จำนวนจริง

1 May 2019

สารบัญ

จำนวนชนิดต่างๆ

จำนวนเต็ม (I) คือ จำนวนที่ลงตัวเป็นเลขเต็มหน่วย ไม่มีส่วนที่เป็นเศษส่วนหรือทศนิยม

จำนวนเต็ม (I)

เต็มบวก (I^+) เต็มศูนย์ (I^0) เต็มลบ (I^-)

จำนวนเต็ม แบ่งเป็น 3 กลุ่ม ได้แก่

- จำนวนเต็มบวก (I^+) หรือ จำนวนนับ หรือ จำนวนธรรมชาติ (N) ได้แก่ $1, 2, 3, \ldots$
- จำนวนเต็มศูนย์ (I^0) ได้แก่ 0
- จำนวนเต็มลบ (I^-) ได้แก่ $-1, -2, -3, \ldots$

หมายเหตุ: จำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด คือ 1 แต่จะไม่มีจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด
จำนวนเต็มลบที่มากที่สุด คือ -1 แต่จะไม่มีจำนวนเต็มลบที่น้อยที่สุด

จำนวนตรรกยะ (Q) คือ จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ ได้ (เมื่อตัวส่วน $\neq 0$)

จำนวนตรรกยะ (Q)

จำนวนเต็ม (I) | เศษส่วน
ทศนิยม รู้จบ
ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ

เต็มบวก (I^+) เต็มศูนย์ (I^0) เต็มลบ (I^-)

จำนวนตรรกยะ ประกอบด้วย

- จำนวนเต็ม เพราะเขียนเป็น $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{1}$ ได้ เช่น $5 = \frac{5}{1}$, $-2 = \frac{-2}{1}$
- เศษส่วน ที่อยู่ในรูป (หรือทำให้อยู่ในรูป) $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ ได้ (เมื่อตัวส่วน $\neq 0$)
- ทศนิยม รู้จบ เพราะเขียนเป็น $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{สิบ ร้อย พัน}}$ ได้ เช่น $0.7 = \frac{7}{10}$, $1.53 = \frac{153}{100}$
- ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ เพราะมีสูตรแปลงเป็นเศษส่วนได้
  เช่น $0.\dot{3} = \frac{3}{9}$, $0.\dot{3}2\dot{6} = \frac{326}{999}$, $0.12\dot{3}5\dot{6} = \frac{12356-12}{99900} = \frac{12344}{99900}$

จำนวนอตรรกยะ (Q') คือ จำนวนที่เขียนในรูป $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวนเต็ม}}$ <u>ไม่</u>ได้ ซึ่งประกอบด้วย

- ทศนิยม ไม่รู้จบ ไม่ซ้ำ เช่น $1.010010001\ldots$, $2.214523015201364552 02\ldots$
- พวกถอดรากไม่ลงตัว เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{10}$, ...
- ค่าคงที่พิเศษบางตัว เช่น π , e

หมายเหตุ: π <u>ไม่</u>ได้เท่ากับ $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14 แต่ π มีค่า<u>ประมาณ</u> $\frac{22}{7}$ หรือ 3.14
ค่า π จริงๆ มีค่าเท่ากับ $3.14159265358979323846264338327950288419716939 9\ldots$

หมายเหตุ2: ควรจำค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ และ $\sqrt{3}$ ให้ได้ ($\sqrt{2} \sim 1.414$, $\sqrt{3} \sim 1.732$)

การบวกลบคูณหาร ของจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ จะได้ผลลัพธ์ดังนี้

- จำนวนตรรกยะ บวกลบคูณหารกัน ได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ (เมื่อตัวหาร $\neq 0$)
- จำนวนอตรรกยะ บวกลบคูณหารกัน มีสิทธิเป็น ตรรกยะ หรือ อตรรกยะ ก็ได้

  เช่น $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ $\rightarrow$ อต $\times$ อต $=$ อต

  $\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$ $\rightarrow$ อต $\times$ อต $=$ ต
- ตรรกยะ บวกลบ อตรรกยะ ได้ อตรรกยะ เสมอ

  ตรรกยะ คูณหาร อตรรกยะ ได้ อตรรกยะ เสมอ ยกเว้น กรณีที่จำนวนตรรกยะนั้นเป็นศูนย์

จำนวนจริง (R) คือ จำนวนที่มีอยู่จริงๆ (บนเส้นจำนวน) ซึ่งประกอบด้วย จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ดังรูป

- จำนวนจริง (R)
  - จำนวนตรรกยะ (Q)
    - จำนวนเต็ม (I)
      - เต็มบวก (I^+)
      - เต็มศูนย์ (I^0)
      - เต็มลบ (I^-)
    - เศษส่วน
      ทศนิยม รู้จบ
      ทศนิยม ไม่รู้จบ ซ้ำ
  - จำนวนอตรรกยะ (Q')
    - ทศนิยม ไม่รู้จบ ไม่ซ้ำ
    - พวกถอดรากไม่ลงตัว
    - ค่าคงที่พิเศษ บางตัว เช่น π

และเราสามารถเติมเครื่องหมาย $+$ หรือ $-$ ไปบนหัว R หรือ Q ได้

- R^+ หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นบวก
- R^- หมายถึง จำนวนจริงที่เป็นลบ
- Q^+ หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นบวก
- Q^- หมายถึง จำนวนตรรกยะที่เป็นลบ

หมายเหตุ: จำนวนทุกจำนวนที่เรารู้จักในชั้นนี้ จะเป็นจำนวนจริงทั้งหมด

จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง ได้แก่ รากที่คู่ของจำนวนลบ เช่น $\sqrt{-1}$ ซึ่งจะได้เรียนในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ข้อใดถูกต้อง

1. -1 เป็นจำนวนจริง	2. $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
3. 5 เป็นจำนวนตรรกยะ	4. $\frac{\pi}{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
5. $\frac{30}{6}$ เป็นจำนวนนับ	6. 0 เป็นจำนวนอตรรกยะ
7. $\sqrt{25}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ	8. $\frac{22}{7}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
9. 12.45254 เป็นจำนวนตรรกยะ	10. $1.212121\ldots$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
11. $\frac{2}{5}$ เป็นทั้งจำนวนตรรกยะ และจำนวนจริง	12. 0 เป็นทั้งจำนวนเต็มบวก และจำนวนเต็มลบ

13. 1 เป็นทั้งจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริง

14. $1+\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

15. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

16. $\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

17. $\frac{1+\sqrt{2}}{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

18. จำนวนนับบางจำนวน เป็นจำนวนอตรรกยะ

19. จำนวนอตรรกยะทุกจำนวน เป็นจำนวนจริง

20. จำนวนตรรกยะบางจำนวน เป็นจำนวนเต็ม

21. ทศนิยมซ้ำทุกตัว เขียนในรูป $\frac{\text{จำนวนเต็ม}}{\text{จำนวมเต็ม}}$ ได้

2. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้ (ถ้ามี)
   1. จำนวนเต็มลบ ที่มากที่สุด
   2. จำนวนเต็ม ที่น้อยที่สุด
   3. จำนวนเต็มบวก ที่น้อยที่สุด ที่มากกว่า 3
   4. จำนวนเต็มลบ ที่น้อยที่สุด ที่มากกว่า -1
   5. จำนวนเต็มลบ ที่มากที่สุด ที่น้อยกว่า 8
   6. จำนวนเต็มบวก ที่มากที่สุด ที่มากกว่า 5
   7. จำนวนตรรกยะ ที่มากที่สุด ที่น้อยกว่า 2
   8. จำนวนอตรรกยะ ที่มากที่สุด ที่น้อยกว่า 2

3. ให้ $A=\sqrt{2}-1.4$, $B=\pi-3.1$ และ $C=\frac{5}{3}-1.6\dot{3}$ จงเรียงลำดับ A, B, C จากน้อยไปมาก [O-NET 56/3]

4. ข้อใดต่อไปนี้มีจำนวนตรรกยะอยู่เพียงสองจำนวน [O-NET 56/2]
   1. $-\sqrt{4}$, $\pi-\frac{22}{7}$, 1.010010001
   2. $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt{8}$, π^2
   3. $\pi+1$, $\sqrt{16}$, $0.101001000100001\ldots$
   4. $\frac{9}{11}$, $1.11111\ldots$, $\sqrt[3]{8}$
   5. $0.\dot{8}$, $\sqrt{8}-\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

5. ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 53/3]
    1. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวน<u>อตรรกยะ</u>
    2. จำนวนที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบบางจำนวนเป็นจำนวน<u>ตรรกยะ</u>

6. ให้ a และ b เป็นจำนวน<u>ตรรกยะ</u>ที่แตกต่างกัน ให้ c และ d เป็นจำนวน<u>อตรรกยะ</u>ที่แตกต่างกัน ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>บ้าง [O-NET 52/5]
    1. $a-b$ เป็นจำนวน<u>ตรรกยะ</u>
    2. $c-d$ เป็นจำนวน<u>อตรรกยะ</u>

7. ค่าของ $\left(\sqrt{3}-1\right)^{-2}$ เป็นจริงตามข้อใดต่อไปนี้บ้าง [O-NET 54/4]
    1. เป็นจำนวนอตรรกยะ
    2. เป็นจำนวนที่น้อยกว่า 1.8

8. ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>บ้าง [O-NET 52/1]
    1. มีจำนวน<u>ตรรกยะ</u>ที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0
    2. มีจำนวน<u>อตรรกยะ</u>ที่น้อยที่สุดที่มากกว่า 0

สมบัติการเท่ากัน

จำนวนจริง มีสมบัติเกี่ยวกับการเท่ากันอยู่ 5 ข้อ ดังนี้

- สมบัติการสะท้อน $a = a$ เสมอ
- สมบัติการสมมาตร ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
- สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$
- สมบัติการบวกด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
- สมบัติการคูณด้วยตัวเท่า ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$

ที่ผ่านมา เราได้ใช้สมบัติเหล่านี้โดยไม่รู้ตัว

เช่น ในการแก้สมการ

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= 7 && \text{บวกด้วยตัวเท่า} \\ 2x - 3 + 3 &= 7 + 3 \\ 2x &= 10 && \text{คูณด้วยตัวเท่า} \\ 2x \cdot \tfrac{1}{2} &= 10 \cdot \tfrac{1}{2} \\ x &= 5 \end{aligned}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงบอกชื่อสมบัติที่ทำให้การเท่ากันในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นจริง

1. $3 = 3$
2. ถ้า $x - 1 = 5$ แล้ว $x - 1 + 1 = 5 + 1$
3. ถ้า $z = -1$ แล้ว $-1 = z$
4. ถ้า $x = y + 1$ และ $y + 1 = z + 2$ แล้ว $x = z + 2$
5. ถ้า $x = 6$ แล้ว $3x = 18$
6. ถ้า $x + 1 = 2a + b$ และ $2a + b = 5$ แล้ว $x + 1 = 5$
7. ถ้า $x + 2 = 6$ แล้ว $x + 2 + (-2) = 6 + (-2)$
8. ถ้า $\frac{x}{2} = 3$ แล้ว $x = 6$
9. ถ้า $x + 3 = 4$ แล้ว $x = 1$
10. $7 \times (9 - 1) = 7 \times (9 - 1)$

11. ถ้า $3(x+1) = 6$ แล้ว $x+1 = 2$

12. ถ้า $x+y = x$ แล้ว $x = x+y$

2. จงเติมสมบัติที่ใช้ในการแก้สมการต่อไปนี้

$$
\begin{aligned}
5-3x &= 23 \\
5 &= 23+3x \\
-18 &= 3x \\
-6 &= x \\
x &= -6
\end{aligned}
$$

1. ....
2. ....
3. ....
4. ....

สมบัติการบวกและคูณ

จำนวนจริง มีสมบัติเกี่ยวกับการบวกและการคูณอยู่ 11 ข้อ ดังนี้

	การบวก	การคูณ
สมบัติปิด	จำนวนจริงบวกกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงคูณกัน ยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนจริง
สมบัติสลับที่	$a+b=b+a$	$a\times b=b\times a$
สมบัติเปลี่ยนกลุ่ม	$(a+b)+c=a+(b+c)$	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$
สมบัติการมีเอกลักษณ์	มีเอกลักษณ์การบวก คือ 0	มีเอกลักษณ์การคูณ คือ 1
สมบัติการมีอินเวอร์ส	จำนวนจริงทุกตัว มีอินเวอร์สการบวกที่เป็นจำนวนจริง	จำนวนจริงทุกตัว (ยกเว้น 0) มีอินเวอร์สการคูณที่เป็นจำนวนจริง
สมบัติการแจกแจง	$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$	

จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนจริง อาจมีหรือไม่มีสมบัติปิด ก็ได้

เช่น จำนวนเต็ม มีสมบัติปิดการบวก เพราะ ถ้าเราเอาจำนวนเต็มมาบวกกัน จะยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนเต็มอยู่

จำนวนคู่ มีสมบัติปิดการคูณ เพราะ ถ้าเราเอาจำนวนคู่มาคูณกัน จะยังคงได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่อยู่

จำนวนอตรรกยะ <u>ไม่มี</u>สมบัติปิดการคูณ เพราะ มีจำนวนอตรรกยะบางคู่คูณกันแล้วไม่ใช่อตรรกยะ

เช่น $\sqrt{3}\times\sqrt{3}=\sqrt{9}=3$

“เอกลักษณ์” หมายถึง ตัวเลขที่ไม่มีค่า ไม่ว่าเอาไปทำกับอะไรก็ได้ค่าเท่าเดิม

- เอกลักษณ์การบวก คือ 0 เพราะ $0+a=a+0=a$
- เอกลักษณ์การคูณ คือ 1 เพราะ $1\times a=a\times 1=a$

“อินเวอร์ส” หมายถึง ตัวตรงข้าม ที่จะหักล้างค่าให้หายไป กลายเป็นเอกลักษณ์

เช่น อินเวอร์สการบวก ของ 2 คือ -2 เพราะ $2+(-2)=(-2)+2=0$

อินเวอร์สการบวก ของ -7 คือ 7 เพราะ $(-7)+7=7+(-7)=0$

อินเวอร์สการบวก ของ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ เพราะ $\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}=0$

อินเวอร์สการบวก ของ 0 คือ 0 เพราะ $0+0=0+0=0$

อินเวอร์สการคูณ ของ 2 คือ $\frac{1}{2}$ เพราะ $2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 2=1$

อินเวอร์สการคูณ ของ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ คือ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ เพราะ $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=1$

อินเวอร์สการคูณ ของ $-\frac{2}{3}$ คือ $-\frac{3}{2}$ เพราะ $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(-\frac{3}{2}\right)=\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)=1$

อินเวอร์สการคูณ ของ 0 จะหาไม่ได้ เพราะ ไม่มีอะไรเลย ที่คูณกับ 0 แล้วได้ 1

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จำนวนต่อไปนี้ มีสมบัติปิด การบวก และ / หรือ การคูณ หรือไม่
   1. จำนวนคู่
   2. จำนวนคี่
   3. จำนวนนับ
   4. จำนวนเต็ม
   5. จำนวนเต็มลบ
   6. จำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว
   7. จำนวนตรรกยะ
   8. จำนวนอตรรกยะ

2. ข้อใดต่อไปนี้ ถูกต้อง
   1. $x + y = x + y$ เป็นจริงตามสมบัติการสลับที่การบวก
   2. $x \cdot 2 = 2 \cdot x$ เป็นจริงตามสมบัติการสลับที่การคูณ
   3. $2 + (3 + 4) = (3 + 4) + 2$ เป็นจริงตามสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มการบวก
   4. จำนวนจริงบางจำนวน ไม่มีอินเวอร์สการคูณ
   5. ถ้า a เป็นอินเวอร์สการบวกของ b แล้ว จะได้ว่า b เป็นอินเวอร์สการบวกของ a ด้วย
   6. $x + (y \cdot z) = (x + y)(y + z)$ เป็นจริงตามสมบัติการแจกแจง

3. จงเติมคำตอบที่ถูกต้อง
   1. อินเวอร์สการบวกของ 8 คือ
   2. อินเวอร์สการคูณของ 2 คือ
   3. อินเวอร์สการบวกของ $\frac{1}{2}$ คือ
   4. อินเวอร์สการคูณของ -2 คือ
   5. อินเวอร์สการบวกของ 0 คือ
   6. อินเวอร์สการบวกของ -1 คือ
   7. อินเวอร์สการคูณของ 1 คือ
   8. อินเวอร์สการคูณของ $\sqrt{2}$ คือ
   9. อินเวอร์สการบวกของ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ คือ
   10. อินเวอร์สการคูณของ $\frac{x}{x+1}$ คือ

4. ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>บ้าง [O-NET 52/4]
   1. สมบัติการมีอินเวอร์สการบวกของจำนวนจริงกล่าวว่า
      สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง b ที่ $b + a = 0 = a + b$
   2. สมบัติการมีอินเวอร์สการคูณของจำนวนจริงกล่าวว่า
      สำหรับจำนวนจริง a จะมีจำนวนจริง b ที่ $ba = 1 = ab$

พหุนาม

หัวข้อนี้ จะทบทวนคำศัพท์ที่ควรทราบในเรื่องพหุนาม

- เอกนาม คือ การคูณกันของ ตัวเลข กับ ตัวแปร[ยกกำลัง เต็มบวก หรือ ศูนย์]

  เช่น $2x^5$, $-3a^4b^2$, $\sqrt{5}x^3y^2z$, x^2 , 6 , $-x$, $2^{-1}xy$, 0

- "สัมประสิทธิ์" คือ ส่วนที่เป็นตัวเลข , "ดีกรีของเอกนาม" คือ ผลบวกของเลขชี้กำลังของตัวแปร

เอกนาม	$2x^5$	$-3a^4b^2$	$\sqrt{5}x^3y^2z$	x^2	6	$-x$	$2^{-1}xy$	0
สัมประสิทธิ์	2	-3	$\sqrt{5}$	1	6	-1	2^{-1}	0
ดีกรี	5	6	6	2	0	1	2	หาไม่ได้

- บวกลบเอกนาม บวกได้เฉพาะเอกนามที่มีชุดตัวแปรเหมือนกัน โดยให้เอาสัมประสิทธิ์มาบวกกัน

  เช่น $2x^5 + 3x^5 = 5x^5$ $\quad$ $3a^2b + a^2b = 4a^2b$

  $2a^2b - ab^2 = 2a^2b - ab^2$ (บวกลบกันไม่ได้ เพราะชุดตัวแปรไม่เหมือนกัน)

  $\frac{3}{2}xyz^2 - z^2xy = \left(\frac{3}{2} - 1\right)xyz^2 = \left(\frac{3-2}{2}\right)xyz^2 = \frac{1}{2}xyz^2$

- คูณหารเอกนาม ให้เอาสัมประสิทธิ์ คูณหาร สัมประสิทธิ์ และเอาตัวแปร คูณหาร ตัวแปร ได้เลย

  เช่น $2a^2b \times 3abc = 6a^3b^2c$ $\quad$ $3xy^2z \times a^2bc = 3a^2bcxy^2z$

  $\frac{1}{2}x^2 \times \frac{4}{3}x^2 = \frac{2}{3}x^4$ $\quad$ $\frac{6x^3yz}{2xz^3} = \frac{3x^2y}{z^2}$

- พหุนาม คือ การบวกกันของเอกนาม ตั้งแต่ 1 ตัวขึ้นไป

  เช่น $2x^5 + 4x + 5$, $3a^2b + b^2 - 2$, $6 - 3x^2$, 2^{-3}

- เราจะเรียกเอกนามแต่ละตัวที่มาบวกกันเป็นพหุนาม ว่า "พจน์"

  เช่น $2x^5 + 4x + 5$ มี 3 พจน์ โดยพจน์แรกคือ $2x^5$, พจน์ที่สองคือ $4x$, พจน์ที่สามคือ 5

- ดีกรีของพหุนาม คือ ดีกรีของเอกนามที่ดีกรีสูงสุดแค่พจน์เดียว

พหุนาม	$2x^5 + 4x + 5$	$3a^2b + b^2 - 2$	$6 - 3x^2$	2^{-3}
ดีกรี	5	3	2	0

- เรานิยมแทน พหุนาม ด้วยสัญลักษณ์ $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$

  และสัญลักษณ์ $P(c)$ จะหมายถึง ค่าของ $P(x)$ เมื่อแทน x ด้วย c

  เช่น ถ้าให้ $P(x) = 2x^5 + 4x + 5$ จะได้ $P(1) = 2(1)^5 + 4(1) + 5 = 11$

  $P(-2) = 2(-2)^5 + 4(-2) + 5 = -67$

  ถ้าให้ $Q(x) = 6 - 3x^2$ จะได้ $Q(0) = 6 - 3(0)^2 = 6$

  $Q(1) = 6 - 3(1)^2 = 3$

- บวกลบพหุนาม ให้บวกลบเฉพาะเอกนามที่บวกลบกันได้ ถ้าบวกลบกันไม่ได้ก็ให้ปล่อยไว้เหมือนเดิม

  เช่น $(2x^5+4x+5)+(x^5-x^2-2x)=3x^5-x^2+2x+5$

  $$\begin{aligned}(x^2-2x-1)-(2x^2-x-2) &= x^2-2x-1-2x^2+x+2 \\ &= -x^2-x+1\end{aligned}$$

- คูณพหุนาม ให้ใช้หลักการกระจาย

  เช่น $$\begin{aligned}(2x^2+4x+5)(x^2-2) &= 2x^4-4x^2+4x^3-8x+5x^2-10 \\ &= 2x^4+4x^3+x^2-8x-10\end{aligned}$$

  สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ผลรวมดีกรีของพหุนามที่มาคูณกัน เสมอ

- หารพหุนาม ให้ตั้งหารยาว

  เช่น $(x^2-2x+5)\div(x+2)$

  $$\begin{array}{r|l} & x-4 \\ \hline x+2 & x^2-2x+5 \\ & \underline{x^2+2x} \\ & -4x+5 \\ & \underline{-4x-8} \\ & \underline{13} \end{array}$$

  โดยจะได้ ตัวตั้ง $=$ (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) $+$ เศษ

  นั่นคือ $x^2-2x+5=(x+2)(x-4)+13$

  สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ดีกรีตัวตั้ง $-$ ดีกรีตัวหาร เสมอ

- การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำได้เมื่อ พหุนามมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะแทน x ด้วยอะไร

  เช่น ถ้า $ax^3+bx^2+cx+d = 2x^3-3x^2+5$ <u>สำหรับ ทุกๆ x</u>

  เราจะได้ทันทีว่า $a=2$, $b=-3$, $c=0$, $d=5$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $P(x) = x^2-1$, $Q(x) = 3x+2$, $R(x) = P(x)-Q(x)$ จงหาค่าของ $R(2)$

2. ถ้า $P(x)$ หารด้วย $2x-1$ ลงตัว ได้ผลลัพธ์ $x+2$ แล้ว จงหา $P(x)$

3. ถ้า $P(x)$ หารด้วย x^2-1 ได้ผลลัพธ์ $2x+3$ เศษ $x-1$ แล้ว จงหา $P(x)$

4. ถ้า $ax^2 + bx + c = (2x+1)(2x-3)$ แล้ว จงหาค่าของ $a+b+c$

5. ถ้า $(ax+2)(x-b) = 3x^2 + cx + 10$ แล้ว จงหาค่าของ $a+b+c$

6. ถ้า $(ax+b)^2 = 4x^2 - 12x + c$ และ $a > 0$ แล้ว จงหาค่าของ $a+b+c$

7. ถ้า $\left(P(x)\right)^2 = x^2 + 6x + c$ แล้ว จงหาค่า c

8. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 3$ ถ้า $P(x) = (x^2 + 1)Q(x)$ แล้ว จงหาค่า $P(1)$

9. ถ้า a , b , c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง $(x-1)^2(ax+b) = cx^3 + dx + 4$ ทุกจำนวนจริง x แล้ว $a+b+c+d$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/25]

การแยกตัวประกอบพหุนาม

“การแยกตัวประกอบ” คือ การ “เขียนให้อยู่ในรูปผลคูณ” ของพหุนามย่อยๆ

เช่น $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ เป็นต้น

เทคนิคการแยกตัวประกอบ จะมีหลายวิธี ดังนี้

1. ดึงตัวร่วม

ดูว่าแต่ละพจน์ มีอะไรบ้างที่มีเหมือนๆกัน แล้วดึงสิ่งที่มีในทุกๆพจน์ออกมา

เช่น $3a^2bc-12a^2b^2+6ab^2c=(3ab)(ac-4ab+2bc)$

$2x^4-4x^3+3x^2=(x^2)(2x^2-4x+3)$

2. จัดหมู่ดึงตัวร่วม

คือการจัดกลุ่มเป็นกลุ่มย่อยๆ ที่ลักษณะคล้ายกัน ดึงตัวร่วมแต่ละกลุ่มย่อย ให้เกิดตัวร่วมในทุกกลุ่มย่อย

เช่น
$$\begin{aligned}x^3-2x^2+3x-6 &= (x^3-2x^2)+(3x-6)\\ &= x^2(x-2)+3(x-2)\\ &= (x^2+3)(x-2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^3-x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{3} &= (x^3-x^2)-\left(\sqrt{3}x-\sqrt{3}\right)\\ &= x^2(x-1)-\sqrt{3}(x-1)\\ &= \left(x^2-\sqrt{3}\right)(x-1)\end{aligned}$$

3. ใช้สูตร

$$\begin{aligned}&\text{น}^2-\text{ล}^2=(\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล})\\ &\text{น}^3-\text{ล}^3=(\text{น}-\text{ล})(\text{น}^2+\text{นล}+\text{ล}^2)\\ &\text{น}^3+\text{ล}^3=(\text{น}+\text{ล})(\text{น}^2-\text{นล}+\text{ล}^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{น}^2+2\text{นล}+\text{ล}^2=(\text{น}+\text{ล})^2\\ &\text{น}^2-2\text{นล}+\text{ล}^2=(\text{น}-\text{ล})^2\\ &\text{น}^3+3\text{น}^2\text{ล}+3\text{นล}^2+\text{ล}^3=(\text{น}+\text{ล})^3\\ &\text{น}^3-3\text{น}^2\text{ล}+3\text{นล}^2-\text{ล}^3=(\text{น}-\text{ล})^3\end{aligned}$$

เช่น
$$\begin{aligned}x^2-1 &= (x)^2-(1)^2 &&= (x-1)(x+1)\\ 4x^2-3 &= (2x)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2 &&= \left(2x-\sqrt{3}\right)\left(2x+\sqrt{3}\right)\\ 8x^3-27 &= (2x)^3-(3)^3 &&= (2x-3)(4x^2+6x+9)\\ 64x^6-1 &= (8x^3)^2-(1)^2 &&= (8x^3-1)(8x^3+1)\\ & &&= ((2x)^3-1^3)((2x)^3+1^3)\\ & &&= (2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)\end{aligned}$$

4. กรณีพหุนามอยู่ในรูป x^2+bx+c

x^2+bx+c

$+\quad\times$

$(x+?)(x+?)$

หาตัวเลข 2 ตัว ที่ คูณกันได้ c

บวกกันได้ b

เช่น $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ $\qquad$ $x^2+7x+6=(x+1)(x+6)$

$x^2+2x-8 = (x-2)(x+4)$

$x^2-4x+3 = (x-1)(x-3)$

$a^2-2a-8 = (a-4)(a+2)$

$x^4-6x^2+8 = (x^2-4)(x^2-2)$

5. กรณีพหุนามอยู่ในรูป ax^2+bx+c

ax^2+bx+c

$(\text{น}_1\,x+\text{ล}_1)(\text{น}_2\,x+\text{ล}_2)$

b

แตก a เป็น $\text{น}_1 \times \text{น}_2$

แตก c เป็น $\text{ล}_1 \times \text{ล}_2$

เช็คว่า (ใกล้ × ใกล้) + (ไกล × ไกล) ได้ b ไหม

ถ้าไม่ได้ ให้กลับไปแตก น_1 , น_2 , ล_1 , ล_2 ใหม่ จนกว่าจะได้

เช่น $2x^2+7x+6 = (2x+3)(x+2)$

$4x^2+4x-3 = (2x-1)(2x+3)$

$6-n-2n^2 = (3-2n)(2+n)$

$6x^2-17x-3 = (6x+1)(x-3)$

$4x^2-11x+6 = (4x-3)(x-2)$

$2x^4-5x^2+2 = (2x^2-1)(x^2-2)$

6. ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

6.1. เติมตัวหลัง

$\div 2$

$$\begin{aligned} x^2-6x-7 &= x^2-2(3)(x)+3^2-3^2-7 \\ &= (x-3)^2-3^2-7 \\ &= (x-3)^2-16 \\ &= (x-3)^2-4^2 \\ &= (x-3-4)(x-3+4) \\ &= (x-7)(x+1) \end{aligned}$$

$\text{น}^2 \pm 2\text{นล} + \text{ล}^2 = (\text{น} \pm \text{ล})^2$

$\text{น}^2 - \text{ล}^2 = (\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล})$

เช่น
$$\begin{aligned} x^2+2x-5 &= x^2+2(1)x+1^2-1^2-5 \\ &= (x+1)^2-1^2-5 \\ &= (x+1)^2-6 \\ &= \left(x+1-\sqrt{6}\right)\left(x+1+\sqrt{6}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2+3x+1 &= x^2+2\left(\tfrac{3}{2}\right)x+\left(\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2-\left(\tfrac{3}{2}\right)^2+1 \\ &= \left(x+\tfrac{3}{2}\right)^2-\tfrac{5}{4} \\ &= \left(x+\tfrac{3}{2}-\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\tfrac{3}{2}+\tfrac{\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2-7x-1 &= 2\left(x^2-\tfrac{7}{2}x-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2-2\left(\tfrac{7}{4}\right)x+\left(\tfrac{7}{4}\right)^2-\left(\tfrac{7}{4}\right)^2-\tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x-\tfrac{7}{4}\right)^2-\tfrac{57}{16}\right) \\ &= 2\left(x-\tfrac{7}{4}-\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right)\left(x-\tfrac{7}{4}+\tfrac{\sqrt{57}}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2-4x+7 &= x^2-2(2)x+2^2-2^2+7 \\ &= (x-2)^2-2^2+7 \\ &= (x-2)^2+3 \end{aligned}$$
= แยกไม่ได้ (เข้าสูตร $\text{น}^2-\text{ล}^2$ ไม่ได้)

6.1. เติมตัวกลาง

เติม

$$\begin{aligned} x^4+x^2+1 &= x^4+2x^2+1^2-2x^2+x^2 \\ &= (x^2+1)^2 - x^2 \\ &= (x^2-x+1)(x^2+x+1) \end{aligned}$$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้

1. $x^2 + x - 12$

2. $x^2 - 6x - 16$

3. $3x^2 + x - 24$

4. $4x^2 - 19x + 12$

5. $6x^2 - 3x - 18$

6. $x^4 - 5x^3 + 6x^2$

7. $3m^3n^2 - 24n^2$

8. $2x^3 + x^2 - 8x - 4$

9. $m^4 - 20m^2 + 64$

10. $a^6 + 7a^3 - 8$

11. $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

12. $x^2 + 5\sqrt{2}x + 12$

2. จงแยกตัวประกอบของพหุนามต่อไปนี้ ด้วยวิธีทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์

   1. $x^2 + 2x - 1$

   2. $x^2 - 4x + 1$

สมการตัวแปรเดียว

การแก้สมการ คือ การหาค่าที่เมื่อแทนในตัวแปรแล้วทำให้สมการเป็นจริง
เราจะเรียกค่าที่แทนในตัวแปรแล้วทำให้สมการเป็นจริง ว่า “คำตอบของสมการ” หรือ “รากของสมการ”

เนื่องจากคำตอบที่ทำให้สมการเป็นจริง อาจมีได้หลายตัว บางทีเราจะใช้คำว่า “เซตคำตอบ” ของสมการ
“เซตคำตอบ” ของสมการ ก็คือ เซตของค่าที่แทนในตัวแปรแล้วทำให้สมการเป็นจริงนั่นเอง
เช่น เซตคำตอบของสมการ $x^2-3x+2=0$ คือ $\{1, 2\}$ เพราะเมื่อแทน 1 กับ 2 ลงไปใน x จะทำให้สมการเป็นจริง

การแก้สมการดีกรี 1 ให้จัดแบ่งข้าง ให้ตัวแปรอยู่ฝั่งหนึ่ง ตัวเลขอยู่อีกฝั่งหนึ่ง ย้ายข้างให้ฝั่งตัวแปรเหลือ x เพียงตัวเดียว

เช่น

$$\begin{aligned}4x+5 &= 2x-13\\ 4x-2x &= -13-5\\ 2x &= -18\\ x &= \frac{-18}{2}=-9\end{aligned}$$

การแก้สมการดีกรี 2 ให้จัดฝั่งหนึ่งให้เป็นศูนย์ ให้สมการอยู่ในรูป $ax^2+bx+c=0$
จากนั้น แยกตัวประกอบ ax^2+bx+c แล้วจับให้แต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 เพื่อหาคำตอบ
ในกรณีที่แยกตัวประกอบไม่ได้ ให้ใช้สูตร $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$

เช่น

$$\begin{aligned}5+2x^2 &= 9-4x-x^2\\ 3x^2+4x-4 &= 0\\ (3x-2)(x+2) &= 0\end{aligned}$$

$$3x-2=0 \qquad x+2=0$$
$$x=\frac{2}{3} \qquad x=-2$$
$$x=\frac{2}{3}, -2$$

หรือ

$$\begin{aligned}5+2x^2 &= 9-4x-x^2\\ 3x^2+4x-4 &= 0\end{aligned}$$

$$a=3 \quad b=4 \quad c=-4$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4(3)(-4)}}{2(3)}\\ &= \frac{-4\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{-4\pm 8}{6}\\ &= \frac{4}{6}, \frac{-12}{6}\\ &= \frac{2}{3}, -2\end{aligned}$$

สูตรหาจำนวนคำตอบ

- สมการ $ax^2+bx+c=0$ จะมีคำตอบได้<u>ไม่เกิน</u> 2 คำตอบที่แตกต่างกัน

  - ถ้า $b^2-4ac>0$ สมการนี้ จะมี 2 คำตอบ
  - ถ้า $b^2-4ac=0$ สมการนี้ จะมี 1 คำตอบ
  - ถ้า $b^2-4ac<0$ สมการนี้ จะไม่มีคำตอบ

เช่น สมการ $x^2-3x+2=0$ จะมี 2 คำตอบ เพราะ $(-3)^2-4(1)(2)=9-8=1>0$

สูตรผลบวกราก - ผลคูณราก

- ถ้าสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มี 2 คำตอบที่แตกต่างกันแล้ว

  - ทั้ง 2 คำตอบจะบวกกันได้ $-\frac{b}{a}$
  - ทั้ง 2 คำตอบจะคูณกันได้ $\frac{c}{a}$

  เช่น สมการ $x^2 - 3x + 2 = 0$ จะมีคำตอบที่บวกกันได้ $-\frac{(-3)}{1} = 3$ และคูณกันได้ $\frac{2}{1} = 2$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าสมการ $2x^2 - 4x + m = 0$ มีเพียงคำตอบเดียวแล้ว จงหาค่า m

<u>วิธีทำ</u> สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะมี 1 คำตอบ เมื่อ $b^2 - 4ac = 0$

จะเห็นว่าข้อนี้ $a = 2$, $b = -4$, $c = m$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} (-4)^2 - 4(2)(m) &= 0 \\ 16 - 8m &= 0 \\ 2 &= m \end{aligned}$$
#

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าสมการ $2x^2 - kx + 6 = 0$ มีคำตอบหนึ่งคือ $\frac{3}{2}$ จงหาอีกคำตอบหนึ่ง

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ทำได้หลายวิธี ดังนี้

<u>วิธีที่ 1</u> โจทย์บอกว่า $\frac{3}{2}$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ
ดังนั้นถ้าแทน $\frac{3}{2}$ ลงไปที่ x จะต้องทำให้สมการเป็นจริง
ซึ่งจะทำหาค่า k ออกมาได้

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - k\left(\frac{3}{2}\right) + 6 &= 0 \\ \frac{9}{2} - \frac{3k}{2} + 6 &= 0 \\ 9 - 3k + 12 &= 0 \\ 21 &= 3k \\ k &= 7 \end{aligned}$$

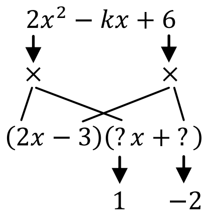
จากนั้น แทนค่า k กลับเข้าไปในสมการ
แล้วหาคำตอบที่เหลือ
จะได้อีกคำตอบของสมการนี้ คือ 2

$$\begin{aligned} 2x^2 - 7x + 6 &= 0 \\ (2x-3)(x-2) &= 0 \\ x &= \tfrac{3}{2} \text{ , } 2 \end{aligned}$$
#

<u>วิธีที่ 2</u> เราจะทำย้อนกลับจากคำตอบ $\frac{3}{2}$
โดยสืบกลับไปหาสาเหตุของคำตอบนี้

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{3}{2} \text{ , } ? \\ (2x-3)(?\,x + ?\,) &= 0 \\ 2x^2 - kx + 6 &= 0 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $2x^2 - kx + 6$ ต้องแยกตัวประกอบได้เป็น $(2x-3)(?\,x+?\,)$



ดังนั้น อีกตัวประกอบต้องเป็น $x - 2$
นั่นคือ อีกคำตอบคือ 2 นั่นเอง #

<u>วิธีที่ 3</u> จากสูตรผลบวกราก - ผลคูณราก
คำตอบของสมการ $ax^2 + bx + c = 0$ จะบวกกันได้ $-\frac{b}{a}$ และคูณกันได้ $\frac{c}{a}$
ดังนั้น คำตอบของสมการ $2x^2 - kx + 6 = 0$ จะคูณกันได้ $\frac{6}{2} = 3$

เนื่องจากคำตอบหนึ่งคือ $\frac{3}{2}$

ดังนั้น อีกคำตอบต้องคูณกับ $\frac{3}{2}$ แล้วได้ 3

$$\frac{3}{2}x = 3$$
$$x = 3 \times \frac{2}{3} = 2$$

นั่นคือ จะได้อีกคำตอบคือ 2 #

การแก้สมการดีกรีสูงกว่า 2 จะทำแบบเดียวกัน คือให้จัดรูปให้ฝั่งหนึ่งเป็นศูนย์
แยกตัวประกอบให้ถึงที่สุด ให้แต่ละวงเล็บเป็นดีกรี 1 หรือ ดีกรี 2
จับให้แต่ละวงเล็บเท่ากับ 0 เพื่อหาคำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเซตคำตอบของสมการ $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

<u>วิธีทำ</u> จัดทางขวาให้เป็น 0 แล้วแยกตัวประกอบ

$$\begin{aligned} x^2(x-3) - 4(x-3) &= 0 \\ (x^2-4)(x-3) &= 0 \\ (x-2)(x+2)(x-3) &= 0 \\ x &= 2, -2, 3 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\{2, -2, 3\}$ #

สิ่งที่เป็นปัญหามากสำหรับนักเรียนส่วนใหญ่ก็คือเรื่อง "โจทย์สมการ"
ในเรื่องนี้ โจทย์จะ<u>ไม่</u>ให้สมการมาตรงๆ แต่จะสร้างเรื่องราวมาเป็นฉากๆ แล้วถามสิ่งที่โจทย์ต้องการ
ขั้นตอนในการทำโจทย์สมการ มีดังนี้

1. สมมติให้ x แทนปริมาณอะไรบางอย่าง
   - <u>ส่วนใหญ่</u>จะให้ x แทนสิ่งที่โจทย์ถาม เพื่อให้เมื่อแก้หาค่า x ได้จะได้ตอบได้เลย
   - หลักสำคัญคือ ให้ x แทนสิ่งที่เป็นพื้นฐานของการหาปริมาณต่างๆที่โจทย์กล่าวถึง
2. อ่านโจทย์ แล้วเขียนปริมาณต่างๆที่โจทย์กล่าวถึง ในรูปของ x
3. จับความสัมพันธ์ของปริมาณต่างๆที่เขียนออกมาในขั้นตอนที่ 2 แล้วสร้างสมการ
4. แก้สมการ หาค่า x ตัดค่า x ที่ใช้ไม่ได้ทิ้งไป (เช่น ความยาว เป็นเลขติดลบไม่ได้ , จำนวนคน เป็นทศนิยมไม่ได้) แล้วนำค่า x ไปคำนวณหาสิ่งที่โจทย์ถาม

<u>ตัวอย่าง</u> ที่ดินแปลงหนึ่ง มีด้านยาว ยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 เมตร ถ้าที่ดินแปลงนี้มีพื้นที่ 90 ตารางเมตร จงหาว่าที่ดินแปลงนี้ กว้างและยาว กี่เมตร

<u>วิธีทำ</u> 1. สมมติ x

เราจะให้ x แทนด้านกว้าง นั่นคือ ให้ที่ดินแปลงนี้กว้าง x เมตร

2. เขียนปริมาณต่างๆที่โจทย์กล่าวถึง ในรูปของ x

"สองเท่าของด้านกว้าง" จะเท่ากับ $2x$ เมตร

ดังนั้น ด้านยาว ต้องยาวกว่า $2x$ อยู่ 3 เมตร ดังนั้น ที่ดินแปลงนี้ยาว $2x + 3$ เมตร

ดังนั้น ที่ดินแปลงนี้ มีพื้นที่ = กว้าง × ยาว $= (x)(2x+3)$ ตารางเมตร

3. จับความสัมพันธ์ สร้างสมการ

โจทย์บอกว่าที่ดินแปลงนี้ มีพื้นที่ 90 ตารางเมตร ดังนั้น สมการคือ $(x)(2x+3) = 90$

4. แก้สมการ แล้วตอบ

$$\begin{aligned}(x)(2x+3) &= 90\\ 2x^2+3x &= 90\\ 2x^2+3x-90 &= 0\\ (2x+15)(x-6) &= 0\\ x &= -\tfrac{15}{2}\ ,\ 6\end{aligned}$$

ได้ $x = -\frac{15}{2}$ กับ 6
แต่ความกว้าง เป็นเลขติดลบไม่ได้ ดังนั้น เหลือ 6 ค่าเดียว
นั่นคือ ที่ดินกว้าง $= x = 6$ เมตร
และยาว $= 2x+3 = 2(6)+3 = 15$ เมตร #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้
   1. $x^2-5x+4 = 0$
   2. $4x^2-3x = \frac{9}{2}$
   3. $(x-3)(x-5) = 11-4x$
   4. $x^3-2x^2-x+2 = 0$
   5. $x^2+x-1 = 0$
   6. $x^2+4x+1 = 0$

2. จงพิจารณาว่าสมการต่อไปนี้ มีคำตอบที่แตกต่างกันกี่คำตอบ พร้อมทั้งหาผลบวกและผลคูณของคำตอบนั้น
   1. $x^2-5x+6 = 0$
   2. $x^2 = 9$

3. $x^2 + x + 1 = 0$

4. $2x^2 + 3x - 6 = 0$

5. $x^2 + 6x + 9 = 0$

6. $x^2 + 1 = 0$

3. ถ้าสมการ $ax^2 + x - 1 = 0$ มีคำตอบหนึ่งคือ $\frac{1}{2}$ จงหาอีกคำตอบหนึ่ง

4. ถ้าสมการ $x^2 - kx + 9 = 0$ มีรากเพียง 1 รากแล้ว จงหาค่า k

5. สมการในข้อใดต่อไปนี้ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงมากกว่า 2 คำตอบ [O-NET 51/6]
   1. $(x-2)^2 + 1 = 0$
   2. $(x^2+2)(x^2-1) = 0$
   3. $(x-1)^2(x^2+2) = 0$
   4. $(x^2-1)(x+2)^2 = 0$

6. ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\frac{x-1}{x+2} + x = 1$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 57/9]

7. ถ้าสมการ $(x^2+1)(2x^2-6x+c) = 0$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงเพียง 1 ราก ค่าของ c จะอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [O-NET 54/7]

1. $(0\,,3)$
2. $(3\,,6)$
3. $(6\,,9)$
4. $(9\,,12)$

8. ถ้า $\frac{3}{4}$ เป็นผลเฉลยหนึ่งของสมการ $4x^2 + bx - 6 = 0$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริงแล้ว อีกผลเฉลยหนึ่งของสมการนี้มีค่าเท่าใด [O-NET 53/6]

9. ถ้า $x = -\frac{1}{2}$ เป็นรากของสมการ $ax^2 + 3x - 1 = 0$ แล้ว รากอีกรากหนึ่งของสมการนี้ มีค่าเท่าใด [O-NET 50/6]

10. ต้องการล้อมรั้วรอบที่ดินรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีพื้นที่ 65 ตารางวา โดยด้านยาวของที่ดินยาวกว่าสองเท่าของด้านกว้างอยู่ 3 วา จะต้องใช้รั้วที่มีความยาวกี่วา [O-NET 52/21]

11. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาว ยาวกว่า ด้านกว้างอยู่ 3 ฟุต และเส้นแทยงมุมยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 7 ฟุต แล้ว เส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมนี้ยาวกี่ฟุต [O-NET 56/11]

12. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีพื้นที่ 600 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 75% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่งแล้ว เส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้ ยาวกี่เซนติเมตร [O-NET 53/14]

13. โรงพิมพ์แห่งหนึ่งคิดค่าจ้างในการพิมพ์แผ่นพับแยกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นค่าเรียงพิมพ์ ซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์ กับส่วนที่สองเป็นค่าพิมพ์ ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์ โดยโรงพิมพ์เสนอราคาดังนี้

    ถ้าสั่งพิมพ์ 100 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน 800 บาท

    และ ถ้าสั่งพิมพ์ 200 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน 1,100 บาท

    โรงพิมพ์คิดค่าเรียงพิมพ์กี่บาท [O-NET 56/35]

14. ห้องประชุมแห่งหนึ่งจัดที่นั่งเป็นแถวโดยนำโต๊ะมาเรียงต่อกันเป็นแถว แถวละ 5 ตัว หลังจากจัดแล้วได้ที่นั่งทั้งหมด 60 ที่นั่ง ถ้าจำนวนแถวน้อยกว่าจำนวนที่นั่งในแต่ละแถวอยู่ 4 ห้องประชุมนี้มีโต๊ะทั้งหมดกี่ตัว [O-NET 57/38]

15. แม่ค้านำเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ 1 กิโลกรัม ถั่วลิสง 3 กิโลกรัม และเมล็ดฟักทอง 4 กิโลกรัม มาผสมกัน แล้วแบ่งใส่ถุงถุงละ 100 กรัม ถ้าแม่ค้าซื้อเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ ถั่วลิสง และเมล็ดฟักทองมาในราคากิโลกรัมละ 250 บาท 50 บาท และ 100 บาท ตามลำดับแล้ว แม่ค้าจะต้องขายเมล็ดพืชผสมถุงละ 100 กรัมนี้ ในราคากี่บาท จึงจะได้กำไร 20 % เมื่อขายหมด [O-NET 51/37]

สมบัติการไม่เท่ากัน

เมื่อก่อน เราเรียนสมบัติการเท่ากันมาแล้ว คราวนี้มาเรียนสมบัติการไม่เท่ากันบ้าง

- สมบัติการถ่ายทอด ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$
- สมบัติการบวกด้วยตัวเท่า ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$
- สมบัติการคูณด้วยตัวเท่า
  - ถ้าคูณด้วยเลขบวก ได้เหมือนปกติ ถ้า $a < b$ แล้ว $5a < 5b$
  - ถ้าคูณด้วยเลขลบ ต้องกลับเครื่องหมาย ถ้า $a < b$ แล้ว $-5a > -5b$

สิ่งที่ต้องระวังคือ <u>ห้าม</u> คูณทั้งสองข้าง จนกว่าจะรู้ว่าตัวที่มาคูณเป็นบวกหรือลบ เพราะไม่รู้ว่าต้องกลับเครื่องหมายหรือไม่

เราสามารถนำอสมการมา<u>บวก</u>กันได้
กล่าวคือ ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว เราสามารถสรุปได้ว่า $a + c < b + d$
แต่เรา<u>ไม่</u>สามารถนำอสมการมา<u>ลบ</u>กันได้
เพราะ การลบ แฝงไว้ด้วยการคูณด้วยเลขลบ กล่าวคือ $a - b = a + (-b)$ ทำให้ต้องกลับ $> \leftrightarrow <$
ดังนั้น ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว เรา<u>ไม่</u>สามารถสรุปได้ว่า $a - c < b - d$
ถ้าอยากจะลบอสมการ ให้แบ่งเป็น 2 ขั้น คือ คูณ -1 ก่อน แล้วค่อยเอาอสมการมาบวกกัน

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $6 < a < 15$ และ $1 < b < 4$ จงหาค่าที่เป็นไปได้ของ $a - b$
<u>วิธีทำ</u> เราไม่สามารถนำอสมการมาลบกันได้ ถ้าจะหา $a - b$ ต้องคูณ -1 แล้วนำอสมการมาบวกกัน

$$\begin{array}{ccccc} 6 & < & a & < & 15 \\ 1 & < & b & < & 4 \\ \hline 5 & < & a-b & < & 11 \end{array} \;\times \qquad \longrightarrow \quad -1 > -b > -4 \quad \longrightarrow \qquad \begin{array}{ccccc} 6 & < & a & < & 15 \\ -4 & < & -b & < & -1 \\ \hline 2 & < & a-b & < & 14 \end{array} \;\checkmark$$

(ห้ามทำแบบนี้)

ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ $a - b$ คือ $2 < a - b < 14$ #

การนำอสมการมาคูณหรือหาร กัน ทำได้เมื่อมีทั้งสองอสมการเป็นค่าบวก
กล่าวคือ ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว เราสามารถสรุปได้ว่า $ac < bd$

การนำอสมการมาหารกัน ต้องแบ่งทำเป็น 2 ขั้น คือ กลับเศษเป็นส่วนก่อน แล้วค่อยเอาอสมการมาคูณกัน
กล่าวคือ ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ แล้ว <u>ห้าม</u>สรุปว่า $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$

$$\begin{array}{cccc} 0< & a & < & b \\ 0< & c & < & d \\ \hline & \frac{a}{c} & < & \frac{b}{d} \end{array} \;\times \qquad \longrightarrow \qquad \begin{array}{cccc} 0< & a & < & b \\ 0< & \frac{1}{d} & < & \frac{1}{c} \\ \hline & \frac{a}{d} & < & \frac{b}{c} \end{array} \;\checkmark$$

(ห้ามทำแบบนี้)

โจทย์ยอดนิยมในเรื่องนี้ คือ โจทย์ข้อใดถูกข้อใดผิด
สิ่งที่ห้ามลืม คือ กฎที่เกี่ยวกับการคูณหารจำนวนมาก จะใช้ไม่ได้กับเลขลบ
ดังนั้น ก่อนจะตอบว่าข้อไหนถูก ลองแทนทั้งเลขบวกและเลขลบ ลงไปให้คลุมหลายๆกรณีดูก่อน

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ข้อใดถูกต้อง
   1. ถ้า $a < b$ แล้ว $ab < b^2$
   2. ถ้า $a < b$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
   3. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
   4. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
   5. ถ้า $a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$
   6. ถ้า $a < b$ แล้ว $ac < bc$
   7. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $ac < bc$
   8. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว $ac > bc$
   9. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
   10. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a - c < b - d$
   11. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $ac < bd$
   12. ถ้า $a \neq b$ และ $b \neq c$ แล้ว $a \neq c$
   13. ถ้า $6 < a < 10$ และ $2 < b < 4$ แล้ว $4 < a - b < 6$

2. กำหนดให้ $6 < a < 12$ และ $2 < b < 3$ จงหาว่าจำนวนต่อไปนี้ มีค่าอยู่ระหว่างจำนวนใด
   1. $a + b$
   2. $a - b$
   3. ab
   4. $\frac{a}{b}$
   5. $2a - 3b$

3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 56/1]
   1. ถ้า $ab = ac$ แล้วจะได้ว่า $b = c$
   2. ถ้า $a < b$ แล้วจะได้ว่า $a^2 < b^2$
   3. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้วจะได้ว่า $ab < bc$

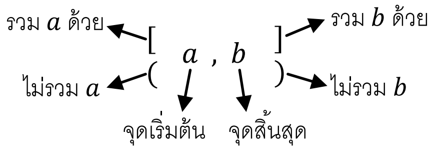
4. กำหนดให้ s, t, u และ v เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $s < t$ และ $u < v$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 53/4]
   1. $s - u < t - v$
   2. $s - v < t - u$

5. กำหนดให้ค่าประมาณที่ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3 ของ $\sqrt{3}$ และ $\sqrt{5}$ คือ 1.732 และ 2.236 ตามลำดับ ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>บ้าง [O-NET 52/3]
   1. $2.235 + 1.731 \leq \sqrt{5} + \sqrt{3} \leq 2.237 + 1.733$
   2. $2.235 - 1.731 \leq \sqrt{5} - \sqrt{3} \leq 2.237 - 1.733$

6. ให้ $a = \sqrt{18} - \sqrt{12}$ และ $b = \sqrt{75} - \sqrt{50}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 57/3]
   1. a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ
   2. $3a < 2b$
   3. $a + b < 2$

ช่วง

“ช่วง” คือ เซตของจำนวนทุกจำนวนที่มีค่า ตั้งแต่ / ระหว่าง จำนวนที่ระบุ โดยจะมีระบบสัญลักษณ์ ดังนี้



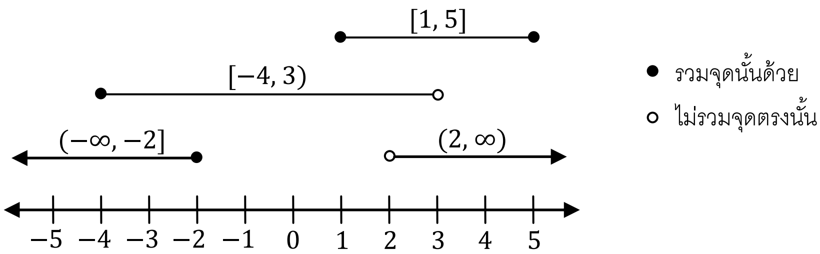
ถ้าไม่มีจุดเริ่มต้น ให้ใช้ $(-\infty,$ ___

ถ้าไม่มีจุดสิ้นสุด ให้ใช้ ___ $, \infty)$

เช่น $[1, 5]$	ทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 5 (รวม 1 กับ 5 ด้วย)	$\{ x \mid 1 \le x \le 5 \}$
$[-4, 3)$	ทุกจำนวนตั้งแต่ -4 ถึง 3 (รวม -4 แต่ไม่เอา 3)	$\{ x \mid -4 \le x < 3 \}$
$(2, \infty)$	ทุกจำนวนที่มากกว่า 2 (ไม่รวม 2)	$\{ x \mid 2 < x \}$
$(-\infty, -2]$	ทุกจำนวนตั้งแต่ -2 ลงไป (รวม -2 ด้วย)	$\{ x \mid x \le -2 \}$

นอกจากนี้ เรายังใช้แผนภาพเส้นจำนวน เพื่อแสดงช่วง ได้ด้วย

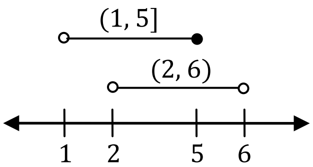
เช่น



เนื่องจากช่วง เป็น “เซต” ของจำนวน ดังนั้น เราจะใช้เครื่องหมาย $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$, $-$, ‘ ได้เหมือนเรื่องเซต ในกรณีที่โจทย์มีความซับซ้อน เราอาจวาดรูปเส้นจำนวน เพื่อช่วยคิด

เช่น $2 \in (0, 5)$ $\qquad$ $6 \notin (-\infty, 2]$

$\{2\} \subset (0, 5)$ $\qquad$ $(1, 3] \subset (-\infty, 3]$



$(1, 5] \cup (2, 6) = (1, 6)$

$(1, 5] - (2, 6) = (1, 2]$

$(1, 5] \cap (2, 6) = (2, 5]$

$(-\infty, 2] - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, 2]$ $\qquad$ $(2, \infty)' = (-\infty, 2]$

$\{1\}' = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลลัพธ์ของช่วงต่อไปนี้
   1. $(1, 10) \cup (-1, 2]$
   2. $(-\infty, 2) \cup (-1, 0]$

3. $(-3,3)\cap(-1,1]$

4. $(-\infty,-2)\cap(1,\infty)$

5. $(-\frac{1}{2},2)\cup(-\frac{1}{3},3)\cup(-\frac{1}{4},4)$

6. $(-\frac{1}{2},2)\cap(-\frac{1}{3},3)\cap(-\frac{1}{4},4)$

7. $(-\infty,5)-(-1,5]$

8. $[2,\infty)-(-1,2)$

9. $[-8,8)-[-1,1)$

10. $[5,8)'$

2. จงเขียนช่วงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $-1\le x<9$

2. $x>1$

3. $x\le -3$

4. $x>-1$ และ $x\le 1$

5. $x<-2$ หรือ $x>2$

6. $x>-2$ หรือ $x<2$

7. $x\neq 2$

8. $x\ge -4$ และ $x\neq 2$

อสมการตัวแปรเดียว

การแก้อสมการ คือ การหาค่าที่เมื่อแทนในตัวแปรแล้วทำให้อสมการเป็นจริง

อสมการ จะต่างจาก สมการ ตรงที่ มีคำตอบเยอะแยะไปหมด ที่แทนแล้วอสมการเป็นจริง

เช่น อสมการ $3x \geq 6$ จะเห็นว่า แทน x ด้วย 10 ก็ทำให้อสมการเป็นจริง
แทน x ด้วย 55 ก็ทำให้อสมการเป็นจริง
แทน x ด้วย 2 ก็ทำให้อสมการเป็นจริง
แทน x ด้วย 2.5 ก็ทำให้อสมการเป็นจริง

ดังนั้น คำตอบของอสมการนี้คือ "ทุกจำนวนตั้งแต่ 2 ขึ้นไป"

ในการแก้อสมการ สิ่งที่ต้องระวังคือ เมื่อคูณหรือหารทั้ง 2 ข้างด้วยเลขลบ ต้องกลับ $>$ เป็น $<$ และ $\geq$ เป็น $\leq$

การย้ายข้างก็ด้วย ถ้าย้ายเลขลบ จากคูณไปเป็นหาร (หรือจากหารไปเป็นคูณ) ก็ต้องกลับเครื่องหมาย เหมือนกัน

เช่น

$$\begin{aligned} x &> 3 \\ -2x &< (3)(-2) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -3x &< 6 \\ x &> \tfrac{6}{-3} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\tfrac{x}{2} &\leq 5 \\ x &\geq (5)(-2) \end{aligned}$$

แต่

$$\begin{aligned} -4x &< -8 \\ -x &< \tfrac{-8}{4} \end{aligned}$$

ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย
เพราะย้าย 4 ซึ่งเป็นบวก

$$\begin{aligned} x - 2 &> 8 \\ x &> 8 + 2 \end{aligned}$$

ย้ายแบบ บวก ↔ ลบ
ไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย

$$\begin{aligned} \tfrac{x+2}{x} &> 5 \\ x + 2 &\ \underline{?}\ 5x \end{aligned}$$

ห้ามทำ! เพราะไม่รู้
ว่า x เป็นบวกหรือลบ

การแก้อสมการดีกรี 1 ใช้หลักเดียวกับเรื่องสมการ แต่ต้องระวังตอนย้ายเลขลบแบบคูณหาร

เช่น

$$\begin{aligned} 2x + 3 &\geq 4x - 5 \\ 2x - 4x &\geq -5 - 3 \\ -2x &\geq -8 \\ x &\leq \tfrac{-8}{-2} \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$

กลับ $\geq$ เป็น $\leq$ ด้วย

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty, 4]$

ในกรณีที่ แต่ละพจน์ในอสมการตัดกันแล้ว "x หายหมด" ให้ดูตัวเลขที่เหลือ ว่าทำให้ประโยคเป็นจริงหรือไม่

- ถ้าตัวเลขที่เหลือทำให้อสมการเป็นจริง อสมการนี้จะมีคำตอบเป็นอะไรก็ได้ เซตคำตอบคือ $(-\infty, \infty)$
- ถ้าตัวเลขที่เหลือทำให้อสมการเป็นเท็จ อสมการนี้จะไม่มีคำตอบ เซตคำตอบคือ $\emptyset$

เช่น

$$\begin{aligned} x - 5 &\leq x - 3 \\ -5 &\leq -3 \quad \text{จริง} \end{aligned}$$

เซตคำตอบ คือ $(-\infty, \infty)$

$$\begin{aligned} 4 - 2x &> -2x + 5 \\ 4 &> 5 \quad \text{ไม่จริง} \end{aligned}$$

เซตคำตอบ คือ $\emptyset$

บางที โจทย์อาจนำอสมการหลายๆท่อนมาต่อกัน เช่น $2x - 4 < 2 - x < 2x + 14$

ในกรณีนี้ เราจะใช้หลัก บวกลบคูณหาร "ทุกท่อน" ด้วยตัวเท่า เพื่อรวม x ไปไว้ที่เดียว

เช่น

$$\begin{array}{ccccccl} 2x - 4 & < & 2 - x & < & 2x + 14 & & \\ 2x - 4 - 2x & < & 2 - x - 2x & < & 2x + 14 - 2x & & \text{ลบ } 2x \text{ ตลอดทุกท่อน} \\ -4 & < & 2 - 3x & < & 14 & & \\ -4 - 2 & < & 2 - 3x - 2 & < & 14 - 2 & & \text{ลบ } 2 \text{ ตลอดทุกท่อน} \\ -6 & < & -3x & < & 12 & & \\ \frac{-6}{-3} & > & \frac{-3x}{-3} & > & \frac{12}{-3} & & \text{หาร } -3 \text{ ตลอดทุกท่อน (กลับเครื่องหมายด้วย)} \\ 2 & > & x & > & -4 & & \text{ดังนั้น เซตคำตอบคือ } (-4, 2) \end{array}$$

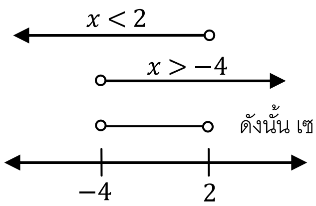
อีกวิธีที่จะแก้อสมการหลายท่อน คือ แยกอสมการออกเป็นอสมการย่อยๆ แล้วเอาคำตอบทุกคำตอบมาหาส่วนร่วม

เช่น $2x-4 \quad < \quad 2-x \quad < \quad 2x+14$

$$\begin{aligned} 2x-4 &< 2-x \\ 2x+x &< 2+4 \\ 3x &< 6 \\ x &< 2 \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} 2-x &< 2x+14 \\ -x-2x &< 14-2 \\ -3x &< 12 \\ x &> -4 \end{aligned}$$



ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $(-4, 2)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้อสมการต่อไปนี้

   1. $-3 < 2x-1 \le 3$

   2. $-1 \le 1-\frac{4+2x}{3} \le 3$

   3. $x-1 \le 2x+1 < 5$

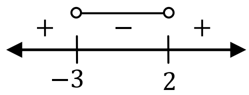
   4. $x-2 < 1-2x < x+4$

การแก้อสมการตั้งแต่ดีกรี 2 ขึ้นไป จะทำคล้ายๆกับเรื่องสมการ คือให้จัดฝั่งหนึ่งเป็น 0
อีกฝั่งให้แยกตัวประกอบ ให้อยู่ในรูปการคูณ "หรือหาร" กันของวงเล็บของ x แล้วจับให้แต่ละวงเล็บเป็น 0 แก้หาค่า x
ถ้าเป็นเมื่อก่อนในเรื่องสมการ เราจะนำค่า x ที่ได้ไปตอบ <u>แต่ในเรื่องอสมการ</u> เราจะนำค่า x ที่ได้ไป<u>พล็อตบนเส้นจำนวน</u>
โดย ค่า x ที่ได้ จะแบ่งเส้นจำนวนออกเป็นหลายๆช่องๆ จากนั้น ช่องขวาสุด ให้ใส่เครื่องหมาย $+$ ลงไป
และในช่องทางซ้ายถัดๆมา ให้ใส่เครื่องหมาย $-, +, -, +, \ldots$ สลับไปเรื่อยๆจนครบ

- ถ้าเครื่องหมายของอสมการคือ > 0 ให้นำช่วงที่มีเครื่องหมาย $+$ ไปตอบ
- ถ้าเครื่องหมายของอสมการคือ < 0 ให้นำช่วงที่มีเครื่องหมาย $-$ ไปตอบ

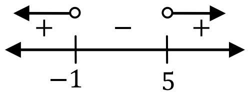
เช่น

$x^2 + x - 6 < 0$
$(x-2)(x+3) < 0$



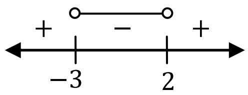
เซตคำตอบ คือ $(-3, 2)$

$x^2 - 4x - 5 > 0$
$(x+1)(x-5) > 0$



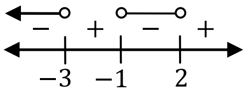
เซตคำตอบ คือ $(-\infty, -1) \cup (5, \infty)$

$\frac{(x-2)}{(x+3)} < 0$



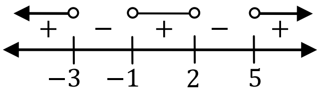
เซตคำตอบ คือ $(-3, 2)$

$(x+1)(x-2)(x+3) < 0$



เซตคำตอบ คือ $(-\infty, -3) \cup (-1, 2)$

$\frac{(x+1)(x-2)}{(x+3)(x-5)} > 0$



เซตคำตอบ คือ $(-\infty, -3) \cup (-1, 2) \cup (5, \infty)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

2. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 5x + 6 < 0$

2. $x^2 + 7x + 12 > 0$

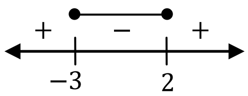
3. $x^2 - 4 > 0$

4. $\frac{1}{x+2} < \frac{1}{x+1}$

ในกรณีที่เป็น $\geq$ หรือ $\leq$ ให้ทำเหมือนเดิม แต่ให้รวมจุดบนเส้นจำนวนไปในคำตอบด้วย
พูดง่ายๆคือ ให้ใช้ จุดทึบ ● แทนที่จะเป็นจุดกลวง ∘ เหมือนก่อน <u>ยกเว้น</u> ตัวที่มาจาก “ส่วน” ห้ามใช้จุดทึบ

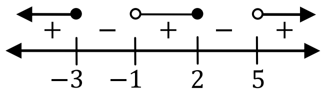
เช่น

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$
$$(x-2)(x+3) \leq 0$$



เซตคำตอบ คือ $[-3, 2]$

$$\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)(x-5)} \geq 0$$



เซตคำตอบ คือ $(-\infty, -3] \cup (-1, 2] \cup (5, \infty)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

3. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$

2. $6x^2 + 5x - 1 \geq 0$

3. $x(2x-1) \geq 15$

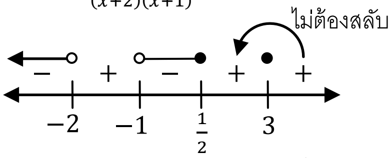
4. $3x^3 + 2x^2 - 3x - 2 \leq 0$

5. $\frac{3x-5}{x+1} \geq 0$

6. $\frac{3x-5}{x+1} \geq 1$

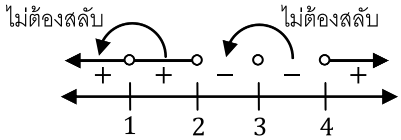
ในกรณีที่มี (วงเล็บ)$^{\text{ยกกำลังคู่}}$ อยู่ ตอนที่สลับ $+ - + \ldots$ ให้ไม่ต้องสลับตรงจุดที่มาจาก (วงเล็บ)$^{\text{ยกกำลังคู่}}$ โดยให้ใช้เครื่องหมายเดิมเดียวกับช่องทางขวา

เช่น $\frac{(x-3)^2(2x-1)}{(x+2)(x+1)} \leq 0$



เซตคำตอบ คือ $(-\infty,-2) \cup (-1,\frac{1}{2}] \cup \{3\}$

$\frac{(x-1)^4(x-2)^3}{(x-3)^2(x-4)} > 0$



เซตคำตอบ คือ $(-\infty,1) \cup (1,2) \cup (4,\infty)$

<u>แบบฝึกหัด</u>

4. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $(x+1)^3(x-2)^4(x+3)^5 < 0$
2. $\frac{(x-1)^2(x-2)}{x+1} \geq 0$
3. $(x^2-1)(x+1) \geq 0$
4. $\frac{(x-1)^4(x-2)^3}{(x-3)^2(x-4)} \geq 0$

ในกรณีที่ x ตัวซ้ายสุด (ที่ยกกำลังสูงสุด) มีเลขลบคูณอยู่ ให้จัดรูปใหม่ให้เป็นบวก โดยการคูณ -1 ทั้งสองข้าง แล้วสลับเครื่องหมาย มากกว่า $\leftrightarrow$ น้อยกว่า

เช่น $-2x^2+3x+2 \leq 0 \quad \rightarrow \quad 2x^2-3x-2 \geq 0$

$(-x+2)(x+1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x+1) < 0$

$(-x+2)(-x+1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)(x-1) > 0$ (คูณ -1 สองครั้ง)

$(-x+2)^4(-x+1) > 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)^4(x-1) < 0$ (ยกกำลังคู่ $(-x+2)^4 = (x-2)^4$)

<u>แบบฝึกหัด</u>

5. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $4-x^2 \geq 0$

2. $\frac{(x-1)(x+2)}{2-x} \geq 0$

3. $\frac{(3-x)^2(1-2x)}{(-x-2)(x+1)} \leq 0$

4. $\frac{(1-x)^4(2-x)^3}{(3-x)^2(x-4)} > 0$

และในกรณีที่มีตัวที่แยกตัวประกอบไม่ได้ (เช่น x^2+1) ตัวเหล่านี้ จะเป็นบวกเสมอ จึงย้ายข้างแบบคูณหารได้ โดยไม่ต้องระวังเรื่องการสลับเครื่องหมาย มากกว่า $\leftrightarrow$ น้อยกว่า

เช่น $(x^2+1)(x-3)(x+1) > 0 \rightarrow$ เอา x^2+1 หารตลอดได้

เพราะ x^2+1 เป็นบวกเสมอ ไม่ต้องกลับมากกว่าเป็นน้อยกว่า

เหลือ $(x-3)(x+1) > 0$ เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

6. จงแก้อสมการต่อไปนี้

1. $\frac{3x-5}{x^2+5} \geq 0$

2. $\frac{x^3-x^2+x-1}{x-2} \geq 0$

3. $x^2 + 4 > 0$ 4. $x^2 + 4 \leq 0$

7. เซตคำตอบของอสมการ $-1 \leq \sqrt{2} + \frac{x}{1-\sqrt{2}} \leq 1$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้ [O-NET 51/4]
   1. $\left[\sqrt{2} - 1,\ 1\right]$ 2. $\left[\sqrt{2} - 1,\ 2\right]$ 3. $\left[3 - 2\sqrt{2},\ 1\right]$ 4. $\left[3 - 2\sqrt{2},\ 2\right]$

8. ให้ $A = \{\, x \mid (2x+1)(4-3x) > 0 \,\}$ ข้อใดเป็นเซตย่อยของ A [O-NET 56/6]
   1. $(-1.2, -0.2)$ 2. $(-0.9, 0.3)$ 3. $(-0.6, 1.2)$
   4. $(0.4, 1.5)$ 5. $(0.3, 1.3)$

9. เซตของจำนวนจริง m ซึ่งทำให้สมการ $x^2 - mx + 4 = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง
   เป็นสับเซตของเซตใดต่อไปนี้ [O-NET 50/26]
   1. $(-5,\ 5)$
   2. $(-\infty,\ -4) \cup [3,\ \infty)$
   3. $(-\infty,\ 0) \cup [5,\ \infty)$
   4. $(-\infty,\ -3) \cup [4,\ \infty)$

10. พี่มีเงินมากกว่าน้อง 120 บาท ถ้าทั้งสองคนมีเงินรวมกันไม่เกิน $1{,}240$ บาท แล้ว พี่มีเงินมากที่สุดได้กี่บาท
    [O-NET 56/36]

11. แม่ค้าขายก๋วยเตี๋ยวชามละ 25 บาท โดยมีค่าเช่าร้านวันละ 120 บาท และต้นทุนค่าวัตถุดิบทั้งหมดคิดเป็นชามละ
    18 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรไม่ต่ำกว่าวันละ 500 บาท เขาต้องขายให้ได้อย่างน้อยวันละกี่ชาม
    [O-NET 57/37]

ค่าสัมบูรณ์

"ค่าสัมบูรณ์" ของ x แทนด้วยสัญลักษณ์ $|x|$ หมายถึง "ค่าที่เป็นบวก" ของ x
เช่น $|-2| = 2$, $|5| = 5$, $|-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

สูตรสำหรับหา $|x|$ จะเป็นดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \ge 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ถ้า x เป็นบวกอยู่แล้ว $|x|$ จะได้เท่าเดิม
ถ้า x เป็นลบอยู่ จะถูกทำให้เป็นบวกโดยคูณลบเข้าไป (ใช้หลักว่าลบคูณลบได้บวก)

สมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ คือ

- การยกกำลังสอง กำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้ กล่าวคือ $|x|^2 = x^2$
- กระจายในคูณหารได้ $|xy| = |x||y|$ $\quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
  แต่กระจายในบวกลบไม่ได้ $|x+y| \neq |x| + |y|$ $\quad |x-y| \neq |x| - |y|$
- $|x+y| \le |x| + |y|$ เสมอ
- $\sqrt{x^2} = |x|$

เวลาทำโจทย์ประเภท ข้อใดถูกข้อใดผิด ให้ระวังเรื่องเลขบวกเลขลบให้ดี
ในบางที เราอาจต้องแบ่งคิดเป็นสองกรณี คือ กรณีที่ $x \ge 0$ กับกรณี $x < 0$

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดถูกต้อง

1. $a < |a|$
2. $a|b| = |a|b$
3. $\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|}$
4. $(a - |a|)^2 \le 4a^2$
5. ถ้า $a < b$ แล้ว $|a| < |b|$
6. ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว $a < b$
7. ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว $a^2 < b^2$
8. ถ้า $a \le b$ แล้ว $a|c| \le b|c|$
9. $|2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$
10. ถ้า $x < 2$ แล้ว $|x - 2| = 2 - x$
11. ถ้า $a \neq b$ แล้ว $|a| \neq |b|$
12. ถ้า $|a| > |b|$ แล้ว $|ac| > |bc|$
13. $|x^n| = |x|^n$
14. $\sqrt{x^2} = -x$ เมื่อ $x < 0$
15. $|a - b| = |b - a|$
16. $\frac{x}{|x|} \in \{-1, 1\}$ เมื่อ $x \neq 0$
17. $x|x| \le x^2$

2. กำหนดให้ $x > 1$ จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|1-x| < 2$

3. กำหนดให้ $a,\ b$ เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก [O-NET 49/1-17]
   1. ถ้า $a < b$ แล้ว จะได้ $a^2 < b^2$
   2. ถ้า $a < b < 0$ แล้ว จะได้ $ab < a^2$
   3. ถ้า $|a| < |b|$ แล้ว จะได้ $a < b$
   4. ถ้า $a^2 < b^2$ แล้ว จะได้ $a < b$

4. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [O-NET 54/5]
   1. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|a| < |b|$ แล้ว $a^3 < b^3$
   2. ถ้า a , b และ c เป็นจำนวนจริงซึ่ง $ac = bc$ แล้ว $a = b$

5. กำหนดให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงซึ่ง $|a|b^3c > 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [O-NET 54/6]
   1. $ac > 0$
   2. $bc > 0$

6. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 57/1]
   1. ถ้า $ab = ac$ แล้ว $b = c$
   2. ถ้า $a|bc| < 0$ และ $b < 0$ แล้ว $|ab|c < 0$
   3. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$ แล้ว $a + b \geq \sqrt{2ab}$

7. ถ้า $x \leq 5$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก [O-NET 50/4]

1. $x^2 \leq 25$
2. $|x| \leq 5$
3. $x|x| \leq 25$
4. $(x - |x|)^2 \leq 25$

8. จำนวนสมาชิกของเซต $\left\{x \,\middle|\, x = \left(a + \frac{1}{|a|}\right)^2 - \left(|a| - \frac{1}{a}\right)^2 \text{ เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ } 0\right\}$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/21]

9. ถ้าช่วงเปิด $(a\,,b)$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x-1| + |6-3x| < 17$ และ $x > 2$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/27]

สมการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์

หลักในการแก้ คือ ต้องกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ออกไปให้ได้ ซึ่งมีวิธีดังนี้

1. สมการในรูป $|\boxed{\sim}| = \boxed{\quad}$ แปลว่า $\boxed{\sim} = \boxed{\quad}$ หรือ $\boxed{\sim} = -\boxed{\quad}$
และคำตอบต้องทำให้ $\boxed{\quad} \geq 0$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x^2 + 2x - 1| = 2$

วิธีทำ จะได้ $x^2 + 2x - 1 = 2$ หรือ $x^2 + 2x - 1 = -2$ และคำตอบต้องทำให้ $2 \geq 0$

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad x^2 + 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)(x+3) = 0 \qquad (x+1)^2 = 0$$
$$x = 1, -3 \qquad x = -1$$

ยังไงก็จริง
ดังนั้น ใช้ได้ทุกคำตอบ

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\{-3, -1, 1\}$ #

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $|x| = 3x + 4$

วิธีทำ จะได้ $x = 3x + 4$ หรือ $x = -(3x + 4)$ และคำตอบต้องทำให้ $3x + 4 \geq 0$

$$-2x = 4 \qquad x = -3x - 4$$
$$x = -2 \qquad 4x = -4$$
$$x = -1$$

แต่คำตอบ ต้องทำให้ $3x + 4 \geq 0$: $3(-2) + 4 = -2 \geq 0$ ไม่จริง
$3(-1) + 4 = 1 \geq 0$ จริง

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\{-1\}$ #

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2x - 1| = -3$

วิธีทำ จะได้ $\boxed{\sim} = \boxed{\quad}$ หรือ $\boxed{\sim} = -\boxed{\quad}$ และคำตอบต้องทำให้ $-3 \geq 0$

ยังไงก็ไม่จริง
ดังนั้น ใช้ไม่ได้ทุกคำตอบ

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\emptyset$ #

2. อสมการในรูป $|\boxed{\sim}| < \boxed{\quad}$ แปลว่า $-\boxed{\quad} < \boxed{\sim} < \boxed{\quad}$
และคำตอบต้องทำให้ $\boxed{\quad} > 0$

ตัวอย่าง จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|3 - 2x| \leq 5$

วิธีทำ จะได้ $-5 \leq 3 - 2x \leq 5$ และคำตอบต้องทำให้ $5 \geq 0$

$$-8 \leq -2x \leq 2$$
$$4 \geq x \geq -1$$

ยังไงก็จริง
ดังนั้น ใช้ได้ทุกคำตอบ

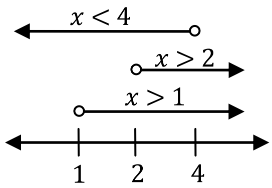
ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $[-1, 4]$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|5-2x| < x-1$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $-(x-1) < 5-2x < x-1$ และคำตอบต้องทำให้ $x-1>0$

$$x > 1$$

$$\begin{aligned} -(x-1) &< 5-2x \\ -x+1 &< 5-2x \\ x &< 4 \end{aligned} \qquad \text{และ} \qquad \begin{aligned} 5-2x &< x-1 \\ 6 &< 3x \\ 2 &< x \end{aligned}$$



ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $(\infty,4)\cap(2,\infty)\cap(1,\infty)=(2,4)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเซตคำตอบของอสมการ $|x+1| \le -1$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $-□ < ▨ < □$ และคำตอบต้องทำให้ $-1>0$

ยังไงก็ไม่จริง

ดังนั้น ใช้<u>ไม่ได้</u>ทุกคำตอบ

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\emptyset$ #

3. อสมการในรูป $\lvert ▨ \rvert > □$ แปลว่า $▨ > □$ หรือ $▨ < -□$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $|x+2| \ge x+4$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $x+2 \ge x+4$ หรือ $x+2 \le -(x+4)$

$$2 \ge 4$$

ไม่มีคำตอบ

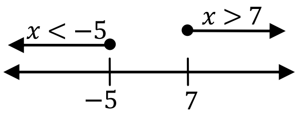
$$\begin{aligned} x+2 &\le -x-4 \\ 2x &\le -6 \\ x &\le -3 \end{aligned}$$

ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty,-3]$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\left|\frac{x-1}{3}\right| > 2$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $\frac{x-1}{3} > 2$ หรือ $\frac{x-1}{3} < -2$

$$\begin{aligned} x-1 &> 6 \\ x &> 7 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x-1 &< -6 \\ x &< -5 \end{aligned}$$



ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty,-5)\cup(7,\infty)$ #

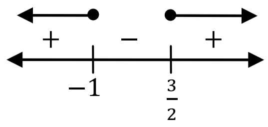
4. ประโยคในรูป $\lvert ▨ \rvert = \lvert □ \rvert$, $\lvert ▨ \rvert > \lvert □ \rvert$, $\lvert ▨ \rvert < \lvert □ \rvert$ ให้กำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง ($\lvert x \rvert^2 = x^2$) แล้วย้ายข้างมาเข้าสูตร $น^2 - ล^2 = (น-ล)(น+ล)$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $|2-3x| \ge |x-4|$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} |2-3x|^2 &\ge |x-4|^2 \\ (2-3x)^2 &\ge (x-4)^2 \\ (2-3x)^2-(x-4)^2 &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\big((2-3x)-(x-4)\big)\big((2-3x)+(x-4)\big) \ge 0$$
$$(2-3x-x+4)(2-3x+x-4) \ge 0$$
$$(-4x+6)(-2x-2) \ge 0$$
$$(-2x+3)(-x-1) \ge 0$$



ดังนั้น เซตคำตอบคือ $(-\infty,-1] \cup [\frac{3}{2},\infty)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $|x^2-4x-5| = |x^2-3x+8|$

<u>วิธีทำ</u>

$$|x^2-4x-5|^2 = |x^2-3x+8|^2$$
$$(x^2-4x-5)^2 = (x^2-3x+8)^2$$
$$(x^2-4x-5)^2-(x^2-3x+8)^2 = 0$$
$$\big((x^2-4x-5)-(x^2-3x+8)\big)\big((x^2-4x-5)+(x^2-3x+8)\big) = 0$$
$$(x^2-4x-5-x^2+3x-8)(x^2-4x-5+x^2-3x+8) = 0$$
$$(-x-13)(2x^2-7x+3) = 0$$
$$(-x-13)(2x-1)(x-3) = 0$$
$$x = -13 \ , \ \frac{1}{2} \ , \ 3$$

ดังนั้น เซตคำตอบ คือ $\{-13, \frac{1}{2}, 3\}$ #

<u>สรุป</u>: รูปแบบการแก้ สมการ / อสมการ ค่าสัมบูรณ์ มีดังนี้

	เปลี่ยนเป็นรูปที่ไม่มีค่าสัมบูรณ์	หมายเหตุ
|▨| = ▭	▨ = ▭ หรือ ▨ = −▭	คำตอบ ต้องทำให้ ▭ ≥ 0
|▨| < ▭	−▭ < ▨ < ▭	คำตอบ ต้องทำให้ ▭ > 0
|▨| > ▭	▨ > ▭ หรือ ▨ < −▭	
|▨| = |▭| |▨| < |▭| |▨| > |▭|	ยกกำลังสองทั้งสองข้าง เพื่อกำจัดค่าสัมบูรณ์ โดยใช้หลัก $\|x\|^2 = x^2$	

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการ / อสมการ ต่อไปนี้

 1. $|x+2| = 5$
 2. $|2x-1| = -1$
 3. $x^2+4 = 4|x|$
 4. $|2x+5| \le 3$

5. $|x^2 + 4| > 5$

6. $|2x| > x + 6$

7. $|x + 3| < 2x$

8. $|3x - 4| \leq 2x - 1$

9. $|x - 3| \leq 5 - x$

10. $|2x - 1| \geq x - 2$

11. $|2x + 1| \geq |x + 2|$

12. $|x^2 - 5x + 1| < |x^2 - 4x + 3|$

13. $|x^2-3x-8|=x^2+3x$

14. $\big|1-3|1-3x|\big|=x$

2. พิจารณาสมการ $|x-7|=6$ ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>เป็นเท็จ</u> [O-NET 52/6]
    1. คำตอบหนึ่งของสมการมีค่าระหว่าง 10 และ 15
    2. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการมีค่าเท่ากับ 14
    3. สมการนี้มีคำตอบมากกว่า 2 คำตอบ
    4. ในบรรดาคำตอบทั้งหมดของสมการ คำตอบที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าน้อยกว่า 3

3. ผลเฉลยของสมการ $2|5-x|=1$ อยู่ในช่วงใด [O-NET 53/5]
    1. $(-10,-5)$
    2. $(-6,-4)$
    3. $(-4,5)$
    4. $(-3,6)$

4. ผลบวกของคำตอบทุกคำตอบของสมการ $x^3-2x=|x|$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/24]

5. จำนวนเต็มที่สอดคล้องกับอสมการ $|x-3| \leq 4$ มีกี่จำนวน [O-NET 56/33]

6. ถ้า $A = \{ x \mid |x+1| + 1 > 2 \}$ แล้ว ช่วงในข้อใดเป็นสับเซตของ A [O-NET 57/10]
   1. $(-4, -2]$
   2. $(-3, -1)$
   3. $[-1, 0)$
   4. $[0, 2)$
   5. $[2, 3)$

7. กำหนดให้ $A = \{ x \mid |x-2| < 3 \}$ และ $B = \{ x \mid x^2 - 3x - 4 > 0\}$
   สมาชิกของ $A - B$ ที่เป็นจำนวนเต็มมีกี่ตัว [O-NET 57/11]

8. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม และ $A = \left\{ x \in \mathrm{I} \,\middle|\, \frac{|x-1|-1}{|x-1|} \leq \frac{2}{3} \right\}$
   จำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-20]

จำนวนชนิดต่างๆ

1. $1 , 3 , 5 , 9 , 11 , 13 , 14 , 17 , 19 , 20 , 21$
2. 1. -1 2. ไม่มี 3. 4 4. ไม่มี
   5. -1 6. ไม่มี 7. ไม่มี 8. ไม่มี
3. $A < C < B$
4. 1
5. $1, 2$
6. 1
7. 1
8. -

สมบัติการเท่ากัน

1. 1. สะท้อน 2. บวกตัวเท่า 3. สมมาตร 4. ถ่ายทอด
   5. คูณตัวเท่า 6. ถ่ายทอด 7. บวกตัวเท่า 8. คูณตัวเท่า
   9. บวกตัวเท่า 10. สะท้อน 11. คูณตัวเท่า 12. สมมาตร
2. 1. บวกตัวเท่า 2. บวกตัวเท่า 3. คูณตัวเท่า 4. สมมาตร

สมบัติการบวกและคูณ

1. 1. $+ , \times$ 2. $\times$ 3. $+ , \times$ 4. $+ , \times$
   5. $+$ 6. $+ , \times$ 7. $+ , \times$ 8. ไม่ปิด
2. 2 , 4 , 5
3. 1. -8 2. $\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{2}$ 4. $-\frac{1}{2}$
   5. 0 6. 1 7. 1 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
   9. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 10. $\frac{x+1}{x}$
4. 1

พหุนาม

1. -5
2. $2x^2 + 3x - 2$
3. $2x^3 + 3x^2 - x - 4$
4. -3
5. 15
6. 8
7. 9

จาก $\left(P(x)\right)^2$ เท่ากับ $x^2 + 6x + c$ จะได้ว่า $\left(P(x)\right)^2$ เป็นพหุนามกำลัง 2

ดังนั้น $P(x)$ ต้องเป็นพหุนามกำลัง 1 $\rightarrow$ ให้ $P(x) = ax + k$ (ตัวแปร c ถูกโจทย์ใช้ไปแล้ว)

$$\begin{aligned}
\left(P(x)\right)^2 &= x^2 + 6x + c \\
(ax+k)^2 &= x^2 + 6x + c \\
(ax+k)(ax+k) &= x^2 + 6x + c \\
a^2x^2 + akx + akx + k^2 &= x^2 + 6x + c \\
a^2x^2 \quad + 2akx \quad + k^2 &= x^2 + 6x + c
\end{aligned}$$

เทียบ สปส จะได้ $a^2 = 1$

$2ak = 6$

$k^2 = c$

8. 10

จาก $P(x) = (x^2+1)\,Q(x)$ พิจารณาดีกรีของพหุนาม จะได้ว่า $Q(x)$ ต้องเป็นพหุนามกำลัง 1

พหุนามกำลัง 3 พหุนามกำลัง 2

ให้ $Q(x) = cx + d$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+1)Q(x) \\ 2x^3+ax^2+bx+3 &= (x^2+1)(cx+d) \\ 2x^3+ax^2+bx+3 &= cx^3+dx^2+cx+d \end{aligned}$$

เทียบ สปส จะได้
$$\begin{aligned} 2 &= c \\ a &= d \\ b &= c \\ 3 &= d \end{aligned}$$

9. 2

การแยกตัวประกอบพหุนาม

1. 1. $(x+4)(x-3)$
   2. $(x+2)(x-8)$
   3. $(3x-8)(x+3)$
   4. $(4x-3)(x-4)$
   5. $3(2x+3)(x-2)$
   6. $x^2(x-2)(x-3)$
   7. $3n^2(m-2)(m^2+2m+4)$
   8. $(2x+1)(x-2)(x+2)$
   9. $(m+2)(m-2)(m+4)(m-4)$
   10. $(a-1)(a^2+a+1)(a+2)(a^2-2a+4)$
   11. $(x+2)(x-1)(x-4)$
   12. $(x+2\sqrt{2})(x+3\sqrt{2})$
2. 1. $(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$
   2. $(x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})$

สมการตัวแปรเดียว

1. 1. $1\,,\ 4$
   2. $-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}$
   3. 2
   4. $1, -1, 2$
   5. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$
   6. $-2\pm\sqrt{3}$
2. 1. $2, 5, 6$
   2. $2, 0, -9$
   3. ไม่มีคำตอบ
   4. $2, -\frac{3}{2},\ -3$
   5. $1, -3, -3$
   6. ไม่มีคำตอบ
3. -1
4. $6, -6$
5. 4
6. -2
7. 2
8. -2
9. $\frac{1}{5}$
10. 36
11. $22+8\sqrt{14}$
12. 120
13. 500
14. 30
15. 12

สมบัติการไม่เท่ากัน

1. 3 , 4 , 9
2. 1. 8 และ 15
   2. 3 และ 10
   3. 12 และ 36
   4. 2 และ 6
   5. 3 และ 18

3. -　　4. 2　　5. 1　　6. $1, 2$

ช่วง

1. 1. $(-1, 10)$　2. $(-\infty, 2)$　3. $(-1, 1]$　4. $\emptyset$
   5. $(-\frac{1}{2}, 4)$　6. $(-\frac{1}{4}, 2)$　7. $(-\infty, -1]$　8. $[2, \infty)$
   9. $[-8, -1) \cup [1, 8)$　10. $(-\infty, 5) \cup [8, \infty)$
2. 1. $[-1, 9)$　2. $(1, \infty)$　3. $(-\infty, -3]$　4. $(-1, 1]$
   5. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$　6. $(-\infty, \infty)$　7. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$
   8. $[-4, 2) \cup (2, \infty)$

อสมการตัวแปรเดียว

1. 1. $(-1, 2]$　2. $[-5, 1]$　3. $[-2, 2)$　4. $(-1, 1)$
2. 1. $(2, 3)$　2. $(-\infty, -4) \cup (-3, \infty)$　3. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
   4. $(-\infty, -2) \cup (-1, \infty)$
3. 1. $[-\frac{1}{2}, 2]$　2. $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{6}, \infty)$　3. $(-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [3, \infty)$
   4. $(-\infty, -1] \cup [-\frac{2}{3}, 1]$　5. $(-\infty, -1) \cup [\frac{5}{3}, \infty)$　6. $(-\infty, -1) \cup [3, \infty)$
4. 1. $(-3, -1)$　2. $(-\infty, -1) \cup \{1\} \cup [2, \infty)$　3. $\{-1\} \cup [1, \infty)$
   4. $(-\infty, 2] \cup (4, \infty)$
5. 1. $[-2, 2]$　2. $(-\infty, -2] \cup [1, 2)$　3. $(-\infty, -2) \cup (-1, \frac{1}{2}] \cup \{3\}$
   4. $(2, 3) \cup (3, 4)$
6. 1. $[\frac{5}{3}, \infty)$　2. $(-\infty, 1] \cup (2, \infty)$　3. R
   4. $\emptyset$
7. 3　　8. 5　　9. 4　　10. 680
11. 89

ค่าสัมบูรณ์

1. $3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 16, 17$
2. $(1, 3)$　　3. 2　　4. -　　5. 2
6. 3　　7. 3　　8. 2　　9. 8

สมการ อสมการ ค่าสัมบูรณ์

1. 1. $3, -7$　2. ไม่มีคำตอบ　3. $2, -2$　4. $[-4, -1]$
   5. $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$　6. $(-\infty, -2) \cup (6, \infty)$
   7. $(3, \infty)$　8. $[1, 3]$　9. $(-\infty, 4]$　10. $(-\infty, \infty)$

11. $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

12. $(-2, \frac{1}{2}) \cup (4, \infty)$

13. 2

14. $\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$

$$\big|1-3|1-3x|\big| = x$$

$1-3|1-3x| = x$ หรือ $1-3|1-3x| = -x$ โดยที่ $x \geq 0$

$1-x = 3|1-3x|$ $\quad$ $1+x = 3|1-3x|$

$1-x = 3(1-3x)$ หรือ $-(1-x) = 3(1-3x)$ โดยที่ $1-x \geq 0$

$$\begin{aligned} 1-x &= 3-9x \\ 8x &= 2 \\ x &= \tfrac{1}{4} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -1+x &= 3-9x \\ 10x &= 4 \\ x &= \tfrac{2}{5} \end{aligned}$$

$1-x \geq 0$ จริงทั้งคู่

→ ใช้ได้ทั้งสองคำตอบ

$1+x = 3(1-3x)$ หรือ $-(1+x) = 3(1-3x)$ โดยที่ $1+x \geq 0$

$$\begin{aligned} 1+x &= 3-9x \\ 10x &= 2 \\ x &= \tfrac{1}{5} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -1-x &= 3-9x \\ 8x &= 4 \\ x &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

$1+x \geq 0$ จริงทั้งคู่

→ ใช้ได้ทั้งสองคำตอบ

2. 3
3. 4
4. $\sqrt{3}-1$
5. 9
6. 5
7. 5
8. 6

เครดิต

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ John Quod

และ คุณ ไคจูมุก ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร