sqrt{x})$ เมื่อ $0 < x < 1$
ค่าของ $\tan \theta + \cot \theta$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/32]

18. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่ $0 < x < 1$ และสอดคล้องกับ
 $\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)}$ แล้ว ค่าของ $\cos \pi x$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 56)/10]

19. ให้ $-1 \leq x \leq 1$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2552}$

แล้ว ค่าของ $\sin\left(\frac{\pi}{2552}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/13]

1. $2x$ 2. $1 - 2x^2$ 3. $2x^2 - 1$ 4. $-2x$

20. ข้อใดถูกต้องบ้าง [A-NET 50/1-12]

1. $\tan 14^\circ + \tan 76^\circ = 2 \operatorname{cosec} 28^\circ$
 2. ถ้า $x > 0$ และ $\sin(2 \arctan x) = \frac{4}{5}$ แล้ว $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$

21. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x) = \arccos(x\sqrt{3}) + \arccos(\sqrt{1-x^2})$

และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\arccos(x) = \arcsin(x) + \arcsin(1-x)$

จำนวนสมาชิกของเซต $P(A - B)$ เท่ากับเท่าใด เมื่อ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

[PAT 1 (มี.ค. 55)/29]

22. กำหนดให้ $c = \arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arccot} \frac{5}{3} - \arctan \frac{8}{19}$

ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\operatorname{arccot} \frac{1}{2x} + \operatorname{arccot} \frac{1}{3x} = c$ จงหาผลคูณของสมาชิกใน A

[PAT 1 (ธ.ค. 54)/16]

23. ให้ α และ β เป็นมุมแหลมของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่ $\tan \alpha = \frac{a}{b}$

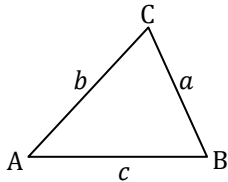
ถ้า $\cos \left(\arcsin \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right) + \sin \left(\arccos \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \right) \right) = 1$ แล้ว $\sin \beta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

[PAT 1 (มี.ค. 53)/29]

การนำไปใช้กับสามเหลี่ยม

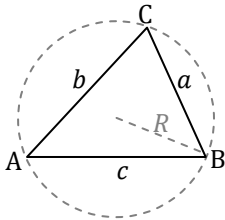
ในเลขพื้นฐาน เราได้เรียนวิธีนำความรู้ในเรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติไปใช้หาความยาวด้านของสามเหลี่ยมมุมฉากมาแล้ว
ในเรื่องนี้ เราจะได้เรียนกฎเกี่ยวกับสามเหลี่ยมเพิ่มอีก 2 กฎ คือ กฎของ $\cos$ และ กฎของ $\sin$
ซึ่ง 2 กฎนี้จะสามารถนำไปใช้กับสามเหลี่ยมอะไรก็ได้ ไม่ต้องจำเป็นต้องเป็นสามเหลี่ยมมุมฉากเหมือนเมื่อก่อน

กฎของ $\cos$



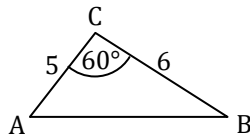
$$\begin{aligned}a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C\end{aligned}$$

กฎของ $\sin$



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (= 2R)$$

ตัวอย่าง จากรูป จงหา AB



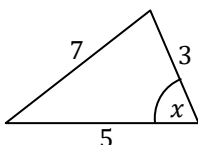
วิธีทำ จากกฎของ $\cos$ จะได้ $AB^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6) \cos 60^\circ$
 $= 25 + 36 - 2(5)(6) \left(\frac{1}{2}\right) = 31$

ดังนั้น $AB = \sqrt{31}$

#

ตัวอย่าง สามเหลี่ยม ABC มีด้านทั้งสาม ยาว 3, 5 และ 7 หน่วย ตามลำดับ จงหาว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยม
มุมแหลม, สามเหลี่ยมมุมฉาก หรือ สามเหลี่ยมมุมป้าน

วิธีทำ



ถ้าอยากจะรู้ว่าเป็นสามเหลี่ยมแบบไหน ต้องหาว่ามุมที่ใหญ่ที่สุดของสามเหลี่ยม
เป็นมุมแหลม มุมฉาก หรือมุมป้าน
มุมที่ใหญ่ที่สุดของสามเหลี่ยม ก็คือมุมที่อยู่ตรงข้ามด้านที่ยาวที่สุดนั่นเอง

เนื่องจาก $\cos$ มุมแหลมเป็นบวก $\cos$ มุมฉากเป็นศูนย์ และ $\cos$ มุมป้านเป็นลบ

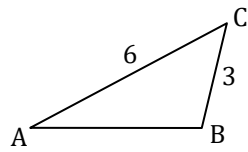
เราจะใช้กฎของ $\cos$ เพื่อหาเครื่องหมายของ $\cos x$

$$\begin{aligned}7^2 &= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3) \cos x \\2(5)(3) \cos x &= 25 + 9 - 49 \\ \cos x &= -\frac{15}{30} = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $\cos x$ เป็นลบ ดังนั้น x เป็นมุมป้าน นั่นคือสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมป้านนั่นเอง

#

ตัวอย่าง จากรูป ถ้า $\sin A = \frac{1}{3}$ และกำหนดให้ B เป็นมุมป้าน จงหา $\cos B$



วิธีทำ ข้อนี้ ไม่รู้ความยาว AB จะใช้ยังไม่สามารถใช้กฎของ $\cos$ เพื่อหา $\cos B$ ได้

แต่จะเห็นว่าใช้กฎของ $\sin$ เพื่อหา $\sin B$ ก่อนได้ ดังนี้

$$\frac{3}{\sin A} = \frac{6}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{6}{3} \times \sin A = \frac{6}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

แต่จากเอกลักษณ์ $\sin^2 B + \cos^2 B = 1$

$$\text{จะได้ } \cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$$

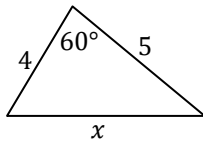
แต่โจทย์บอกว่ามุม B เป็นมุมป้าน ดังนั้น $\cos$ ต้องเป็นลบ ดังนั้น $\cos B = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

#

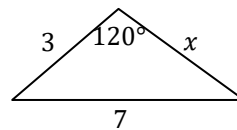
แบบฝึกหัด

1. จากรูป จงหาค่า x

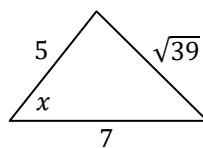
1.



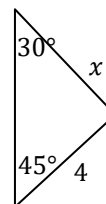
2.



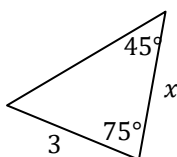
3.



4.



5.



2. กำหนดสามเหลี่ยม ABC มี $\hat{A} = 30^\circ$ และ $\hat{C} = 105^\circ$ จงหาค่าของ $\frac{AC}{BC}$
3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เท่ากับ 60° , $BC = \sqrt{6}$ และ $AC = 1$
ค่าของ $\cos(2B)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/12]
4. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และ มุม C ตามลำดับ
ถ้ามุม C เท่ากับ 60° $b = 5$ และ $a - c = 2$
แล้วความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/6]

5. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถัด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วยและ $3 \sin B = 5 \sin C$ แล้ว $\sin 2A$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/16]

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และมุม C เป็นมุมแหลม โดยที่ $25 \cos B - 13 \cos C = 15$, $65(\cos B + \cos C) = 77$ และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/32]

7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ สมมติว่ามุม A มีขนาดเป็นสามเท่าของมุม B และ $a = 2b$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/3]

1. ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
2. ถ้า $a = kc$ แล้ว k สอดคล้องกับ $3x^3 - 9x^2 - x + 3 = 0$

8. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ ถ้ามุม A มีขนาดมากกว่า 90° มุม B มีขนาด 45° และ $\sqrt{2}c = (\sqrt{3} - 1)a$ แล้ว $\cos^2(A - B - C) + \cos^2 B + \cos^2 C$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/33]

9. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ โดยที่ $\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}$ แล้ว $\sin C$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/16]

10. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว $2a, 3a, 4a$ ตามลำดับ ถ้า $\sin A = k$ แล้ว $\cot B + \cot C$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [A-NET 50/1-13]

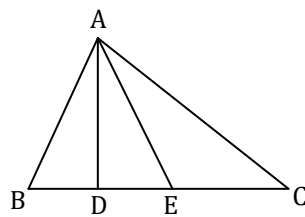
1. $\frac{1}{6k}$

2. $\frac{k}{6}$

3. $\frac{1}{3k}$

4. $\frac{k}{3}$

11. ให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



ถ้ามุม $\widehat{ABC} = 30^\circ$ $\widehat{BAC} = 135^\circ$ และ AD และ AE แบ่งมุม $\widehat{BAC}$ ออกเป็น 3 ส่วนเท่าๆกัน แล้ว $\frac{EC}{BC}$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/7]

12. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมและ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC

ถ้า $AB = 4$ หน่วย, $AC = 3$ หน่วย และ $AD = \frac{5}{2}$ หน่วย แล้วด้าน BC ยาวเท่ากับเท่าใด

[PAT 1 (ก.ค. 52)/12]

13. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีด้าน AB ยาว $\sqrt{2}$ หน่วย

ถ้า $BC^3 + AC^3 = 2BC + 2AC$ แล้ว $\cot C$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-7]

14. ในรูปสามเหลี่ยม ABC ใดๆ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และ มุม C ตามลำดับ

แล้ว $\frac{1}{a} \cos A + \frac{1}{b} \cos B + \frac{1}{c} \cos C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 53)/7]

1. $\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$
2. $\frac{(a+b+c)^2}{abc}$
3. $\frac{(a+b+c)^2}{2abc}$
4. $\frac{a^2+b^2+c^2}{abc}$

15. ให้ A, B และ C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และ $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$

โดยที่ $\tan A \tan B \tan C = 3 + 2\sqrt{3}$ และ $\tan B + \tan C = 2 + 2\sqrt{3}$

ข้อใดถูกต้องบ้าง [A-NET 51/1-16]

1. $\tan C = 2 + \sqrt{3}$
2. $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$

16. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว a, b, c ตามลำดับ

$$\text{และ } (\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$$

$$\text{จงหาค่าของ } \sqrt{3 \operatorname{cosec}^2 B + 3 \sec^2 B} \quad [\text{PAT 1 (อ.ค. 54)/43}]$$

17. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ มีความยาวตรงข้ามมุม A, B และ C เป็น a, b และ c หน่วยตามลำดับ

$$\text{ถ้า } a^2 + b^2 = 31c^2 \text{ แล้วค่าของ } 3 \tan C (\cot A + \cot B) \text{ เท่ากับเท่าใด} \quad [\text{PAT 1 (มี.ค. 54)/32}]$$

18. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ จุดยอด A จุดยอด B และจุดยอด C อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง มีรัศมีเท่ากับ R หน่วย ถ้าความยาวของด้านตรงข้ามมุม A และมุม B เท่ากับ a และ b หน่วยตามลำดับ มุม $\hat{A}BC$ เท่ากับ 18° และมุม $\hat{A}CB$ เท่ากับ 36° แล้วค่าของ $a - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (มี.ค. 58)/7]

1. R 2. $\frac{1}{2}R$ 3. $\frac{1}{4}R$ 4. $\frac{1}{16}R$

19. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B มุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ และมุม A มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม B ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (เม.ย. 57)/11]
1. $c^2 = a^2 + ab$ 2. $c^2 = b^2 + ab$ 3. $a^2 = b^2 + bc$ 4. $a^2 = c^2 + bc$

การวัดมุมในหน่วยเรเดียน

- | | | | |
|--|---|---|--|
| 1. 1. $(0, 1)$ | 2. $(-1, 0)$ | 3. $(-1, 0)$ | 4. $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| 5. $(0, 1)$ | 6. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ | 7. $(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ | 8. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ |
| 9. $(0, -1)$ | 10. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ | 11. $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ | 12. $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ |
| 13. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ | 14. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$ | 15. $(0, -1)$ | 16. $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ |

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | | |
|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|
| 1. 1. 1 | 2. -1 | 3. $\sqrt{3}$ | 4. $\sqrt{2}$ |
| 5. 2 | 6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | 7. $-\frac{1}{2}$ | 8. 1 |
| 9. $-\frac{1}{2}$ | 10. $\frac{4}{3}$ | 11. หาไม่ได้ | 12. $\frac{1}{3}$ |

การวัดมุมในหน่วยองศา

- | | | | |
|------------------------|--------------------------|---------------------|-----------------|
| 1. 1. 420° | 2. 144° | 3. 18180° | 4. -450° |
| 2. 1. $\frac{5\pi}{6}$ | 2. π | 3. $\frac{2\pi}{9}$ | 4. -15π |
| 3. 1. $\frac{1}{2}$ | 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 3. $-\sqrt{3}$ | 4. หาค่าไม่ได้ |

การแปลงมุมเป็นรูปอย่างง่าย

- | | | | |
|------------------------------------|----------------------|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. 1. $\sin \theta$ | 2. $-\cos \theta$ | 3. $\tan \theta$ | 4. $-\cos \theta$ |
| 5. $\operatorname{cosec} \theta$ | 6. $\cos \theta$ | 7. $-\tan \theta$ | 8. $-\sec \theta$ |
| 9. $-\operatorname{cosec} \theta$ | 10. $-\tan \theta$ | 11. $\sec \theta$ | 12. $\sec \theta$ |
| 13. $-\cot \theta$ | 14. $\cot \theta$ | 15. $\sin \theta$ | 16. $-\sin \theta$ |
| 17. $-\operatorname{cosec} \theta$ | 18. $\cos \theta$ | 19. $\tan \theta$ | 20. $-\operatorname{cosec} \theta$ |
| 21. $-\sin \theta$ | 22. $-\tan \theta$ | 23. $\sin 80^\circ$ | 24. $-\cos 40^\circ$ |
| 25. $-\tan 15^\circ$ | 26. $-\sec 10^\circ$ | 27. $-\operatorname{cosec} 55^\circ$ | 28. $-\cot 70^\circ$ |
2. 1. 0 2. 0

3. 0

สังเกตว่า $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ$ ดังนั้น $\cos^3 20^\circ = -\cos^3 160^\circ$
 $\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ$ ดังนั้น $\cos^3 40^\circ = -\cos^3 140^\circ$
 $\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$ ดังนั้น $\cos^3 60^\circ = -\cos^3 120^\circ$
 $\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ$ ดังนั้น $\cos^3 80^\circ = -\cos^3 100^\circ$

จะเห็นว่า ผลบวกที่โจทย์ถาม จะหักกันได้เป็นคู่ๆ

ดังนั้น $\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ + \cos^3 60^\circ + \dots + \cos^3 160^\circ = 0$

#

ตาราง

- | | | | |
|--------------|------------|--------------|------------|
| 1. 1. 0.1880 | 2. 0.4643 | 3. 0.6009 | 4. 0.0904 |
| 5. 2.77995 | 6. 1.5052 | 7. -0.3719 | 8. -0.7623 |
| 9. 0.3706 | 10. 1.9511 | 11. -68.7501 | 12. 1.5398 |

กราฟฟังก์ชันตรีโกณมิติ

- | | | | |
|---------------------|----------------------------|--------------------|------------------|
| 1. 1. 1 | 2. 1 | 3. 0.05 | 4. $\frac{3}{4}$ |
| 2. 1. 2π | 2. 2π | 3. $\frac{\pi}{2}$ | 4. 1 |
| 5. $\frac{2\pi}{3}$ | 6. $\frac{1}{600}$ | | |
| 3. $y = 5, x = \pi$ | 4. $y = -3, t = \pi, 3\pi$ | | |

ทบทวนสูตรเก่า

- | | | | |
|---------|-------------------------|-------|-------------------------|
| 1. 1. 1 | 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 3. 1 | 4. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ |
| 5. 1 | 6. 1 | 7. -1 | 8. -1 |
| 9. 1 | | | |

$$2. \text{ LHS} = \frac{1+\sin A+1-\sin A}{1-\sin^2 A} = \frac{2}{\cos^2 A} = \frac{2(\cos^2 A + \sin^2 A)}{\cos^2 A} = \frac{2\cos^2 A}{\cos^2 A} + \frac{2\sin^2 A}{\cos^2 A} = \text{RHS}$$

3. 19

$$= 4(1 - \cos^2 \theta) + 11 \cos \theta - 1 \rightarrow 0 = 4 \cos^2 \theta - 11 \cos \theta - 3 = (4 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 3)$$

จะได้ $\cos \theta = -\frac{1}{4}$, ~~3~~ $\rightarrow$ วาดสามเหลี่ยม ได้ ซิด = -1, ฉาก = 4 $\rightarrow$ ข้าม = $\pm\sqrt{15}$

$$\text{ดังนั้น } \cot^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \sec(\theta - 3\pi) = \tan^2 \theta - \sec \theta = \left(\pm \frac{\sqrt{15}}{1}\right)^2 - (-4) = 19$$

- | | | |
|------|--------|--------|
| 4. 0 | 5. 181 | 6. 373 |
|------|--------|--------|

สูตรผลบวกผลต่างมุม

- | | | | |
|-------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. 1. $-\frac{7}{25}$ | 2. -1 | 3. $\frac{24}{25}$ | 4. 0 |
| 2. 1. $\frac{17}{6}$ | 2. $\frac{1}{18}$ | 3. $\frac{6}{17}$ | 4. 18 |
| 3. 1. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | 2. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | 3. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ | 4. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ |
| 5. $-2 - \sqrt{3}$ | 6. $2 + \sqrt{3}$ | | |
| 4. 1. $\cos \theta$ | 2. $-\cos \theta$ | 3. $\sin \theta$ | 4. $\sin \theta$ |
| 5. $-\tan \theta$ | 6. $-\tan \theta$ | | |
| 5. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 2. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 3. $\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{1}{2}$ |
| 5. $\frac{1}{2}$ | 6. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | 7. $\sqrt{2}$ | 8. 1 |

9. 1 10. 2 11. -2 12. 2
 6. 125 7. $\frac{16}{65}$ 8. 2 9. 2^{22}

สูตรมุมสองเท่า สามเท่า ครึ่งเท่า

- | | | | |
|----------------------------------|-------------------------|----------------------|----------------------|
| 1. 1. $-\frac{4}{5}$ | 2. $-\frac{24}{25}$ | 3. $-\frac{7}{25}$ | 4. $\frac{336}{625}$ |
| 2. 1. $\frac{1}{2}$ | 2. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ | 3. $\frac{1}{4}$ | 4. $\frac{1}{4}$ |
| 5. $\frac{1}{2}$ | 6. 4 | 7. 2 | 8. $\frac{1}{2}$ |
| 3. 1. $\frac{4}{5}$ | 2. $-\frac{3}{5}$ | 3. $-\frac{4}{3}$ | 4. $-\frac{3}{4}$ |
| 4. 1. $\frac{117}{125}$ | 2. $\frac{44}{125}$ | 3. $\frac{117}{44}$ | 4. $\frac{44}{117}$ |
| 5. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ | 6. $\frac{15}{16}$ | 7. | 8. |
| 9. | 10. 6 | 11. 2 | 12. $\frac{4}{9}$ |
| 13. $2 - 2\sqrt{2}$ | 14. 2 | 15. 1 | 16. 4 |
| 17. 1 | 18. 681 | 19. $\frac{25}{126}$ | |

20. 1

สมมติให้ $\sec 1^\circ - \tan 1^\circ > \sec 2^\circ - \tan 2^\circ$

$$\frac{1}{\cos 1^\circ} - \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} > \frac{1}{\cos 2^\circ} - \frac{\sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}$$

$$\frac{1 - \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} > \frac{1 - \sin 2^\circ}{\cos 2^\circ}$$

$$\cos 2^\circ - \sin 1^\circ \cos 2^\circ > \cos 1^\circ - \sin 2^\circ \cos 1^\circ$$

$$\sin 2^\circ \cos 1^\circ - \sin 1^\circ \cos 2^\circ > \cos 1^\circ - \cos 2^\circ$$

$$\sin (2 - 1)^\circ > \cos 1^\circ - \cos 2^\circ$$

$$\cos 2^\circ > \cos 1^\circ - \sin 1^\circ$$

$$\cos^2 2^\circ > \cos^2 1^\circ + \sin^2 1^\circ - 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ$$

$$1 - \sin^2 2^\circ > 1 - \sin 2^\circ$$

$$\sin 2^\circ > \sin^2 2^\circ$$

เนื่องจาก $\sin 2^\circ < 1$ ยิ่งยกกำลัง จะยิ่งน้อย ดังนั้น $\sin 2^\circ > \sin^2 2^\circ$ จึงถูกต้อง ดังนั้น $a > b$

ถัดมา เราจะตรวจสอบว่า a มากกว่า 1 หรือไม่

สมมติให้ $\sec 1^\circ - \tan 1^\circ > 1$

$$\frac{1 - \sin 1^\circ}{\cos 1^\circ} > 1$$

$$1 - \sin 1^\circ > \cos 1^\circ$$

$$1 > \sin 1^\circ + \cos 1^\circ$$

$$1 > \sin^2 1^\circ + \cos^2 1^\circ + 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ$$

$$0 > 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ$$

เนื่องจาก $0 < 2 \sin 1^\circ \cos 1^\circ$ ดังนั้นที่สมมติไม่ถูกต้อง ดังนั้น $a < 1$ ยิ่งถอดรากจะยิ่งมาก ดังนั้น $\sqrt{a} > a$

และเนื่องจาก $a > b$ ดังนั้น $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ ดังนั้น $\sqrt{a}$ มากที่สุด

21. 27.25

22. 3

23. 8

จาก $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ได้ $\sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 1 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$

$$\text{จะได้ LHS} = \frac{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{2 - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{4 - \sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta} = 7$$

แก้สมการได้ $\sin^2 2\theta = \frac{8}{9}$ ได้ $\cos^2 2\theta = \frac{1}{9} \rightarrow \tan^2 2\theta = 8$

24. 178

25. 1, 2

สูตรแปลงผลคูณกับผลบวกกลับ

- | | | | |
|----------------------------|--------------------------|---|-------------------|
| 1. 1. $\frac{1}{2}$ | 2. $\frac{1}{4}$ | 3. $\frac{\sin 2\theta + \sin \theta}{2}$ | 4. $-\frac{1}{2}$ |
| 5. $\frac{1}{8}$ | 6. $\frac{\sqrt{3}}{8}$ | | |
| 2. 1. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ | 2. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 3. 0 | 4. 0 |
| 5. $\sqrt{3}$ | 6. 0 | | |

3. 3.5

สังเกตว่า $\cos 20^\circ = -\cos 160^\circ$ ดังนั้น $\cos^2 20^\circ = \cos^2 160^\circ$

$\cos 40^\circ = -\cos 140^\circ$ ดังนั้น $\cos^2 40^\circ = \cos^2 140^\circ$

$\cos 60^\circ = -\cos 120^\circ$ ดังนั้น $\cos^2 60^\circ = \cos^2 120^\circ$

$\cos 80^\circ = -\cos 100^\circ$ ดังนั้น $\cos^2 80^\circ = \cos^2 100^\circ$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ผลบวก} &= 2(\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 80^\circ) \\ &= 2(\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \frac{1}{4} + \cos^2 80^\circ) \\ &= \frac{1}{2} + 2(\cos^2 20^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 80^\circ) \\ &= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1+\cos 40^\circ}{2} + \frac{1+\cos 80^\circ}{2} + \frac{1+\cos 160^\circ}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + 3 + \cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ \\ &= \frac{1}{2} + 3 + 2 \cos 60^\circ \cos 20^\circ + \cos 160^\circ \\ &= \frac{1}{2} + 3 + \cos 20^\circ + \cos 160^\circ \\ &= \frac{1}{2} + 3 + 0 = 3.5 \end{aligned}$$

- | | | | |
|-------|-------|-------------------|-------------------|
| 4. 1 | 5. 6 | 6. 2 | 7. 1, 2 |
| 8. 55 | 9. 60 | 10. $\frac{3}{4}$ | 11. $\frac{2}{3}$ |

12. $-\frac{1}{2}$

$$= 2 \cos 108^\circ \cos 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{2 \cos 18^\circ} = \frac{1}{2}$$

13. 2

14. 8

15. $\frac{1}{2}$

16. 2

สมการตรีโกณมิติ

1. $30^\circ, 150^\circ$ 2. $60^\circ, 300^\circ$ 3. $45^\circ, 225^\circ$ 4. $150^\circ, 330^\circ$
2. $n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)$ 3. $n\pi + \frac{\pi}{3}$ 4. $n\pi + (-1)^n \left(-\frac{\pi}{6}\right)$
5. $2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ หรือ $n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{6}\right)$
3. $30^\circ, 150^\circ, 210^\circ$ 2. 180° 3. $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ$

4. $2\sqrt{3}$

$$\sin A - \sin 2A + \sin 3A = (\sin A + \sin 3A) - \sin 2A = 2 \sin 2A \cos A - \sin 2A$$

$$= (2 \cos A - 1)(\sin 2A) = 0 \rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \text{ หรือ } \sin 2A = 0 \rightarrow A = 60^\circ, 120^\circ, 90^\circ$$

$$\tan A - \tan 2A + \tan 3A = \sqrt{3} - (-\sqrt{3}) + 0 = 2\sqrt{3}$$

5. 2

ต้องแก้สมการ $\cot 2x = \cot x$ จาก $\cot A = \cot B$ เมื่อ $A = n\pi + B$ จะได้ $2x = n\pi + x \rightarrow x = n\pi$

แต่ $\cot n\pi$ จะหาค่าไม่ได้ ดังนั้น ข้อ 1 เท็จ

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}(2 \sin x \cos x)^2$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x \rightarrow 2 \text{ จริง}$$

6. 1.5

$$\text{แก้สมการได้ } \cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow x = 120^\circ, 240^\circ$$

ทั้งสองมุม จะได้ $\sec 3x - \cos 2x = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$ เท่ากัน ดังนั้น $B = \left\{\frac{3}{2}\right\} \rightarrow$ ผลบวกสมาชิก = 1.5

7. 153

8. 3

9. 20

10. 1

11. $2n\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\frac{4 \sin x}{1+2 \cos 2x} = \frac{4 \sin x}{3-4 \sin^2 x} = \frac{4 \sin^2 x}{\sin 3x} \text{ ทำแบบเดียวกันที่สองตัวที่เหลือ ได้ } \frac{12 \sin^2 3x}{\sin 9x} \text{ กับ } \frac{36 \sin^2 9x}{\sin 27x}$$

$$\text{ย้าย } \frac{36 \sin^2 9x}{\sin 27x} \text{ ไปลบกับ } \frac{27}{\sin 27x} \text{ ทางขวา ได้ } \frac{27-36 \sin^2 9x}{\sin 27x} = \frac{9(3-4 \sin^2 9x)}{\sin 27x} = \frac{9 \sin 27x}{(\sin 27x)(\sin 9x)} = \frac{9}{\sin 9x}$$

$$\text{ย้าย } \frac{12 \sin^2 3x}{\sin 9x} \text{ ไปลบกับ } \frac{9}{\sin 9x} \text{ ที่เหลือ แบบเดียวกัน ได้ } \frac{3(3-4 \sin^2 3x)}{\sin 9x} = \frac{3}{\sin 3x}$$

$$\text{ย้าย } \frac{4 \sin^2 x}{\sin 3x} \text{ ไปลบกับ } \frac{3}{\sin 3x} \text{ ที่เหลือ แบบเดียวกัน ได้ } \frac{3-4 \sin^2 3x}{\sin 3x} = \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{ดังนั้น สุดท้ายเหลือ } 0 = \frac{1}{\sin x} - 1 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow x = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$$

ฟังก์ชันอาร์ค

1. 45° 2. 90° 3. -60° 4. -90°
5. 135° 6. -45°
2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{\sqrt{7}}{4}$ 4. $\frac{5}{4}$

5. $\frac{1+2\sqrt{6}}{6}$ 6. 7 7. 0
 3. 1. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2. $\frac{1}{3}, 3$ 3. $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 4. $\frac{1}{2}$

วาดสามเหลี่ยมจะได้ $\tan(\operatorname{arccot}(\frac{1}{2x})) = 2x$ และ $\tan(\operatorname{arcsec}\sqrt{1+2x(1-x)}) = \sqrt{2x(1-x)}$

ใส่ $\tan$ ตลอด ได้ $\frac{1-x+2x}{1-(1-x)(2x)} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x(1-x)}$ ตัดส่วนทั้งสองข้าง เหลือ $1+x = 2\sqrt{2x(1-x)}$

ยกกำลังสองได้ $1+2x+x^2 = 8x-8x^2 \rightarrow 9x^2-6x+1=0 \rightarrow x=\frac{1}{3} \rightarrow \cos \pi x = \frac{1}{2}$

5. 4 6. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 7. $\sqrt{3}$ 8. 2
 9. 4 10. $\frac{13}{16}$ 11. $\frac{13}{4}$ 12. 1
 13. 4 14. 2 15. 0 16. $\frac{1}{5}$
 17. 2 18. $\frac{1}{2}$ 19. 2 20. 1, 2
 21. 1 22. $\frac{1}{6}$ 23. 0.5

การนำไปใช้กับสามเหลี่ยม

1. 1. $\sqrt{21}$ 2. 5 3. 60° 4. $4\sqrt{2}$
 5. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$
 2. $\sqrt{2}$ 3. $\frac{3}{4}$ 4. 45 5. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
 6. 54 7. 1 8. 2 9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
 10. 3 11. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 12. 5 13. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
 14. 1 15. 1, 2 16. 4 17. 0.2
 18. 1 19. 3

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Theerat Piyaanangul

และ คุณ Hassatorn Thamkijjanon ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารด้วยครับ