
ระบบจำนวนจริง

สารบัญ

การสร้างเครื่องหมายใหม่	1
ทบทวนพหุนาม	8
การหารสังเคราะห์.....	9
ทฤษฎีเศษ.....	11
การแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ.....	13
สมการดีกรีสูง	16
ทบทวนอสมการ	21
ทบทวนค่าสัมบูรณ์.....	25
การแบ่งกรณีค่าสัมบูรณ์	30
สมบัติความบริบูรณ์.....	35

การสร้างเครื่องหมายใหม่

ในเรื่องนี้ โจทย์จะสร้าง “เครื่องหมายใหม่” เพิ่มเติมจากเครื่องหมาย $+$ $-$ $\times$ $\div$ ที่เราใช้ประจำ

โดยโจทย์จะให้ “วิธีใช้” เครื่องหมายที่สร้างใหม่นั้นมา แล้วให้หาค่าผลลัพธ์ หรือตรวจสอบสมบัติต่างๆของเครื่องหมายใหม่นั้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $a \otimes b = a + ab$ จงหาค่าของ $2 \otimes 3$

วิธีทำ แทน $a = 2$, $b = 3$ จะได้ $2 \otimes 3 = 2 + (2)(3)$
 $= 8$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $m \Delta n = \frac{m+n}{n}$ จงหาค่าของ $((4 \Delta 2) \Delta 3) - (5 \Delta 1)$

วิธีทำ $((4 \Delta 2) \Delta 3) - (5 \Delta 1) = (\frac{4+2}{2} \Delta 3) - (5 \Delta 1)$
 $= (3 \Delta 3) - (5 \Delta 1)$
 $= \frac{3+3}{3} - \frac{5+1}{1}$
 $= 2 - 6 = -4$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x * y = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \geq y \\ y - x & \text{เมื่อ } x < y \end{cases}$ จงหาค่าของ $(1 * 5) * (2 * 0)$

วิธีทำ ข้อนี้ $x * y$ มีสองสูตร เราต้องเลือกใช้สูตร ตามเงื่อนไขว่า $x \geq y$ หรือ $x < y$

เช่น ถ้าจะหา $1 * 5$ ต้องแทน $x = 1$ และ $y = 5$ จะเห็นว่า $x < y$ ดังนั้น ต้องใช้สูตร $y - x$

จะได้ $1 * 5 = 5 - 1 = 4$

และ ถ้าจะหา $2 * 0$ ต้องแทน $x = 2$ และ $y = 0$ จะเห็นว่า $x \geq y$ ดังนั้น ต้องใช้สูตร x^2

จะได้ $2 * 0 = 2^2 = 4$

ดังนั้น $(1 * 5) * (2 * 0) = 4 * 4$

$= 4^2$ (ใช้สูตร x^2 เพราะ $4 \geq 4$)

$= 16$

#

ตัวอย่าง สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $a \ominus b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

$$1. \quad 1 \ominus 1 = 1$$

$$2. \quad a \ominus 1 = ((a - 1) \ominus 1) + 1$$

$$3. \quad a \ominus b = (a \ominus (b - 1)) + 2$$

จงหาค่าของ $(3 \ominus 3)$

<u>วิธีทำ</u> $3 \ominus 3 = (3 \ominus (3 - 1)) + 2$ (ใช้ข้อ 3.) $= (3 \ominus 2) + 2$ $= (3 \ominus (2 - 1)) + 2 + 2$ (ใช้ข้อ 3.) $= (3 \ominus 1) + 4$ $= ((3 - 1) \ominus 1) + 1 + 4$ (ใช้ข้อ 2.)	$= (2 \ominus 1) + 5$ $= ((2 - 1) \ominus 1) + 1 + 5$ (ใช้ข้อ 2.) $= (1 \ominus 1) + 6$ $= 1 + 6$ (ใช้ข้อ 1.) $= 7$
---	---

ดังนั้น $3 \ominus 3 = 7$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $m \diamond n = m + n - 3$ จงพิจารณาว่าข้อใดผิด

1. $m \diamond n = n \diamond m$
2. $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$
3. $a \diamond -a = -3$ เสมอ
4. $x(y \diamond z) = xy \diamond xz$

วิธีทำ 1. จากโจทย์จะได้ $m \diamond n = m + n - 3$

$n \diamond m = n + m - 3$ จะเห็นว่า $m \diamond n = n \diamond m$ ดังนั้น ข้อ 1. ถูกต้อง

$$\begin{array}{l|l} 2. (a \diamond b) \diamond c = (a + b - 3) \diamond c & a \diamond (b \diamond c) = a \diamond (b + c - 3) \\ = (a + b - 3) + c - 3 & = a + (b + c - 3) - 3 \\ = a + b + c - 6 & = a + b + c - 6 \end{array}$$

จะเห็นว่า $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$ ดังนั้น ข้อ 2. ถูกต้อง

$$3. a \diamond -a = a + -a - 3 = -3 \text{ ดังนั้น ข้อ 3. ถูกต้อง}$$

$$4. \begin{array}{l|l} x(y \diamond z) = x(y + z - 3) & xy \diamond xz = xy + xz - 3 \\ = xy + xz - 3x & \end{array}$$

จะเห็นว่า ผังซ้ายเป็น $-3x$ แต่ฝั่งขวาเป็น -3 เฉยๆ จึงไม่เท่ากัน ดังนั้น ข้อ 4. ผิด

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

1. $\oplus$ มีสมบัติการสลับที่
2. $\oplus$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
3. $\oplus$ มีสมบัติปิดบนจำนวนคู่
4. $a \oplus a = 2a \oplus 0$ เสมอ

วิธีทำ 1. สมบัติการสลับที่ จะเป็นจริงได้ ต้องดูว่า $a \oplus b = b \oplus a$ หรือไม่

$$\begin{array}{l} \text{จากโจทย์จะได้ } a \oplus b = \frac{a+b}{2} \\ b \oplus a = \frac{b+a}{2} \end{array} \text{ จะเห็นว่า } a \oplus b = b \oplus a \text{ ดังนั้น ข้อ 1. ถูกต้อง}$$

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ จะเป็นจริง ต้องดูว่า $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ หรือไม่

$$\begin{array}{l} \text{จากโจทย์จะได้ } (a \oplus b) \oplus c = \left(\frac{a+b}{2}\right) \oplus c \\ = \frac{\frac{a+b}{2} + c}{2} = \frac{a+b+2c}{4} \\ a \oplus (b \oplus c) = a \oplus \left(\frac{b+c}{2}\right) \\ = \frac{a + \frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4} \end{array}$$

จะเห็นว่า $(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c)$ ดังนั้น ข้อ 2. ผิด

3. สมบัติปิดบนจำนวนคู่ ต้องดูว่า ถ้านำจำนวนมา $\oplus$ กัน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่เสมอ หรือไม่

จะเห็นว่า การคำนวณ $\oplus$ จะมีการหารด้วย 2 อยู่ ทำให้อาจได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่ได้

$$\text{เช่น } 2 \oplus 4 = \frac{2+4}{2} = 3 \text{ ดังนั้น ข้อ 3. ผิด}$$

$$4. a \oplus a = \frac{a+a}{2} = a$$

$$2a \oplus 0 = \frac{2a+0}{2} = a \text{ เท่ากัน ดังนั้น ข้อ 4. ถูกต้อง}$$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $a \nabla b = ab + ba$ จงเติมประโยคต่อไป่นี้ให้สมบูรณ์

1. $2 \nabla 3 =$
2. $(3 \nabla -1) \nabla 1 =$
3. $0 \nabla a =$
4. $a \nabla \frac{1}{2} =$

2. กำหนดให้ $a \Omega b = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > b \\ b & \text{เมื่อ } a < b \\ 2a & \text{เมื่อ } a = b \end{cases}$ และ $a \Phi b = \begin{cases} b & \text{เมื่อ } a > b \\ a & \text{เมื่อ } a < b \\ b/2 & \text{เมื่อ } a = b \end{cases}$

จงหาค่าของ

1. $2 \Omega 3 =$

2. $(3 \Omega -1) \Omega 1 =$

3. $2 \Phi 3 =$

4. $(1 \Phi 2) \Omega 1 =$

5. $(3 \Phi 2) \Omega (1 \Phi 2) =$

6. $(a \Omega a) \Phi 2a =$

3. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $x \bigcirc y$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $x \bigcirc x = x^2$

2. $x \bigcirc y = y \bigcirc x$

3. $x \bigcirc (x + y) = 2(x \bigcirc y)$

จงหาค่าของ

1. $1 \bigcirc 1$

2. $1 \bigcirc 2$

3. $2 \bigcirc 1$

4. $2 \bigcirc 2$

5. $4 \bigcirc 2$

6. $40 \bigcirc 30$

4. กำหนดให้ $a \star b = \sqrt{ab}$ และ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

1. $x \star y = y \star x$

2. $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

3. $x \star 0 = 0$

4. $x \star 1 = x$

5. $x + (y \star z) = (x + y) \star (x + z)$

6. $x(y \star z) = xy \star xz$

5. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a \star b = \sqrt{a+b}$ สำหรับ $a, b \in N$
ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 53)/5]

1. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

2. $a \star (b + c) = (a \star b) + (a \star c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

6. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a \star b = a^b$ สำหรับ $a, b \in N$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงบ้าง สำหรับ $a, b, c \in N$ [PAT 1 (มี.ค. 53)/24]

ก. $a \star b = b \star a$

ข. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$

ค. $a \star (b + c) = (a \star b) + (a \star c)$

ง. $(a + b) \star c = (a \star c) + (b \star c)$

7. นิยาม $a * b = a^b$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [PAT 1 (มี.ค. 55)/24]

1. $a * (b * c) = (a * c) * b$

2. $(a * b) * c = a * (bc)$

3. $a * (b * c) = (a * b) * c$

4. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

8. กำหนดให้ $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [PAT 1 (ธ.ค. 54)/23]

1. $(x - 1) * (x + 1) = (x * x) - 1$

2. $x * (y + 2) = (x * y) + (x * 2)$

3. $x * (y * 2) = (x * y) * 2$

4. $x * (x * y) = (x + 1)(x * y) + x$

9. ให้ N แทนเซตของจำนวนนับ สำหรับ $a, b \in N$

$$a \ominus b = \begin{cases} a & , \quad a > b \\ a & , \quad a = b \\ b & , \quad a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a \triangle b = \begin{cases} b & , \quad a > b \\ a & , \quad a = b \\ a & , \quad a < b \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง สำหรับ $a, b, c \in N$ [PAT 1 (ต.ค. 53)/20]

1. $a \ominus b = b \ominus a$
2. $a \ominus (b \ominus c) = (a \ominus b) \ominus c$
3. $a \triangle (b \ominus c) = (a \triangle b) \ominus (a \triangle c)$

10. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $a \otimes b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

(ก) $a \otimes a = a + 4$

(ข) $a \otimes b = b \otimes a$

(ค) $\frac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \frac{a+b}{b}$

ค่าของ $(8 \otimes 5) \otimes 100$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/49]

11. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$

(2) $x * (1 * x) = 1 * x$

(3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/49]

ทบทวนพหุนาม

หัวข้อที่นิยมออกข้อสอบในเรื่องนี้ คือ การหารพหุนาม และการเทียบสัมประสิทธิ์

- หารพหุนามโดยการตั้งหารยาว

เช่น $(x^2 - 2x + 5) \div (x + 2)$

โดยจะได้ ตัวตั้ง = (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) + เศษ

นั่นคือ $x^2 - 2x + 5 = (x + 2)(x - 4) + 13$

สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ดีกรีตัวตั้ง - ดีกรีตัวหาร เสมอ

$$\begin{array}{r} x - 4 \\ x + 2 \overline{) x^2 - 2x + 5} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -4x + 5 \\ \underline{-4x - 8} \\ 13 \end{array}$$

- การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำได้เมื่อ พหุนามมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะแทน x ด้วยอะไร

เช่น ถ้า $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - 3x^2 + 5$ สำหรับ ทุกๆ x

เราจะได้ทันทีว่า $a = 2, b = -3, c = 0, d = 5$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $Q(x) = x^2 + 9$

ถ้า $Q(x)$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว $P(a) + P(b)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-2]

2. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$
ถ้ามีฟังก์ชันพหุนาม $Q(x)$ โดยที่ $f(x) = (Q(x))^2$ แล้ว จงหา $a + b$ [PAT 1 (ต.ค. 53)/19*]

การหารสังเคราะห์

ปกติ เราจะหารพหุนามด้วยวิธี “ตั้งหารยาว” ซึ่งใช้แรงเยอะและเปลืองกระดาษ

ในกรณีที่ “ตัวหาร” อยู่ในรูป $x + ?$ หรือ $x - ?$ เราจะมีวิธีหารอีกแบบซึ่งรวดเร็วกว่า เรียกว่า “หารสังเคราะห์”

เช่น ถ้าจะหา $(2x^3 - x^2 + 5) \div (x - 2)$ โดยวิธีหารยาว เทียบกับวิธีหารสังเคราะห์ จะเป็นดังนี้

$$\begin{array}{r}
 \text{ตัวหาร} \leftarrow x - 2 \overline{) 2x^3 - x^2 + 0x + 5} \rightarrow \text{ผลลัพธ์} \\
 \underline{2x^3 - 4x^2} \quad \rightarrow \text{ตัวตั้ง} \\
 3x^2 + 0x \\
 \underline{3x^2 - 6x} \\
 6x + 5 \\
 \underline{6x - 12} \\
 17 \rightarrow \text{เศษ}
 \end{array}$$

หารยาวธรรมดา

$$\begin{array}{r}
 \text{ตัวหาร} \leftarrow 2 \overline{) \begin{array}{cccc} & \text{ตัวตั้ง} & & \\ 2 & -1 & 0 & 5 \\ & 4 & 6 & 12 \\ \hline 2 & 3 & 6 & 17 \end{array}} \\
 \text{ผลลัพธ์} \quad \rightarrow \text{เศษ}
 \end{array}$$

หารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ จะมีขั้นตอนดังนี้

- เขียนตัวตั้ง โดยเขียนเฉพาะตัวเลข ไม่ต้องเขียน x
โดยให้เขียนเรียงตามเลขชี้กำลังของ x
ถ้าเลขชี้กำลังไหนไม่มี ให้ใส่ 0

$$\begin{array}{r}
 2x^3 - x^2 + 5 \\
 \downarrow \\
 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5
 \end{array}$$

- เขียนตัวหาร ให้เอาตัวเลขหลัง x มาเปลี่ยนเครื่องหมาย
เช่น ถ้าตัวหารเป็น $x + 2$ ก็เขียน -2
ถ้าตัวหารเป็น $x - 3$ ก็เขียน 3

$$\begin{array}{r}
 x - 2 \\
 \swarrow 2 \\
 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5
 \end{array}$$

หมายเหตุ: ตัวหารต้องอยู่ในรูป $x + ?$ หรือ $x - ?$ เท่านั้น ถึงจะหารสังเคราะห์ได้

- เริ่มจากตัวเลขแรกของตัวตั้ง ให้ชักลงมา

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5} \\
 \downarrow 2
 \end{array}$$

- เอาตัวหาร คูณกับตัวที่ชักลงมา ใส่ในช่องกลางของแถวถัดไป
บวกตัวเลขแถวถัดไป ลงมาทางแถวล่าง

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5} \\
 \downarrow \times \quad \downarrow + \\
 2 \quad 4 \quad 6 \quad 12 \\
 \hline
 2 \quad 3 \quad 6 \quad 17
 \end{array}$$

- ทำแบบข้อ 4 ไปเรื่อยๆ จนถึงแถวสุดท้าย เป็นอันเสร็จ

วิธีอ่านผลลัพธ์ คือ ขวาล่างจะเป็นเศษ ที่เหลือถัดมาทางซ้าย คือ ตัวเลขของผลหาร แบบเรียงกำลัง

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5} \\
 \downarrow \times \quad \downarrow + \\
 2 \quad 4 \quad 6 \quad 12 \\
 \hline
 2 \quad 3 \quad 6 \quad 17
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 \overline{) 2 \quad -1 \quad 0 \quad 5} \\
 \downarrow \times \quad \downarrow + \\
 2 \quad 4 \quad 6 \quad 12 \\
 \hline
 2 \quad 3 \quad 6 \quad 17
 \end{array}$$

ผลหาร = $2x^2 + 3x + 6$, เศษ = 17

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ เช่น

$$(x^2 + 2x + 5) \div (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 2 & 5 \\ & & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\text{ผลหาร} = x, \quad \text{เศษ} = 5$$

$$(2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 9x + 8) \div (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 10 & -9 & 8 \\ & & -6 & 9 & -15 & 15 & -18 \\ \hline & 2 & -3 & 5 & -5 & 6 & -10 \end{array}$$

$$\text{ผลหาร} = 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 6, \quad \text{เศษ} = -10$$

$$(x^4 + 2x^2 - 3) \div (x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

$$\text{ผลหาร} = x^3 + x^2 + 3x + 3$$

$$\text{เศษ} = 0 \quad (\text{หารลงตัว})$$

$$(2x^2 + x^2 - 3) \div \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & -3 \\ & & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

$$\text{ผลหาร} = 2x - 2, \quad \text{เศษ} = 0 \quad (\text{หารลงตัว})$$

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลหารและเศษโดยใช้วิธีหารสังเคราะห์

1. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$

2. $(-2x^3 + x^2 + 10) \div (x - 2)$

3. $(3x^2 + 2x - 5) \div (x - 1)$

4. $(x^4 - 16) \div (x + 2)$

ทฤษฎีเศษ

ในกรณีที่เรา “อยากรู้แค่เศษ แต่ไม่อยากรู้ผลหาร” เรามีวิธีที่ง่ายยิ่งกว่าหารสังเคราะห์อีก ซึ่งเรียกว่า “ทฤษฎีเศษ”
 ถ้าอยากรู้ว่าเศษเท่าไร ให้เอา “ตัวเลขหลัง x ของตัวหาร” มาเปลี่ยนเครื่องหมาย แทนลงไปในตัวตั้ง จะได้เศษทันทีเลย
 เช่น ถ้าตัวหาร คือ $x + 2$ ก็ให้เอา -2 แทนในตัวตั้ง
 ถ้าตัวหาร คือ $x - 3$ ก็ให้เอา 3 แทนในตัวตั้ง

ตัวอย่าง จงหาเศษจากการหาร $x^2 + 3x + 5$ ด้วย $x + 2$

วิธีทำ ข้อนี้ จะตั้งหารยาวก็ได้ หรือจะหารสังเคราะห์ก็ได้ จะได้ทั้งผลหาร และเศษ

แต่ข้อนี้ โจทย์ไม่ได้ถามผลหาร ดังนั้น วิธีที่ง่ายที่สุดคือ ใช้ทฤษฎีเศษ

ตัวหาร คือ $x + 2$ ดังนั้น เอา -2 แทนในตัวตั้ง จะได้ $(-2)^2 + 3(-2) + 5 = 3$

ดังนั้น การหารนี้ ได้เศษ 3

#

ตัวอย่าง จงหาว่า $x - 1$ หาร $x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ ลงตัวหรือไม่

วิธีทำ “หารลงตัว” แปลว่า “เศษเป็นศูนย์”

ดังนั้น ถ้าอยากรู้ว่าหารลงตัวไหม ก็แค่ใช้ทฤษฎีเศษเช็คว่าได้เศษเป็นศูนย์หรือไม่

ตัวหารคือ $x - 1$ ดังนั้น เอา 1 ไปแทนตัวตั้ง จะได้ $(1)^3 - 2(1)^2 + 3(1) - 2 = 0$ ดังนั้น หารลงตัว

#

ตัวอย่าง ถ้า $x^2 + kx + 4$ หารด้วย $x + 3$ เหลือเศษ 7 แล้ว จงหาค่า k

วิธีทำ หารด้วย $x + 3$ เหลือเศษ 7 แสดงว่า ถ้าแทน -3 ลงในตัวตั้ง จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 7

$$\begin{aligned} (-3)^2 + k(-3) + 4 &= 7 \\ 9 - 3k + 4 &= 7 \\ -3k &= -6 \\ k &= 2 \end{aligned}$$

#

หมายเหตุ : ทฤษฎีเศษ แบบเป็นทางการ คือ “พหุนาม $P(x)$ หารด้วย $x - c$ จะเหลือเศษเท่ากับ $P(c)$ ”

$\nwarrow$ ตัวตั้ง $\nwarrow$ เปลี่ยนเครื่องหมาย $\nwarrow$ แทน c ลงในตัวตั้ง

แบบฝึกหัด

1. จงหาเศษจากการหารต่อไปนี้

1. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$

2. $(-2x^3 + x^2 + 10) \div (x - 2)$

3. $(x^4 - 16) \div (x + 2)$

2. จงหาค่า c ที่ทำให้ $x + 1$ หาร $x^3 - x^2 + cx + 4$ ลงตัว

3. จงหาค่า c ทั้งหมด ที่ทำให้ $x - c$ หาร $x^2 - 2$ เหลือเศษ 2

4. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $ax^5 + bx + 4$ หารด้วย $(x - 1)^2$ ลงตัว แล้ว $a - b$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/27]

การแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ

วิธีนี้ จะใช้ในการแยกตัวประกอบพหุนามที่ดีกว่า 2 ที่แยกด้วยวิธีอื่นไม่ได้ ซึ่งจะมีขั้นตอนดังนี้

1. สร้างลิสของจำนวนในรูป $\pm \frac{\text{ตัวประกอบของ พจน์ตัวเลข ที่ไม่มี } x}{\text{ตัวประกอบของ สปส พจน์กำลังสูงสุด}}$

เช่น $x^3 + 2x^2 - 3x + 3$

$$\rightarrow \pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } 3}{\text{ตัวประกอบของ } 1} = \pm \frac{1,3}{1}$$

$$\rightarrow 1, -1, 3, -3$$

$2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

$$\rightarrow \pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } -6}{\text{ตัวประกอบของ } 2} = \pm \frac{1,2,3,6}{1,2}$$

$$\rightarrow 1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$$

$x^4 - 2x - 12$

$$\rightarrow \pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } -12}{\text{ตัวประกอบของ } 1} = \pm \frac{1,2,3,4,6,12}{1}$$

$$\rightarrow 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12$$

2. นำแต่ละตัวในลิส แทนเป็นค่า x ในพหุนาม คัดเลขออกมา

แทนไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ค่า c ที่แทนแล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์

เช่น $2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

$$1: 2(1)^3 + 3(1)^2 - 5(1) - 6 = -6$$

$$2: 2(2)^3 + 3(2) - 5(2) - 6 = 6$$

$$-1: 2(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5(-1) - 6 = 0 \rightarrow c = -1$$

จากทฤษฎีเศษ จะได้ $x - c$ เป็นตัวประกอบ (เศษเป็นศูนย์ = หารลงตัว = เป็นตัวประกอบ)

3. นำพหุนาม มาหารด้วย $x - c$ (นิยมใช้การหารสังเคราะห์)

จะได้ผลการแยกตัวประกอบคือ $(x - c)(\text{ผลหาร})$

เช่น

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -5 & -6 \\ & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6 &= (x + 1)(2x^2 + x - 6) \\ &= (x + 1)(2x - 3)(x + 2) \end{aligned}$$

หมายเหตุ : ถ้าผลหาร ยังเป็นพหุนามดีกรีมากกว่า 2 อยู่ ก็อาจต้องใช้ทฤษฎีเศษ แยกตัวประกอบต่อไปให้ถึงที่สุด

โดยตอนใดแทน ถ้าตัวไหนแทนแล้วไม่ได้ศูนย์ในรอบก่อนหน้านี้ ก็ไม่ต้องนำมาแทนอีกในรอบหลัง

ตัวอย่าง จงแยกตัวประกอบ $2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12$

วิธีทำ จำนวนที่ต้องนำมาใส่แทน คือ $\pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } 12}{\text{ตัวประกอบของ } 2} = \pm \frac{1,2,3,4,6,12}{1,2}$

$$\text{ซึ่งได้แก่ } 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 12, -12, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$$

$$1: 2(1)^4 + 5(1)^3 - 11(1)^2 - 20(1) + 12 = -12$$

$$-1: 2(-1)^4 + 5(-1)^3 - 11(-1)^2 - 20(-1) + 12 = 18$$

$$2: 2(2)^4 + 5(2)^3 - 11(2)^2 - 20(2) + 12 = 0 \rightarrow c = 2$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & 5 & -11 & -20 & 12 \\ & & 4 & 18 & 14 & -12 \\ \hline & 2 & 9 & 7 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 \\ = (x - 2)(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6) \end{aligned}$$

→ ยังต้องใช้ทฤษฎีเศษ แยกต่อ

แยก $2x^3 + 9x^2 + 7x - 6$ ด้วยทฤษฎีเศษ → จำนวนที่ต้องใส่แทน คือ $\pm \frac{\text{ตัวประกอบของ } -6}{\text{ตัวประกอบของ } 2} = \pm \frac{1,2,3,6}{1,2}$
 ซึ่งได้แก่ $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}$

แต่ 1 กับ -1 เคยแทนแล้วไม่ได้ศูนย์ ก็ไม่ต้องเอามาแทนอีก

$$2: 2(2)^3 + 9(2)^2 + 7(2) - 6 = 60$$

$$-2: 2(-2)^3 + 9(-2)^2 + 7(-2) - 6 = 0 \rightarrow c = -2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 9 & 7 & -6 \\ & & -4 & -10 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array} \quad 2x^3 + 9x^2 + 7x - 6 = (x + 2)(2x^2 + 5x - 3)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2x^4 + 5x^3 - 11x^2 - 20x + 12 &= (x - 2)(2x^3 + 9x^2 + 7x - 6) \\ &= (x - 2)(x + 2)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x - 2)(x + 2)(2x - 1)(x + 3) \end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1. $x^3 - x^2 - 8x + 12$

2. $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

สมการดีกรีสูง

ในเรื่องนี้ จะเรียนเกี่ยวกับสมการที่มีดีกรีสูงกว่า 2

เช่น $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 10x + 5 = 0$ เป็นสมการดีกรี 4

ปกติ เราจะแทนสมการเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$

โดย $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ จะหมายถึง ตัวเลขที่คูณอยู่หน้า x (ถ้าตัวไหนเป็น 0 ก็ข้ามเลขชี้กำลังนั้นไป)

เช่น $2x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$ จะมี $a_3 = 2, a_2 = 1, a_1 = -2, a_0 = 3$

$x^4 - x^2 + 5x - 3 = 0$ จะมี $a_4 = 1, a_3 = 0, a_2 = -1, a_1 = 5, a_0 = -3$ เป็นต้น

โดยวิธีแก้สมการ เราจะต้องจัดให้ฝั่งขวาเป็น 0 และแยกตัวประกอบฝั่งซ้าย แล้วจับให้ตัวประกอบแต่ละตัวเป็น 0

ในหัวข้อนี้ จะมี 3 เรื่อง คือ “จำนวนคำตอบ”, “ผลบวก ผลคูณ คำตอบ”, และ “การสร้างสมการจากคำตอบ”

จำนวนคำตอบ: สมการดีกรี n จะมีคำตอบได้ไม่เกิน n คำตอบ

หรือ พูดอีกแบบได้ว่า จำนวนคำตอบของสมการ จะมีได้ไม่เกินเลขชี้กำลังสูงสุด

เพราะเลขชี้กำลังสูงสุด จะเป็นตัวบอกว่าพหุนามนั้นๆ แยกตัวประกอบได้มากที่สุด กี่วงเล็บ

เช่น $x^2 + 2x - 3 = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 2 คำตอบ (เพราะแยกได้อย่างมาก 2 วงเล็บ)

$$(x + 3)(x - 1) = 0$$

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 3 คำตอบ (เพราะแยกได้อย่างมาก 3 วงเล็บ)

$$(x - 3)(x + 1)(x + 1) = 0$$

ผลบวก ผลคูณ คำตอบ: ถ้าสมการ $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ มีคำตอบ n คำตอบแล้ว

$$\text{ผลบวกของคำตอบทั้งหมด} = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

$$\text{ผลบวกของสองคำตอบคูณกัน} = +\frac{a_{n-2}}{a_n}$$

$$\text{ผลบวกของสามคำตอบคูณกัน} = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

⋮

$$\text{ผลคูณของคำตอบทั้งหมด} = (-1)^n \left(\frac{a_0}{a_n} \right)$$

เช่น $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (x-1)(x-2)(x-4) \\ \text{เซตคำตอบ คือ } \{1, 2, 4\} \end{array}$$

$$\text{ผลบวกคำตอบ} = -\frac{-7}{1} = 7 \quad (= 1 + 2 + 4)$$

$$\text{ผลบวกสองคำตอบคูณกัน} = +\frac{14}{1} = 14 \quad (= 1 \times 2 + 1 \times 4 + 2 \times 4)$$

$$\text{ผลคูณคำตอบ} = (-1)^3 \left(\frac{-8}{1} \right) = 8 \quad (= 1 \times 2 \times 4)$$

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ 4x^4 - 0x^3 - 5x^2 + 0x + 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ (x+1)(x-1)(2x+1)(2x-1) \\ \text{เซตคำตอบ คือ } \left\{ -1, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} \end{array}$$

$$\text{ผลบวกคำตอบ} = -\frac{0}{4} = 0 \quad (= -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$$

$$\begin{aligned} \text{ผลบวกสองคำตอบคูณกัน} &= +\frac{-5}{4} = -\frac{5}{4} \\ &= (-1 \cdot 1 + -1 \cdot -\frac{1}{2} + -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot -\frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} + -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\text{ผลบวกสามคำตอบคูณกัน} = -\frac{0}{4} = 0$$

$$= (-1 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{2} + -1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + -1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})$$

$$\text{ผลคูณคำตอบ} = (-1)^4 \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4} \quad (= -1 \cdot 1 \cdot -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})$$

ตัวอย่าง ถ้าสมการ $2x^3 + kx^2 - 3x + 2 = 0$ มีราก 3 ราก คือ 2, -1, และ a แล้ว จงหาค่า k

วิธีทำ สมการนี้ จะมีผลคูณของคำตอบ $= (-1)^3 \left(\frac{2}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $(2)(-1)(a) = -1$ ซึ่งจะได้ $a = \frac{1}{2}$

แต่จากสูตรผลบวกราก สมการนี้ จะมีผลบวกของคำตอบ $= -\frac{k}{2}$

ดังนั้น $-\frac{k}{2} = 2 + (-1) + a$

$$-\frac{k}{2} = 2 + (-1) + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{k}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k = -3$$

#

สร้างสมการจากคำตอบ: สมการดีกรี n ที่มี $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นคำตอบ

จะเขียนได้ในรูป $a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$ เมื่อ a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

อันนี้เป็นการทำย้อนกลับ คือมีคำตอบ แล้วจะย้อนกลับไปหาสมการ

เช่น สมการที่มี 1 กับ -2 เป็นคำตอบ คือ $a(x - 1)(x + 2) = 0$ เป็นต้น โดย a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

กล่าวคือ ไม่ว่า a เป็นตัวเลขอะไร สมการนี้ก็ยังจะมี 1 กับ -2 เป็นคำตอบ อยู่

$$\left. \begin{array}{l} a = 1: \quad (1)(x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \\ a = 2: \quad (2)(x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ a = -3: \quad (-3)(x - 1)(x + 2) = 0 \rightarrow -3x^2 - 3x + 6 = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ทุกสมการ มี 1 กับ -2} \\ \text{เป็นคำตอบ} \end{array}$$

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะให้ข้อมูลบางอย่างเพิ่มเติม เพื่อให้เราหาค่า a ที่แน่ชัดลงไปได้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่สมการ $P(x) = 0$ มีเซตคำตอบคือ $\{1, 2, 3\}$ ถ้า $P(4) = 12$

แล้ว จงหา $P(0)$

วิธีทำ สมการที่มีคำตอบคือ 1, 2, 3 จะต้องมีส่วนประกอบในรูป $a(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

ดังนั้นจะได้ $P(x) = a(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$P(4)$ คือ ค่าที่ได้จากการแทน x ด้วย 4 ซึ่งโจทย์บอกว่า $P(4) = 12$ ดังนั้น

$$a(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) = 12$$

$$a(3)(2)(1) = 12$$

$$a = 2$$

ดังนั้น $P(0) = 2(0 - 1)(0 - 2)(0 - 3) = -12$

#

แบบฝึกหัด

1. ถ้าสมการ $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ มีคำตอบ 3 คำตอบ คือ a, b และ c แล้ว จงหาค่าของ

1. $a + b + c$

2. $ab + bc + ac$

3. abc

4. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

2. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$

$A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-4]

1. $[-3\sqrt{5}, -0.9]$ 2. $[-1.1, 0]$ 3. $[0, 3\sqrt{5}]$ 4. $[1, 5\sqrt{3}]$

3. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ S เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/6]

4. ถ้า a, b และ c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง แล้ว $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ต.ค. 53)/10*]

5. จงหาคำตอบที่เหลือของสมการ $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ เมื่อกำหนดให้สองคำตอบแรก คือ 3 และ $\frac{1}{2}$
6. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่สมการ $P(x) = 0$ มีราก 3 ราก คือ $-1, 1, 2$ ถ้า $P(3) = 16$ จงหาค่าของ $P(0)$
7. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 โดยที่สมการ $P(x) - 1 = 0$ มีราก 4 ราก คือ $0, 1, -1, 2$ ถ้า $P(3) = 9$ แล้ว จงหา $P(4)$

8. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่ $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ ถ้า $P(0) = 6$ แล้ว จงหาค่าของ $P(-1)$
9. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่ $P(1) = P(-2) = P(3) = 1$ ถ้า $P(0) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $P(-1)$
10. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2551 ซึ่งสอดคล้องกับ $P(n) = Q(n)$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots, 2551$ และ $P(2552) = Q(2552) + 1$
ค่าของ $P(0) - Q(0)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/48]

ทบทวนอสมการ

ช่วง คือ เซตของจำนวนทุกจำนวนที่มีค่า ตั้งแต่ / ระหว่าง จำนวนที่ระบุ

เช่น $[1, 5]$	ทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 5 (รวม 1 กับ 5 ด้วย)	$\{x \mid 1 \leq x \leq 5\}$
$[-4, 3)$	ทุกจำนวนตั้งแต่ -4 ถึง 3 (รวม -4 แต่ไม่เอา 3)	$\{x \mid -4 \leq x < 3\}$
$(2, \infty)$	ทุกจำนวนที่มากกว่า 2 (ไม่รวม 2)	$\{x \mid 2 < x\}$
$(-\infty, -2]$	ทุกจำนวนตั้งแต่ -2 ลงไป (รวม -2 ด้วย)	$\{x \mid x \leq -2\}$

การแก้อสมการตรีโกณ ให้จัดฝั่งหนึ่งเป็น 0 อีกฝั่ง ให้แยกตัวประกอบ ให้อยู่ในรูป “คูณหรือหาร” ก็ได้
นำแต่ละวงเล็บไปเขียนบนเส้นจำนวน เพื่อใส่ $+$, $-$, $+$ แล้วเลือกช่วงคำตอบตามเครื่องหมายอสมการ
โดย $\rightarrow$ ไม่ต้องสลับตรงจุดที่มาจาก (วงเล็บ) ยกกำลังคู่
 $\rightarrow$ ถ้า x มีลบคูณอยู่ ให้จัดเป็น $+$ โดยคูณ -1 ทั้งสองข้าง แล้วกลับ $>$ เป็น $<$

แบบฝึกหัด

- กำหนดให้ $I_n = (0, 1) \cap (\frac{1}{2}, 2) \cap (\frac{2}{3}, 3) \cap \dots \cap (\frac{n-1}{n}, n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ
ค่าของ n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $I_n \subseteq (\frac{2551}{2554}, \frac{2553}{2552})$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ต.ค. 52)/23]

- กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$
และ B เป็นเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$
ถ้า $A \cap B = [c, d)$ แล้ว $6c - d$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/5]

3. กำหนดให้ $A = \{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$

ถ้า a เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดในเซต A และ b เป็นสมาชิกค่ามากสุดในเซต A
แล้ว $(b - a)^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/6]

4. กำหนดให้ $A = \{x \mid (2x + 1)(x - 1) < 2\}$

และ $B = \{x \mid 16 - 9x^2 > 0\}$

เซต $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [A-NET 50/1-1]

1. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$

2. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$

3. $\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$

4. $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

5. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $\frac{x^4 - 13x^2 + 36}{x^2 + 5x + 6} \geq 0$

ถ้า a เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $S \cap (2, \infty)$ และ b เป็นจำนวนลบที่มีค่ามากที่สุดซึ่ง $b \notin S$ แล้ว
 $a^2 - b^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/7]

6. กำหนดให้ $S = \left\{ x \mid \frac{x}{x^2-3x+2} \geq \frac{x+2}{x^2-1} \right\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ S [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-5]
1. $(-\infty, -3)$ 2. $(-1, 0.5)$ 3. $(-0.5, 2)$ 4. $(1, \infty)$

7. ให้ a, b, c, d และ x เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/15]
1. ถ้า $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{a+x}{b} < \frac{c+x}{d}$
2. $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$

8. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a < b$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/29]

1. $\frac{2a+3b+4c}{3a+2b+3c} > \frac{2a+3b}{3a+2b}$

2. $\frac{3a+2b+c}{2a+3b+c} > \frac{3a+2b}{2a+3b}$

9. ในกล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว ลูกบอลสีแดง และลูกบอลสีเหลือง โดยที่จำนวนลูกบอลสีขาวมีจำนวนไม่น้อยกว่าจำนวนลูกบอลสีแดง แต่ไม่มากกว่าหนึ่งในสามเท่าของจำนวนลูกบอลสีเหลือง และผลรวมของจำนวนลูกบอลสีขาวและสีแดงไม่น้อยกว่า 76 ลูก อยากทราบว่าผลรวมของจำนวนลูกบอลสีขาวและลูกบอลสีเหลืองมีอย่างน้อยกี่ลูก [PAT 1 (มี.ค. 57)/45]

ทบทวนค่าสัมบูรณ์

สูตรสำหรับหา $|x|$ จะมีดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ถ้า } x \text{ เป็นบวกอยู่แล้ว } |x| \text{ จะได้เท่าเดิม} \\ \text{ถ้า } x \text{ เป็นลบอยู่ จะถูกทำให้เป็นบวกโดยคูณลบเข้าไป (ใช้หลักว่าลบคูณลบได้บวก)} \end{array}$$

โดยรูปแบบการแก้ สมการ / อสมการ ค่าสัมบูรณ์ จะมีดังนี้

	เปลี่ยนเป็นรูปที่ไม่มีค่าสัมบูรณ์	หมายเหตุ
$ x = a$	$x = a$ หรือ $x = -a$	คำตอบ ต้องทำให้ $a \geq 0$
$ x < a$	$-a < x < a$	คำตอบ ต้องทำให้ $a > 0$
$ x > a$	$x > a$ หรือ $x < -a$	
$ x = y $ $ x < y $ $ x > y $	ยกกำลังสองทั้งสองข้าง เพื่อกำจัดค่าสัมบูรณ์ โดยใช้หลัก $ x ^2 = x^2$	

แบบฝึกหัด

1. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{ x \in R \mid \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1 \right\}$ แล้ว $A \cap [0, 1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

[PAT 1 (ก.ค. 53)/4]

1. $\left\{ x \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \right\}$
2. $\left\{ x \mid \frac{1}{3} < x < 1 \right\}$
3. $\left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 1 \right\}$
4. $\left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2} \right\}$

2. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $S = \{ x \in I \mid 2x^2 - 9x - 26 \leq 0 \text{ และ } |1 - 2x| \geq 3 \}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-6]

- 3* ให้ A เป็นเอกภาพสัมพัทธ์ที่ใหญ่ที่สุด ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x[2x^2 + x - 3 \leq 0 \text{ และ } |x - 2| \leq 3]$ มีค่าความจริงเป็นจริง และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

[PAT 1 (พ.ย. 57)/13]

1. $A \subset B$
2. $A - B$ มีสมาชิก 2 ตัว
3. $(A - B) \cup (B - A) = (-6, 1)$
4. $(-6, 0) \subset (B - A)$

4. กำหนดให้ $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S [PAT 1 (มี.ค. 52)/5]

1. $\{x \mid x^3 = 1\}$
2. $\{x \mid x^2 = 1\}$
3. $\{x \mid x^3 = -1\}$
4. $\{x \mid x^4 = x\}$

5. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S

ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \geq 0\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ต.ค. 53)/3]

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$ เท่ากับ 4
2. จำนวนสมาชิกของ $P(I - (A \cup B))$ เท่ากับ 2
3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A - B) - P(A \cap B) = \{\{0\}\}$

6. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ $A = \{x \in I \mid |2x + 7| \leq 9\}$ และ $B = \{x \in I \mid |x^2 - x - 1| > 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/4]

1. จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 7
2. $A - B$ เป็นเซตว่าง

7. กำหนดให้ $A = \{x \in R \mid \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 53)/4]

- | | |
|--|--|
| 1. $A' = \{x \in R \mid 3 - x > 4\}$ | 2. $A' \subset (-1, \infty)$ |
| 3. $A = \{x \in R \mid x \leq 7\}$ | 4. $A \subset \{x \in R \mid 2x - 3 < 7\}$ |

8. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \frac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1$ และให้ B แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|x^2 - 2x| + x^2 > 4$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/5]

1. $A \subset B$
2. จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2

9. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 + x - 2| \leq |x^2 - 4x + 3|$ และ $B = A - \{1\}$
 ถ้า a เป็นสมาชิกของ B ซึ่ง $a - b \geq 0$ ทุก $b \in B$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงบ้าง [A-NET 51/1-3]
1. $\frac{4}{3}a$ เป็นจำนวนคู่
 2. $\frac{5}{a}$ เป็นจำนวนคู่

10. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x - 1| \leq 3 - x\}$ และ a เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ A
 ค่าของ a อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/7]
1. $(0, 0.5]$
 2. $(0.5, 1]$
 3. $(1, 1.5]$
 4. $(1.5, 2]$

11. กำหนดให้ $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$ และ $B = \{x \mid x + 1 \geq 2|x|\}$
 ถ้า $A - B = (a, b)$ แล้ว $3|a + b|$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-1]

12. ถ้าเซตคำตอบของสมการ $|x^2 + x - 2| < (x + 2)$ คือช่วง (a, b)
แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 50/2-6]

13. กำหนดให้ $P(x)$ แทน $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 2$ และให้ $Q(x)$ แทน $|2x + 1| > x - 1$
เอกภาพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริงเสมอ แต่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จเสมอ
[PAT 1 (มี.ค. 56)/3*]

1. $(-\infty, -4)$ 2. $(-5, -1)$ 3. $(-3, 2)$ 4. $(-1, \infty)$

การแบ่งกรณีค่าสัมบูรณ์

ในเรื่องนี้ เราจะเรียนอีกหนึ่งวิธี ที่สามารถแก้ สมการ / อสมการ ค่าสัมบูรณ์ ที่ซับซ้อนกว่าหัวข้อที่แล้วได้

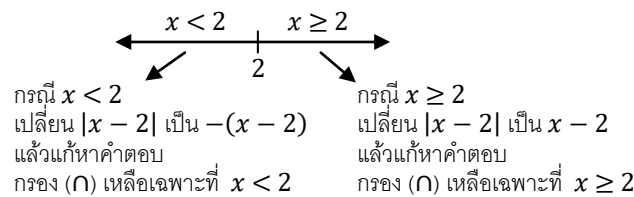
โดยเราจะใช้สูตร $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$ มาทำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

เช่น ถ้าเราเจอ $|x - 2|$ ในสมการ เราจะเปลี่ยนมันด้วยสูตร $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{เมื่อ } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{เมื่อ } x - 2 < 0 \end{cases}$

นั่นคือ ในกรณีที่ $x \geq 2$ เราจะได้ว่า $|x - 2| = x - 2$

และ ในกรณีที่ $x < 2$ เราจะได้ว่า $|x - 2| = -(x - 2)$

ดังนั้น เวลาแก้สมการ เราจะแบ่งคิดเป็น 2 กรณี คือ กรณี $x \geq 2$ และ กรณี $x < 2$



จากนั้น จึงเอาคำตอบจากทั้งสองกรณีมารวมกัน (U)

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x - 4| \leq 2x + 7$

วิธีทำ เนื่องจาก $|x - 4| = \begin{cases} x - 4 & \text{เมื่อ } x - 4 \geq 0 \\ -(x - 4) & \text{เมื่อ } x - 4 < 0 \end{cases}$ ดังนั้น เราจะแบ่งเป็นกรณี $x \geq 4$ กับ กรณี $x < 4$

กรณี $x \geq 4$:
เปลี่ยน $|x - 4|$ เป็น $x - 4$
 $x - 4 \leq 2x + 7$
 $-11 \leq x$
กรอง (N) เหลือเฉพาะที่ $x \geq 4$

เลือกคำตอบ คือ $[4, \infty)$

กรณี $x < 4$:
เปลี่ยน $|x - 4|$ เป็น $-(x - 4)$
 $-(x - 4) \leq 2x + 7$
 $-x + 4 \leq 2x + 7$
 $-3 \leq 3x$
 $-1 \leq x$
กรอง (N) เหลือเฉพาะที่ $x < 4$

เซตคำตอบ คือ $[-1, 4)$

รวม (U) คำตอบจากทั้ง 2 กรณี จะได้คำตอบ คือ $(4, \infty) \cup [-1, 4) = [-1, \infty)$

#

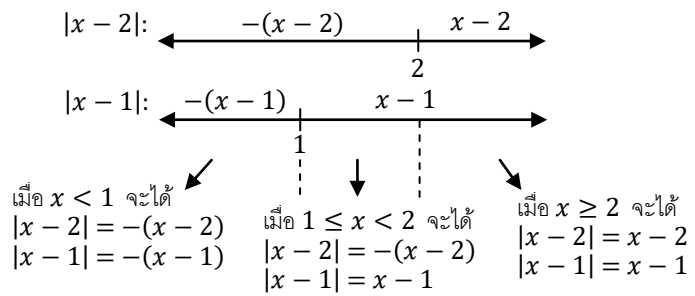
ตัวอย่าง จงแก้สมการ $|x - 2| + |x - 1| \leq x + 9$

วิธีทำ ข้อนี้ มีค่าสัมบูรณ์ 2 ก้อน

$|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{เมื่อ } x - 2 \geq 0 \\ -(x - 2) & \text{เมื่อ } x - 2 < 0 \end{cases}$

$|x - 1| = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & \text{เมื่อ } x - 1 < 0 \end{cases}$

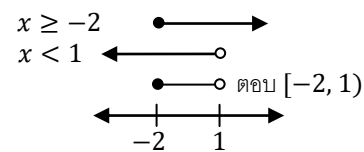
จะมีจุดแบ่ง 2 จุด คือ ที่ 1 และ 2
จึงต้องแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้



กรณี $x < 1$:

$$\begin{aligned}
 |x-2| + |x-1| &\leq x+9 \\
 -(x-2) - (x-1) &\leq x+9 \\
 -x+2-x+1 &\leq x+9 \\
 -6 &\leq 3x \\
 -2 &\leq x
 \end{aligned}$$

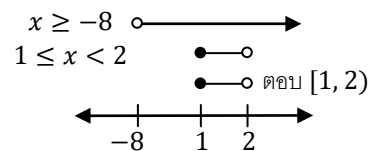
กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $x < 1$



กรณี $1 \leq x < 2$:

$$\begin{aligned}
 |x-2| + |x-1| &\leq x+9 \\
 -(x-2) + (x-1) &\leq x+9 \\
 -x+2+x-1 &\leq x+9 \\
 -8 &\leq x
 \end{aligned}$$

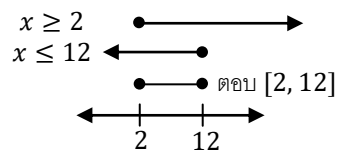
กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $1 \leq x < 2$



กรณี $x \geq 2$:

$$\begin{aligned}
 |x-2| + |x-1| &\leq x+9 \\
 (x-2) + (x-1) &\leq x+9 \\
 x-2+x-1 &\leq x+9 \\
 x &\leq 12
 \end{aligned}$$

กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $x \geq 2$



รวมคำตอบจากทุกกรณี จะได้เซตคำตอบ คือ $[-2, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 12] = [-2, 12]$

#

แบบฝึกหัด

1. จงแก้สมการ / อสมการ ต่อไปนี้ด้วยวิธีแบ่งกรณี

1. $2x + 5 < |x - 2|$

2. $|x + 3| = x^2 + 6x + 3$

3. $|x + 1| + |x - 1| > 4$

4. $|x + 2| + |x + 3| < x + 1$

2. ถ้า A แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด ที่สอดคล้องกับอสมการ $3|x - 1| - 2x > 2|3x + 1|$ และ B แทนเซตคำตอบของอสมการ $x(x + 2)(x + 1)^2 < 0$ แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง
[PAT 1 (มี.ค. 55)/3]

1. เซต $A - B$ มีสมาชิก 5 ตัว

2. $A \cup B = A$

3. เซต $A \cap B$ มีสมาชิก 1 ตัว

4. $(A - B) \cup (B - A) = B$

3. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 5| + |x| \leq 7\}$ และ

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12 + |x|\}$$

ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 56)/4]

1. $A \cap B \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4\}$
2. $A - B$ เป็นเซตจำกัด (finite set)

4. ถ้า A แทนเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$ แล้ว เซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

[PAT 1 (เม.ย. 57)/4]

1. $(-4, 0)$
2. $(-1, 1)$
3. $(0, 4)$
4. $(-3, 2)$

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b$

เซตคำตอบของสมการ $|x - a| - |x - b| = b - a$ เท่ากับเท่าใด (ตอบในรูป a, b) [PAT 1 (มี.ค. 57)/5]

6. กำหนดให้เอกภาพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริงบวก ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/2]

1. ประพจน์ $\forall x[|x^2 - 5x + 4| < x^2 + 6x + 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. ประพจน์ $\forall x[|x^2 - 1| \geq 2x - 2]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สมบัติความสมบูรณ์

“ขอบเขตบนของเซต A ” หมายถึง ค่าที่ $\geq$ ทุกตัวใน A

เซตหนึ่งๆ อาจมีขอบเขตบนได้มากมาย ตราบใดที่ตัวเลขนั้น $\geq$ ทุกตัวในเซต

- เช่น
- 1 เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ เพราะ $1 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$
 - 2 ก็เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ เพราะ $2 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$
 - 9 ก็เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ เพราะ $9 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$
 - 3 เป็นขอบเขตบนของ $(-\infty, 3)$ เพราะ $3 \geq$ ทุกตัวใน $(-\infty, 3)$
 - -1 เป็นขอบเขตบนของ $[-5, -1]$ เพราะ $-1 \geq$ ทุกตัวใน $[-5, -1]$
 - 3 เป็นขอบเขตบนของ $\emptyset$ เพราะ เราถือว่า ไม่มีตัวไหนใน $\emptyset$ ที่มีค่ามากกว่า 3

หมายเหตุ: $\emptyset$ เป็นเซตพิเศษเพียงเซตเดียวที่ “ขอบเขตบนเป็นอะไรก็ได้”

- แต่
- 0 ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ เพราะมี 1 ที่มากกว่า 0 อยู่
 - 3 ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $(-\infty, 4)$ เพราะมี 3.5 ที่มากกว่า 3 อยู่
 - $\{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่มีขอบเขตบน เพราะสมาชิกในเซต มากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด
 - $(0, \infty)$ ไม่มีขอบเขตบน เพราะสมาชิกในเซต มากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด

“ขอบเขตบนน้อยสุดของเซต A ” หมายถึง ค่าที่น้อยที่สุด ในบรรดาขอบเขตบนทั้งหลายของ A

- เช่น
- ขอบเขตบนน้อยสุดของ $\{-1, 0, 1\}$ คือ 1
 - ขอบเขตบนน้อยสุดของ $(-\infty, 3)$ คือ 3
 - ขอบเขตบนน้อยสุดของ $[-5, -1]$ คือ -1
 - $\{1, 2, 3, \dots\}$ ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด (เพราะแค่ขอบเขตบนเฉยๆมันยังไม่มีเลย)

หมายเหตุ: $\emptyset$ เป็นเซตพิเศษเซตเดียว ที่มีขอบเขตบน แต่กลับไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด

และจะเห็นว่า ขอบเขตบนน้อยสุดของเซต A อาจจะมีหรือไม่อยู่ใน A ก็ได้

“สมบัติความสมบูรณ์” กล่าวว่า ถ้า $A \subset \mathbb{R}$ และ $A \neq \emptyset$ และ A มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

สรุปเป็นภาษาง่ายๆ คือ เซตอะไรก็ตามที่มีขอบเขตบน จะต้องมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

ยกเว้น $\emptyset$ เป็นเพียงเซตเดียวที่มีขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ มีขอบเขตบนหรือไม่ ถ้ามี จงหาขอบเขตบนน้อยสุด

1. $\{1, 2, 3, \dots, 1000\}$
2. $\{-1, -2, -3, \dots, -1000\}$
3. $(4, 5)$
4. $(0, 10]$

5. $(1, \infty)$

6. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{99}{100}\}$

7. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$

8. $\mathbb{R}$

9. $\{x \mid x^2 < 1\}$

10. $\{x \mid |x + 1| = -1\}$

การสร้างเครื่องหมายใหม่

- | | | | |
|------------|------------|---------|--------|
| 1. 1. 12 | 2. -12 | 3. 0 | 4. a |
| 2. 1. 3 | 2. 3 | 3. 2 | 4. 2 |
| 5. 2 | 6. a | | |
| 3. 1. 1 | 2. 2 | 3. 2 | 4. 4 |
| 5. 8 | 6. 800 | | |
| 4. 1, 3, 6 | 5. - | 6. - | 7. 2 |
| 8. 2 | 9. 1, 2, 3 | 10. 208 | 11. 6 |

ทบทวนพหุนาม

- | | |
|--------|-------|
| 1. 922 | 2. -1 |
|--------|-------|

การหารสังเคราะห์

- | | |
|----------------------------|----------------------------------|
| 1. 1. $x^2 + 2x + 1$ เศษ 1 | 2. $-2x^2 - 3x - 6$ เศษ -2 |
| 3. $3x + 5$ (ลงตัว) | 4. $x^3 - 2x^2 + 4x - 8$ (ลงตัว) |

ทฤษฎีเศษ

- | | | |
|---------|----------|------|
| 1. 1. 1 | 2. -2 | 3. 0 |
| 2. 2 | 3. -2, 2 | 4. 6 |

การแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ

- | | |
|-------------------------------|-----------------------------------|
| 1. 1. $(x - 2)(x + 3)(x - 2)$ | 2. $(x - 2)(2x + 1)(x + 3)$ |
| 3. $(x + 2)^3$ | 4. $(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x + 3)$ |

สมการดีกรีสูง

- | | | | |
|---------|--------|--------|------------------|
| 1. 1. 1 | 2. -8 | 3. -12 | 4. $\frac{2}{3}$ |
| 2. 1 | 3. 3.5 | 4. 9 | 5. -2 |
| 6. 4 | 7. 41 | 8. 24 | 9. 5 |
| 10. -1 | | | |

ทบทวนอสมการ

- | | | | |
|--------|------|-------|------|
| 1. 852 | 2. 4 | 3. 24 | 4. 2 |
| 5. 5 | 6. 2 | 7. - | 8. 2 |

9. 152

ทบทวนค่าสัมบูรณ์

- | | | | |
|-------|-------|--------|-------|
| 1. 3 | 2. 17 | 3. 2 | 4. 2 |
| 5. 4 | 6. 1 | 7. 1 | 8. 2 |
| 9. 2 | 10. 4 | 11. 10 | 12. 2 |
| 13. 2 | | | |

การแบ่งกรณีค่าสัมบูรณ์

- | | | |
|-----------------------|----------------|-------------------------------------|
| 1. 1. $(-\infty, -1)$ | 2. $\{-6, 0\}$ | 3. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$ |
| 4. $\emptyset$ | | |
| 2. 1 | 3. 2 | 4. 4 |
| 5. $[b, \infty)$ | | |
| 6. 1 | | |

สมบัติความบริสุทธิ์

- | | | | |
|------------|---|------|----------|
| 1. 1. 1000 | 2. -1 | 3. 5 | 4. 10 |
| 5. ไม่มี | 6. $\frac{99}{100}$ | 7. 1 | 8. ไม่มี |
| 9. 1 | 10. ขอบเขตบนเป็นอะไรก็ได้ แต่ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด | | |

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Peera Modie

และ คุณ ข.ป. ขอ

และ คุณ Theerat Piyaanangul

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร