ความน่าจะเป็น

12 Feb 2016

สารบัญ

กฎการคูณ

ถ้างานชิ้นหนึ่ง แบ่งเป็น k ขั้นตอนย่อย โดย

ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกทำได้ n_2 วิธี

...

ขั้นตอนที่ k เลือกทำได้ n_k วิธี

เราจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้ทั้งหมด $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> มีเสื้อ 5 ตัว กางเกง 3 ตัว รองเท้า 2 คู่ จะมีวิธีแต่งตัวได้กี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> การแต่งตัว ประกอบด้วย 3 ขั้นตอนย่อย คือใส่เสื้อ ใส่กางเกง และใส่รองเท้า

เลือกใส่เสื้อได้ 5 วิธี เลือกใส่กางเกงได้ 3 ตัว เลือกใส่รองเท้าได้ 2 คู่

ดังนั้น แต่งตัวได้ $5 \times 3 \times 2 = 30$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง</u> นก 4 ตัว เกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ให้เห็นได้กี่แบบ

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้แบ่งงานเป็น 4 ขั้นตอนย่อย คือ

ขั้นตอนที่ 1: นกตัวที่ 1 เลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: นกตัวที่ 2 เลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 3: นกตัวที่ 3 เลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 4: นกตัวที่ 4 เลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ทำได้ 5 วิธี

ดังนั้น มีวิธีเกาะให้เห็นได้ $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง</u> นก 4 ตัว เกาะกิ่งไม้ 5 กิ่งให้เห็นได้กี่แบบ โดยมีเงื่อนไขว่า กิ่งไม้ 1 กิ่ง มีนกเกาะได้แค่ตัวเดียว

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้แบ่งงานเป็น 4 ขั้นตอนย่อย คือ

ขั้นตอนที่ 1: นกตัวที่ 1 เลือกเกาะกิ่งไม้ 5 กิ่ง ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: นกตัวที่ 2 เลือกเกาะกิ่งไม้ที่ยังไม่มีนกเกาะ ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3: นกตัวที่ 3 เลือกเกาะกิ่งไม้ที่ยังไม่มีนกเกาะ ทำได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 4: นกตัวที่ 4 เลือกเกาะกิ่งไม้ที่ยังไม่มีนกเกาะ ทำได้ 2 วิธี

ดังนั้น มีวิธีเกาะให้เห็นได้ $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ วิธี #

<u>ตัวอย่าง</u> จะสามารถสร้างเลข 3 หลัก จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, และ 4 โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้แบ่งงานเป็น 3 ขั้นตอนย่อย คือ

ขั้นตอนที่ 1: เลือกตัวเลขหลักร้อย เนื่องจากเลขสามหลักจะมีหลักร้อยเป็น 0 ไม่ได้ จึงเหลือให้เลือกได้แค่ 1, 2, 3, หรือ 4 นั่นคือเลือกได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: เลือกตัวเลขหลักสิบ ที่ไม่ซ้ำกับหลักร้อย ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3: เลือกตัวเลขหลักหน่วย ที่ไม่ซ้ำกับ 2 หลักแรก ทำได้ 3 วิธี

ดังนั้น สร้างเลขได้ทั้งหมด $4 \times 4 \times 3 = 48$ แบบ #

อย่างไรก็ตาม วิธีนี้มีข้อควรระวังอยู่ นั่นคือ เราต้องแบ่งและเรียงลำดับขั้นตอนอย่างรอบคอบ เพื่อให้ "จำนวนวิธีในแต่ละขั้นตอน <u>ไม่ขึ้น</u>กับผลการเลือกของขั้นตอนก่อนหน้า"

อ่านแล้วคงงง ลองมาดูตัวอย่างการแบ่ง หรือเรียงลำดับขั้นตอน<u>แบบผิดๆ</u> จากตัวอย่างที่แล้วดู

<u>ตัวอย่าง</u> จะสามารถสร้างเลข 3 หลัก จากเลขโดด $0, 1, 2, 3,$ และ 4 โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

<u>วิธีทำ</u> (แบบผิดๆ) ข้อนี้แบ่งงานเป็น 3 ขั้นตอนย่อย คือ

ขั้นตอนที่ 1: เลือกตัวเลขหลักหน่วย ทำได้ 5 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: เลือกตัวเลขหลักสิบ ที่ไม่ซ้ำกับหลักหน่วย ทำได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 3: เลือกตัวเลขหลักร้อย ที่ไม่ซ้ำกับหลักหน่วยและหลักสิบ และไม่เป็น 0

ปัญหาคือเราจะไม่รู้ว่า "ไม่ซ้ำกับหลักหน่วยและหลักสิบ และไม่เป็น 0" เหลือให้เลือกได้กี่วิธี เพราะเราไม่รู้ว่าหลักหน่วยกับหลักสิบ เลือก 0 ไปหรือยัง

เช่น ถ้าหลักหน่วยเลือก 3 และหลักสิบเลือก 2 จะเหลือ $1, 4$ ให้เลือกเป็นหลักร้อยได้ 2 วิธี

แต่ถ้าหลักหน่วยเลือก 3 และหลักสิบเลือก 0 จะเหลือ $1, 2, 4$ ให้เลือกเป็นหลักร้อยได้ 3 วิธี

จะเห็นว่าจำนวนวิธีที่เลือกได้ในขั้นตอนที่ 3 <u>ขึ้นกับ</u>ผลการเลือกในขั้นที่ 1 และขั้นที่ 2 แบบนี้ทำต่อไม่ได้ #

หลักในการเรียงขั้นตอนคือ ให้ทำทำขั้นตอนที่ "เรื่องมากที่สุด" ก่อน เช่นในตัวอย่างที่แล้ว หลักร้อยจะเป็นหลักที่เรื่องมากที่สุด เพราะเป็น 0 ไม่ได้ จึงควรเลือกหลักร้อยเป็นขั้นตอนที่ 1

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาจำนวนวิธี ที่คน 3 คน เลือกขึ้นลิฟท์ 10 ตัว โดยมีเงื่อนไขว่า
    1. ห้ามแต่ละคนขึ้นลิฑ์ตัวเดียวกัน
    2. ทุกคนต้องขึ้นลิฟท์ตัวเดียวกัน
    3. ขึ้นยังไงก็ได้

2. จงหาจำนวนแบบ ที่ฉันจะเดินเข้า และเดินออกจากสนามกีฬาแห่งหนึ่ง ซึ่งมีประตูเข้าออก 10 ประตู โดยมีเงื่อนไขว่า
    1. ห้ามเข้าและออกประตูเดียวกัน
    2. ต้องเข้าและออกประตูเดียวกัน
    3. เข้าออกยังไงก็ได้

3. จงหาจำนวนผลลัพธ์ที่อาจเกิดขึ้นได้ทั้งหมด จากการ
    1. โยนเหรียญ 1 ครั้ง
    2. โยนเหรียญ 2 ครั้ง
    3. โยนเหรียญ 3 ครั้ง
    4. โยนลูกเต๋า 1 ครั้ง

5. โยนลูกเต๋า 2 ครั้ง

6. โยนเหรียญ 8 ครั้ง และลูกเต๋า 5 ครั้ง

4. จงหาจำนวนวิธีในการแจกของ 4 ชิ้นที่แตกต่างกัน ให้เด็ก 3 คน โดยแต่ละคนจะได้กี่ชิ้นก็ได้ แต่ต้องแจกหมดทุกชิ้น

5. จะมีวิธีตอบข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ ได้กี่วิธี

6. จงหาจำนวนวิธีในการจัดตั้งคณะกรรมการ 3 คน จากผู้ชาย 3 คน ผู้หญิง 4 คน และเด็ก 5 คน โดยที่ประธานเป็นเด็ก รองประธานเป็นผู้หญิง และอีกคนที่เหลือเป็นผู้ชาย

7. ในการเขียนตัวเลข 3 หลัก จากเลขโดด 1 ถึง 7 โดยที่เลขโดดในหลักทั้งสามไม่ซ้ำกันเลย จะมีวิธีเขียนตัวเลขเหล่านี้ที่แสดงจำนวนคี่ได้กี่วิธี [O-NET 49/2-6]

8. ต้องการจัดที่นั่งให้ผู้ใหญ่ 3 คนกับเด็ก 4 คน เดินทางด้วยรถยนต์ 7 ที่นั่งโดยคนขับต้องเป็นผู้ใหญ่ จะมีจำนวนวิธีการจัดได้กี่วิธี [O-NET 54/34]

9. ในการคัดเลือกคณะกรรมการหมู่บ้านซึ่งประกอบด้วยประธานฝ่ายชาย 1 คน ประธานฝ่ายหญิง 1 คน กรรมการฝ่ายชาย 1 คน และกรรมการฝ่ายหญิง 1 คน จากผู้สมัครชาย 4 คน และหญิง 8 คน มีวิธีการเลือกคณะกรรมการได้กี่วิธี [O-NET 52/37]

10. ข้อสอบชุดหนึ่งมี 2 ตอน ตอนที่หนึ่ง มี 5 ข้อ ให้เลือกตอบว่าจริงหรือเท็จ ตอนที่สอง มี 5 ข้อ เป็นข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก ถ้าต้องตอบข้อสอบชุดนี้ทุกข้อโดยไม่เว้นแล้ว จะมีวิธีตอบข้อสอบชุดนี้ได้ต่างๆกันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [O-NET 49/1-16]

1. $5^2 \times 5^4$ วิธี
2. $2^5 \times 5^4$ วิธี
3. $2^5 \times 4^5$ วิธี
4. $5^2 \times 4^5$ วิธี

11. ครอบครัวหนึ่งมีพี่น้อง 6 คน เป็นชาย 2 คน หญิง 4 คน จำนวนวิธีที่จะจัดให้คนทั้งหกยืนเรียงกันเพื่อถ่ายรูป โดยให้ชายสองคนยืนอยู่ริมสองข้างเสมอเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/17]

12. ครอบครัวหนึ่งมีพ่อ แม่ และลูก 2 คน ไปเที่ยวสวนสนุกแห่งหนึ่ง ถ้าจัดคนทั้งสี่ถ่ายรูปกับรูปปั้นโดราเอมอน โดยยืนเรียงกันให้โดราเอมอนอยู่ตรงกลาง และลูกทั้งสองคนไม่ยืนติดกัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้กี่วิธี [O-NET 57/26]

กฎการบวก

ถ้างานชิ้นหนึ่ง แบ่งเป็น k กรณี โดย

กรณีที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี

กรณีที่ 2 เลือกทำได้ n_2 วิธี

...

กรณีที่ k เลือกทำได้ n_k วิธี

เราจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้ทั้งหมด $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ วิธี

<u>ตัวอย่าง</u> ต้องการเลือกเดินทางไปเที่ยวในภาคเหนือ ภาคตะวันออก หรือภาคใต้เพียง 1 ภาค ในช่วงวันหยุด ถ้าในภาคเหนือมีที่พักให้เลือกได้ 5 แห่ง ภาคตะวันออกมีที่พักให้เลือกได้ 3 แห่ง ภาคใต้มีที่พักให้เลือกได้ 2 แห่ง ถามว่าสามารถเลือกที่พักในการไปเที่ยวครั้งนี้ได้กี่แบบ

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้แบ่งงานเป็น 3 กรณี คือ

กรณีไปภาคเหนือ: เลือกที่พักได้ 5 วิธี

กรณีไปภาคตะวันออก: เลือกที่พักได้ 3 วิธี

กรณีไปภาคใต้: เลือกที่พักได้ 2 วิธี

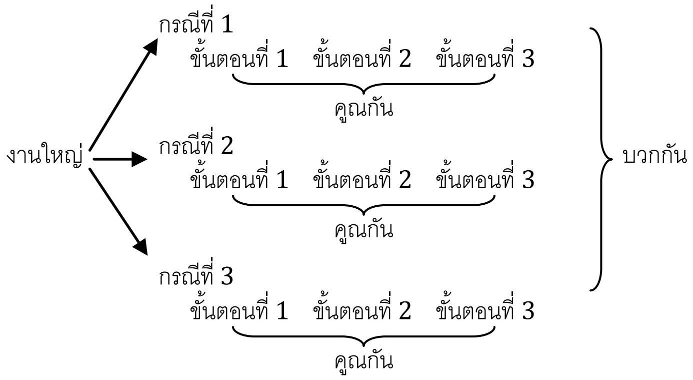
ดังนั้น มีวิธีเลือกที่พักได้ $5 + 3 + 2 = 10$ วิธี #

จะเห็นว่ากฎนี้ คล้ายๆกับกฎที่แล้ว ต่างกันที่อันนี้เป็นการแบ่ง “กรณี” แต่อันที่แล้วเป็นการแบ่ง “ขั้นตอน”

ในการแบ่งขั้นตอนนั้น ในแต่ละขั้นตอน งานจะ “ยังไม่เสร็จ” ขั้นตอนทุกขั้นต้องถูกทำจนครบเพื่อให้ได้แบบที่จะนับ 1 แบบ
แต่ละขั้นตอนมีลำดับก่อนหลัง คือต้องทำขั้นตอนนั้น ต่อด้วยขั้นตอนนี้ $\rightarrow$ ตัวเลขในแต่ละขั้นตอน ต้องเอามา <u>คูณ</u> กัน

ในการแบ่งกรณี ในแต่ละกรณี งานจะ “เสร็จ” แต่ละกรณีจะมีความสมบูรณ์พอที่จะนับเป็นแบบ 1 แบบ
เราจะเรียงลำดับกรณียังไงก็ได้ เพราะ กรณี 1 กรณี จะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง
ไม่ต้องกำหนดว่ากรณีนี้ ต้องทำต่อจากกรณีนั้น $\rightarrow$ ตัวเลขในแต่ละกรณี ต้องเอามา <u>บวก</u> กัน

ในโจทย์ที่ซับซ้อน เราอาจต้องใช้ทั้งการแบ่งกรณี และขั้นตอน
โดยเฉพาะโจทย์ประเภทที่เราไม่สามารถแบ่งกรณี ให้ “จำนวนแบบของแต่ละกรณีไม่ขึ้นกับกรณีก่อนหน้า” ได้
ในกรณีนี้ เรามักต้องแบ่งกรณี แล้วแล้วแบ่งขั้นตอนในแต่ละกรณีอีกที ดังรูป



ตัวอย่าง จะสามารถสร้างเลขคู่ 3 หลัก จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, และ 4 โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

วิธีทำ ข้อนี้ มีหลักเรื่องมากอยู่ 2 หลัก คือหลักร้อยต้องไม่เป็นศูนย์ และหลักหน่วยต้องเป็นเลขคู่

ลองแบ่งงานเป็น 3 ขั้นตอน ทำหลักร้อย หลักหน่วย และหลักสิบ ตามลำดับ

ขั้นตอนที่ 1: เลือกตัวเลขหลักร้อย หลักซ้ายสุดเป็น 0 ไม่ได้ เลือกได้ 4 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: เลือกตัวเลขหลักหน่วย ที่เป็นเลขคู่ และไม่ซ้ำกับหลักร้อย เกิดปัญหา

ถ้าหลักร้อยเลือกเลข 1 หรือ 3 จะเหลือ 0, 2, และ 4 ให้หลักหน่วย นั่นคือเลือกได้ 3 แบบ

แต่ถ้าหลักร้อยเลือกเลข 2 หรือ 4 จะเหลือให้หลักหน่วยเลือกได้แค่ 2 แบบ เพราะเลขคู่หายไป 1 ตัว

จะเห็นว่าจำนวนวิธีในขั้นที่ 2 ขึ้นกับผลการเลือกในขั้นที่ 1 แบบนี้ทำต่อไม่ได้

เอาใหม่ คราวนี้เอาหลักหน่วยมาทำเป็นขั้นตอนแรก

ขั้นตอนที่ 1: เลือกตัวเลขหลักหน่วย เงื่อนไขคือต้องเป็นเลขคู่ ได้แก่ 0, 2, หรือ 4 เลือกได้ 3 วิธี

ขั้นตอนที่ 2: เลือกตัวเลขหลักร้อย ที่ไม่เป็น 0 และไม่ซ้ำกับหลักหน่วย เกิดปัญหาอีก

ถ้าหลักหน่วยเลือกเลข 0 จะเหลือ 1, 2, 3, และ 4 ให้หลักร้อย นั่นคือเลือกได้ 4 แบบ

แต่ถ้าหลักหน่วยเลือกเลข 2 หรือ 4 จะเหลือให้หลักร้อยได้แค่ 3 แบบ

(เพราะ เป็น 0 ไม่ได้ และต้องไม่ซ้ำหลักหน่วย)

จะเห็นว่าจำนวนวิธีในขั้นที่ 2 ขึ้นกับผลการเลือกในขั้นที่ 1 แบบนี้ทำต่อไม่ได้อีก

ข้อนี้ไม่ว่ายังไงก็แบ่งขั้นตอนง่ายๆเหมือนแต่ก่อนไม่ได้ ต้องใช้วิธีแบ่งกรณีนับ ดังนี้

กรณีหลักหน่วยเป็น 0: ขั้นที่ 1: หลักหน่วย บังคับเป็น 0 เลือกได้ 1 แบบ

ขั้นที่ 2: หลักร้อย เป็น 1, 2, 3, หรือ 4 เลือกได้ 4 แบบ

ขั้นที่ 3: หลักสิบ ต้องไม่ซ้ำสองหลักก่อนหน้า เลือกได้ 3 แบบ

สรุป กรณีแรก ทำได้ $1 \times 4 \times 3 = 12$ แบบ

กรณีหลักหน่วยไม่เป็น 0: ขั้นที่ 1: หลักหน่วย เป็น 2 หรือ 4 เลือกได้ 2 แบบ

ขั้นที่ 2: หลักร้อย ต้องไม่เป็น 0 และไม่ซ้ำหลักหน่วย เลือกได้ 3 แบบ

ขั้นที่ 3: หลักสิบ ต้องไม่ซ้ำสองหลักก่อนหน้า เลือกได้ 3 แบบ

สรุป กรณีที่สอง ทำได้ $2 \times 3 \times 3 = 18$ แบบ

รวมสองกรณี ได้คำตอบคือ $12 + 18 = 30$ แบบ #

แบบฝึกหัด

1. ต้องการซื้อสินค้า 1 ชิ้น จากร้านที่มีขายเสื้อ 5 ตัว กางเกง 3 ตัว รองเท้า 2 คู่ จะสามารถซื้อสินค้าได้กี่แบบ

2. จะสามารถสร้างเลขคู่ 3 หลัก จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, …, 6 โดยที่ตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกันได้ทั้งหมดกี่วิธี

3. ต้องการสร้างจำนวนเต็มบวกกี่หลักก็ได้ จากเลขโดด $1, 2, 3, 4$ โดยที่เลขโดดในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน จะสามารถสร้างได้กี่แบบ

4. ต้องการสร้างเลขกี่หลักก็ได้ที่น้อยกว่า 500 จากเลขโดด $1, 3, 5, 7, 9$ จะสามารถสร้างได้กี่แบบ

5. ถังใบหนึ่ง มีลูกบอลสีขาวที่แตกต่างกัน 4 ลูก สีดำที่แตกต่างกัน 3 ลูก สีแดง และสีเหลืองที่แตกต่างกันอย่างละ 2 ลูก จงหาจำนวนแบบในการตักลูกบอล 3 ลูกพร้อมๆกัน แล้วได้ลูกบอลสีต่างกันทั้ง 3 ลูก

6. มาลีต้องการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C โดยต้องเดินทางผ่านไปยังเมือง B ก่อน จากเมือง A ไปเมือง B มาลีสามารถเลือกเดินทางโดยรถยนต์ รถไฟ หรือ เครื่องบินได้ แต่จากเมือง B ไปเมือง C สามารถเดินทางไปทางเรือ รถยนต์ รถไฟ หรือเครื่องบิน จงหาจำนวนวิธีในการเดินทางจากเมือง A ไปยังเมือง C ที่จะต้องเดินทางโดยรถไฟเป็นจำนวน 1 ครั้ง [O-NET 52/38]

แฟคทอเรียล

$n!$ อ่านว่า n แฟคทอเรียล มีค่าเท่ากับ $1 \times 2 \times \ldots \times n$

เช่น $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ $\quad$ $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$

$2! = 1 \times 2 = 2$ $\quad$ $1! = 1$

หมายเหตุ: $0! = 1$

จำนวนลบ เศษส่วน หรือทศนิยม จะหาค่าแฟคทอเรียลไม่ได้

แฟคทอเรียล มีลำดับเครื่องหมายมาก่อน บวก ลบ คูณ หาร นั่นคือ ถ้าเจอแฟคทอเรียล ต้องทำแฟคทอเรียลก่อน

เช่น $2 + 3! = 2+(3!)$

$\neq (2+3)!$

และ สิ่งที่ต้องระวังคือ แฟคทอเรียล ไม่สามารถกระจายในบวก ลบ คูณ หาร ได้เลยซักอย่าง

กล่าวคือ $(2 + 3)! \neq 2! + 3!$ $\quad$ $(2 \cdot 3)! \neq 2! \cdot 3!$

ตัวอย่างการใช้แฟคทอเรียล เช่น

$$\begin{aligned} 20! &= 20 \times 19! \\ &= 20 \times 19 \times 18! \\ &= 20 \times 19 \times 18 \times 17! \end{aligned}$$

$$\frac{11!}{9!} = \frac{11 \times 10 \times 9!}{9!} = 11 \times 10$$

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

และถ้าเรานำของ n สิ่ง มาเรียงเป็นแถวหน้ากระดาน จะมีวิธีเรียงได้ $n!$ แบบเสมอ

$$\underline{\ n\ } \quad \underline{\ n-1\ } \quad \underline{\ n-2\ } \quad \ldots \quad \underline{\ 2\ } \quad \underline{\ 1\ }$$

เพราะตำแหน่งแรก เลือกของได้ n ชิ้น

วางตำแหน่งแรกไปแล้ว 1 ชิ้น ดังนั้นเหลือของให้เลือก แค่ $n-1$ ชิ้น

วางตำแหน่ง 1 กับ 2 ไปแล้ว 2 ชิ้น ดังนั้นเหลือของให้เลือก แค่ $n-2$ ชิ้น

ตำแหน่งสุดท้าย เหลือชิ้นเดียวให้เลือกวาง

จะเห็นว่า เรียงของได้ $(n)(n-1)(n-2)\ldots(2)(1) = n!$ แบบ

เช่น หนังสือที่แตกต่างกัน 7 เล่ม จะสามารถจัดเรียงบนชั้นได้ $7!$ แบบ

คน 10 คน เข้าแถวหน้ากระดานให้เห็นได้ $10!$ แบบ เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $\frac{56!}{55!} =$
   2. $\frac{9!}{10!} =$
   3. $\frac{10!}{8!2!} =$
   4. $\frac{n!}{(n-2)!} =$

2. จงหาค่า n

1. $n! = 120$

2. $\frac{(n+1)!}{(n-1)!} = 56$

3. ต้องการเรียงหนังสือ 6 เล่ม บนชั้น จะสามารถเรียงได้กี่แบบ

เรียงของซ้ำ

จากหัวข้อที่แล้ว ถ้าต้องการเรียงตัวอักษร 5 ตัว ซึ่งได้แก่ ก, ข, ค, B, C จะเรียงได้ 5! แบบ
แต่ถ้าโจทย์ต้องการเรียงตัวอักษร 5 ตัว ซึ่งได้แก่ A, A, A, B, C จะเห็นว่าคำตอบจะไม่ใช่ 5! แล้ว
เนื่องจากคราวนี้ มีตัวอักษรซ้ำ ดังนั้น แบบที่เคยเป็น "คนละแบบ" คราวที่แล้ว อาจจะกลายเป็น "แบบเดียว" ในข้อใหม่
เช่น ในข้อเก่า แบบเหล่านี้ถือเป็นคนละแบบกัน

ก, ข, B, C, ค   ข, ก, B, C, ค   ค, ก, B, C, ข
ก, ค, B, C, ข   ข, ค, B, C, ก   ค, ข, B, C, ก

แต่ในโจทย์ข้อใหม่จะกลายเป็นแค่แบบเดียว คือ A, A, B, C, A

จริงๆวิธีทำโจทย์ข้อใหม่ก็ไม่ยาก ถ้าเราสังเกตดีๆ จะพบว่า "6 แบบเก่า เท่ากับ 1 แบบใหม่"
ดังนั้น ถ้าเอาคำตอบเก่า มาหาร 6 ก็จะได้คำตอบของโจทย์ข้อใหม่

ถ้าสังเกตต่อไปอีก จะพบว่า เลข 6 จะมาจากการที่ ก, ข, ค สลับที่กัน 3 ตัว ได้ $3! = 6$ แบบ
นั่นคือโจทย์ข้อใหม่ที่ A ซ้ำกัน 3 ตัว จะเรียงได้ $\frac{5!}{3!}$ แบบ

ซึ่งสามารถสรุปเป็นสูตรได้ดังนี้

> ของ n สิ่ง (ที่มีของซ้ำอยู่ด้วย) เอามาเรียงเป็นแถวหน้ากระดาน จะเรียงได้ $\frac{n!}{\text{จำนวนของซ้ำ}!}$ แบบ
> และในกรณีที่มีของซ้ำหลายกลุ่ม เช่น กลุ่มที่ 1 มีของซ้ำ n_1 ชิ้น
> กลุ่มที่ 2 มีของซ้ำ n_2 ชิ้น
> $\vdots$
> กลุ่มที่ k มีของซ้ำ n_k ชิ้น จะเรียงได้ $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ แบบ

<u>ตัวอย่าง</u> สามารถเรียงตัวอักษร A, A, B, B, B, C, D, D ให้เป็นแบบต่างๆกันได้กี่แบบ
<u>วิธีทำ</u> มีตัวอักษรทั้งหมด 8 ตัว มี A ซ้ำ 2 ตัว มี B ซ้ำ 3 ตัว และมี D ซ้ำ 2 ตัว
ดังนั้น เรียงได้ $\frac{8!}{2!3!2!}$ แบบ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาจำนวนแบบ ในการนำตัวอักษรจากคำต่อไปนี้มาเรียงให้เป็นคำต่างๆโดยไม่จำเป็นต้องมีความหมาย
   1. apple
   2. banana
   3. mississippi

2. สร้างเลขสี่หลัก โดยใช้ตัวเลข 6 – 9 และผลรวมของตัวเลขแต่ละหลักมีค่าเป็น 34 จะมีวิธีสร้างเท่ากับเท่าใด

3. มีบันไดทั้งหมด 7 ขั้น สมชายขึ้นบันไดทีละ 1 ขั้น หรือทีละ 2 ขั้น เขาจะขึ้นบันไดได้กี่วิธี

4. ถ้านำตัวอักษรทั้งหมดจากคำว่า AVATAR มาจัดเรียงเป็นคำต่างๆ โดยไม่จำเป็นต้องมีความหมาย จะจัดเป็นคำที่แตกต่างกันได้กี่วิธี [O-NET 54/33]

เรียงให้บางชิ้นติดกัน

ในเรื่องนี้ โจทย์จะให้เรียงของโดยให้ของบางชิ้น "อยู่ติดกัน"
ถ้าเจอโจทย์แบบนี้ ให้มัดของที่ต้องการอยู่ติดกัน เป็นของชิ้นใหม่ 1 ชิ้น
คำนวณได้เท่าไหร่ ให้คูณด้วย (จำนวนของที่อยู่ติดกัน)! เข้าไปด้วย
เพราะของที่อยู่ติดกัน สามารถสลับที่กันเองภายในกลุ่มได้อีก

<u>ตัวอย่าง</u> เรียงตัวอักษร A, B, C, D, E, F ได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า A, B, C ต้องอยู่ติดกัน

<u>วิธีทำ</u> มัด A, B, C ติดกัน เป็นตัวอักษรใหม่ชื่อ X

ดังนั้น ตัวอักษรที่มีคือ X, D, E, F จะเห็นว่า 4 ตัวนี้ เรียงได้ 4! แบบ

และในแต่ละแบบ จะเห็นว่า A, B, C สามารถสลับกันเองภายในมัด X ได้อีก 3! แบบ

ดังนั้น เรียงได้ $4!3! = 144$ แบบ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ต้องการเรียงหนังสือ 5 เล่มบนชั้น โดยให้หนังสือเล่มเล็กที่สุดวางติดกับเล่มใหญ่ที่สุด ได้กี่วิธี

2. สามารถจัดคน 10 คน เข้าแถวได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า น้องนก น้องแนน และน้องนุ่น ต้องยืนติดกัน

3. สามารถจัด ก ข ค ง จ ฉ เข้าแถวได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่า ก ต้องยืนติด ข , ค ต้องยืนติด ง และ จ ต้องยืนติด ฉ

4. จำนวนวิธีในการจัดให้หญิง 3 คน และชาย 3 คน นั่งเรียงกันเป็นแถว โดยให้สามีภรรยาคู่หนึ่งนั่งติดกันเสมอ มีทั้งหมดกี่วิธี [O-NET 53/40]

นับแบบตรงข้าม

ในบางกรณี การนับสิ่งที่โจทย์ไม่ต้องการ อาจง่ายกว่าการนับสิ่งที่โจทย์ต้องการ
ในกรณีนี้ เราจะอ้อมไปนับแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ แล้วหักออกจากจำนวนแบบทั้งหมด
ดังนี้

จำนวนแบบโจทย์ที่ต้องการ = จำนวนแบบทั้งหมด – จำนวนแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ

หมายเหตุ: เทคนิคนี้ นิยมใช้เมื่อมีคำว่า “อย่างน้อย” หรือ “อย่างมาก” อยู่ในสิ่งที่โจทย์ถาม

ตัวอย่าง โยนเหรียญ 3 ครั้ง จงหาจำนวนแบบที่ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง
วิธีทำ จำนวนแบบที่ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง ถ้าหาแบบตรงไปตรงมา จะยาก
เพราะ “อย่างน้อย 1 ครั้ง” แปลว่า 1 ครั้งก็ได้ หรือ 2 ครั้งก็ได้ หรือ 3 ครั้งก็ได้
ดังนั้น เราจะนับแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ มาหักออกจากจำนวนแบบทั้งหมด
จะเห็นว่า แบบที่โจทย์ไม่ต้องการ คือ แบบที่ออกก้อยหมด ซึ่งมีแค่ 1 แบบ คือ TTT
จำนวนแบบทั้งหมด จากการโยนเหรียญ 3 ครั้ง $= 2^3 = 8$
ดังนั้น จำนวนแบบที่ออกหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง $= 8 - 1 = 7$ แบบ #

แบบฝึกหัด

1. โยนเหรียญ 5 ครั้ง จงหาจำนวนแบบในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. ได้หัวอย่างน้อย 1 ครั้ง
   2. ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้ง

2. นก 6 ตัว เกาะบนกิ่งไม้ 2 กิ่ง จงหาจำนวนแบบที่ทั้ง 2 กิ่งมีนกเกาะ

3. ต้องการสลับตัวอักษรในคำ “HOUSE” เพื่อสร้างคำโดยไม่คำนึงถึงความหมาย โดยที่อักษรตัวแรกหรือตัวสุดท้ายต้องเป็นพยัญชนะ สร้างได้กี่คำ

4. ชาย 4 คน หญิง 4 คน (มีนายเอกและนายโจ้รวมอยู่ด้วย) จัดคนทั้งหมดนั่งเก้าอี้ 8 ตัว เรียงเป็นแถวยาว โดยที่นายเอกและนายโจ้ต้องนั่งติดกัน และนายเอกไม่นั่งติดกับผู้หญิง จัดได้กี่วิธี

5. ตู้นิรภัยมีระบบล็อกที่เป็นรหัสประกอบด้วยตัวเลขโดด 0 ถึง 9 จำนวน 3 หลัก จำนวนรหัสทั้งหมดที่มีบางหลักซ้ำกันคือเท่าใด [O-NET 53/39]

ความน่าจะเป็น

<u>การทดลองสุ่ม</u> คือ การกระทำที่รู้ว่าผลเป็นอะไรได้บ้าง แต่บอกไม่ได้ว่าผลที่ออกมาจะเป็นอะไร
เช่นการทอยลูกเต๋า การโยนเหรียญ การจับสลาก ฯลฯ

<u>แซมเปิลสเปซ</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ S หมายถึง "ผลที่เป็นไปได้ทั้งหมด" ของการทดลองสุ่ม
เช่น แซมเปิลเสปซของการทอยลูกเต๋า คือ $1, 2, 3, 4, 5, 6$
ในเรื่องนี้เรามักจะสนใจว่า แซมเปิลเสปซ "มีสมาชิกกี่ตัว" ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(S)$

การทดลองสุ่ม	แซมเปิลเสปซ	จำนวนสมาชิก
ทอยลูกเต๋า	$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$n(S) = 6$
โยนเหรียญ	$S = \{\text{H}, \text{T}\}$	$n(S) = 2$
จับสลากหมายเลข 1 ถึง 10	$S = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$	$n(S) = 10$
โยนเหรียญ 2 ครั้ง	$S = \{\text{HH}, \text{HT}, \text{TH}, \text{TT}\}$	$n(S) = 4$
ทอยลูกเต๋า 2 ครั้ง	$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), \dots, (1,6), \\ (2,1), (2,2), (2,3), \dots, (2,6), \\ \dots \\ (6,1), (6,2), (6,3), \dots, (6,6) \end{Bmatrix}$	$n(S) = 36$

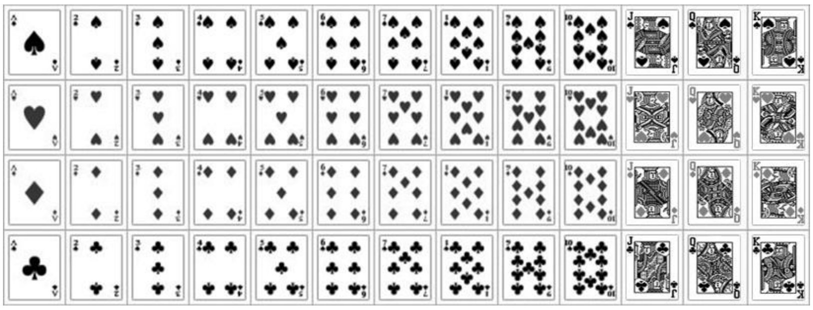
<u>เหตุการณ์</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ E หมายถึง ผลลัพธ์จากการทดลองสุ่ม "เฉพาะแบบที่เราสนใจ"
เช่น ในการทอยลูกเต๋า 2 ครั้ง เหตุการณ์ที่ "ผลรวมแต้มสองครั้งได้แปด" คือ $\{26, 35, 44, 53, 62\}$
จะเห็นว่าสมาชิกใน E มาจากการเลือกแบบบางแบบที่เราสนใจจาก S ดังนั้น $E \subset S$ เสมอ
ในเรื่องนี้เรามักจะสนใจว่า เหตุการณ์ "มีสมาชิกกี่ตัว" ซึ่งจะแทนด้วยสัญลักษณ์ $n(E)$
เนื่องจาก $E \subset S$ ดังนั้น $n(E) \leq n(S)$ เสมอ

สิ่งที่สนใจ	เหตุการณ์	จำนวนสมาชิก
ทอยลูกเต๋าได้แต้มคู่	$E = \{\,2, 4, 6\}$	$n(E) = 3$
โยนเหรียญได้หัว	$E = \{\text{H}\}$	$n(E) = 1$
จับสลาก 1 ถึง 10 ได้เลขจำนวนเฉพาะ	$E = \{2, 3, 5, 7\}$	$n(E) = 4$
โยนเหรียญ 2 ครั้งออกไม่เหมือนกัน	$E = \{\text{HT}, \text{TH}\}$	$n(E) = 2$
ทอยลูกเต๋า 2 ครั้งได้ผลรวมเป็นแปด	$E = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$	$n(E) = 5$

<u>ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E</u> แทนด้วยสัญลักษณ์ $P(E)$ คือ จำนวนแบบของเหตุการณ์ E หารด้วยจำนวนแบบที่เป็นไปได้ทั้งหมดใน S ซึ่งจะเขียนเป็นสูตรได้ว่า $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

เวลาหา $n(E)$ หรือ $n(S)$ จะใช้วิธีเขียนนับเอาก็ได้ แต่ส่วนใหญ่จะวิธีคำนวณด้วยหลักการนับในหัวข้อที่ผ่านมา
ปกติจะนิยมหา $n(S)$ ก่อน เพราะหาง่ายกว่า $n(E)$
และเนื่องจาก $n(E) \leq n(S)$ ดังนั้น $P(E) \leq 1$ เสมอ

ความน่าจะเป็น สามารถออกโจทย์กับเกมการพนันทุกชนิด ไม่ว่าจะเป็น ไพ่ การโยนเหรียญ ทอยลูกเต๋า จับสลาก ฯลฯ



$H =$ หัว

$T =$ ก้อย

ไพ่ 1 สำรับ มี 52 ใบ

แบ่งเป็น 4 ชุด คือ โพดำ โพแดง ข้าวหลามตัด และ ดอกจิก

แต่ละชุด มีไพ่ 13 ใบ คือ A, 2, 3, 4, …, 8, 9, 10, J, Q, K

ไพ่ J, Q, K จะมีภาพเป็นรูปหน้าคน

โพดำ และ ดอกจิก จะมีสีดำ

โพแดง และ ข้าวหลามตัด จะมีสีแดง

ตัวอย่าง สุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูก จากถังซึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีเขียว 3 ลูก และสีเหลือง 2 ลูก จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลสีเขียว

วิธีทำ เนื่องจากมีลูกบอลทั้งหมด $4+3+2=9$ ลูก ดังนั้น $n(S)=9$

เนื่องจากมีลูกบอลสีเขียว 3 ลูก ดังนั้น $n(E)=3$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นได้จะหยิบได้ลูกบอลสีเขียว $=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ #

ตัวอย่าง โจทย์หยิบไพ่ 1 ใบ จากสำรับ จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่สีแดงที่เป็นรูปหน้าคน

วิธีทำ เนื่องจากไพ่ 1 สำรับ มี 52 ใบ ดังนั้น $n(S)=52$

ไพ่สีแดงที่เป็นรูปหน้าคน มี J โพแดง, Q โพแดง, K โพแดง, J ข้าวหลามตัด, Q ข้าวหลามตัด, K ข้าวหลามตัด

รวม 6 ใบ นั่นคือ $n(E)=6$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่จะได้ไพ่สีแดงที่เป็นรูปหน้าคน $=\frac{6}{52}$ #

ตัวอย่าง เลือกตัวอักษร 4 ตัว จาก A, B, C, D, E มาเรียงเป็นคำ โดยที่ตัวอักษรในคำต้องไม่ซ้ำกัน และคำที่ได้ไม่จำเป็นต้องมีความหมาย จงหาความน่าจะเป็นที่คำที่ได้ขึ้นต้น และ ลงท้าย ด้วย A หรือ B

วิธีทำ ข้อนี้แซมเปิลสเปซคือคำขนาด 4 ตัวอักษร ที่ตัวอักษรในคำไม่ซ้ำกัน ไม่ต้องมีความหมายก็ได้

ตำแหน่งที่ 1 เลือกตัวอักษรมาใส่ได้ 5 แบบ

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกับตำแหน่งแรก ได้ 4 แบบ

ตำแหน่งที่ 3 เลือกตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกับสองตำแหน่งแรก ได้ 3 แบบ

ตำแหน่งที่ 4 เลือกตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกับสามตำแหน่งแรก ได้ 2 แบบ

ดังนั้น $n(S)=5\times 4\times 3\times 2$ แบบ (ยังไม่ต้องคิดเลข เพราะเดี๋ยวอาจจะตัดกับ $n(E)$ ได้)

ต่อไปหา $n(E)$ ซึ่งมีเงื่อนไขคือ ต้องขึ้นต้น หรือ ลงท้าย ด้วย A หรือ B

ตำแหน่งที่ 1 คราวนี้เลือกได้แค่ A หรือ B ได้ 2 แบบ

ตำแหน่งที่ 4 ต้องเป็น A หรือ B และต้องไม่ซ้ำตำแหน่งแรก คือเหลือตัวไหนก็ต้องใช้ตัวนั้น เลือกได้ 1 แบบ

ตำแหน่งที่ 2 เลือกตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกับสองตำแหน่งแรก ได้ 3 ตัว

ตำแหน่งที่ 3 เลือกตัวอักษรที่ไม่ซ้ำกับสามตำแหน่งแรก ได้ 2 ตัว

ดังนั้น $n(E) = 2 \times 1 \times 3 \times 2$ แบบ

ดังนั้น $P(E) = \frac{2\times1\times3\times2}{5\times4\times3\times2} = \frac{1}{10}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. โรงแรมแห่งหนึ่งมีห้องว่างชั้นที่หนึ่ง 15 ห้อง ชั้นที่สอง 10 ห้อง ชั้นที่สาม 25 ห้อง ถ้าครูสมใจต้องการเข้าพักในโรงแรมแห่งนี้โดยวิธีสุ่มแล้ว ความน่าจะเป็นที่ครูสมใจจะได้เข้าพักห้องชั้นที่สองของโรงแรมเท่ากับเท่าใด [O-NET 52/39]

2. เสื้อ 50 ตัวบรรจุในกล่องใบหนึ่งมีขนาดและสีต่างๆ เป็นจำนวนตามตารางต่อไปนี้

ขนาด \ สี	แดง	เขียว	เหลือง	น้ำเงิน	ส้ม	รวม
S	2	1	2	3	1	9
M	4	5	5	2	3	19
L	3	3	3	4	5	18
XL	1	1	0	1	1	4
รวม	10	10	10	10	10	50

ถ้าสุ่มหยิบเสื้อมา 1 ตัว ความน่าจะเป็นที่จะได้เสื้อสีเขียวขนาด L หรือสีส้มขนาด S เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/35]

3. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 100 คน ได้ข้อมูลว่ามีนักเรียนที่สวมรองเท้าขนาดต่างๆ ดังนี้

เบอร์รองเท้า	จำนวนนักเรียน
5	3
6	12
7	35
8	27
9	16
10	7
	รวม 100 คน

เมื่อเลือกนักเรียน 1 คน จากนักเรียนกลุ่มนี้ ความน่าจะเป็นที่จะเลือกได้นักเรียนสวมรองเท้าเบอร์ 6 หรือเบอร์ 7 เท่ากับเท่าใด [O-NET 49/2-8]

4. โยนลูกเต๋า 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าจะขึ้นแต้มคี่อย่างน้อย 1 ลูก เท่ากับเท่าใด [O-NET 50/34]

5. ทาสีเหรียญสามอันดังนี้ เหรียญแรกด้านหนึ่งทาสีขาว อีกด้านหนึ่งทาสีแดง เหรียญที่สองด้านหนึ่งทาสีแดง อีกด้านหนึ่งทาสีฟ้า เหรียญที่สามด้านหนึ่งทาสีฟ้า อีกด้านหนึ่งทาสีขาว โยนเหรียญทั้งสามขึ้นพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหน้าต่างสีกันทั้งหมดเท่ากับเท่าใด [O-NET 53/23]

6. กล่องใบหนึ่งมีลูกบอล 10 ลูก เป็นสีแดง 1 ลูก สีน้ำเงิน 2 ลูก และสีขาว 2 ลูก นอกนั้นเป็นสีอื่นๆ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบลูกบอล 3 ลูกจากกล่องใบนี้ ให้ได้สีแดง 1 ลูก สีน้ำเงิน 1 ลูก และไม่ได้สีขาว เท่ากับเท่าใด
[O-NET 54/18]

7. มีกล่อง 2 ใบ แต่ละใบมีลูกบอลหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5 อยู่อย่างละลูก ถ้าสุ่มหยิบลูกบอล 2 ลูก จากกล่องทั้งสองใบนี้ กล่องละลูก แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ลูกบอลหมายเลขต่างกันเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/2-7]

8. ขวดโหลใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 6 ลูก สีเขียว 3 ลูก และสีเหลือง 1 ลูก หยิบลูกแก้วออกมา 2 ลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้วที่มีสีต่างกันเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/37]

9. กล่อง 12 ใบ มีหมายเลขกำกับเป็นเลข 1, 2, ..., 12 และกล่องแต่ละใบบรรจุลูกบอล 4 ลูก เป็นลูกบอลสีดำ สีแดง สีขาว และสีเขียว ถ้าสุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องแต่ละใบ ใบละ 1 ลูกแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดงจากกล่องหมายเลขคี่ และได้ลูกบอลสีดำจากกล่องหมายเลขคู่ เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/31]

10. กนกมีถุงเท้าสีขาว 1 คู่ สีน้ำเงิน 2 คู่ และสีดำ 3 คู่ เขาใส่ถุงเท้าไว้ในลิ้นชักโดย<u>ไม่</u>ได้จัดแยกเป็นคู่ ถ้าเขาสุ่มหยิบถุงเท้าจากลิ้นชักมา 2 ข้างแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันมีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/27]

11. ความน่าจะเป็นที่รางวัลเลขท้าย 2 ตัว ของสลากกินแบ่งรัฐบาลจะออกเลขทั้งสองหลักเป็นเลขเดียวกัน เท่ากับเท่าใด [O-NET 50/14]

12. ในการออกรางวัลแต่ละงวดของกองสลาก ความน่าจะเป็นที่รางวัลเลขท้าย 2 ตัว จะออกหมายเลขที่มีหลักหน่วยเป็นเลขคี่ และหลักสิบมากกว่าหลักหน่วยอยู่ 1 เท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-26]

13. สลากชุดหนึ่งมี 10 ใบ มีหมายเลข $1 - 10$ กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะหยิบสลากพร้อมกัน 3 ใบให้มีแต้มรวมเป็น 10 และไม่มีสลากใบใดมีหมายเลขสูงกว่า 5 มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 54/19]

14. ในการหยิบบัตรสามใบ โดยหยิบทีละใบจากบัตรสี่ใบ ซึ่งมีหมายเลข 0, 1, 2 และ 3 กำกับ ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลรวมของตัวเลขบนบัตรสองใบแรกน้อยกว่าตัวเลขบนบัตรใบที่สามเท่ากับข้อใด [O-NET 52/40]

15. กล่องใบหนึ่งบรรจุสลากหมายเลข 1 - 10 หมายเลขละ 1 ใบ ถ้าสุ่มหยิบสลากจำนวนสองใบ โดยหยิบทีละใบแบบไม่ใส่คืน ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สลากหมายเลขต่ำกว่า 5 เพียงหนึ่งใบเท่านั้น เท่ากับเท่าใด
[O-NET 53/24]

16. ในการเลือกคณะกรรมการชุดหนึ่ง ซึ่งประกอบด้วย ประธาน รองประธาน และ เลขานุการอย่างละ 1 คน จากหญิง 6 คน และชาย 4 คน ความน่าจะเป็นที่คณะกรรมการชุดนี้ จะมีประธานและรองประธานเป็นหญิงเท่ากับเท่าใด
[O-NET 53/26]

17. โรงเรียนแห่งหนึ่งมีรถโรงเรียน 3 คัน นักเรียน 9 คน กำลังเดินไปขึ้นรถโรงเรียนโดยสุ่ม ความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนคนใดขึ้นรถคันแรกเท่ากับเท่าใด [O-NET 52/36]

18. ในการจัดคน 4 คนนั่งเป็นวงกลม ถ้าใน 4 คนนี้มีฝาแฝด 1 คู่ ความน่าจะเป็นที่ฝาแฝดจะได้นั่งติดกันเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/27]

19. กำหนดให้ $A = \{1,\ 2,\ 3\}$

$B = \{5,\ 6, \dots,\ 14\}$

และ $r = \{(m,\ n) \mid m \in A$ และ $n \in B\}$

ถ้าสุ่มหยิบคู่อันดับ 1 คู่ จากความสัมพันธ์ r แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้คู่อันดับ $(m,\ n)$ ซึ่ง 5 หาร n แล้วเหลือเศษ 3 เท่ากับเท่าใด [O-NET 51/32]

20. ช่างไฟคนหนึ่งสุ่มหยิบบันได 1 อันจากบันได 9 อัน ซึ่งมีความยาว 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 และ 12 ฟุต แล้วนำมาพาดกับกำแพงโดยให้ปลายข้างหนึ่งห่างจากกำแพง 3 ฟุต ความน่าจะเป็นที่บันไดจะทำมุมกับพื้นราบน้อยกว่า $60°$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/33]

21. ข้อสรุปใดต่อไปนี้<u>ถูกต้อง</u>บ้าง [O-NET 52/35]
   1. การทดลองสุ่มเป็นการทดลองที่ทราบว่าผลลัพธ์อาจเป็นอะไรได้บ้าง
   2. แต่ละผลลัพธ์ของการทดสองสุ่มมีโอกาสเกิดขึ้นเท่าๆกัน

22. ในการวัดส่วนสูงนักเรียนแต่ละคนในชั้น พบว่านักเรียนที่สูงที่สุดสูง 177 เซนติเมตร และนักเรียนที่เตี้ยที่สุดสูง 145 เซนติเมตร เซตใดถือเป็นปริภูมิตัวอย่าง (แซมเปิลสเปซ) สำหรับการทดลองสุ่มนี้บ้าง [O-NET 53/25]
   1. $S = \{H \mid H$ เป็นส่วนสูงในหน่วยเซนติเมตรของนักเรียนในชั้น $\}$
   2. $T = \{H \mid 145 \le H \le 177\}$

ความน่าจะเป็น กับเซต

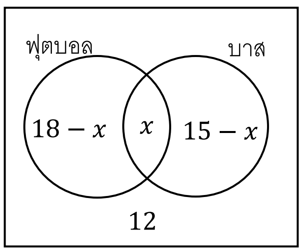
จากหัวข้อที่แล้ว สูตรหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E คือ $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$
เมื่อ $n(E)$ คือจำนวนสมาชิกของเหตุการณ์ E
$n(S)$ คือจำนวนสมาชิกของแซมเปิลสเปซ S

จะเห็นว่าสูตรความน่าจะเป็น เกี่ยวข้องโดยตรงกับ "จำนวนสมาชิก" ของเซต
ดังนั้น กฎทุกอย่างที่เคยเรียนเกี่ยวกับเรื่องจำนวนสมาชิกของเซต จะนำมาใช้กับเรื่องความน่าจะเป็นได้

ก่อนอื่นต้องรู้ว่า เราสามารถนำเหตุการณ์มา ยูเนียน อินเตอร์เซก ลบ คอมพลีเมนต์ เหมือนในเรื่องเซตยังไงยังงั้น
เช่น ในการทดลองสุ่มเด็กหนึ่งคนมาถามว่าชอบกินอะไร
ถ้าให้ E_1 แทนเหตุการณ์ "สุ่มได้เด็กชอบกินปลา"
E_2 แทนเหตุการณ์ "สุ่มได้เด็กชอบกินไก่"
จะได้ $E_1 \cup E_2$ คือ เหตุการณ์ที่ สุ่มได้เด็กชอบกินปลาหรือไก่ (อย่างไดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างก็ได้)
$E_1 \cap E_2$ คือ เหตุการณ์ที่ สุ่มได้เด็กชอบกินทั้งปลาและไก่ ทั้งสองอย่าง
$E_1 - E_2$ คือ เหตุการณ์ที่ สุ่มได้เด็กชอบกินปลา แต่ไม่ชอบกินไก่
E_1' คือ เหตุการณ์ที่ สุ่มได้เด็กไม่ชอบกินปลา

เราสามารถหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 - E_2$, และ E_1' ได้
โดยใช้ความรู้เรื่องการนับจำนวนสมาชิกด้วยแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ อย่างที่เคยทำในเรื่องเซต

<u>ตัวอย่าง</u> สำรวจนักเรียน 40 คน พบว่าเล่นฟุตบอล 18 คน เล่นบาสเก็ตบอล 15 คน และไม่เล่นทั้งฟุตบอลและบาสเก็ตบอล 12 คน ถ้าสุ่มนักเรียน 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะเล่นบาสเก็ตบอล แต่ไม่เล่นฟุตบอล
<u>วิธีทำ</u> ใช้ความรู้เรื่องเซต หาจำนวนสมาชิกในแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ ก่อน ดังนี้



ให้จำนวนนักเรียนที่เล่นทั้งฟุตบอล และบาสเก็ตบอลคือ x คน
จะได้จำนวนนักเรียนที่เล่นฟุตบอลอย่างเดียว คือ $18 - x$ คน
จะได้จำนวนนักเรียนที่เล่นบาสเก็ตบอลอย่างเดียว คือ $15 - x$ คน
ถ้านำจำนวนนักเรียนทุกส่วนมารวมกัน จะได้ต้องได้ 40 คน

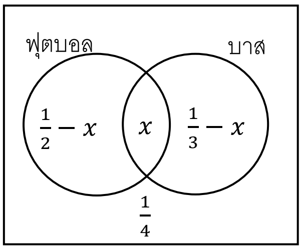
$$\begin{aligned}(18 - x) + x + (15 - x) + 12 &= 40 \\ 45 - x &= 40 \\ 5 &= x\end{aligned}$$

ดังนั้น จำนวนนักเรียนที่เล่นบาสเก็ตบอล แต่ไม่เล่นฟุตบอล คือ $15 - 5 = 10$ คน
จะได้ความน่าจะเป็นที่สุ่มได้นักเรียนที่เล่นบาสเก็ตบอล แต่ไม่เล่นฟุตบอล $= \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$ #

นอกจากนี้ เรายังสามารถใส่ "ความน่าจะเป็น" ลงในแผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ ได้ด้วย
ในกรณีนี้ ตัวเลขความน่าจะเป็นของทุกส่วนบวกกัน จะเท่ากับ 1 เสมอ

ตัวอย่าง สุ่มนักเรียนจากโรงเรียนหนึ่ง พบว่าความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนชอบเล่นฟุตบอล $\frac{1}{2}$ ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนชอบเล่นบาสเก็ตบอล $\frac{1}{3}$ ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนไม่ชอบเล่นทั้งฟุตบอลและบาสเก็ตบอล $\frac{1}{4}$ ถ้าสุ่มนักเรียน 1 คน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนชอบเล่นบาสเก็ตบอล แต่ไม่ชอบเล่นฟุตบอล

วิธีทำ ทำเหมือนกับข้อก่อนหน้า แต่คราวนี้ เอาความน่าจะเป็นไปเติมในแผนภาพ



และเนื่องจากทุกส่วนต้องรวมกันได้ 1 ดังนั้น

$$\left(\frac{1}{2} - x\right) + x + \left(\frac{1}{3} - x\right) + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1 = x$$

$$\frac{6+4+3-12}{12} = x$$

$$\frac{1}{12} = x$$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ได้นักเรียนชอบเล่นบาสเก็ตบอล แต่ไม่ชอบเล่นฟุตบอล $= \frac{1}{3} - \frac{1}{12}$

$$= \frac{4-1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \qquad \#$$

แบบฝึกหัด

1. ในการสำรวจวิชาที่ชอบของนักเรียนจำนวน 40 คน พบว่า

   26 คน ชอบคณิตศาสตร์ 10 คน ชอบคณิตศาสตร์ และ ภาษาไทย

   23 คน ชอบภาษาไทย 9 คน ชอบภาษาไทย และ วิทยาศาสตร์

   20 คน ชอบวิทยาศาสตร์ 13 คน ชอบคณิตศาสตร์ และ วิทยาศาสตร์

   ถ้านักเรียนทุกคน มีวิชาที่ชอบอย่างน้อย 1 วิชา จงหาความน่าจะเป็นที่จะสุ่มนักเรียน 1 คน แล้วได้นักเรียนที่ชอบคณิตศาสตร์เพียงวิชาเดียว

2. กำหนดให้ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ และ $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$ จงหา $P(A \cap B')$

3. จากการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง จำนวน 30 คน พบว่า มีนักเรียนไม่ชอบรับประทานปลา 12 คน และชอบรับประทานปลาหรือกุ้ง 23 คน ถ้าสุ่มนักเรียนมา 1 คน ความน่าจะเป็นที่จะได้นักเรียนที่ชอบรับประทานกุ้งเพียงอย่างเดียวมีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/35]

4. ถ้าแต่ละวันในเดือนสิงหาคม มีความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเช้าหรือตอนเย็นเท่ากับ 0.86 ความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกตอนเย็นเท่ากับ 0.67 และความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกทั้งตอนเช้าและตอนเย็นเท่ากับ 0.35 แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะมีฝนตกในตอนเช้ามีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/40]

5. ในปีพ.ศ. 2557 ประเทศไทยมีความน่าจะเป็นที่จะประสบภาวะน้ำท่วมเท่ากับ $\frac{3}{11}$ และความน่าจะเป็นที่จะประสบภัยแล้งเท่ากับ $\frac{1}{3}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะประสบภาวะน้ำท่วมหรือภัยแล้งเท่ากับ $\frac{6}{11}$ แล้วความน่าจะเป็นที่ประเทศไทยจะประสบทั้งภาวะน้ำท่วมและภัยแล้งในปี พ.ศ. 2557 เท่ากับเท่าใด [O-NET 56/28]

กฎการคูณ

1. 1. 720 2. 10 3. 1000
2. 1. 90 2. 10 3. 100
3. 1. 2 2. 4 3. 8 4. 6
   5. 36 6. $2^8 6^5$
4. 3^4 5. 4^{10} 6. 60 7. 120
8. 2160 9. 672 10. 3 11. 48
12. 16

กฎการบวก

1. 10 2. 105 3. 64 4. 80
5. 76 6. 5

แฟคทอเรียล

1. 1. 56 2. $\frac{1}{10}$ 3. 45 4. $n^2 - n$
2. 1. 5 2. 7
3. 720

เรียงของซ้ำ

1. 1. 60 2. 60 3. $\frac{11!}{2!4!4!}$

2. 10

จะเห็นว่า ผลรวมเป็น 34 จะค่อนข้างเยอะ เพราะถ้าทุกหลักเป็น 9 หมด ก็เพิ่งจะได้ 36 เอง
แปลว่า มันจะต้องน้อยกว่า 9999 ไปแค่ 2 จะเห็นว่าได้แค่สองกลุ่ม คือ 7999 กับ 8899
กลุ่ม 7999 สลับได้ $\frac{4!}{3!} = 4$ แบบ กลุ่ม 8899 สลับได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ แบบ $\rightarrow$ รวมได้ 10

3. 21

แบ่งกรณี ตามจำนวนครั้งที่ขึ้นทีละ 2 ขั้น
กรณี 2 2 2 1 ได้ $\frac{4!}{3!} = 4$, กรณี 2 2 1 1 1 ได้ $\frac{5!}{2!3!} = 10$, กรณี 2 1 1 1 1 1 ได้ $\frac{6!}{5!} = 6$, กรณี 1 หมด ได้ 1
รวม $4 + 10 + 6 + 1 = 21$

4. 120

เรียงให้บางชิ้นติดกัน

1. 48
2. $8!3!$
3. 48
4. 240

นับแบบตรงข้าม

1. 1. 31 2. 26
2. 62
3. 84

4. 4320

จาก เอกติดโจ้ (ทั้งหมด) $=$ เอกติดโจ้ (ที่เอกติดหญิง) $+$ เอกติดโจ้ (ที่เอกไม่ติดหญิง)

$7!2!$ $=$ $(4)6!(2)$ $+$ เอกติดโจ้ (ที่เอกไม่ติดหญิง)

- เอาเอกมัดรวมกับโจ้เป็นคนใหม่ 1 คน กลายเป็นมีคนทั้งหมด 7 คน สลับได้ 7! แบบ
- สลับในมัดเอกโจ้ ได้อีก 2! แบบ

- เลือก หญิง 1 คนที่จะติดกับเอก ได้ 4 แบบ
- เอา เอก โจ้ และ หญิง 1 คนที่เลือก มัดรวมเป็นคนใหม่ 1 คน กลายเป็นมีคนทั้งหมด 6 คน สลับได้ 6! แบบ
- สลับในมัดเอกโจ้หญิง ให้ เอกติดโจ้ และเอกติดหญิง ได้ 2 แบบ (คือ โจ้เอกหญิง กับ หญิงเอกโจ้)

ดังนั้น จะได้ เอกติดโจ้ (ที่เอกไม่ติดหญิง) $= 7!2! - (4)6!(2) = 4320$ แบบ

4. 280

ความน่าจะเป็น

1. 0.2
2. 0.08
3. 0.47
4. $\frac{7}{8}$
5. 0.25
6. $\frac{1}{12}$
7. 0.8
8. 0.6
9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{12}$
10. $\frac{1}{3}$
11. 0.1
12. 0.04
13. $\frac{1}{60}$
14. 0.25
15. $\frac{8}{15}$
16. $\frac{1}{3}$
17. $\left(\frac{2}{3}\right)^{9}$
18. $\frac{2}{3}$
19. 0.2
20. $\frac{2}{9}$
21. 1
22. 1

ความน่าจะเป็น กับเซต

1. $\frac{3}{20}$
2. $\frac{5}{12}$
3. $\frac{1}{6}$
4. 0.54
5. $\frac{2}{33}$