ลำดับอนันต์ และอนุกรมอนันต์

math center
13 Oct 2020

สารบัญ

ทบทวนลำดับเลขคณิต

ลำดับเลขคณิต คือ ลำดับที่เพิ่มหรือลดอย่างคงที่ โดยการบวก

เราเรียกค่าคงที่ ที่นำมาบวก ว่า “ผลต่างร่วม” ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ d

เช่น $5, 8, 11, 14 \rightarrow d = 3$ $\quad$ $1, 3, 5, 7 \rightarrow d = 2$

$5, 3, 1, -1 \rightarrow d = -2$ $\quad$ $5, 5, 5, 5 \rightarrow d = 0$

$1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2} \rightarrow d = \frac{1}{2}$

จะเห็นว่า ถ้าเอาสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเลขคณิต มาลบกัน (พจน์ขวา ลบ พจน์ซ้าย) จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ d เสมอ

เช่น ลำดับเลขคณิต $5, 8, 11, 14, \ldots$ จะเห็นว่า $8 - 5 = 11 - 8 = 14 - 11 = 3 = d$

สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเลขคณิต คือ $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d}$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $2a + 1$, $2b - 1$, $3b - a$ และ $a + 3b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง พจนที่ 1000 ของลำดับเลขคณิตนี้เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/17]

2. จำนวนเต็มที่มีค่าตั้งแต่ 100 ถึง 999 ที่หารด้วย 2 ลงตัว แต่หารด้วย 3 ไม่ลงตัว มีจำนวนเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/36]

3. พิจารณาการจัดเรียงลำดับของจำนวน $2, 5, 8, 11, 14, \ldots$ ในตารางดังต่อไปนี้

หลักที่ 1	หลักที่ 2	หลักที่ 3	หลักที่ 4	หลักที่ 5
	2	5	8	
23	20	17	14	11
	26	29	32	
47	44	41	38	35
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

จำนวน 2012 อยู่ในหลักที่เท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/50]

4. <u>บทนิยาม</u> ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เรียกพจน์ a_n ว่า <u>พจน์คู่</u> ถ้า n เป็นจำนวนคู่ และ
เรียกพจน์ a_n ว่า <u>พจน์คี่</u> ถ้า n เป็นจำนวนคี่

กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่มีจำนวนพจน์เป็นจำนวนคู่ และผลบวกของพจน์คี่ทั้งหมด เท่ากับ 36 และผลบวกของพจน์คู่ทั้งหมดเท่ากับ 56 ถ้าพจน์สุดท้ายมากกว่าพจน์แรก เป็นจำนวนเท่ากับ 38 แล้วลำดับเลขคณิต $\{a_n\}$ นี้ มีทั้งหมดกี่พจน์ [PAT 1 (ต.ค. 53)/38]

5. กำหนดให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก โดยที่ $a_1 = b_2$, $a_5 = b_5$ และ $a_1 \neq a_5$ ถ้า $\frac{(b_6-b_4)+(b_6-b_1)}{a_4-a_2} = \frac{x}{y}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ x กับ y เท่ากับ 1 แล้ว $x^2 + y^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/36]

ทบทวนลำดับเรขาคณิต

ลำดับเรขาคณิต คือ ลำดับที่เพิ่มหรือลด อย่างคงที่ โดยการ "คูณ"
เราเรียกค่าคงที่ ที่นำมาคูณ ว่า "อัตราส่วนร่วม" ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์ r

เช่น $2, 6, 18, 54 \quad \rightarrow r = 3$ $\qquad 3, -6, 12, -24 \quad \rightarrow r = -2$

$5, 5, 5, 5 \quad \rightarrow r = 1$ $\qquad 10, 5, \frac{5}{2}, \frac{5}{4} \quad \rightarrow r = \frac{1}{2}$

$1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2} \quad \rightarrow r = \sqrt{2}$

จะเห็นว่า ถ้าเอาสองพจน์ที่อยู่ติดกันในลำดับเรขาคณิต มาหารกัน
โดยเอาพจน์ขวาเป็นตัวตั้ง หารด้วย พจน์ซ้ายที่อยู่ติดกัน จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ r เสมอ
เช่น ในลำดับเรขาคณิต $2, 6, 18, 54, \ldots$ จะเห็นว่า $\frac{6}{2} = \frac{18}{6} = \frac{54}{18} = 3 = r$

สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับเรขาคณิต คือ $\boxed{a_n = a_1 r^{n-1}}$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ถ้าผลคูณของลำดับเรขาคณิต 3 จำนวนที่เรียงติดกัน เท่ากับ 343 และผลบวกของทั้งสามจำนวนนี้ เท่ากับ 57 แล้วค่ามากที่สุดในบรรดา 3 จำนวนนี้ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/49]

2. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 26x^2 + bx - 216$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง
ถ้า a_1, a_2, a_3 เป็นจำนวนจริงสามจำนวนเรียงกันแบบลำดับเรขาคณิต และเป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ แล้ว จงหาค่า b [PAT 1 (ต.ค. 55)/19*]

3. กำหนดให้ x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต มีอัตราส่วนร่วมเท่ากับ r และ $x \neq y$
ถ้า $x, 2y, 3z$ เป็นลำดับเลขคณิต แล้ว ค่า r เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/17]

4. ให้ a , b , c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $2a$, $3b$, $4c$ เป็นลำดับเรขาคณิต และ $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ เป็นลำดับเลขคณิต
ค่าของ $\frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/39]

ทบทวนลำดับเวียนเกิด

ลำดับเวียนเกิด คือ ลำดับต้องใช้พจน์ก่อนหน้าในการคำนวณพจน์ถัดๆไป
ลำดับประเภทนี้ จะยุ่งยาก เพราะสุดท้าย เรามักต้อง "ไล่หาตั้งแต่ a_1 ขึ้นมา" จนกว่าจะถึงพจน์ที่เราต้องการ

แบบฝึกหัด

1. ให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_1 = -3$ และ $b_{n+1} = \frac{1+b_n}{1-b_n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
   ค่าของ b_{1000} เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/39]

2. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนเต็ม โดยมีสมบัติดังนี้

   $$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 2576 - k \quad \text{เมื่อ } k = 1, 2, 3, \dots$$

   ถ้า $a_1 = 12$, $a_2 = 2556$ และ $a_3 = 7$ แล้วค่าของ a_{2558} เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/37]

3. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n-1}} = 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n
   ถ้า $a_1 + a_2 + \dots + a_{100} = 250$ แล้ว $|a_{2552} - 2.5|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/47]

ลำดับพหุนาม

เรื่องนี้ ไม่อยู่ในหลักสูตร แต่นักเรียนส่วนใหญ่นิยมให้สอน จึงนำมารวมในเอกสารด้วย
ในกรณีที่สูตรของ a_n สามารถเขียนเป็นพหุนามได้ จะมีสูตรการหาพจน์ทั่วไปอยู่
วิธีนี้จะได้สูตร a_n ที่ซับซ้อนไปนิด แต่รับประกันว่าได้ชัวร์ (ถ้า a_n สามารถเขียนเป็นพหุนามได้)

1. หาผลต่างของแต่ละคู่พจน์ที่ติดกัน ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ผลต่างของทุกคู่เท่ากัน

$$\begin{array}{ccccccccccc}
a_1 & & a_2 & & a_3 & & a_4 & & a_5 & & a_6 \\
 & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & \\
 & d_1 & & ? & & ? & & ? & & ? & \\
 & & \vee & & \vee & & \vee & & \vee & & \\
 & & d_2 & & ? & & ? & & ? & & \\
 & & & \vee & & \vee & & \vee & & & \\
 & & & d_3 & & d_3 & & d_3 & & & \\
 & & & & & \dots & & & & &
\end{array}$$

2. นำตัวแรกของแต่ละแถว ไปแทนในสูตร

$$\boxed{a_n = a_1 + \frac{(n-1)}{(1)}d_1 + \frac{(n-1)(n-2)}{(1)(2)}d_2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(1)(2)(3)}d_3}$$

ในกรณีที่ต้องทำ 4 แถวถึงจะเท่า ก็บวก $\frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(1)(2)(3)(4)}d_4$ หรือตัวอื่นๆ ต่อไปได้เรื่อยๆ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ $5, 7, 12, 20, \dots$
<u>วิธีทำ</u> หาผลต่างของแต่ละคู่ไปเรื่อยๆ จนกว่าทุกตัวจะห่างกันคงที่

$$\begin{array}{ccccccc}
5 & & 7 & & 12 & & 20 \\
 & 2 & & 5 & & 8 & \\
 & & 3 & & 3 & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a_1 = 5 \\
d_1 = 2 \\
d_2 = 3
\end{array}$$

แทนสูตร จะได้ $a_n = 5 + \frac{(n-1)}{(1)}(2) + \frac{(n-1)(n-2)}{(1)(2)}(3)$

$= 5 + 2n - 2 + \frac{3(n^2-3n+2)}{2} = \frac{3n^2-5n+12}{2}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาพจน์ที่ 10 ของลำดับ $1, 5, 12, 24, 43, 71, \dots$
<u>วิธีทำ</u> หาผลต่างของแต่ละคู่ไปเรื่อยๆ จนกว่าทุกตัวจะห่างกันคงที่

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 5 & & 12 & & 24 & & 43 & & 71 \\
 & 4 & & 7 & & 12 & & 19 & & 28 & \\
 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & & \\
 & & & 2 & & 2 & & 2 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
a_1 = 1 \\
d_1 = 4 \\
d_2 = 3 \\
d_3 = 2
\end{array}$$

แทนสูตร จะได้ $a_n = 1 + \frac{(n-1)}{(1)}(4) + \frac{(n-1)(n-2)}{(1)(2)}(3) + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(1)(2)(3)}(2)$

ดังนั้น $a_{10} = 1 + \frac{(10-1)}{(1)}(4) + \frac{(10-1)(10-2)}{(1)(2)}(3) + \frac{(10-1)(10-2)(10-3)}{(1)(2)(3)}(2)$

$= 1 + (9)(4) + \frac{(9)(8)}{(1)(2)}(3) + \frac{(9)(8)(7)}{(1)(2)(3)}(2) = 1 + 36 + 108 + 168 = 313$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาสูตรพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

   1. $-6\,,\ -3\,,\ 2\,,\ 9\,,\ 18\,,\ldots$

   2. $2\,,\ -1\,,\ -6\,,\ -13$

2. จงหา พจน์ที่ 8 ของลำดับ $1\,,\ 3\,,\ 13\,,\ 37\,,\ 81\,,\ 151$

ลิมิตของลำดับ

ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เราได้รู้จัก "ลำดับจำกัด" และ "ลำดับอนันต์" ไปแล้ว

ลำดับจำกัด คือ ลำดับที่มีจำนวนพจน์ เป็นจำนวนจำกัด เช่น $3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11$

ลำดับอนันต์ คือ ลำดับที่มีพจน์ต่อไปเรื่อยๆ ไม่สิ้นสุด เช่น $3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ 9\ ,\ 11\ ,\ \ldots$

จะเห็นว่า ลำดับอนันต์ จะมี "…" ต่อท้าย เพื่อบอกว่ามีพจน์ต่อไปเรื่อยๆ

ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษาการประมาณค่าของ "ตัวสุดท้าย" ในลำดับอนันต์

จะเห็นว่า ลำดับอนันต์ จะมีพจน์ต่อท้ายไปเรื่อยๆ ดังนั้น ลำดับอนันต์ จะไม่มีตัวสุดท้าย

อย่างไรก็ตาม เราสามารถ "ประมาณ" ตัวสุดท้ายของลำดับอนันต์ "บาง" ลำดับได้

เช่น $\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \ldots$ ตัวสุดท้ายจะมีค่าประมาณ 0 เพราะ ส่วนเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ ในขณะที่เศษเป็น 1 ตลอด

$0.3\ ,\ 0.33\ ,\ 0.333\ ,\ \ldots$ ตัวสุดท้ายจะมีค่าประมาณ $0.33333333333\ldots$ ซึ่งจะเท่ากับ $\frac{1}{3}$

$3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ \ldots$ ตัวสุดท้ายจะมีค่าประมาณ 3

แต่อย่างไรก็ตาม ลำดับอนันต์ส่วนใหญ่ จะไม่สามารถหาค่าประมาณของตัวสุดท้ายได้

เช่น $1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ \ldots$ ลำดับนี้ เพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขต จึงไม่สามารถประมาณตัวสุดท้ายได้

$-1\ ,\ -3\ ,\ -5\ ,\ -7\ ,\ \ldots$ ลำดับนี้ ลดลงอย่างไม่มีขอบเขต จึงไม่สามารถประมาณตัวสุดท้ายได้

$3\ ,\ -3\ ,\ 3\ ,\ -3\ ,\ \ldots$ ลำดับนี้ แกว่งไปแกว่งมา ทำให้บอกไม่ได้ ว่าตัวสุดท้ายประมาณ 3 หรือ -3

"ลิมิตของลำดับ" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หมายถึง ค่าประมาณของพจน์สุดท้าย ในลำดับอนันต์ $\{a_n\}$

เช่น ลำดับ $\frac{1}{2}\ ,\ \frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ \ldots$ มีลิมิตของลำดับ คือ 0

ลำดับ $3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ 3\ ,\ \ldots$ มีลิมิตของลำดับ คือ 3

ลำดับ $1\ ,\ 3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ \ldots$ หาลิมิตของลำดับไม่ได้ เป็นต้น

ในกรณีที่โจทยให้สูตรพจน์ทั่วไปมา การหา $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ จะทำได้โดยการแทน n ด้วย ∞ ลงไป

หลักในการคำนวณค่าประมาณ เกี่ยวกับ ∞ จะมีดังนี้

$\infty + \infty \to \infty$ $\qquad$ $\infty - \infty \to$ ไม่รู้

$\infty + k \to \infty$ $\qquad$ $\infty - k \to \infty$ $\qquad$ $k - \infty \to -\infty$

$\infty \times \infty \to \infty$ $\qquad$ $\infty \times k \to \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่บวก} \\ -\infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่ลบ} \\ \text{ไม่รู้} & \text{เมื่อ } k \text{ ประมาณ } 0 \end{cases}$

$\frac{\infty}{k} \to \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่บวก} \\ -\infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่ลบ} \end{cases}$ $\qquad$ $\frac{k}{\infty} \to 0$ $\qquad$ $\frac{\infty}{\infty} \to$ ไม่รู้

$\infty^k \to \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่บวก} \\ 0 & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่ลบ} \\ \text{ไม่รู้} & \text{เมื่อ } k \text{ ประมาณ } 0 \end{cases}$ $\qquad$ $k^\infty \to \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } k \text{ เป็นค่าคงที่ และ } k > 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } k = 1 \\ 0 & \text{เมื่อ เป็นค่าคงที่ และ } 0 < k < 1 \\ \text{ไม่รู้} & \text{เมื่อ } k \text{ ประมาณ } 0 \text{ หรือ } k \text{ ประมาณ } 1 \end{cases}$

ถ้าแทน n ด้วย ∞ แล้วได้ผลเป็น "ไม่รู้" แปลว่าเราต้องจัดรูปเพิ่มก่อน แล้วค่อยแทนใหม่

ถ้าแทนแล้ว คำนวณค่าประมาณได้ ∞ หรือ $-\infty$ หรือ แกว่งไปแกว่งมา ให้ตอบว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้

เช่น $\lim\limits_{n\to\infty} 2n =$ หาไม่ได้ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} 3^n =$ หาไม่ได้ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2-5^n} = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} 4 = 4$ $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} 4n^2+1 =$ หาไม่ได้

$\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n =$ แกว่งระหว่าง 1 กับ -1 $=$ หาไม่ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n-1}$

<u>วิธีทำ</u> ถ้าแทน n ด้วย ∞ จะได้ $\frac{\infty}{\infty}$ ซึ่งประมาณค่าต่อไม่ได้

ข้อนี้ เราจะจัดรูป $\frac{4n+1}{n-1}$ ก่อน โดยดึง n จากเศษและส่วนมาตัดกัน $\rightarrow$ $\frac{4n+1}{n-1} = \frac{n\left(4+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \frac{4+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$

จากนั้น ค่อยแทน n ด้วย ∞ ลงไปใหม่ จะได้ $\frac{4+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}} = \frac{4+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{4+0}{1-0} = 4$ #

ในกรณีที่แทนแล้วได้ $\frac{\infty}{\infty}$ เราจะมีวิธีจัดรูป โดยการดึง n^k จากทั้งเศษและส่วนมาตัดกัน

เช่น

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n}{3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n\left(3+\frac{5}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+4}{2n^2+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{3}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{5}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-0+0}{2+0} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n+3}{4n^3-n^2+5n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(2-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(4n-1+\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-0+0}{4n-1+0-0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^5+3}{n^3+2n-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2n^2+\frac{3}{n^3}\right)}{n^3\left(1+\frac{2}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+0}{1+0-0} = \text{หาไม่ได้}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{\sqrt{n^2+5n}-2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(4+\frac{3}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{5}{n}}-\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+0}{\sqrt{1+0}-0} = 4$$

เราจะดึงให้ n^k ตามพหุนามที่ดีกรีน้อยกว่าระหว่างเศษกับส่วน

สุดท้าย ต้องรู้จักคำศัพท์ 2 คำ

- ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาค่าได้ จะเรียกสำดับนั้นว่าเป็นลำดับ "<u>คอน</u>เวอร์เจนต์" (ลำดับลู่เข้า)
- ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ หาไม่ได้ จะเรียกสำดับนั้นว่าเป็นลำดับ "<u>ได</u>เวอร์เจนต์" (ลำดับลู่ออก)

เช่น $a_n = \frac{1}{3n+1}$ เป็นลำดับ<u>คอน</u>เวอร์เจนต์ เพราะ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3n+1}$ หาค่าได้ เท่ากับ 0

$a_n = \frac{4n+1}{n}$ เป็นลำดับ<u>คอน</u>เวอร์เจนต์ เพราะ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n+1}{n}$ หาค่าได้ เท่ากับ 4

$a_n = 3^n$ เป็นลำดับ<u>ได</u>เวอร์เจนต์ เพราะ $\lim\limits_{n\to\infty} 3^n$ หาค่าไม่ได้ เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือ ไดเวอร์เจนต์ พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ ในกรณีที่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

1. $a_n = n$
2. $a_n = 2n - 10$
3. $a_n = \frac{1}{n}$
4. $a_n = 3^n$
5. $a_n = (-2)^n$
6. $a_n = (-1)^{2n}$
7. $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$
8. $a_n = \frac{3n^2-2}{2n+1}$
9. $a_n = \frac{2+2n^2-3n}{n^2-2n+1-2n^3}$
10. $a_n = \frac{3n^3+2n^2-3n+5}{2n^3-3n^2+4n-1}$
11. $a_n = \frac{n+1}{\sqrt{n}-2}$
12. $a_n = \frac{\sqrt{3n+2}}{\sqrt{n}-2}$

2. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1})$ สำหรับ $n = 2, 3, \ldots$ แล้วค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/37]

3. กำหนดให้ $\{ a_n \}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_n + 1 \le a_{n+1}$ และ $a_{n+5} \le a_n + 5$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้วค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k + 6 - k)\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/40]

4. กำหนดให้ $t_n = 2^n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และ $a_n = 5^{t_n} + 5^{-t_n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_1 a_2 \ldots a_n}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/36]

การหาลิมิตในรูปเศษส่วน

หัวข้อนี้ จะพูดถึงวิธีหา $\lim_{n\to\infty} a_n$ แบบง่ายๆ โดยใช้วิธีดูๆแล้วตอบ

วิธีคือ เราจะพยายามเขียน a_n ให้อยู่ในรูปเศษส่วน แล้วดูว่า ระหว่างเศษกับส่วน ใครชนะ

โดยเราจะนำ “ตัวแรงสุดของเศษ” มาเทียบกับ “ตัวแรงสุดของส่วน” โดยใช้หลักดังนี้

- พหุนามดีกรีมาก ชนะ พหุนามดีกรีน้อย (ดีกรี = กำลังสูงสุดของ n ในพหุนาม)
- เอกซ์โพเนนเชียลฐานมาก ชนะ เอกซ์โพเนนเชียลฐานน้อย
- เอกซ์โพเนนเชียล ฐาน >1 ชนะ พหุนาม
  เอกซ์โพเนนเชียล ฐาน <1 แพ้ พหุนาม

เอกซ์โพ → n เป็นเลขชี้กำลัง
พพุนาม → n เป็นฐาน

เช่น $\frac{2^n+3^n}{n^2+3n-5} \to \frac{\text{เอกซ์โพฐาน 3}}{\text{พหุนามดีกรี 2}} \to$ เศษชนะ

$\frac{2^n+n^2}{n^{1000}} \to \frac{\text{เอกซ์โพฐาน 2}}{\text{พหุนามดีกรี 1000}} \to$ เศษชนะ

$\frac{5\cdot 2^n+3^n}{4\cdot 3^n+5} \to \frac{\text{เอกซ์โพฐาน 3}}{\text{เอกซ์โพฐาน 3}} \to$ เสมอ

$\frac{2n+1}{n^2-5n+2} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี 1}}{\text{พหุนามดีกรี 2}} \to$ ส่วนชนะ

$\frac{3n^2+1}{n^2-1} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี 2}}{\text{พหุนามดีกรี 2}} \to$ เสมอ

$\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt[3]{n+1}} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี } \frac{1}{2}}{\text{พหุนามดีกรี } \frac{1}{3}} \to$ เศษชนะ

$\frac{2^n-3^n}{3^n+2\cdot 5^n} \to \frac{\text{เอกซ์โพฐาน 3}}{\text{เอกซ์โพฐาน 5}} \to$ ส่วนชนะ

$\frac{n^2}{(0.1)^n} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี 2}}{\text{เอกซ์โพฐาน} < 1} \to$ เศษชนะ

$\frac{2^{3n}-5^n}{8^{10}(3^n)-7^n} \to \frac{(2^3)^n}{7^n} \to \frac{\text{เอกซ์โพฐาน 8}}{\text{เอกซ์โพฐาน 7}} \to$ เศษชนะ

$\frac{(n^2+1)^3}{4n^5-1} \to \frac{(n^2)^3}{4n^5} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี 6}}{\text{พหุนามดีกรี 5}} \to$ เศษชนะ

$\frac{4n^3+20n^2-5n+1}{n^2-7n^3+4n-3} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี 3}}{\text{พหุนามดีกรี 3}} \to$ เสมอ

$\frac{\sqrt{n^3}-1}{n} \to \frac{\text{พหุนามดีกรี } \frac{3}{2}}{\text{พหุนามดีกรี } 1} \to$ เศษชนะ

เมื่อตัดสินได้แล้วว่าใครชนะ ให้ตอบ $\lim_{n\to\infty} a_n$ ดังนี้

- ถ้า เศษชนะ → ตอบ หาไม่ได้
- ถ้า ส่วนชนะ → ตอบ 0
- ถ้า เสมอกัน → ตอบ $\frac{\text{สัมประสิทธิ์ตัวแรงสุดของเศษ}}{\text{สัมประสิทธิ์ตัวแรงสุดของส่วน}}$ (สัมประสิทธิ์ = ตัวเลขที่มาคูณ)

เช่น $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n}{n^2+3n-5} =$ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+5^n}{3^n-7^n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+3^n}{4\cdot 3^n+5} = \frac{1}{4}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+1}{n^2-1} = \frac{3}{1} = 3$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^3-5} =$ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-3^n}{3^n+2\cdot 5^n} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{3n}-5^n}{8^{10}(3^n)-7^{n+5}} =$ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2-5n+2} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^3+20n^2-5n+1}{n^2-7n^3+4n-3} = \frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+1)^2}{2n^6-5} = \frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n+n^2}{n^{1000}} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^2+3n^4}{5n^4-5} = \frac{4}{5}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n-n^3-3}{-n^2+3} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-5n+4}{3n^3+4n^2-2n+5} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-5n-n^3-3}{-n^2+3n^3-5} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(3n-2)}{7n^2-3} = \frac{6}{7}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n)(n^2-3n+1)(3n+1)}{(2n-1)^4} = \frac{3}{16}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2(2-n^2)}{7n^3-3} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2-1} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt[3]{n+1}} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n}+2}{2\sqrt{n}-5} = 0$

$\lim_{n\to\infty} \frac{5-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{4n^2-5}} = -\frac{1}{3}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{2^n} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^3}+2}{2n-5} = $ หาไม่ได้

$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{\text{แกว่ง 1 กับ } -1}{\text{เอกซ์โพฐาน 2}} = 0$

ในกรณีที่ a_n ไม่ได้อยู่ในรูปเศษส่วน เราจะมีวิธีทำให้เป็นเศษส่วน โดยการคูณด้วยคอนตูเกต ทั้งเศษและส่วน โดยการคูณด้วยคอนจูเกต จะทำให้เข้าสูตร $(\text{น} + \text{ล})(\text{น} - \text{ล}) = \text{น}^2 - \text{ล}^2$ ได้

หมายเหตุ : คอนจูเกต คือ ตัวที่เหมือนกัน ยกเว้นเครื่องหมายตรงกลาง เปลี่ยนเป็นตรงข้าม

เช่น คอนจูเกต ของ $\sqrt{n}+2$ คือ $\sqrt{n}-2$

คอนจูเกต ของ $3\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$ คือ $3\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}$ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนรูปให้เป็น เศษส่วน โดยการคูณด้วยคอนจูเกต $= \sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ ทั้งเศษและส่วน ดังนี้

$$\begin{aligned}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} &= \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\end{aligned}$$

จะเห็นว่าข้างล่างแรงกว่า ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = 0$ #

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือ ไดเวอร์เจนต์ พร้อมทั้งหาลิมิตของลำดับ ในกรณีที่ $\{a_n\}$ เป็นลำดับคอนเวอร์เจนต์

1. $a_n = \frac{1-3^n}{5\cdot 3^n+4}$
2. $a_n = \frac{2^n+1}{2-3^n}$
3. $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$
4. $a_n = \frac{3n}{0.9^n}$
5. $a_n = \frac{2^{2n+1}-3^n}{4\cdot 2^n+5\cdot 3^n}$
6. $a_n = \frac{2n-1}{3n^2-5n+2}$
7. $a_n = \frac{4n^2+3n-2}{2n^2+n-1}$
8. $a_n = \frac{3+2n^2-n}{2-3n}$
9. $a_n = \frac{4n^3-1}{2n-n^3}$
10. $a_n = \frac{3n+n^2+1-n^2}{2-3n^2}$
11. $a_n = 2-n$
12. $a_n = \frac{1}{n}$
13. $a_n = \frac{3n^2+2n}{(n+1)(n-1)}$
14. $a_n = \frac{(n+2)(2n-5)}{3n-(2n+1)(2n-1)}$
15. $a_n = 5$
16. $a_n = \frac{\sqrt{5n^3+2}+\sqrt{n+2}}{2n\sqrt{n+1}}$

2. กำหนดให้ β เป็นจำนวนจริง และให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่นิยามโดย $a_n = \frac{\beta n - 7}{n+2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ถ้าผลบวก 9 พจน์แรกมีค่ามากกว่าผลบวก 7 พจน์แรกของลำดับ $\{a_n\}$ เป็นจำนวนเท่ากับ a_{108} แล้ว $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/35]

3. พิจารณาลำดับ a_n และ b_n ต่อไปนี้ ลำดับใดบ้าง เป็นลำดับลู่เข้า [A-NET 49/1-16]

$$a_n = \begin{cases} \frac{n^2}{2n+1} & \text{เมื่อ } n \leq 100 \\ 2 & \text{เมื่อ } n > 100 \end{cases} \qquad b_n = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \leq 100 \\ \frac{n^2}{2n+1} & \text{เมื่อ } n > 100 \end{cases}$$

4. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n - a_1}{n}\right) = 5$ ถ้า $a_9 + a_5 = 100$ แล้ว a_{100} เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/29]

5. ถ้า a_n เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง $\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{n}\right) = 4$ แล้ว $\sqrt{\frac{a_{17} - a_9}{2}}$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-15]

6. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ
$a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ ค่าของ $\lim_{n \to \infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 58)/44]

7. ค่าของ $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x(x-1)}-x+2\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/19]

8. กำหนดให้ $a_n=\sqrt{n^2+16n+3}-\sqrt{n^2+2}$ เมื่อ $n=1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{a_n}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/20]

การหาผลบวกอนุกรมด้วยซิกมา

ในคณิตศาสตร์พื้นฐาน เราได้รู้จักสัญลักษณ์ $\sum$ ไปแล้ว

โดย สัญลักษณ์ $\sum\limits_{i=a}^{b} \square$ จะหมายถึงการนำก้อน $\square$ มาบวกซ้ำๆกัน หลายๆก้อน

โดยก้อนแรก ให้ $i = a$ และ ก้อนถัดไป ให้เพิ่ม i ขึ้นทีละ 1 ไปเรื่อยๆ จนจบก้อนสุดท้ายที่ $i = b$

เช่น
$$\sum_{i=3}^{6} i^2 + 1 = (3^2+1)+(4^2+1)+(5^2+1)+(6^2+1)$$
$$= 10 + 17 + 26 + 37 = 80$$
$$\sum_{i=1}^{4} i(i+1) = (1)(1+1)+(2)(2+1)+(3)(3+1)+(4)(4+1)$$
$$= 2 + 6 + 12 + 20 = 40$$

และสมบัติที่สำคัญของ $\sum$ มีดังนี้

- ถ้าหลัง $\sum$ เป็นค่าคงที่ ให้เอาค่าคงที่คูณจำนวนพจน์ที่นำมาบวกกันได้เลย

  เช่น $\sum\limits_{i=1}^{4} 7 = 7 \times 4 = 28$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=1}^{8} 5 = 5 \times 8 = 40$

  $\sum\limits_{i=1}^{10} -3 = -3 \times 10 = -30$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=3}^{9} -2 = -2 \times 7 = -14$

- ดึง “ค่าคงที่” ที่คูณหรือหารอยู่ ออกมาคูณหรือหาร นอก $\sum$ ได้

  เช่น $\sum\limits_{i=1}^{5} 4i = 4 \sum\limits_{i=1}^{5} i$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=1}^{9} -2i^2 = -2 \sum\limits_{i=1}^{9} i^2$

  $\sum\limits_{i=9}^{12} \frac{i}{3} = \frac{1}{3} \sum\limits_{i=9}^{12} i$ $\qquad$ $\sum\limits_{i=1}^{6} -\frac{3i^3}{4} = -\frac{3}{4} \sum\limits_{i=1}^{6} i^3$

- $\sum$ กระจายในการบวกลบได้ แต่กระจายในการคูณหารไม่ได้

  เช่น $\sum\limits_{i=3}^{5} 2^i - i = \sum\limits_{i=3}^{5} 2^i - \sum\limits_{i=3}^{5} i$

  แต่ $\sum\limits_{i=3}^{4} i(i+1) \neq \left(\sum\limits_{i=3}^{4} i\right)\left(\sum\limits_{i=3}^{4} i+1\right)$

  ถ้าจะกระจาย $\sum\limits_{i=3}^{4} i(i+1)$ เราต้องเปลี่ยน $i(i+1)$ ให้อยู่ในรูปของการบวกลบก่อน

  เช่น
  $$\sum_{i=3}^{4} i(i+1) = \sum_{i=3}^{4} i^2 + i$$
  $$= \sum_{i=3}^{5} i^2 + \sum_{i=3}^{5} i$$

ในการหาผลบวกของอนุกรมด้วยซิกมา เราต้องท่องสูตรเพิ่ม 3 สูตร ดังนี้

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2}(n+1)$$
$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right]^2$$

เช่น $1^2+2^2+3^2+4^2+5^2 = \frac{(5)(5+1)(2\cdot5+1)}{6} = \frac{(5)(6)(11)}{6} = 55$

$1+2+3+\dots+12 = \frac{12}{2}(12+1) = 6\times13 = 78$

$1^3+2^3+3^3+\dots+8^3 = \left[\frac{8}{2}(8+1)\right]^2 = (4\times9)^2 = 1296$

จากความรู้ทั้งหมดที่กล่าวมา เราจะสามารถหาผลบวกของอนุกรมบางชนิดได้

โดยมีขั้นตอนง่ายๆ คือ เขียน $\sum$ → กระจาย → ใช้สูตร

เช่น ถ้าต้องการหาค่าของ $9+16+25+\dots+121$ จะมีขั้นตอนการทำ ดังนี้

1) เขียน $\sum$: การเขียน $\sum$ ต้องรู้ 2 อย่าง คือ “สูตรพจน์ทั่วไป” กับ “จำนวนพจน์”

โดยเราต้องเอาสูตรพจน์ทั่วไป มาเปลี่ยน n เป็น i แล้วเติมจำนวนพจน์ไว้ข้างบน $\sum$

ข้อนี้ไม่ใช่ทั้งอนุกรมเลขคณิต หรืออนุกรมเรขาคณิต ต้องเดาสูตรพจน์ทั่วไปเอง

จะเห็นว่า $9+16+25+\dots+121 = 3^2+4^2+5^2+\dots+11^2$

จะได้สูตรพจน์ทั่วไปคือ $a_n = (n+2)^2$

หาจำนวนพจน์ที่บวกกัน โดยแก้สมการ $(n+2)^2 = 11^2$

$n = 9$

ดังนั้น $9+16+25+\dots+121 = \sum_{i=1}^{9}(i+2)^2$

2) กระจาย : ขั้นตอนนี้ ต้องใช้สมบัติของ $\sum$ กระจายเข้าไปให้ลึกที่สุด ดังนี้

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{9}(i+2)^2 &= \sum_{i=1}^{9} i^2+4i+4\\ &= \sum_{i=1}^{9} i^2 + \sum_{i=1}^{9} 4i + \sum_{i=1}^{9} 4\\ &= \sum_{i=1}^{9} i^2 + 4\sum_{i=1}^{9} i + 36\end{aligned}$$

3) ใช้สูตร :

$$\begin{aligned}&= \frac{(9)(10)(19)}{6} + 4\cdot\frac{9}{2}\cdot10 + 36\\ &= 285+180+36\\ &= 501\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{12} i(i+2)$

วิธีทำ ข้อนี้ใจดี ทำเป็นรูป $\sum$ มาให้แล้ว ที่เหลือก็แค่ เอาไปกระจายกับแทนสูตร ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} i(i+2) &= \sum_{i=1}^{12} i^2 + 2i \\
&= \sum_{i=1}^{12} i^2 + \sum_{i=1}^{12} 2i \\
&= \sum_{i=1}^{12} i^2 + 2\sum_{i=1}^{12} i \\
&= \frac{(12)(13)(25)}{6} + 2 \cdot \frac{12}{2} \cdot 13 \\
&= 650 + 156 \\
&= 806
\end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $1 + 2 + 3 + \dots + 20$
   2. $\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+10^3}{1+2+3+\dots+10}$
   3. $\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+k^2}{k}$

2. จงหาค่าของ $(1)(1) + (2)(3) + (3)(5) + \dots + (8)(15)$

3. ค่าของ $\sum_{n=1}^{9999} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})(\sqrt[4]{n}+\sqrt[4]{n+1})}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/40]

4. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ $a_n = \frac{2+4+6+\cdots+2n}{n^2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/35]

5. ถ้า $A = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^k}{1+8+27+\ldots+n^3}\right)$ มีค่าเป็นจำนวนจริงบวกแล้ว แล้วค่าของ A เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/30]

6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+12n+27n+\ldots+3n^3}{1+8+27+\ldots+n^3}\right)$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-16]

7. สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$ ให้ $a_n = 1+2+3+\ldots+n$
ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_2a_3a_4\ldots a_n}{(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)\ldots(a_n-1)}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/37]

8. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n^k}\left[1+(2+2)+(3+3+3)+\cdots+\overbrace{(n+\cdots+n)}^{n \text{ พจน์}}\right]$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวที่ทำให้
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L, \quad L > 0$ แล้ว $6(L+k)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-8]

9. กำหนดให้ $\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1(2)+2(3)+3(4)+\cdots+(n-1)n}=\frac{231}{228}$ จงหาค่าของ n [PAT 1 (ธ.ค. 54)/42]

10. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ สมมุติว่า a_2, a_4, a_8 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $\frac{(a_1-1)^3+(a_2-1)^3+\ldots+(a_n-1)^3}{a_1^3+a_2^3+\ldots+a_n^3} = \frac{391}{450}$ [PAT 1 (พ.ย. 57)/38]

11. กำหนดแบบรูป

$1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5, \ldots$

จำนวนในพจน์ที่ 5060 ของรูปแบบนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/46]

12. หนังสือเล่มหนึ่งมี 500 หน้า หน้าแรกมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 1 หน้า หน้าที่สามมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 3 หน้า หน้าที่เจ็ด มีคำผิด 1 คำ เว้นไป 5 หน้า เป็นเช่นนี้ต่อๆไป จำนวนหน้าที่ไม่มีคำผิดจะเพิ่มขึ้นทีละ 2 หน้า จำนวนคำผิดในหนังสือเล่มนี้เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/44]

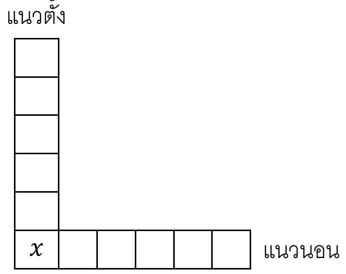
13. พิจารณาการจัดเรียงลำดับของจำนวนคี่ $1, 3, 5, 7, 9, \dots$ ในตารางดังต่อไปนี้

แถวที่ 1	1
แถวที่ 2	3 5
แถวที่ 3	7 9 11
แถวที่ 4	13 15 17 19
แถวที่ 5	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮
⋮	⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

จากตารางจะเห็นว่า จำนวน 15 อยู่ตำแหน่งที่ 2 (จากซ้าย) ของแถวที่ 4

อยากทราบว่า จำนวน 361 จะอยู่ตำแหน่งใดในแถวที่เท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/25]

14. พิจารณารูปต่อไปนี้



ให้เติมจำนวนเต็มบวก $1, 2, 3, \dots, 11$ ลงในช่องรูปสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแนวตั้งเท่ากับ 43 และผลบวกของจำนวนในแนวนอน เท่ากับ 28 จำนวน x ในช่องรูปสี่เหลี่ยมมุม เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/49]

15. จากตารางที่กำหนดให้ มีช่องว่างทั้งหมด 16 ช่อง ดังรูป

		หลัก (ค)		หลัก (ง)	
แถว (ก)		1		5	
แถว (ข)		x		13	

ให้เติมจำนวนเต็มบวก $1, 2, 3, \dots, 16$ ลงในช่องสี่เหลี่ยมช่องละ 1 จำนวน โดยให้ผลบวกของจำนวนในแต่ละแถว ((ก) และ (ข)) และในแต่ละหลัก ((ค) และ (ง)) มีค่าเท่าๆกัน
ถ้าเติมจำนวนเต็มบวก $1, 5, 13$ ดังปรากฏในตารางแล้ว จำนวน x ในตาราง เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ก.ค. 53)/47]

ทบทวนอนุกรมเลขคณิต

สูตรสำหรับหาผลบวกของอนุกรมเลขคณิต มี 2 สูตร ดังนี้

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad (1)$$
$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d] \qquad (2)$$

สูตรแรก จะใช้เมื่อเรารู้พจน์สุดท้าย
นอกนั้น ใช้สูตรที่สอง

เมื่อ S_n คือ ผลบวกของอนุกรม

a_1 คือพจน์แรก , a_n คือพจน์สุดท้าย

n คือจำนวนพจน์ที่นำมาบวก

d คือผลต่างร่วมในลำดับเลขคณิต

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ถ้าลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 10 พจน์แรกเท่ากับ 205 และผลบวกอีก 10 พจน์ถัดไปเท่ากับ 505 แล้ว ผลบวก 55 พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/36]

2. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยมีสมบัติ ดังนี้

   (ก) $a_{15} - a_{13} = 3$

   (ข) ผลบวก m พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 325 และ

   (ค) ผลบวก $4m$ พจน์แรกของลำดับเลขคณิตนี้ เท่ากับ 4900

   แล้วพจน์ a_{2m} เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/17]

3. กำหนดอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{201}$ ถ้า $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{201} = 303$ แล้วจงหาค่าของ $a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{200}$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/15]

4. ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n} = \frac{n+1}{2n-1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\frac{2b_{100}}{a_{100}}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/38]

5. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_{n+1} = n^2 - a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$
ค่าของ a_1 ที่ทำให้ $a_{101} = 5100$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/16]

6. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\frac{a_1}{a_1+2} = \frac{a_2}{a_2+3} = \frac{a_3}{a_3+4} = \ldots = \frac{a_{1000}}{a_{1000}+1001}$
และ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1000} = 250000$ แล้วค่าของ $a_1 + a_{1000}$ เท่ากับเท่าใด
PAT 1 (เม.ย. 57)/36]

ทบทวนอนุกรมเรขาคณิต

สูตรสำหรับหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิต จะมี 2 สูตร ดังนี้

$$S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1-r} \qquad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r} \qquad (2)$$

สูตรแรก จะใช้เมื่อเรารู้พจน์สุดท้าย นอกนั้น ใช้สูตรที่สอง

เมื่อ S_n คือ ผลบวกของอนุกรม

a_1 คือพจน์แรก , a_n คือพจน์สุดท้าย

n คือจำนวนพจน์ที่นำมาบวก

r คืออัตราส่วนร่วมในลำดับเรขาคณิต

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับที่สอดคล้องกับ $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n ถ้า $\sum_{n=1}^{10} a_n = 31$ แล้ว $\sum_{n=1}^{2552} a_n$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/30]

2. ลำดับเรขาคณิตชุดหนึ่ง มีอัตราส่วนร่วมเป็นจำนวนจริงบวก ถ้าผลบวกของสองพจน์แรก เท่ากับ 20 และผลบวกของสี่พจน์แรก เท่ากับ 65 แล้ว ผลบวกของหกพจน์แรก เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/34]

3. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่มี $a_1 = 2$ และ $a_n = 3a_{n-1} + 1$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$ และกำหนดให้ $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 57)/26]
   1. $2S_n = 5(3^{n-1}) - 2n + 1$
   2. $2S_n = 2(3^n) + 3^{n-1} - n - 1$
   3. $4S_n = 4(3^n) + 3^{n-1} - 4n - 1$
   4. $4S_n = 5(3^n) - 2n - 5$

อนุกรมเรขาคณิตดัดแปลง

หัวข้อนี้ จะพูดถึงอนุกรมที่เกิดจากการดัดแปลงอนุกรมเรขาคณิต เอาไปผสมกับอนุกรมอื่น

เช่น $(3\cdot 2)+(5\cdot 2^2)+(7\cdot 2^3)+\ldots+(15\cdot 2^7)$

เกิดจากการผสมระหว่างอนุกรมเรขาคณิต $2\ ,\ 2^2\ ,\ 2^3\ ,\ldots,\ 2^7$ กับ อนุกรมเลขคณิต $3\ ,\ 5\ ,\ 7\ ,\ \ldots\ ,15$

อนุกรมประเภทนี้ ไม่สามารถทำในขั้นตอนเดียวเหมือนที่ผ่านมาได้
แต่ต้องใช้วิธี "หักกับตัวมันเอง" ให้กลายเป็นอนุกรมเรขาคณิตที่ง่ายขึ้นก่อน ดังนี้

1. สมมติให้ผลบวกที่ต้องการหา เท่ากับ x → สมการ (1)
2. คูณหรือหารทั้งสองข้าง ด้วย อัตราส่วนร่วม (r) ของลำดับเรขาคณิต → สมการ (2)
3. เขียน สมการ (1) กับ (2) ให้เลขชี้กำลังของ r ตรงกัน
   นำสมการ (1) กับ (2) มาลบกัน จะเกิดการหักกัน ได้เป็นอนุกรมที่ง่ายขึ้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $(3\cdot 2)+(5\cdot 2^2)+(7\cdot 2^3)+\ldots+(21\cdot 2^{10})$

<u>วิธีทำ</u> อันดับแรก สมมติให้ผลบวกที่ต้องการหา เท่ากับ x

$$(3\cdot 2)+(5\cdot 2^2)+(7\cdot 2^3)+\ldots+(19\cdot 2^9)+(21\cdot 2^{10}) = x \qquad (1)$$

ถัดมา คูณทั้งสองข้าง ด้วย อัตราส่วนร่วม (r) ของลำดับเรขาคณิต จะเห็นว่าข้อนี้ $r=2$

$$(3\cdot 2^2)+(5\cdot 2^3)+(7\cdot 2^4)+\ldots+(19\cdot 2^{10})+(21\cdot 2^{11}) = 2x \qquad (2)$$

จากนั้น เขียน (1) กับ (2) ให้เลขชี้กำลังตรงกัน แล้วเอา $(1)-(2)$ โดยลบเป็นหลักๆ
(ตัวแรกกับตัวสุดท้าย จะไม่มีคู่ลบ ให้ชักลงมา / เปลี่ยนเครื่องหมาย เหมือนตอนลบพหุนามตามปกติ)
จะเห็นว่าผลลบ มีส่วนที่เป็นอนุกรมเรขาคณิต และสามารถใช้สูตร $S_n=\frac{a_1-a_nr}{1-r}$ ต่อได้

$$\begin{array}{rl}
(3\cdot 2)+(5\cdot 2^2)+(7\cdot 2^3)+(9\cdot 2^4)+\ldots+(21\cdot 2^{10}) \qquad\qquad\quad = x & (1) \\
-\quad (3\cdot 2^2)+(5\cdot 2^3)+(7\cdot 2^4)+\ldots+(19\cdot 2^{10})+(21\cdot 2^{11}) = 2x & (2) \\
\hline
(3\cdot 2)+\underbrace{(2\cdot 2^2)+(2\cdot 2^3)+(2\cdot 2^4)+\ldots+(\ 2\cdot 2^{10})}_{\text{อนุกรมเรขาคณิต}\ =\ \frac{2\cdot 2^2-2\cdot 2^{10}\cdot 2}{1-2}\ =\ 4088}-(21\cdot 2^{11}) = -x &
\end{array}$$

$$6 \quad + \quad 4088 \quad - \quad 43008 = -x$$
$$-38194 = -x$$
$$38194 = x$$

ดังนั้น $(3\cdot 2)+(5\cdot 2^2)+(7\cdot 2^3)+\ldots+(15\cdot 2^7)\ =\ 38914$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้
   1. $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 7 \cdot 2^7$

   2. $1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 - \dots + 7 \cdot 2^7$

   3. $1 \cdot 1 + 3 \cdot 3^1 + 5 \cdot 3^2 + \dots + 11 \cdot 3^5$

4. $\frac{1}{2^0}+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{6}{2^5}$

2. กำหนดให้ $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^k}$ เมื่อ $n=1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n(6-3a_n)}{\sqrt{n^2+5n+1}}$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 57)/37]

3. กำหนดให้ $a_n=\frac{n2^{3n}}{3^{2n+1}}$ เมื่อ $n=1, 2, 3, \ldots$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ [PAT 1 (ต.ค. 58)/20]

อนุกรมเทเลสโคปิค

มีอนุกรมจำนวนมาก ที่ไม่ใช่อนุกรมเลขคณิต ไม่ใช่อนุกรมเรขาคณิต และใช้สมบัติของ $\sum$ ไม่ได้
ถ้าจะหาผลบวกของอนุกรมแบบแปลกๆ เราจะต้องใช้เทคนิคอื่นๆมาช่วย ตามลักษณะของอนุกรม

ในหัวข้อนี้ จะพูดถึงเทคนิคการ “ส่อง” พจน์รอบข้างมาหักกัน (Telescope = กล้องส่อง)
หัวใจของเรื่องนี้ คือ การจัดรูปแต่ละพจน์ในอนุกรม ให้เป็น “ผลลบ”
โดยเมื่อแยกเป็นผลลบได้แล้ว เราจะหวังว่า พจน์คู่ที่อยู่ติดกัน จะมีบางตัวตัดกันได้

วิธีจัดรูปพจน์ให้เป็นผลลบ จะมีอยู่ 2 วิธี คือ การใช้คอนจูเกต กับ การแตกเศษส่วน
คอนจูเกต คือ ตัวที่เหมือนกัน ยกเว้นเครื่องหมายตรงกลาง เปลี่ยนเป็นตรงข้าม
เช่น คอนจูเกต ของ $\sqrt{n}+2$ คือ $\sqrt{n}-2$
คอนจูเกต ของ $3\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$ คือ $3\sqrt{n}+2\sqrt{n-1}$ เป็นต้น
โดยการคูณด้วยคอนจูเกต จะทำให้เข้าสูตร $(\text{น}+\text{ล})(\text{น}-\text{ล}) = \text{น}^2-\text{ล}^2$ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{99} \frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}$

<u>วิธีทำ</u> ลองจัดรูปโดยการคูณด้วยคอนจูเกต จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} &= \frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}}\cdot\frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}\\ &= \frac{\sqrt{i+1}-\sqrt{i}}{(i+1)-(i)}\\ &= \sqrt{i+1}-\sqrt{i}\end{aligned}$$

เมื่อเขียนพจน์ในรูปผลลบได้แล้ว ให้กระจาย $\sum$ ด้วยความหวังว่าจะมีบางตัว ตัดกันได้

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} &= \sum_{i=1}^{99}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i})\\ &= (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+(\sqrt{5}-\sqrt{4})+\dots+\\ &\quad(\sqrt{98}-\sqrt{97})+(\sqrt{99}-\sqrt{98})+(\sqrt{100}-\sqrt{99})\end{aligned}$$

จะเห็นว่า “ตัวหน้าของพจน์หน้า” ตัดกับ “ตัวหลังของพจน์หลัง” ได้ทุกคู่พจน์
สุดท้าย จะตัดกันได้ “เกือบ” หมดทุกตัว สิ่งที่ยากก็คือ ต้องคิดให้รอบคอบว่า “เหลือตัวไหน”
เนื่องจาก “ตัวหน้าของพจน์หน้า” ตัดกับ “ตัวหลังของพจน์หลัง”
ดังนั้น จะเหลือ “ตัวหลังของพจน์หน้าสุด” $= -\sqrt{1}$ กับ “ตัวหน้าพจน์หลังสุด” $= \sqrt{100}$

ดังนั้น $\sum_{i=1}^{99}\frac{1}{\sqrt{i+1}+\sqrt{i}} = -\sqrt{1}+\sqrt{100} = -1+10 = 9$ #

นอกจากคอนจูเกต อีกวิธีที่แปลงรูปพจน์ให้เป็นผลลบได้ คือ วิธี "แตกเศษส่วน"
วิธีนี้ จะคล้ายๆกับตอนที่เราลบเศษส่วน เพียงแค่คราวนี้เราจะทำกลับ เพื่อแตกเศษส่วนให้กลายเป็นผลลบ

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{ab} = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{b-a}\right)$$

$$\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc} = \frac{c-a}{abc} \qquad \qquad \frac{1}{abc} = \left(\frac{1}{ab}-\frac{1}{bc}\right)\left(\frac{1}{c-a}\right)$$

$$\frac{1}{abc}-\frac{1}{bcd} = \frac{d-a}{abcd} \qquad \qquad \frac{1}{abcd} = \left(\frac{1}{abc}-\frac{1}{bcd}\right)\left(\frac{1}{d-a}\right)$$

เช่น $\frac{1}{(3)(5)} = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\frac{1}{(2)(6)} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$

$\frac{1}{(2)(3)} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)$ $\qquad$ $\frac{2}{(4)(7)} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$

$\frac{5}{(4)(9)} = \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)$ $\qquad$ $\frac{5}{(2)(3)(5)} = \left(\frac{1}{(2)(3)}-\frac{1}{(3)(5)}\right)\left(\frac{5}{3}\right)$

เมื่อนำความรู้เรื่องการแตกเศษส่วนไปใช้แปลงพจน์ให้เป็นผลลบ เราจะหาผลบวกของอนุกรมบางข้อได้

เช่น
$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{20} \frac{1}{(i)(i+1)} &= \sum_{i=1}^{20} \left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right) \\
&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{20}\right)+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right) \\
&= \frac{1}{1}-\frac{1}{21} \qquad = \frac{20}{21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{12} \frac{2}{(3i-1)(3i+2)} &= \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{3i-1}-\frac{1}{3i+2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) \qquad = \left(\frac{2}{3}\right) \sum_{i=1}^{12} \left(\frac{1}{3i-1}-\frac{1}{3i+2}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{11}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{32}-\frac{1}{35}\right)+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{38}\right)\right] \\
&= \left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{38}\right] \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{18}{38} \qquad = \frac{6}{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{8} \frac{3}{(2i+1)(2i+3)(2i+5)} &= \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}-\frac{1}{(2i+3)(2i+5)}\right)\left(\frac{3}{4}\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right) \sum_{i=1}^{8} \left(\frac{1}{(2i+1)(2i+3)}-\frac{1}{(2i+3)(2i+5)}\right) \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)\left[\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}\right)+\left(\frac{1}{7\cdot9}-\frac{1}{9\cdot11}\right)+\cdots+\right. \\
&\qquad \left.\left(\frac{1}{15\cdot17}-\frac{1}{17\cdot19}\right)+\left(\frac{1}{17\cdot19}-\frac{1}{19\cdot21}\right)\right] \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{19\cdot21}\right] \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)\left[\frac{133-5}{5\cdot19\cdot21}\right] \qquad = \frac{32}{665}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{8}\frac{i^2}{(2i-1)(2i+1)} &= \sum_{i=1}^{8}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right)\left(\frac{i^2}{2}\right) \quad = \left(\frac{1}{2}\right)\sum_{i=1}^{8}\left(\frac{i^2}{2i-1}-\frac{i^2}{2i+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{1^2}{1}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{2^2}{5}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{3^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{7^2}{13}-\frac{7^2}{15}\right)+\left(\frac{8^2}{15}-\frac{8^2}{17}\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1^2}{1}+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{8^2}{15}-\frac{7^2}{15}\right)+\left(-\frac{8^2}{17}\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[\frac{1^2}{1}+\frac{(2-1)(2+1)}{3}+\frac{(3-2)(3+2)}{5}+\cdots+\frac{(8-7)(8+7)}{15}+\left(-\frac{8^2}{17}\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[1+1+1+\cdots+1+\left(-\frac{8^2}{17}\right)\right]\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)\left[8-\frac{64}{17}\right]\\
&= 4-\frac{32}{17} \quad = \frac{68-32}{17} \quad = \frac{36}{17}\end{aligned}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

   1. $\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\frac{1}{7\cdot9}+\cdots+\frac{1}{13\cdot15}$

   2. $\sum_{i=1}^{10}\frac{3}{4i^2-1}$

2. สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ กำหนดให้ $a_n = 1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ และ $b_n = 1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}$ จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่ทำให้ $\frac{a_2a_3\ldots a_n}{b_2b_3\ldots b_n} = 1331$ [PAT 1 (ต.ค. 55)/49]

3. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n = \frac{1}{4+8+12+\cdots+4n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ผลบวกของอนุกรม $a_1+a_2+a_3+\cdots$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/18]

4. สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ กำหนดให้ $a_n = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n$ และ $b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ค่าของ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{2}{b_1} + \frac{3}{b_2} + \frac{4}{b_3} + \cdots + \frac{n+1}{b_n}\right]$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/34]

5. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{16}{n} a_n$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/16]

6. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_n = (a+n-1)(a+n)$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ถ้า a สอดคล้องกับ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \cdots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}}\right) = \frac{1}{312}$ แล้วค่าของ $a^2 + 57$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/35]

7. กำหนดให้ $a_n = \frac{n^2}{16n^2-4}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว a^2+b^2 เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/20]

8. กำหนดให้ $a_n = \sqrt{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^2}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$
ค่าของ $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{20}}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/39]

9. จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}\right)$
[PAT 1 (มี.ค. 55)/35]

10. กำหนดให้ $b_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{k^4+k^2+1}\right)$ จงหาค่า c ที่ทำให้ $\lim_{n\to\infty}(-1+cb_n) = 4$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/37*]

11. ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n = \frac{2^n}{n(n+2)}$ และ $b_n = \frac{3^n}{5n+18}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วอนุกรม $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\frac{a_3}{b_3}+\dots$ มีผลบวกเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/42]

12. ถ้า $A = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(2015)(2016)}$ และ $B = \frac{1}{(1009)(2016)}+\frac{1}{(1010)(2015)}+\dots+\frac{1}{(2016)(1009)}$ แล้วค่าของ $\frac{20A}{11B}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/44]

อนุกรมอนันต์

อนุกรมอนันต์ หมายถึง การนำตัวเลขในลำดับอนันต์ มาบวกกัน ไปเรื่อยๆ อย่างไม่มีที่สิ้นสุด

เช่น $1+3+5+7+\dots$ $\qquad 1+4+9+16+\dots$

$0.3+0.03+0.003+\dots$ $\qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$

ในเรื่องนี้ เราจะได้เรียนวิธีประมาณค่าผลบวกของอนุกรมอนันต์เหล่านี้

อย่างไรก็ตาม ต้องรู้ก่อนว่าอนุกรมอนันต์ “ส่วนใหญ่” หาค่าประมาณของผลบวก<u>ไม่ได้</u>

เช่น $1+3+5+7+\dots$ ผลบวกเพิ่มอย่างไม่มีขอบเขต จึงไม่สามารถประมาณค่าผลบวกได้

$\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}+\dots$ ถึง $\frac{1}{10}$ จะมีค่าน้อย แต่ถ้าบวกอย่างไม่สิ้นสุด ผลบวกก็จะเพิ่มอย่างไม่มีขอบเขตได้ จึงไม่สามารถประมาณค่าผลบวกได้

$(-1)+(-2)+(-3)+\dots$ ผลบวก เป็นค่าติดลบอย่างไม่มีขอบเขต จึงไม่สามารถประมาณค่าผลบวกได้

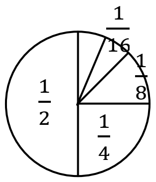
$3+(-3)+3+(-3)+\dots$ ผลบวกแกว่งไปมาระหว่าง 3 กับ 0 จึงประมาณค่าผลบวกไม่ได้

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\dots$ ผลบวกเพิ่มได้อย่างไม่มีขอบเขต เพราะ จับกลุ่ม $\frac{1}{2}$ กี่กลุ่มก็ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&> \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\
&= \frac{1}{2}+\quad\frac{1}{2}\quad+\qquad\frac{1}{2}\qquad+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots \\
&= \text{มากได้อย่างไม่มีขอบเขต}
\end{aligned}$$

แต่ $0.3+0.03+0.003+\dots$ ประมาณค่าผลบวกได้ $0.333333\ldots=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$ ประมาณค่าผลบวกได้ 1 เพราะ



คำศัพท์ที่ใช้ จะใช้คำว่า คอนเวอร์เจนต์ กับ ไดเวอร์เจนต์ คล้ายๆกับในเรื่องลำดับอนันต์

- ถ้าสามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้ จะเรียกว่า อนุกรม “<u>คอน</u>เวอร์เจนต์” (อนุกรมลู่เข้า)
- ถ้า<u>ไม่</u>สามารถหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ได้ จะเรียกว่า อนุกรม “<u>ได</u>เวอร์เจนต์” (อนุกรมลู่ออก)

เราจะเคยเจอคำว่า คอนเวอร์เจนต์ กับ ไดเวอร์เจนต์ ในเรื่องลำดับอนันต์มาแล้ว

ในเรื่องนี้ เราจะต้องสามารถบอกความสัมพันธ์ ระหว่าง ลำดับ / อนุกรม ที่เป็น คอนเวอร์เจนต์ / ไดเวอร์เจนต์ ได้

ในลำดับอนันต์ เราจะสนใจ “ตัวที่ ∞” แต่ในเรื่องอนุกรมอนันต์ เราจะสนใจ “ผลบวก ∞ ตัว”

	คอนเวอร์เจนต์	ไดเวอร์เจนต์
ลำดับอนันต์	หาค่าประมาณของ ตัวที่ ∞ ได้	ตัวที่ ∞ มีค่ามากสุดๆ, ติดลบสุดๆ , หรือแกว่ง
อนุกรมอนันต์	หาค่าประมาณของ ผลบวก ∞ ตัว ได้	ผลบวก ∞ ตัว มีค่ามากสุดๆ, ติดลบสุดๆ , หรือแกว่ง

จากความหมายดังกล่าว จะเห็นว่า “อนุกรม คอนเวอร์เจนต์ยากกว่า ลำดับ”
เพราะอนุกรมอนันต์ต้องหาค่าของ “ทุกตัวบวกกัน” ในขณะที่ลำดับอนันต์ หาค่าของ “ตัวสุดท้าย” ตัวเดียว
เนื่องจาก “อนุกรม คอนเวอร์เจนต์ยากกว่า ลำดับ” ดังนั้น ถ้าเขียนแผนภาพ จะได้ดังนี้

- อนุกรม → คอนยาก → คอนช่องเดียว
- ลำดับ → คอนง่าย → คอน 2 ช่อง

คอน ←	อนุกรมคอน	อนุกรมได	อนุกรมได	→ ได
	ลำดับคอน	ลำดับคอน	ลำดับได	

จากแผนภาพนี้ จะทำให้เราสรุปความสัมพันธ์ระหว่าง ลำดับ / อนุกรม ที่เป็น คอนเวอร์เจนต์ / ไดเวอร์เจนต์ ได้ดังนี้

- ลำดับไดเวอร์เจนต์ จะทำให้เกิด อนุกรมไดเวอร์เจนต์ เสมอ
- ลำดับคอนเวอร์เจนต์ จะทำให้เกิด อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือ ไดเวอร์เจนต์ ก็ได้
- อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ต้องมาจาก ลำดับคอนเวอร์เจนต์ เท่านั้น
- อนุกรมไดเวอร์เจนต์ จะมาจาก ลำดับคอนเวอร์เจนต์ หรือ ไดเวอร์เจนต์ ก็ได้

ตัวอย่างของลำดับที่คอนเวอร์เจนต์ แต่ทำให้เกิดอนุกรมไดเวอร์เจนต์

เช่น ลำดับ $\frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \ldots$ → คอนเวอร์เจนต์ มีลิมิตของลำดับ $= 1$

อนุกรม $\frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \frac{6}{5} + \ldots$ → <u>ไม่</u>คอนเวอร์เจนต์ เพราะทุกตัวที่มาบวก เกิน 1 หมด บวกไป ∞ ตัว จะมากขึ้นได้อย่างไม่มีขอบเขต

หรือ ลำดับ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$ → คอนเวอร์เจนต์ มีลิมิตของลำดับ $= 0$

อนุกรม $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ → <u>ไม่</u>คอนเวอร์เจนต์ เพราะจับกลุ่ม $\frac{1}{2}$ กี่กลุ่มก็ได้ ดังแสดงในหน้าที่แล้ว

ในเรื่องนี้ เรานิยมใช้สัญลักษณ์ S_∞ แทนผลบวกของอนุกรมอนันต์

นอกจากนี้ ยังมีสัญลักษณ์อีกหลายแบบ ที่หมายถึง S_∞ ได้ เช่น $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\lim_{n\to\infty} S_n$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i$

ในการหา S_∞ เรานิยมหา S_n แบบไม่อนันต์ที่ติดตัวแปร n ออกมาก่อน โดยใช้ความรู้ที่เรียนมาในบทก่อนหน้า แล้วค่อยแทน n ด้วย ∞ (หรือพูดอีกแบบว่า “เทคลิมิต ให้ $n \to \infty$”)

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots$

<u>วิธีทำ</u> เราต้องหาผลบวก n ตัวแรก หรือ S_n แบบไม่อนันต์ ออกมาก่อน แล้วค่อยเทคลิมิตให้ $n \to \infty$

เขียนพจน์ทั่วไปของลำดับนี้ ออกมาก่อน จะได้ $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

ดังนั้น $S_n = \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

ข้อนี้ เป็นอนุกรม Telescopic ต้องแยกแต่ละพจน์เป็นผลลบ แล้ว “ส่อง” ตัวข้างๆ มาหัก ดังนี้

$$
\begin{aligned}
S_n &= \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \frac{1}{4\cdot5} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

เทคลิมิตให้ $n \to \infty$ จะได้ $S_\infty = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือ อนุกรมไดเวอร์เจนต์ พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม ในกรณีที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

   1. $1+2+3+4+\ldots$
   2. $10+7+3+(-1)+(-4)+\ldots$
   3. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{7}{10^i}$
   4. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$
   5. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(2i-1)(2i+1)}$
   6. $\sum_{i=1}^{\infty} 1+\frac{1}{2^i}$
   7. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2+i}$
   8. $\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^2-1}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง
   1. ลำดับคอนเวอร์เจนต์ จะทำให้เกิดอนุกรมคอนเวอร์เจนต์เสมอ
   2. อนุกรมไดเวอร์เจนต์ ต้องเกิดจาก ลำดับไดเวอร์เจนต์เท่านั้น
   3. ลำดับไดเวอร์เจนต์ จะทำให้เกิดอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือไดเวอร์เจนต์ก็ได้
   4. อนุกรมคอนเวอร์เจนต์ ต้องเกิดจาก ลำดับคอนเวอร์เจนต์เท่านั้น

3. ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-14]
   1. ถ้า ลำดับ a_n ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า
   2. ถ้า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{a_n}{2^n}\right)$ ลู่เข้า

4. กำหนดให้ $S_k = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, \ldots$
   ค่าของ $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{S_1}} + \frac{1}{\sqrt{S_2}} + \frac{1}{\sqrt{S_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{S_n}}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/41]

5. กำหนดให้ $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}+k\sqrt{k+1}}\right)$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ค่าของ $\lim_{n\to\infty} S_n$ เท่ากับเท่าใด
   [PAT 1 (มี.ค. 53)/36]

6. ถ้า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^4-n^2} = A$ แล้ว $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/31]

1. $\frac{3}{4} + A$
2. $\frac{5}{4} + A$
3. $\frac{3}{4} - A$
4. $\frac{5}{4} - A$

7. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = n^2 a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$
ถ้า $a_1 = 100$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/34]

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

จะเห็นว่าบทนี้ ไม่มีหัวข้อ "อนุกรมเลขคณิตอนันต์"
เพราะอนุกรมเลขคณิตอนันต์เกือบทั้งหมด จะเป็นอนุกรมไดเวอร์เจนต์ หาผลบวกไม่ได้ (ยกเว้น $0+0+0+\ldots$)
เพราะอนุกรมเลขคณิต จะเพิ่มหรือลดอย่างคงที่ไปเรื่อยๆ ทำให้ผลบวก เพิ่มหรือลดไปเรื่อยๆอย่างไม่มีขอบเขต

เช่น $1+3+5+7+\ \ldots$ → บวกไป ∞ ตัว จะได้ผลบวกมีค่ามากได้อย่างไม่มีขอบเขต

$20+19+18+\ \ldots$ → ตัวหลังๆ จะติดลบกันสุดๆ ดังนั้น ผลบวกมีค่าติดลบได้อย่างไม่มีขอบเขต

$\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\frac{1}{100}+\ldots$ → อันนี้เป็นอนุกรมเลขคณิต ที่ $a_1=\frac{1}{100}$ และ $d=0$
ถึงแม้ $\frac{1}{100}$ จะน้อย แต่บวกไป ∞ ตัว ก็จะยังได้ผลบวกมีค่ามากสุดๆได้

สำหรับ อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะมีบางอันคอนเวอร์เจนต์ บางอันไดเวอร์เจนต์

- $|r|<1$ → คอนเวอร์เจนต์ → หาผลบวกอนุกรมอนันต์ได้จากสูตร $\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r}}$
- $|r|\geq 1$ → ไดเวอร์เจนต์ → หาผลบวกอนุกรมอนันต์ไม่ได้

ดังนั้น ถ้าเจอโจทย์อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ก็อย่าเพิ่งรีบใช้สูตร แต่ให้เช็คให้แน่ใจว่า $|r|<1$ ก่อน จึงจะใช้สูตรได้
ที่สำคัญ ตอนใช้สูตรนี้ ต้องแม่นเรื่องเศษส่วนซ้อน กล่าวคือ $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}$, $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\div\frac{b}{c}$, $\frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{b}\div c$

เช่น $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$ → $|r|=\left|\frac{1}{2}\right|<1$ → $S_\infty=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{2}{1}=1$

$1+(-2)+4+(-8)+\ldots$ → $|r|=|-2|\geq 1$ → ไดเวอร์เจนต์ หาผลบวกไม่ได้

$3-\frac{6}{5}+\frac{12}{5^2}-\frac{24}{5^3}+\ldots$ → $|r|=\left|-\frac{2}{5}\right|<1$ → $S_\infty=\frac{3}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)}=\frac{3}{\frac{7}{2}}=3\times\frac{2}{7}=\frac{6}{7}$

$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{(-3)^i}=\frac{2}{-3}+\frac{2}{(-3)^2}+\frac{2}{(-3)^3}+\ldots$ → $|r|=\left|\frac{1}{-3}\right|<1$

→ $S_\infty=\frac{\frac{2}{-3}}{1-\left(\frac{1}{-3}\right)}=\frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}=-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i+3}{5^{i-1}} &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{5^{i-1}}+\frac{3}{5^{i-1}}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{2^i}{5^{i-1}}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3}{5^{i-1}}\\ &= \frac{2}{1-\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{3}{1-\left(\frac{1}{5}\right)}\\ &= \left(2\div\frac{3}{5}\right)+\left(3\div\frac{4}{5}\right)\\ &= \frac{10}{3}+\frac{15}{4}=\frac{85}{12}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1-(3\cdot 2^i)}{(-3)^i} &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^i}-\frac{3\cdot 2^i}{(-3)^i}\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(-3)^i}-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{3\cdot 2^i}{(-3)^i}\\ &= \frac{\frac{1}{-3}}{1-\left(\frac{1}{-3}\right)}-\frac{\frac{3\cdot 2}{-3}}{1-\left(\frac{2}{-3}\right)}\\ &= \left(-\frac{1}{3}\div\frac{4}{3}\right)-\left(-2\div\frac{5}{3}\right)\\ &= -\frac{1}{4}+\frac{6}{5}=\frac{19}{20}\end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้เป็นอนุกรมเรขาคณิตดัดแปลงอนันต์ โดยมีเศษเป็นอนุกรมเลขคณิต แต่ส่วนเป็นอนุกรมเรขาคณิต เทคนิคการหาผลบวกของอนุกรมเรขาคณิตดัดแปลง ต้องนำอนุกรมมา “หักกับตัวมันเอง”

ให้สิ่งที่ต้องการหา เท่ากับ x $\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots = x \quad (1)$

คูณสองข้างด้วย 2 $\quad 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\cdots = 2x \quad (2)$

$(2)-(1) \quad \underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}_{S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2} = x$

ดังนั้น $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots = 2$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์ หรือ อนุกรมไดเวอร์เจนต์ พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม ในกรณีที่เป็นอนุกรมคอนเวอร์เจนต์

1. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i}$

2. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^i$

3. $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$

4. $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^i$

5. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^i+3^i}{2^{2i}}$

6. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2i+1}{3^i}$

2. กำหนดให้อนุกรมต่อไปนี้

$$A = \sum_{k=1}^{1000} (-1)^k \qquad B = \sum_{k=3}^{20} k^2 \qquad C = \sum_{k=1}^{100} k \qquad D = \sum_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

ค่าของ $A + B + C + D$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/23]

3. ให้ $T(x) = \sin x - \cos^2 x + \sin^3 x - \cos^4 x + \sin^5 x - \cos^6 x + \dots$
แล้วค่าของ $3T\left(\frac{\pi}{3}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/6]

4. ถ้า $\frac{1}{a} + \frac{1}{3} + \frac{a}{3^2} + \frac{a^2}{3^3} + \cdots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมีผลบวกเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว a มีค่าเท่าใด [A-NET 49/2-7]

5. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตซึ่ง $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ แล้ว จงเขียน a_2 ในรูปของ r

6. ผลบวกของอนุกรม $3+\frac{11}{4}+\frac{33}{16}+\cdots+\frac{3^n+2^n-2}{4^{n-1}}+\cdots$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/17]

7. กำหนดให้ $a_n=\frac{2^{n+1}+3^{n-1}}{4^n}$ และ $b_n=\frac{1}{1+2+\cdots+n}$ ถ้า A และ B เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ ตามลำดับ แล้ว $A+B$ เท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-19]

8. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2b+1}{2n^2a-1}=1$ แล้วผลบวกของอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right)^n$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/29]

9. ให้ k เป็นค่าคงที่ และถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{k(n^5+n)+3n^4+2}{(n+2)^5} = 15+6+\frac{12}{5}+\cdots+15\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}+\cdots$
แล้ว k มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/40]

10. กำหนดให้ $a_n = \frac{1+2+2^2+2^3+\ldots+2^n}{3^{2n}}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$
ค่าของ $\lim_{n\to\infty} (a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 58)/23]

11. กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง
โดยที่ $3a_{n+1} = a_n$ และ $2^n b_n = a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$
ถ้า $a_5 = 2$ แล้ว อนุกรม $b_1+b_2+b_3+\ldots$ มีผลบวกเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 59)/35]

12. กำหนดให้ $a_n = \frac{2}{4n^2-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ [PAT 1 (มี.ค. 59)/24]

13. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง
    โดยที่ $\sum_{n=1}^{25} a_n = 1900$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = 8$ ค่าของ a_{100} ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 59)/20]

14. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = \frac{1}{6}$ และ $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3^n}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \ldots$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/20]

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 0.75

15. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 55)/15]

1. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n+b^n}{(a+b)^n} = \frac{a^2+b^2}{ab}$
2. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_m} = \frac{n^2}{m^2}$ สำหรับจำนวนเต็มบวก n และ m ที่แตกต่างกัน แล้ว $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$

16. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม และ

$$\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4}+\frac{a_3+a_5}{a_4+a_6}+\frac{a_5+a_7}{a_6+a_8}+\ldots+\frac{a_{2011}+a_{2013}}{a_{2012}+a_{2014}}=2012$$

ค่าของ $1+5r+12r^2+22r^3+\cdots$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/34]

17. จงหาค่า $x>0$ ที่ทำให้ $1+\frac{6}{1+x}+\frac{15}{(1+x)^2}+\frac{28}{(1+x)^3}+\cdots = \frac{27}{4}$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/36]

ทบทวนลำดับเลขคณิต

1. 4001 2. 300 3. 2 4. 20
5. 205

ทบทวนลำดับเรขาคณิต

1. 49 2. 156 3. $\frac{1}{3}$ 4. 2.5

ทบทวนลำดับเวียนเกิด

1. 2 2. 1704 3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$

ลำดับพหุนาม

1. 1. $a_n = n^2 - 7$ 2. $a_n = 3 - n^2$
2. 393

ลิมิตของลำดับ

1. 1 ได 2. ได 3. คอน, 0 4. ได
   5. ได 6. คอน, 1 7. คอน, 0 8. ได
   9. คอน, 0 10. คอน, $\frac{3}{2}$ 11. ได 12. คอน, $\sqrt{3}$
2. 0 3. 6 4. 24.96

การหาลิมิตในรูปเศษส่วน

1. 1. คอน, $-\frac{1}{5}$ 2. คอน, 0 3. คอน, 0 4. ได
   5. ได 6. คอน, 0 7. คอน, 2 8. ได
   9. คอน, -4 10. คอน, 0 11. ได 12. คอน, 0
   13. คอน, 3 14. คอน, $-\frac{1}{2}$ 15. คอน, 5 16. คอน, $\frac{\sqrt{5}}{2}$
2. 2 3. a_n 4. 515 5. $2\sqrt[4]{2}$
6. 0.5 7. $\frac{3}{2}$ 8. 2

การหาผลบวกอนุกรมด้วยซิกมา

1. 1. 210 2. 55 3. $\frac{(k+1)(2k+1)}{6}$
2. 372 3. 9 4. 1 5. 8
6. 4 7. 3 8. 20 9. 115

10. 14 11. 10 12. 22 13. $10, 19$
14. 5 15. 9

ทบทวนอนุกรมเลขคณิต

1. 4840 2. $\frac{121}{2}$ 3. 300 4. 3.97
5. 50 6. 500

ทบทวนอนุกรมเรขาคณิต

1. $2^{1276}-1$ 2. 166.25 3. 4

อนุกรมเรขาคณิตดัดแปลง

1. 1. 1538 2. 626 3. 3646 4. $\frac{15}{4}$
2. 3 3. 24

อนุกรมเทเลสโคปิค

1. 1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{10}{7}$
2. 36 3. $\frac{1}{2}$ 4. 2.25 5. 4
6. 201 7. 257 8. 7 9. 1
10. 10 11. 8 12. 2750

อนุกรมอนันต์

1. 1. ได 2. ได 3. คอน , $0.777\ldots$ 4. ได
5. คอน , $\frac{1}{2}$ 6. ได 7. คอน , 1 8. คอน , $\frac{3}{4}$
2. 4 3. - 4. 2 5. 1
6. 3 7. 200

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

1. 1. คอน , 1 2. คอน , $-\frac{1}{3}$ 3. ได 4. ได
5. คอน , 4 6. คอน , 2
2. 7917 3. $6\sqrt{3}-1$ 4. 1.5 5. $4r-4r^2$
6. $\frac{40}{3}$ 7. 5 8. $\frac{2}{3}$ 9. 25
10. $\frac{25}{56}$ 11. 97.2 12. $\frac{5}{4}$ 13. 598
14. 1 15. $1, 2$ 16. 16 17. 2

เครดิต

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ Gunta Serikijcharoen

และ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารด้วยครับ