
ความน่าจะเป็น

สารบัญ

ทบทวนความรู้พื้นฐาน	1
การเรียงสับเปลี่ยน	9
เรียงของเป็นวงกลม.....	10
การจัดหมู่.....	12
การจัดหมู่ของซ้ำ	20
การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำ	22
ทฤษฎีบททวินาม.....	24
สตาร์ แอนด์ บาร์.....	28
ทบทวนความน่าจะเป็น.....	31
สมบัติของความน่าจะเป็น	42

ทบทวนความรู้พื้นฐาน

การแบ่งขั้นตอน

ในแต่ละขั้นตอน งานจะ “ยังไม่เสร็จ” ขั้นตอนทุกขั้นต้องถูกทำจนครบเพื่อให้ได้แบบที่จะนับ 1 แบบ
แต่ละขั้นตอนมีลำดับก่อนหลัง คือต้องทำขั้นตอนนั้น ต่อด้วยขั้นตอนนี้ $\rightarrow$ ตัวเลขในแต่ละขั้นตอน เอามา คูณ กัน

กฎการคูณ: ถ้างานชิ้นหนึ่ง แบ่งเป็น k ขั้นตอนย่อย โดย ขั้นตอนที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี

ขั้นตอนที่ 2 เลือกทำได้ n_2 วิธี

$\vdots$

ขั้นตอนที่ k เลือกทำได้ n_k วิธี

เราจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้ทั้งหมด $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ วิธี

แบบฝึกหัด

- นักเรียนกลุ่มหนึ่งมี 16 คน ซึ่งแต่ละคนเป็นสมาชิกของชมรมวิชาการ หรือชมรมกีฬา หรือชมรมดนตรี อย่างน้อย 1 ชมรม และพบว่า มี 8 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการ มี 10 คน เป็นสมาชิกของชมรมกีฬา มี 10 คน เป็นสมาชิกของชมรมดนตรี มี 6 คน เป็นสมาชิกของชมรมดนตรีและชมรมกีฬา มี 5 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการและชมรมกีฬา และมี 3 คน เป็นสมาชิกของชมรมวิชาการและชมรมดนตรี ต้องการเลือกผู้แทน 1 คนของแต่ละชมรมโดยที่แต่ละคนต้องเป็นสมาชิกเพียงชมรมเดียวเท่านั้น จำนวนวิธีเลือกดังกล่าวมีทั้งหมดเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 55)/44]

- กำหนด S เป็นเซตของ (a, b, c, d, e, f) โดยที่ $a, b, c, d, e, f \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ ซึ่งมีสมบัติสอดคล้องกับ $a^3 - c^2 = 4$, $2^b - d^2 = 7$ และ $e^3 - f^2 = -1$ จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 55)/50]

3. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต A และ B เท่ากับ 4 และ 5 ตามลำดับ และจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับ 7
จงหาจำนวนความสัมพันธ์ใน $A \cap B$ และจำนวนความสัมพันธ์จาก $A - B$ ไป $B - A$ [PAT 1 (มี.ค. 56)/6]

การแบ่งกรณี

ในแต่ละกรณี งานจะ “เสร็จ” แต่แต่ละกรณีจะมีความสมบูรณ์พอที่จะนับเป็นแบบ 1 แบบ

เราจะเรียงลำดับกรณียังงี้ก็ได้ เพราะ กรณี 1 กรณี จะมีความสมบูรณ์ในตัวเอง $\rightarrow$ ตัวเลขในแต่ละกรณี เามา บวก กัน

กฎการบวก : ถ้างานชิ้นหนึ่ง แบ่งเป็น k กรณี โดย

กรณีที่ 1 เลือกทำได้ n_1 วิธี

กรณีที่ 2 เลือกทำได้ n_2 วิธี

$\vdots$

กรณีที่ k เลือกทำได้ n_k วิธี

เราจะมีวิธีทำงานชิ้นนี้ได้ทั้งหมด $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ วิธี

แบบฝึกหัด

4. ต้องการเขียนจำนวนที่มีหกหลัก ABCDEF โดยที่ $A, B, C, D, E, F \in \{1, 2, \dots, 9\}$

$A + B = 14$ และ $C - D > D - E > E - F > 0$ จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน [PAT 1 (เม.ย. 57)/43]

5. มีเก้าอี้สีขาวเหมือนกัน 3 ตัว และเก้าอี้สีแดงเหมือนกัน 3 ตัว นำมาจัดเรียงรอบโต๊ะกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/16]
6. ต้องการสร้างจำนวนคู่บวก 4 หลัก จากเลขโดด 0, 1, 2, 3, 7, 8 โดยแต่ละจำนวนที่สร้างขึ้นไม่มีเลขโดดในหลักใดที่ซ้ำกันเลย จะมีจำนวนวิธีที่สร้างได้เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/35]
7. กำหนดให้ $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ จำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่า 300 โดยสร้างมาจากตัวเลขในเซต A และตัวเลขแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/40]

8. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ จงหาจำนวนสับเซตของ A ทั้งหมดที่ประกอบด้วยสมาชิก 8 ตัวที่แตกต่างกัน โดยที่ ผลรวมของสมาชิกทั้ง 8 ตัว เป็นพหุคูณของ 5 [PAT 1 (ก.ค. 53)/42]

9. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, k\}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ
ให้ $B = \{(a, b) \in A \times A \mid 0 < b - a \leq 7\}$
ค่าของ k เท่ากับเท่าใดที่ทำให้จำนวนสมาชิกของเซต B เท่ากับ 714 [PAT 1 (ต.ค. 55)/41]

10. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเฉพาะบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10
 B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 10
และ C เป็นเซตของฟังก์ชัน $f: A \rightarrow B$ ทั้งหมดที่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง
และ ห.ร.ม. ของ a และ $f(a)$ ไม่เท่ากับ 1 สำหรับทุกค่า $a \in A$ จำนวนสมาชิกในเซต C เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/28]

11. ถ้า S เป็นผลบวกของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่สร้างมาจากเลขโดด 1, 2, 3 หรือ 4 โดยที่ตัวเลขในแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน แล้วเศษเหลือจากการหาร S ด้วย 9 เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/46]

การเรียงของซ้ำ

ของ n สิ่ง (ที่มีของซ้ำอยู่ด้วย) เอามาเรียงเป็นแถวหน้ากระดาน จะเรียงได้ $\frac{n!}{\text{จำนวนของซ้ำ!}}$ แบบ

และในกรณีที่มีของซ้ำหลายกลุ่ม เช่น กลุ่มที่ 1 มีของซ้ำ n_1 ชิ้น

กลุ่มที่ 2 มีของซ้ำ n_2 ชิ้น

$\vdots$

กลุ่มที่ k มีของซ้ำ n_k ชิ้น จะเรียงได้ $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ แบบ

แบบฝึกหัด

12. ให้ S เป็นเซตของพหุนาม $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ โดยที่ a, b, c, d เป็นสมาชิกในเซต $\{0, 1, 2, \dots\}$ ซึ่งมีสมบัติสอดคล้องกับ $2a + b + c + d = 4$ จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/41]

เรียงให้บางชั้นติดกัน

ให้มัดของที่ต้องการอยู่ติดกัน เป็นของชิ้นใหม่ 1 ชิ้น แล้วคำนวณตามปกติ

จากนั้นให้คูณด้วย (จำนวนของที่อยู่ติดกัน)! (เพราะของที่อยู่ติดกัน สามารถสลับที่กันเองภายในกลุ่มได้อีก)

แบบฝึกหัด

13. จัดคน 8 คน ซึ่งมีสมชาย สมคิด และสมศรี รวมอยู่ด้วย เข้านั่งเรียงกันเป็นแถวตรง โดยที่สมศรีนั่งกลางติดกับสมชาย และสมคิดเสมอ จำนวนวิธีการจัดที่นั่งดังกล่าวมีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-17]

นับแบบตรงข้าม

จำนวนแบบโจทย์ที่ต้องการ = จำนวนแบบทั้งหมด - จำนวนแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ

แบบฝึกหัด

14. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{a, b\}$
ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B มีจำนวนทั้งหมดกี่ฟังก์ชัน [A-NET 49/2-9]

15. จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัด ชาย 3 คน และหญิง 3 คน ซึ่งมี นาย ก. และ นางสาว ข. รวมอยู่ด้วย ให้ยืนเป็นแถวตรง 2 แถวๆละ 3 คน โดยที่ นาย ก. และ นางสาว ข. ไม่ได้ยืนติดกันในแถวเดียวกัน [PAT 1 (มี.ค. 55)/46]

19. มีกระเบื้องสี่เหลี่ยมจัตุรัสสีแดง สีขาว และสีเขียว เป็นจำนวนอย่างน้อยสี่ละ 5 แผ่น (แต่ละสีเหมือนกันและมีขนาดเท่ากันทั้งหมด) ต้องการนำกระเบื้อง 7 แผ่นมาจัดเรียงเป็นแถวตรง โดยมีกระเบื้องแต่ละสีอย่างน้อยหนึ่งแผ่น จะจัดเรียงกระเบื้องดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี [PAT 1 (มี.ค. 58)/43]

การเรียงสับเปลี่ยน

$P_{n,r}$ อ่านว่า n พี r มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!}$

เช่น $P_{7,4} = \frac{7!}{(7-4)!} = \frac{7!}{3!} = 7 \times 6 \times 5 \times 4$ $P_{6,2} = \frac{6!}{(6-2)!} = \frac{6!}{4!} = 6 \times 5$

$P_{9,1} = \frac{9!}{(9-1)!} = \frac{9!}{8!} = 9$ $P_{3,3} = \frac{3!}{(3-3)!} = \frac{3!}{0!} = 3!$

- หมายเหตุ: 1. $P_{n,r}$ เขียนได้หลายแบบ เช่น ${}_nP_r$, nP_r , $P(n,r)$
 2. n และ r ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ที่ $n \geq r$ เท่านั้น

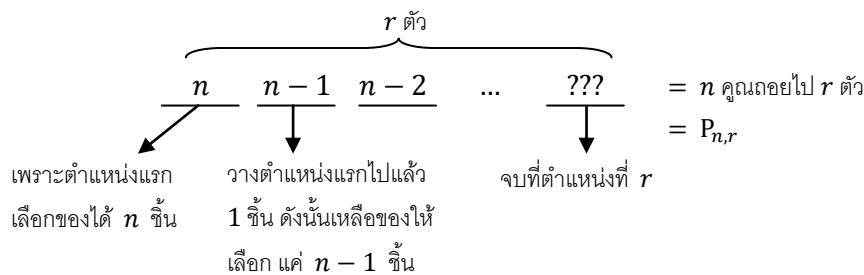
จะเห็นว่า $n!$ กับ $(n-r)!$ จะตัดกันได้เสมอ และเนื่องจาก n กับ $n-r$ ต่างกัน $= r$

ดังนั้น $\frac{n!}{(n-r)!}$ จะตัดกันเหลือข้างบนอยู่ r ตัว เสมอ นั่นคือ $P_{n,r} = \underbrace{(n)(n-1)(n-2) \dots}_{r \text{ ตัว}}$

เช่น $P_{6,2} = 6$ คูณถอยไป 2 ตัว $= 6 \times 5$

$P_{7,4} = 7$ คูณถอยไป 4 ตัว $= 7 \times 6 \times 5 \times 4$

ถ้าเรามีของ n สิ่ง แต่เลือกมาเรียงแค่ r สิ่ง จะมีวิธีเรียงได้ $P_{n,r}$ แบบเสมอ



เช่น เลือกทหาร 5 คน จากกองทหาร 20 คนมาเข้าแถว จะทำได้ $P_{20,5} = 20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$

เลือกอักษร 3 ตัว จาก A, B, C, D, E มาเรียง จะทำได้ $P_{5,3} = 5 \times 4 \times 3$

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $P_{8,2} =$

2. $P_{4,4} =$

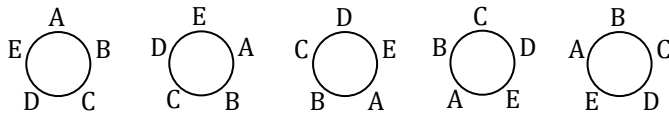
3. $P_{7,0} =$

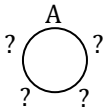
4. $P_{n,1} =$

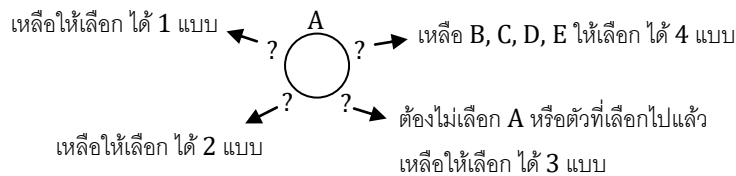
2. มีหนังสือ 6 เล่ม ต้องการเลือก 3 เล่มมาเรียงบนชั้น จะสามารถเรียงได้กี่แบบ

เรียงของเป็นวงกลม

การเรียงเป็นวงกลม จะต่างกับการเรียงแบบหน้ากระดานตรงที่ แบบหนึ่งๆ “หมุนไปหมุนมา” ได้ พูดย่อยๆ ก็คือ ทุกแบบด้านล่างนี้ ถือว่าเป็นแบบเดียวกัน



แนวคิดในการนับ คือ เราจะนับเฉพาะแบบที่ A อยู่ตำแหน่งแรก ตามรูป ?  ?
ส่วนแบบที่ A ไม่ได้อยู่ตำแหน่งแรก (เช่น 4 แบบหลัง) เราจะไม่นับ เพราะแบบอื่นที่ A ไม่ได้อยู่ตำแหน่งแรก จะสามารถหมุนให้เป็นแบบที่ A อยู่ตำแหน่งแรกได้เสมอ



ดังนั้น จำนวนวิธี = $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ แบบ

จะเห็นว่า ในการเรียงเป็นวงกลม เราจะเสียของ 1 ชิ้น เพื่อทำหน้าที่เป็นหลักปักกันหมุน ดังนั้น

เรียงของ n สิ่ง เป็นวงกลม จะเรียงได้ $(n - 1)!$ แบบ

เช่น คน 6 คน นั่งเรือล่องแก่งรูปวงกลม จะนั่งได้ $(6 - 1)! = 5!$ แบบ

อัศวินโต๊ะกลม 50 คน นั่งประชุมโต๊ะกลมได้ $(50 - 1)! = 49!$ แบบ

ฉันและเพื่อนรวม 9 คน นั่งกินโต๊ะจีนกลมๆ ได้ $(9 - 1)! = 8!$ แบบ

แบบฝึกหัด

- นักเรียน 4 คน จะสามารถจับมือล้อมเป็นวงกลมได้กี่แบบ
- สมชาย สมหญิง และนักเรียนอื่นๆอีก 4 คน จะสามารถจับมือล้อมเป็นวงกลม โดยสมชายยืนติดกับสมหญิงได้กี่แบบ
- สมชาย สมหญิง และนักเรียนอื่นๆอีก 4 คน จะสามารถจับมือล้อมเป็นวงกลม โดยสมชายยืนไม่ติดกับสมหญิงได้กี่แบบ

4. มีธงชาติต่างๆ 5 ผืนชาติละ 1 ผืน และธงไทยขนาดไม่เท่ากัน 2 ผืน นำมาจัดประดับรอบวงเวียนโดยไม่ให้ธงไทยอยู่ติดกัน จำนวนวิธีจัดเท่ากับเท่าใด

5. คุณลุง คุณป้า ลูกชาย และลูกสาว มาเยี่ยมครอบครัวเราซึ่งมี 4 คนคือ คุณพ่อ คุณแม่ ตัวฉัน และน้องชาย ในการจัดที่นั่งรอบโต๊ะอาหารกลมที่มี 8 ที่นั่ง โดยให้คุณลุงนั่งติดกับคุณพ่อ คุณป้านั่งติดกับคุณแม่ ลูกชายของคุณลุงนั่งติดกับน้องชายของฉัน และลูกสาวของคุณลุงนั่งติดกับฉัน จะมีจำนวนวิธีจัดได้เท่ากับเท่าใด

[PAT 1 (มี.ค. 52)/36]

6. คณะกรรมการชุดหนึ่งมี 7 คน ประกอบด้วยประธาน รองประธาน เลขานุการและกรรมการอีก 4 คน จำนวนวิธีที่จัดกลุ่มคน 7 คนนี้ั่งประชุมรอบโต๊ะกลม โดยให้ประธานและรองประธานนั่งติดกันเสมอ แต่เลขานุการไม่นั่งติดกับรองประธาน เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/41]

การจัดหมู่

$\binom{n}{r}$ อ่านว่า n ซี r มีค่าเท่ากับ $\frac{n!}{(n-r)!r!}$

$$\text{เช่น } \binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)!4!} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1}$$

$$\binom{9}{1} = \frac{9!}{(9-1)!1!} = \frac{9!}{8!1!} = 9$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{(6-2)!2!} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1}$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{3!}{0!1!} = 3!$$

หมายเหตุ: 1. $\binom{n}{r}$ เขียนได้หลายแบบ เช่น C_r^n , ${}_nC_r$, nC_r , $C(n, r)$

2. n และ r ต้องเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ที่ $n \geq r$ เท่านั้น

จะเห็นว่า $\binom{n}{r}$ คือการนำ $P_{n,r}$ มาเพิ่ม $r!$ เป็นตัวส่วนเข้าไปนั่นเอง

ดังนั้น เวลาคำนวณ $\binom{n}{r}$ เรามักคำนวณจากสูตร $\binom{n}{r} = \frac{P_{n,r}}{r!} = \frac{n \text{ คูณถอยไป } r \text{ ตัว}}{r!}$

$$\text{เช่น } \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3!} = 120$$

$$\binom{15}{1} = \frac{15}{1!} = 15$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = 15$$

และถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่า $\binom{n}{r}$ จะสมมาตร เมื่อไล่ค่า $r = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\text{เช่น } \binom{3}{0} = \frac{3!}{(3-0)!0!} = \frac{3!}{3!0!} = 1$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{(4-0)!0!} = \frac{4!}{4!0!} = 1$$

$$\binom{5}{0} = \frac{5!}{(5-0)!0!} = \frac{5!}{5!0!} = 1$$

$$\binom{3}{1} = \frac{3!}{(3-1)!1!} = \frac{3!}{2!1!} = 3$$

$$\binom{4}{1} = \frac{4!}{(4-1)!1!} = \frac{4!}{3!1!} = 4$$

$$\binom{5}{1} = \frac{5!}{(5-1)!1!} = \frac{5!}{4!1!} = 5$$

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!2!} = \frac{3!}{1!2!} = 3$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{(4-2)!2!} = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$\binom{3}{3} = \frac{3!}{(3-3)!3!} = \frac{3!}{0!3!} = 1$$

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{(4-3)!3!} = \frac{4!}{1!3!} = 4$$

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)!3!} = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

$$\binom{4}{4} = \frac{4!}{(4-4)!4!} = \frac{4!}{0!4!} = 1$$

$$\binom{5}{4} = \frac{5!}{(5-4)!4!} = \frac{5!}{1!4!} = 5$$

$$\binom{5}{5} = \frac{5!}{(5-5)!5!} = \frac{5!}{0!5!} = 1$$

สมบัตินี้ เขียนเป็นสูตรได้ว่า $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$

ในหัวข้อที่ผ่านมา เราสนใจนับจำนวนวิธีการ “เรียง” สิ่งของ ซึ่งสนใจลำดับก่อนหลังของสิ่งที่จะเรียง

อย่างไรก็ตาม เรามีโจทย์อีกประเภทที่สนใจนับจำนวนวิธีการ “จัดหมู่” สิ่งของ ซึ่งไม่สนใจลำดับก่อนหลัง

ตัวอย่างการจัดหมู่ เช่น เวลาที่คุณครูให้แบ่งกลุ่มทำรายงาน ลำดับของคนในกลุ่ม จะไม่สำคัญ

กล่าวคือ กลุ่ม “สมชาย, สมหญิง, สมศักดิ์” ก็คือกลุ่มเดียวกับกับ กลุ่ม “สมศักดิ์, สมชาย, สมหญิง” นั่นเอง

โดยสูตรคือ

ของ n สิ่ง เลือกมา r สิ่งเพื่อจัดกลุ่ม จะจัดกลุ่มได้ $\binom{n}{r}$ แบบ

$$\text{เช่น } \text{สร้างกลุ่ม 3 คน จาก นาย ก, ข, ค, ง, จ ได้ } \binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3!} = 10 \text{ แบบ}$$

$$\text{ขั้วมลูกบอล 4 ลูก จากถังที่มีลูกบอล 10 ลูก จะมีผลการขั้วมได้ } \binom{10}{4} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4!} = 210 \text{ แบบ}$$

$$\text{เลือกซื้อของ 2 ชิ้น จากของในร้าน 8 ชิ้น จะซื้อได้ } \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2!} = 28 \text{ แบบ}$$

$$\text{เลือกไฟ 3 โคม จากกองไฟ 40 โคม จะเลือกได้ } \binom{40}{3} = \frac{40 \times 39 \times 38}{3!} \text{ แบบ}$$

สิ่งที่มักเป็นปัญหา คือ เรามักต้องคิดเอง ว่าโจทย์ต้องการ “เรียง” หรือต้องการ “จัดหมู่”
 โจทย์บางข้อจะไม่บอกอย่างชัดเจน ว่าต้องการให้ลำดับของสิ่งของมีความสำคัญหรือไม่
 ในกรณีนี้ เราต้องใช้ความรู้และประสบการณ์ ตัดสินใจเอง

- ถ้าลำดับสำคัญ → คิดแบบ “เรียงสับเปลี่ยน”
- ถ้าลำดับไม่สำคัญ → คิดแบบ “จัดหมู่”

ตัวอย่าง มีผู้ลงสมัครเลือกตั้งจำนวน 20 คน โดยจะต้องเลือกกากบาทเลือก 3 คน จะมีวิธีเลือกได้กี่แบบ

วิธีทำ จะเห็นว่าลำดับการกากบาทไม่มีความสำคัญ จะกากบาทเบอร์ไหนก่อน ก็เหมือนกัน

ดังนั้น คิดแบบจัดหมู่ → เลือก 3 ช่อจาก 20 ช่อ จะได้ $({}^{20}_3)$ แบบ

#

ตัวอย่าง ต้องการแจกของเล่น 10 ชิ้นที่แตกต่างกัน ให้เด็ก 2 คน คนละ 3 ชิ้น จะแจกได้กี่วิธี

วิธีทำ แบ่งการทำงานเป็น 2 ขั้นตอน

ขั้นที่ 1: เลือกของเล่น 3 ชิ้นจาก 10 ชิ้น ให้เด็กคนแรก เลือกได้ $({}^{10}_3)$ แบบ

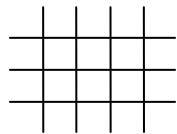
ขั้นที่ 2: เลือกของเล่น 3 ชิ้นจาก 7 ชิ้น (เหลือ 7 ชิ้นเพราะให้คนแรกไปแล้ว 3 ชิ้น) ให้เด็กคนที่สอง

เลือกได้ $({}^7_3)$ แบบ

ดังนั้น มีวิธีแจกได้ $({}^{10}_3)({}^7_3)$ แบบ

#

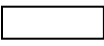
ตัวอย่าง จงหาว่ามีสี่เหลี่ยมทั้งหมดกี่รูป ที่ซ่อนอยู่ในรูปต่อไปนี้



วิธีทำ ข้อนี้ทำได้ 2 วิธี คือใช้แรงลุยนับเอา กับใช้วิธีคำนวณ เพื่อความเข้าใจที่ดี จะทำให้ดูทั้ง 2 วิธี

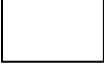
ลองลุยนับดู: สี่เหลี่ยมขนาด 1×1  นับได้ 6 รูป

สี่เหลี่ยมขนาด 1×2  นับได้ 4 รูป

สี่เหลี่ยมขนาด 1×3  นับได้ 2 รูป

สี่เหลี่ยมขนาด 2×1  นับได้ 3 รูป

สี่เหลี่ยมขนาด 2×2  นับได้ 2 รูป

สี่เหลี่ยมขนาด 2×3  นับได้ 1 รูป

ดังนั้น ลุยนับ ได้ $6 + 4 + 2 + 3 + 2 + 1 = 18$ รูป

ถ้าใช้ความรู้เรื่องวิธีนับ จะสามารถหาคำตอบโดยการคำนวณได้

สังเกตว่า สี่เหลี่ยม 1 รูป ประกอบด้วยเส้นในแนวนอน 2 เส้น และเส้นในแนวตั้ง 2 เส้น

ดังนั้นการสร้างสี่เหลี่ยม จะแบ่งเป็น 2 ขั้นตอน คือ 1) เลือก 2 เส้นในแนวนอน และ 2) เลือก 2 เส้นในแนวตั้ง

- เลือก 2 เส้น จากเส้นแนวนอนทั้งหมด 3 เส้น ได้ $({}^3_2) = \frac{3 \times 2}{2!} = 3$ แบบ

- เลือก 2 เส้น จากเส้นแนวตั้งทั้งหมด 4 เส้น ได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ แบบ
ดังนั้น สร้างสี่เหลี่ยมได้ $3 \times 6 = 18$ แบบ

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\binom{4}{3} =$

2. $\binom{10}{2} =$

3. $\binom{7}{5} =$

4. $\binom{8}{7} =$

2. หยิบไพ่ 4 ใบ จากกองไพ่ 52 ใบ ได้กี่วิธี

3. แจกไพ่จากกองไพ่ 52 ใบ ให้ผู้เล่น 2 คน คนละ 3 ใบ จะสามารถแจกได้กี่วิธี

4. แจกไพ่จากกองไพ่ 52 ใบ ให้ผู้เล่น 4 คน คนละเท่าๆกัน โดยแจกหมดทั้ง 52 ใบ จะสามารถแจกได้กี่วิธี

5. จะสามารถแจกของ 5 ชิ้นที่แตกต่างกัน ให้เด็ก 3 คน ได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่าได้รับคนละไม่เกิน 2 ชิ้น

6. จะสามารถแจกของ 4 ชิ้นที่แตกต่างกัน ให้เด็ก 3 คน ได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่าได้รับคนละไม่เกิน 2 ชิ้น (รวมกรณีที่บางคนไม่ได้ของด้วย)

7. จะสามารถแจกของ 5 ชิ้นที่แตกต่างกัน ให้เด็ก 4 คน ได้กี่วิธี โดยมีเงื่อนไขว่าได้รับคนละไม่เกิน 2 ชิ้น (รวมกรณีที่บางคนไม่ได้ของด้วย)

8. คน 16 คน ประกอบด้วย ครู หมอ วิศวกร และ ตำรวจ อย่างละ 4 คน จะสามารถจัดกลุ่มคณะกรรมการจำนวน 3 คน โดยมี 2 คนมาจากอาชีพเดียวกันได้กี่แบบ
9. ในเขตเลือกตั้งหนึ่ง มีผู้แทนราษฎรได้ 3 คน มีผู้สมัคร 4 พรรค พรรคละ 3 คน วิธีที่จะได้ผู้แทนราษฎรที่มาจากต่างพรรคกันคือเท่าใด
10. มีลูกบอลสีดำที่แตกต่างกัน 6 ลูก สีขาวที่แตกต่างกัน 4 ลูก จงหาจำนวนผลลัพธ์ในการตักลูกบอล 4 ลูกพร้อมๆกัน แล้วได้ลูกบอลสีขาวไม่เกิน 1 ลูก
11. คน 10 คน จับมือกันในงานประชุมแห่งหนึ่ง โดยทุกคนได้จับมือกับทุกคน จงหาว่ามีการจับมือเกิดขึ้นทั้งหมดกี่ครั้ง
12. ถังใบหนึ่ง มีลูกบอลสีเขียว 8 ลูก สีน้ำเงิน 6 ลูก และสีขาว 4 ลูก ถ้าลูกบอลทุกลูกแตกต่างกันแล้ว จงหาจำนวนแบบในการตักลูกบอล 2 ลูกพร้อมกัน แล้วได้ลูกบอลสีเดียวกัน
13. สมชาย สมหญิง และเพื่อนอีก 5 คน แบ่งกลุ่มทำงาน โดยต้องใช้ 3 คนในการหาข้อมูล ต้องใช้ 2 คนในการทำรายงาน และต้องใช้ 2 คนในการนำเสนอ จงหาจำนวนวิธีจัดคนเพื่อทำงาน โดยมีเงื่อนไขว่า สมชายและสมหญิง ต้องได้หาข้อมูลด้วยกัน หรือ ได้นำเสนอด้วยกัน
14. ถังใบหนึ่ง มีลูกบอล 9 ลูก เขียนหมายเลข 1, 2, 3, ..., 9 ตักลูกบอล 3 ลูกจากถังพร้อมๆกัน จงหาจำนวนแบบที่จะได้เลขคู่เพียง 1 ลูก

15. โยนลูกเต๋า 8 ครั้ง จงหาจำนวนแบบที่ได้แต้มไม่เกิน 2 เพียง 3 ครั้ง
16. กล้องใบหนึ่ง ใส่สลากหมายเลข $-4, -3, -2, \dots, 2, 3, 4$ หยิบสลาก 2 ใบพร้อมๆ กัน จงหาจำนวนแบบที่ได้หมายเลขที่คูณกันได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนบวก
17. นก 4 ตัว บินมาเกาะกิ่งไม้ 3 กิ่ง จงหาจำนวนแบบที่กิ่งไม้ทุกกิ่งมีนกเกาะ
18. จงหาจำนวนวิธีจัดเรียงตัวอักษร AAAABBBBBBBB โดยไม่มี A สองตัวใดเรียงติดกัน
19. ศูนย์อพยพจัดอาหารกล่องไว้ 6 ชนิด ชนิดละหลายกล่อง ถ้าเจ้าหน้าที่ต้องการแจกอาหารกล่อง 2 กล่องให้นายอ้วนจะสามารถแจกได้กี่แบบ
20. ในการแข่งขันฟุตบอลฤดูกาลหนึ่ง มีทีมเข้าร่วมการแข่งขัน 7 ทีม จัดแข่งแบบพบกันหมด (แต่ละทีมต้องลงแข่งกับทีมอื่นทุกทีม) จะต้องจัดการแข่งขันกี่นัด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-21]
21. มีสิ่งของซึ่งแตกต่างกันอยู่ 8 ชิ้น ต้องแบ่งให้คน 2 คน คนหนึ่งได้ 6 ชิ้น และอีกคนหนึ่งได้ 2 ชิ้น จะมีจำนวนวิธีแบ่งกี่วิธี [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-20]

22. มีข้อสอบปรนัย 20 ข้อ คะแนนเต็ม 50 คะแนน โดยกำหนดข้อ 1 - 10 ข้อละ 4 คะแนน และข้อ 11 - 20 ข้อละ 1 คะแนน ถ้าหากนักเรียนตอบข้อใดถูกต้อง จะได้คะแนนเต็มของข้อนั้น แต่ถ้าตอบผิดหรือไม่ตอบ จะได้คะแนน 0 คะแนน จะมีวิธีที่นักเรียนคนหนึ่ง จะทำข้อสอบชุดนี้ได้คะแนนรวม 45 คะแนน [PAT 1 (ก.ค. 53)/41]

23. จังหวัดแห่งหนึ่งมีอำเภอ 6 อำเภอ แต่ละอำเภอส่งผู้แทนอำเภอละ 2 คนเป็นชาย 1 คนและเป็นหญิง 1 คน ถ้าต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จากตัวแทนทั้ง 12 คน โดยในบรรดากรรมการ 4 คน นี้จะต้องเป็นชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากอำเภอเดียวกัน จะมีวิธีการคัดเลือกกี่วิธี
[PAT 1 (มี.ค. 56)/44]

24. นิยาม จำนวนสามหลักลด คือ จำนวน ABC โดยที่ $A, B, C \in \{0, 1, \dots, 9\}$ และ $A > B > C$ จำนวนวิธีสร้างจำนวนสามหลักลด ที่มีค่ามากกว่า 500 มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/22]

25. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

เซต $S = \{f \mid f: A \rightarrow B \text{ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง}\}$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/35]

26. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ให้ S เป็นเซตของคู่อันดับ (A, B) ทั้งหมด โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2 เมื่อ A และ B เป็นสับเซตของ U จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/37]

27. สุ่มเลือกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 15 มา 5 จำนวน

จงหาจำนวนวิธีที่จะได้จำนวนซึ่งมีผลรวมของทั้ง 5 จำนวนหารด้วย 3 ลงตัว [PAT 1 (ธ.ค. 54)/44]

28. จงหาว่าจำนวนสับเซต $\{a_1, a_2, a_3\}$ ของเซต $\{1, 2, 3, \dots, 14\}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $a_2 - a_1 \geq 3$ และ $a_3 - a_2 \geq 3$ [PAT 1 (มี.ค. 54)/45]

29* กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาจำนวนสับเซต $A \subset S$ ทั้งหมดที่ เซต A มีจำนวนสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว และ $a - b > 1$ สำหรับทุกสมาชิก a และ b ใน A ที่ $a > b$ [PAT 1 (มี.ค. 58)/36]

30. ต้องการจัดเรียงตัวอักษร P, P, P, A, A, A, T, T, T ทั้งหมด (ไม่คำนึงถึงความหมาย) โดยมีเงื่อนไขว่า ตัวอักษร P ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมดและตัวอักษร T ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด จะมีวิธีการเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี [PAT 1 (เม.ย. 57)/38]

การจัดหมู่ของซ้ำ

โจทย์ในเรื่องนี้ จะให้จัดหมู่จากกลุ่มของสิ่งของที่มีของซ้ำอยู่

เช่น โจทย์อาจถามว่า ชยุม์ตัวอักษร 4 ตัว จากกลุ่มตัวอักษร A, A, B, B, B, C, C, D, E, E, E, F ได้กี่วิธี

ปกติ เวลาที่มีของซ้ำ เราจะใช้วิธี หารอกด้วย (จำนวนของซ้ำ)!

แต่ข้อนี้เราจะไม่รู้ว่า ใน 4 ตัวที่ชยุ้มมา มีซ้ำกี่ตัว เช่น

ABCD → ไม่ซ้ำเลย

ABBC → ซ้ำ 2 ตัว

ABBB → ซ้ำ 3 ตัว

AABB → ซ้ำ 2 ตัว 2 คู่

ในการทำโจทย์ประเภทนี้ เราต้อง “แบ่งกรณี” ตามรูปแบบของการซ้ำทั้งหมดที่เป็นไปได้

โดยเราต้องพิจารณาตัวอักษรที่โจทย์ให้มา แล้วเขียนรูปแบบของการซ้ำทั้งหมดออกมาก่อน

ในข้อนี้ จะมีรูปแบบการซ้ำที่เป็นไปได้ทั้งหมด 4 กรณี คือ

กรณีที่ 1: ซ้ำสาม ต่างหนึ่ง เช่น ABBB

กรณีที่ 2: ซ้ำสอง สองคู่ เช่น BBEE

กรณีที่ 3: ซ้ำสอง ต่างสอง เช่น AABC

กรณีที่ 4: ต่างหมด เช่น ABDE

จากนั้น ค่อยๆ คิดทีละกรณี (เหมือนทำโจทย์ 4 ข้อ) แล้วเอาตัวเลขในแต่ละกรณีมารวมกัน

หมายเหตุ: รูปแบบการซ้ำจะต่างกันไปตามตัวอักษรที่โจทย์ให้ เช่น ถ้าข้อนี้มี A สี่ตัว ก็จะมีกรณี ซ้ำสี่ เพิ่มมาด้วย

ตัวอย่าง ถ้ามีตัวอักษร A, A, B, B, B, C, C, D, E, E, E, F ต้องการสร้างกลุ่มตัวอักษรจำนวน 4 ตัว ได้กี่วิธี

วิธีทำ ซ้ำสาม ต่างหนึ่ง: ตัวที่ซ้ำสามได้ มี 2 ตัว คือ B กับ E ดังนั้น เลือกตัวซ้ำสามได้ 2 แบบ

อีกตัวที่เหลือ เลือกจากตัวอะไรก็ได้ ที่ไม่ใช่ตัวซ้ำสามที่เพิ่งเลือกไป ได้ 5 แบบ

(คือ A, C, D, F มี 4 ตัว รวมกับ B หรือ E ตัวใดตัวหนึ่งที่ไม่ได้ถูกเลือกในขั้นตอนแรก)

ดังนั้น กรณีที่หนึ่ง ทำได้ $2 \times 5 = 10$ แบบ

ซ้ำสอง สองคู่: ตัวที่ซ้ำสองได้ มี 4 ตัว คือ A, B, C, E

ต้องใช้ 2 คู่ ดังนั้น เลือกมา 2 ตัวจาก 4 ตัวนี้ ได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ แบบ

ซ้ำสอง ต่างสอง: ตัวที่ซ้ำสองได้ มี 4 ตัว คือ A, B, C, E ดังนั้น เลือกตัวซ้ำสองได้ 4 แบบ

อีก 2 ตัวที่เหลือ เลือกจาก 5 ตัวที่ไม่ซ้ำกับตัวซ้ำสองที่เพิ่งเลือกไป ได้ $\binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2!} = 10$ แบบ

ดังนั้น กรณีนี้ ได้ $4 \times 10 = 40$ แบบ

ต่างหมด: เลือก 4 ตัว จาก A, B, C, D, E, F ได้ $\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = 15$ แบบ

รวม 4 กรณี จะได้วิธีจัดกลุ่ม $10 + 6 + 40 + 15 = 71$ แบบ

#

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า จะสามารถจัดกลุ่มตัวอักษร 3 ตัว จากตัวอักษรในแต่ละข้อได้กี่แบบ

1. A, A, A, B, C

2. A, A, B, B, C, D

3. A, A, A, B, B, C, D, D, E

2. จงพิจารณาว่า จะสามารถจัดกลุ่มตัวอักษร 4 ตัว จากตัวอักษรในแต่ละข้อได้กี่แบบ

1. A, A, A, B, B, C, D

2. A, A, A, B, B, B, C, C, D, D, E

การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำ

หัวข้อนี้ กลับมาที่การ “เรียงสับเปลี่ยน” อีกครั้ง

โจทย์ในเรื่องนี้ จะให้เรียงสิ่งของ r สิ่ง จากสิ่งของ n สิ่ง ที่มีของซ้ำอยู่

เช่น โจทย์อาจถามว่า เลือกอักษร 4 ตัว จากกลุ่มตัวอักษร A, A, B, B, B, C, C, D, E, E, E, F มา “เรียง” ได้กี่วิธี และเช่นเคย เนื่องจากเราไม่รู้ว่ามี 4 ตัวที่เลือก มีซ้ำกี่ตัว จึงไม่สามารถใช้วิธี หารอกด้วย (จำนวนของซ้ำ)! ได้

วิธีทำโจทย์แนวนี้ จะเหมือนกับหัวข้อที่แล้ว คือ ต้องแบ่งกรณีตามรูปแบบการซ้ำทั้งหมดที่เป็นไปได้ และจะเพิ่มขั้นตอนการ “เรียง” หลังจากที่ได้จำนวนแบบของการจัดกลุ่มในแต่ละกรณี

ตัวอย่าง ถ้ามีตัวอักษร A, A, B, B, B, C, C, D, E, E, E, F ต้องการเรียงตัวอักษรจำนวน 4 ตัว จะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ ซ้ำสาม ต่างหนึ่ง: ขั้นที่ 1: หาก่อน ว่าจัดได้กี่ “กลุ่ม”

ตัวที่ซ้ำสามได้ 2 แบบ ตัวต่างหนึ่ง ได้ 5 แบบ ดังนั้น จัดได้กลุ่มได้ 10 แบบ

ขั้นที่ 2: “เรียง” ตัวที่อยู่ในกลุ่ม

ในแต่ละกลุ่มของกรณีนี้ จะมี 4 ตัวอักษร ซ้ำสาม ต่างหนึ่ง ดังนั้นเรียงได้ $\frac{4!}{3!} = 4$ แบบ

ดังนั้น กรณีที่ซ้ำสาม ต่างหนึ่ง จะเรียงได้ $10 \times 4 = 40$ แบบ

ซ้ำสอง สองคู่: ขั้นที่ 1: หาก่อนว่าจัดได้กี่กลุ่ม

ตัวที่ซ้ำสองได้มี 4 ตัว เลือกมา 2 ตัว จะจัดกลุ่มได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ แบบ

ขั้นที่ 2: เรียงตัวที่อยู่ในกลุ่ม

ในแต่ละกลุ่มของกรณีนี้ จะมี 4 ตัวอักษร ซ้ำสอง สองคู่ ดังนั้นเรียงได้ $\frac{4!}{2!2!} = 6$ แบบ

ดังนั้น กรณีซ้ำสอง สองคู่ จะเรียงได้ $6 \times 6 = 36$ แบบ

ซ้ำสอง ต่างสอง: ขั้นที่ 1: หาก่อนว่าจัดได้กี่กลุ่ม

ตัวที่ซ้ำสองได้มี 4 ตัว ส่วนตัวต่าง ต้องเลือก 2 ตัว จาก 5 ตัวที่เหลือ

ดังนั้น จัดกลุ่มได้ $4 \times \binom{5}{2} = 40$ แบบ

ขั้นที่ 2: “เรียง” ตัวที่อยู่ในกลุ่ม

ในแต่ละกลุ่มของกรณีนี้ จะมี 4 ตัวอักษร ซ้ำสองตัว ดังนั้นเรียงได้ $\frac{4!}{2!} = 12$ แบบ

ดังนั้น กรณีซ้ำสอง ต่างสอง เรียงได้ $40 \times 12 = 480$ แบบ

ต่างหมด: ขั้นที่ 1: หาก่อนว่าจัดได้กี่กลุ่ม

เลือก 4 ตัว จาก A, B, C, D, E, F ได้ $\binom{6}{4} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = 15$ แบบ

ขั้นที่ 2: “เรียง” ตัวที่อยู่ในกลุ่ม

ในแต่ละกลุ่มของกรณีนี้ จะมี 4 ตัวอักษร ไม่มีตัวซ้ำ ดังนั้น เรียงได้ $4! = 24$ แบบ

ดังนั้น กรณีต่างหมด จะเรียงได้ $15 \times 24 = 360$ แบบ

รวมทุกกรณี จะเรียงได้ $40 + 36 + 480 + 360 = 916$ แบบ

#

แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่า จะสามารถเรียงตัวอักษร 3 ตัว จากตัวอักษรในแต่ละข้อได้กี่แบบ

1. A, A, A, B, C

2. A, A, B, B, C, D

3. A, A, A, B, B, C, D, D, E

2. จงพิจารณาว่า จะสามารถเรียงตัวอักษร 4 ตัว จากตัวอักษรในแต่ละข้อได้กี่แบบ

1. A, A, A, B, B, C, D

2. A, A, A, B, B, B, C, C, D, D, E

3. บัตร 8 ใบ ได้แก่ $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{4}$

เลือกมา 4 ใบ เพื่อสร้างจำนวนเต็ม 4 หลัก จะสร้างได้กี่จำนวน [PAT 1 (ธ.ค. 54)/45]

ทฤษฎีบททวินาม

ตอน ม.3 จะเคยท่องสูตรในเรื่องพหุนามต่อไปนี้

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

ถ้าลองกระจายเองดู จะพบว่า

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^2 + 2ab + b^2) \\ &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= (a+b)^2 \cdot (a+b)^3 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2)(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

ทฤษฎีบททวินาม คือ สูตรที่ใช้กระจาย $(a+b)^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับอะไรก็ได้ ซึ่งสูตร มีดังนี้

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

- สังเกต: 1. ในการกระจาย $(a+b)^n$ จะได้จำนวนตัวทั้งหมด $n+1$ ตัวบวกกัน
2. ตัว a จะเริ่มจาก a^n แล้วกำลังลดลงเรื่อยๆ จนเป็น a^0 หายไป
- ตัว b จะสวนทางกับ a กล่าวคือ เริ่มจากไม่มี b แล้วกำลังค่อยๆเพิ่ม จนเป็น b^n
3. ตัวคูณข้างหน้า เริ่มจาก $\binom{n}{0}$ แล้วเพิ่มเป็น $\binom{n}{1}$ ไปเรื่อยๆ จนถึงตัวสุดท้าย คือ $\binom{n}{n}$

แต่ปกติ โจทย์จะไม่ได้ให้กระจายหมดทุกตัว ดังนั้น สิ่งที่ต้องจำก็คือสูตรสำหรับหาตัวที่ต้องการ ซึ่งจะพบว่า

$$\left. \begin{array}{ll} \binom{n}{0}a^n & \text{คือ ตัวที่ 1} \\ \binom{n}{1}a^{n-1}b & \text{คือ ตัวที่ 2} \\ \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 & \text{คือ ตัวที่ 3} \\ \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 & \text{คือ ตัวที่ 4} \\ \vdots & \end{array} \right\} \boxed{\binom{n}{r}a^{n-r}b^r \text{ คือ ตัวที่ } r+1}$$

- หมายเหตุ: 1. โจทย์มักใช้คำว่า “เทอม” หรือ “พจน์” แทนคำว่า “ตัว”
2. ถ้าต้องการกระจาย $(a-b)^n$ ให้มองว่ามันคือ $(a+(-b))^n$

ตัวอย่าง จงหาพจน์ที่ 5 ของการกระจาย $(2x-3y)^{10}$

วิธีทำ $(2x-3y)^{10} = (2x+(-3y))^{10}$ ดังนั้น ข้อนี้นี้ $a = 2x$, $b = -3y$, และ $n = 10$ นั่นเอง

$$\begin{aligned}\text{จากสูตร พจน์ที่ 5 คือ } \binom{n}{4}a^{n-4}b^4 &= \binom{10}{4}(2x)^{10-4}(-3y)^4 \\ &= \binom{10}{4}2^6x^6(-1)^43^4y^4 \\ &= 2^63^4\binom{10}{4}x^6y^4\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่ 10 ในการกระจาย $(2x^2 - x)^{12}$

วิธีทำ พจน์ที่ 10 คือ $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{12}{9}(2x^2)^{12-9}(-x)^9$

$$= \binom{12}{9}(2x^2)^3(-x)^9$$

$$= \binom{12}{9}2^3x^6(-1)^9x^9$$

$$= -2^3\binom{12}{9}x^{15}$$

โจทย์ถามสัมประสิทธิ์ คือให้ตอบแต่ส่วนที่เป็นตัวเลข ดังนั้นจะได้คำตอบคือ $-2^3\binom{12}{9}$

#

ตัวอย่าง จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่มีตัวแปร x^3 ในการกระจาย $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^6$

วิธีทำ ข้อนี้ไม่บอกว่าให้หาพจน์ที่เท่าไร วิธีทำก็ให้ติดค่า r ไปก่อน

จากสูตร ตัวที่ $r + 1$ คือ $\binom{n}{r}a^{n-r}b^r = \binom{6}{r}(x^2)^{6-r}(2x^{-1})^r$

$$= \binom{6}{r}x^{12-2r}2^rx^{-r}$$

$$= 2^r\binom{6}{r}x^{12-3r}$$

โจทย์ถามพจน์ที่มีตัวแปร x^3 ดังนั้นเราจะแก้สมการ $12 - 3r = 3$ เพื่อหา r ที่ทำให้มี x^3 เป็นตัวแปรในพจน์

$$12 - 3r = 3$$

$$-3r = 3 - 12$$

$$r = \frac{-9}{-3} = 3$$

จะได้ $r = 3$

จะได้สัมประสิทธิ์คือ $2^3\binom{6}{3}$

#

ตัวอย่าง จงหาผลบวกสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์ในการกระจาย $(2x - 3y)^3$

วิธีทำ ข้อนี้ทำได้ 2 วิธี ถ้าทำแบบตรงไปตรงมา ก็ต้องกระจาย $(2x - 3y)^3$ ออกมาให้ครบทุกตัวก่อน

$$(2x - 3y)^3 = \binom{3}{0}(2x)^3 + \binom{3}{1}(2x)^2(-3y) + \binom{3}{2}(2x)(-3y)^2 + \binom{3}{3}(-3y)^3$$

$$= 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$$

โจทย์ถามผลบวกสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์ ดังนั้น เราต้องเอาส่วนที่เป็นตัวเลขของทุกพจน์มาบวกกัน

จะได้คำตอบคือ $8 + (-36) + 54 + (-27) = -1$

อีกวิธี ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่า ถ้าแทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงใน $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

ก็จะได้เหมือนกับเอาสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์มาบวกกัน คือได้ $8 + (-36) + 54 + (-27) = -1$ เหมือนกัน

ดังนั้น การแทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงใน $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ จะได้คำตอบของโจทย์ข้อนี้

แต่ $(2x - 3y)^3 = 8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$

ดังนั้น แทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงใน $(2x - 3y)^3$ ก็จะได้คำตอบของโจทย์ข้อนี้ด้วย (แถมยังคิดเลขน้อยกว่า)

นั่นคือจะได้ผลบวกสัมประสิทธิ์ $= (2(1) - 3(1))^3 = (-1)^3 = -1$

#

สรุป ถ้าจะหาผลบวกสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์ของการกระจายอะไรก็ตามให้แทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงไป ได้เท่าไรตอบได้เลย ไม่ต้องกระจายให้เหนื่อย

ตัวอย่าง จงหาผลบวกสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์ในการกระจาย $(5x - 3y)^5$

วิธีทำ แทน $x = 1$ และ $y = 1$ ลงไป จะได้ $(5(1) - 3(1))^5 = 2^5 = 32$

ดังนั้น ผลบวกสัมประสิทธิ์ของทุกพจน์คือ 32

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาพจน์ที่กำหนด ของพหุนามต่อไปนี้

1. พจน์ที่ 3 ของ $(x + 2y)^8$

2. พจน์ที่ 4 ของ $(x - 2y)^6$

3. พจน์ที่ 10 ของ $(2x - y)^{10}$

4. พจน์ที่ 3 ของ $(3x^2 - 2y)^4$

2. จงหาสัมประสิทธิ์ของพจน์ที่กำหนด ในพหุนามต่อไปนี้

1. x^5 ใน $(x + 2)^7$

2. x^{15} ใน $(x^3 - 1)^8$

3. x^6 ใน $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{10}$

4. $\frac{1}{x}$ ใน $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^8$

5. พจน์ที่ไม่มี x ใน $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^6$

6. พจน์ที่ไม่มี x ใน $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^6$

3. ในการกระจาย $\left(2^{\left(\frac{1}{5}\right)} + 3^{\left(\frac{1}{10}\right)}\right)^{55}$ จำนวนพจน์ที่เป็นจำนวนเต็มเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-3]

สตาร์ แอนด์ บาร์

หัวข้อนี้ จะพูดถึงเทคนิคในการนับจำนวนวิธีในการแบ่งของที่เหมือนกันให้คนจำนวนหนึ่ง
เนื่องจากของทุกชิ้นเหมือนกัน ดังนั้น ใครจะได้ชิ้นไหน ไม่สำคัญ สิ่งที่สำคัญคือ “จำนวนชิ้น” ที่แต่ละคนจะได้

ตัวอย่างเช่น ถ้าแบ่งของ 5 ชิ้นที่เหมือนกัน ให้เด็ก 3 คน
โดยมีเงื่อนไขว่าต้องได้รับอย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น
จะสามารถแบ่งได้ 6 แบบ ดังตาราง

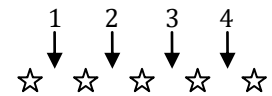
ด1	ด2	ด3
1	1	3
1	2	2
1	3	1
2	1	2
2	2	1
3	1	1

จะเห็นว่า ถ้าเราให้ของ 5 ชิ้น เป็น “ดาว” 5 ดวง ปัญหาคือการเอา “เส้นคั่น” มาแบ่งดาว 5 ดวง เป็น 3 ส่วนนั่นเอง

ด1	ด2	ด3	
1	1	3	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
1	2	2	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
1	3	1	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
2	1	2	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
2	2	1	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆
3	1	1	→ ☆ ☆ ☆ ☆ ☆

ในการแบ่งดาวเป็น 3 ส่วน ต้องใช้เส้นคั่น 2 เส้น ($= 3 - 1$)

มีดาว 5 ดวง ดังนั้น มีจุดให้เลือกวางเส้นคั่นได้ 4 ตำแหน่ง ($= 5 - 1$) ดังรูป



ดังนั้น เลือก 2 ตำแหน่ง จาก 4 ตำแหน่งนี้ เพื่อวางเส้นคั่น จะเลือกได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2!} = 6$ แบบ

จะได้สูตรแรกในเรื่องนี้คือ

แจกของที่เหมือนกัน n สิ่ง ให้คน r คน โดย
ได้คนละอย่างน้อย 1 ชิ้น จะทำได้ $\binom{n-1}{r-1}$ วิธี

เช่น แจกของ 6 สิ่งที่ซ้ำกัน ให้คน 3 คน ได้ $\binom{5}{2}$ แบบ

แจกของ 10 สิ่งที่ซ้ำกัน ให้คน 7 คน ได้ $\binom{9}{6}$ แบบ

อย่างไรก็ตาม ในกรณีที่โจทย์ไม่ได้ระบุว่า “ต้องได้อย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น” (คือ อาจมีบางคนไม่ได้ของ) จะยุ่งขึ้นนิดหน่อย
เพราะถ้าใช้เทคนิคแบบเดิม เท่ากับว่าคราวนี้เส้นคั่นจะอยู่ตำแหน่งเดียวกันได้ ซึ่งจะใช้สูตรแบบเดิมตรงๆไม่ได้

ถ้าจะนับแบบที่อาจมีคนไม่ได้ของ เราจะใช้วิธี “เพิ่มของให้คนละ 1 ชิ้น”

จำนวนแบบที่อาจมีคนไม่ได้ของ ก็จะกลายเป็นจำนวนแบบที่ต้องได้อย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น ที่เพิ่มของขึ้นเท่ากับจำนวนคน
แล้วก็จะใช้วิธีเดิมนับได้

เช่น ถ้าแบ่งของ 2 ชิ้นให้เด็ก 3 คน โดยอาจมีบางคนไม่ได้ของ จะสามารถแบ่งได้ 6 แบบ ดังตาราง
และจะเห็นว่า ทั้ง 6 แบบ สามารถจับคู่ได้กับตอน แบ่งของ 5 ชิ้นให้เด็ก 3 คน ที่ต้องได้ อย่างน้อยคนละ 1 ชิ้น
โดยการเพิ่มของให้คนละ 1 ชิ้น

	ด1	ด2	ด3		ด1	ด2	ด3	
แบ่งของ 2 ชิ้น ให้เด็ก 3 คน อาจมีบางคนไม่ได้	0	0	2		1	1	3	แบ่งของ 5 ชิ้น ให้เด็ก 3 คน ได้อย่างน้อยคนละชิ้น
	0	1	1		1	2	2	
	0	2	0		1	3	1	
	1	0	1		2	1	2	
	1	1	0		2	2	1	
	2	0	0		3	1	1	

เช่น แบ่งของ 7 ชิ้น แบ่งของ 11 ชิ้น ให้เด็ก 4 คน ให้เด็ก 4 คน อาจมีคนไม่ได้ ได้อย่างน้อยคนละชิ้น	แบ่งของ n ชิ้น แบ่งของ $n + r$ ชิ้น ให้เด็ก r คน ให้เด็ก r คน อาจมีคนไม่ได้ ได้อย่างน้อยคนละชิ้น
--	---

ดังนั้น

แจกของที่เหมือนกัน n สิ่ง ให้คน r คน โดย
อาจมีบางคนไม่ได้ จะทำได้ $\binom{n+r-1}{r-1}$ วิธี

แบบฝึกหัด

- ต้องการแจกลูกอมที่เหมือนกัน 10 เม็ด ให้เด็ก 8 คน โดยต้องได้รับคนละ 1 เม็ด จะสามารถแจกได้กี่แบบ
- แจกคอมพิวเตอร์ที่เหมือนกัน 6 เครื่อง ให้คน 3 คน โดยอาจมีบางคนไม่ได้รับ จะสามารถแจกได้กี่วิธี
- แจกสมุดที่เหมือนกัน 10 เล่ม ให้เพื่อน 3 คน โดยต้องได้รับคนละ 2 เล่มเป็นอย่างน้อย จะสามารถแจกได้กี่วิธี

4. สามารถสร้างจำนวนเต็มบวกที่ไม่เกิน 10,000 ที่ผลรวมของทุกหลักเป็น 9 ได้ทั้งหมดกี่แบบ

5. สามารถสร้างจำนวนเต็มบวก 5 หลัก ที่ผลรวมของทุกหลักเป็น 9 ได้ทั้งหมดกี่แบบ

ทบทวนความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็น

ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E หาได้จาก $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

แบบฝึกหัด

1. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกบอลสีขาว 4 ลูก และเป็นลูกบอลสีแดง 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้มา 6 ลูก นำมาจัดเรียงเป็นแถวตรง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 58)/9]

1. ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอล โดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว หรือ ท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดง เท่ากับ $\frac{11}{42}$
2. ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอล โดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว มากกว่า ความน่าจะเป็นที่ท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดง

2. ข้าวสารบรรจุถุงแล้วกองหนึ่งประกอบด้วย ข้าวหอมมะลิ 4 ถุง ข้าวเสาไห้ 3 ถุง ข้าวขาวตาแห้ง 2 ถุง และข้าวบัสมาตี 1 ถุง สุ่มหยิบข้าวจากกองนี้มา 4 ถุง ความน่าจะเป็นที่จะได้ข้าวครบทุกชนิด เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/37]

3. ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 5 ลูก สีเขียว 4 ลูก และสีเหลือง 3 ลูก ถ้า หยิบลูกแก้วจากถุงทีละลูก 3 ครั้งโดยไม่ใส่คืน แล้วความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกแก้ว ลูกที่หนึ่ง สอง และสาม เป็นสีแดง สีเขียว และสีเหลือง ตามลำดับเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-16]

4. กล่องใบหนึ่งบรรจุเสื้อยืด 13 สีๆละ 4 ตัว โดยที่ เสื้อยืดในแต่ละสีมีขนาด S, M, L และ XL ตามลำดับ สุ่มหยิบเสื้อจากกล่องมา 3 ตัวพร้อมๆกัน ความน่าจะเป็นที่จะได้เสื้อยืดมีสีเหมือนกัน 2 ตัว เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/19]

5. กิตติและสมาน กับเพื่อนๆรวม 7 คน ไปเที่ยวต่างจังหวัดด้วยกัน ในการค้างแรมที่มีบ้านพัก 3 หลัง หลังแรกพักได้ 3 คน ส่วนหลังที่สองและหลังที่สามพักได้หลังละ 2 คน ซึ่งแต่ละหลังมีความแตกต่างกัน พวกเขาจึงตกลงที่จะจับสลากว่าใครจะได้พักบ้านหลังใด ความน่าจะเป็นที่กิตติและสมานจะได้พักบ้านหลังเดียวกันในหลังที่หนึ่งหรือหลังที่สาม เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/38]

6. ในการจัดคน 12 คน (มี GAT และ PAT รวมอยู่ด้วย) นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม จงหาความน่าจะเป็นที่ GAT และ PAT ไม่ได้นั่งติดกัน [PAT 1 (ธ.ค. 54)/19]

7. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 10 ใบ แต่ละใบมีหมายเลข 0, 1, 2, ..., 9 บัตรละหนึ่งหมายเลข ถ้าหยิบบัตรจากกล่องพร้อมกัน 3 ใบ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรหมายเลขคู่ทุกใบ และมีแต้มรวมกันมากกว่า 10 มีค่าเท่ากับเท่าใด
[A-NET 50/1-18]

8. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 10 ใบ แต่ละใบเขียนหมายเลข $-4, -3, -2, \dots, 4, 5$ ใบละ 1 หมายเลข ถ้าสุ่มหยิบบัตร 2 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตรที่มีหมายเลขบนบัตรทั้งสองซึ่งมีผลคูณมากกว่าหรือเท่ากับ 0 เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-21]

9. จากตัวเลข 1, 2, 3, ..., 9 นำมาสร้างจำนวนห้าหลักใช้เลขซ้ำกันได้ ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนห้าหลักโดยที่ในแต่ละหลักเป็นตัวเลขที่แตกต่างกันเพียง 3 จำนวนเท่านั้น มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/15]

10. ในการโยนลูกเต๋า 2 ลูกหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้แต้มรวมเป็น 7 โดยที่มีลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้มไม่น้อยกว่า 4 เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-18]

11. ในการโยนลูกเต๋าสองลูกจำนวนหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทันสอง หารด้วย 4 ลงตัว เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/22]

12. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมๆกัน ความน่าจะเป็นที่ผลบวกของหน้าลูกเต๋าทันสองเท่ากับ 7 หรือผลคูณของหน้าลูกเต๋าทันสองเท่ากับ 12 เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/22]

13. ในการทอดลูกเต๋าสองลูกพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่หน้าลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม a และหน้าลูกเต๋าลูกหนึ่งขึ้นแต้ม b โดยที่ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{2}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/22]

14. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ สุ่มหาสับเซตของ A ที่มีสมาชิก 3 ตัว ความน่าจะเป็นที่จะได้สับเซต $\{a, b, c\} \subset A$ โดยที่ $a < b < c$ และ a, b, c เป็นลำดับเลขคณิต เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (มี.ค. 55)/21]

15. ให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ และให้ A เป็นสับเซตของ S โดยมีจำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 4 ความน่าจะเป็นที่จะได้เซต A โดยที่สมาชิกในเซต A จัดเรียงเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (พ.ย. 57)/8]

16. มีหนังสือที่แตกต่างกัน 5 เล่ม คือ หนังสือ ก หนังสือ ข หนังสือ ค หนังสือ ง และ หนังสือ จ สุ่มเลือกหนังสือเหล่านี้มาครั้งละ 3 เล่ม ความน่าจะเป็นที่จะได้หนังสือ ก หรือ หนังสือ ข เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/43]
17. กล้องไบหนึ่งบรรจุหลอดไฟ 12 หลอด เป็นหลอดชำรุด 3 หลอด ถ้าหยิบหลอดไฟจากกล้องมา 4 หลอด แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดชำรุดไม่เกิน 1 หลอด เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-17]
18. กล้องไบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 10 หลอด เป็นหลอดดี 8 หลอด และหลอดเสีย 2 หลอด สุ่มหยิบหลอดไฟขึ้นมาครั้งละ 1 หลอด 3 ครั้ง โดยที่ในการหยิบแต่ละครั้งให้ใส่คืนหลอดไฟลงไปในกล้องก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสีย 2 ครั้ง มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 51/1-18]

19. ในลิ้นชักมีถุงเท้าสีขาว 4 คู่ สีดำ 3 คู่ และสีน้ำเงิน 2 คู่ แต่ไม่ได้จัดเรียงไว้เป็นคู่ๆ ถ้าสุ่มหยิบถุงเท้ามา 2 ข้าง ความน่าจะเป็นที่จะได้ถุงเท้าสีเดียวกันเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/39]
20. ถุงใบหนึ่งบรรจุลูกกวาดรสสตรอเบอรี่ 5 ลูก รสช็อคโกแลต 4 ลูก รสกาแฟ และรสมินท์อย่างละ 2 ลูก หากสุ่มหยิบลูกกวาดจากถุงใบนี้มา 3 ลูก ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกกวาดต่างรสกันทั้งหมด เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/37]
21. ในคนกลุ่มหนึ่งประกอบด้วยชาย 6 คน และหญิงจำนวนหนึ่ง ความน่าจะเป็นที่เลือกกรรมการ 2 คน เป็นชายทั้งสอง เท่ากับ $\frac{1}{8}$ ความน่าจะเป็นที่จะเลือกกรรมการ 5 คนเป็นชายไม่น้อยกว่า 3 คน เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/15]

22. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ ในการสุ่มหยิบเลข n จำนวนพร้อมๆกันจากเซต $\{1, 2, \dots, 2n\}$ ถ้าความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่ทั้งหมดเท่ากับ $\frac{1}{20}$ แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เลขคู่เพียง 1 จำนวนเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 52)/39]

23. กำหนดให้ $A = \{(0, n) \mid n = 1, 2, \dots, 10\}$ และ $B = \{(1, n) \mid n = 1, 2, \dots, 10\}$
ในการเลือกจุดสองจุดที่แตกต่างกันจากเซต A และอีกหนึ่งจุดจากเซต B เพื่อเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมบนระนาบ ความน่าจะเป็นจะได้รูปสามเหลี่ยมที่มีพื้นที่ 1 ตารางหน่วย เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/38]

24. ให้ S เป็นเซตของจุด 10 จุดบนวงกลมวงหนึ่ง ซึ่งมีสมบัติดังนี้
เมื่อลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด 2 จุดใดๆใน S
จะมีเพียง 3 เส้นเท่านั้นที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมวงนี้
ถ้าสร้างรูปสามเหลี่ยมโดยเลือกจุด 3 จุดใน S มาเป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ความน่าจะเป็นที่จะได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-22]

25. มีถุงยังชีพที่แตกต่างกัน 5 ถุง ต้องการแจกให้ครอบครัวที่ภูมิลำเนา 4 ครอบครัว ครอบครัวละไม่เกิน 2 ถุง ความน่าจะเป็นที่ครอบครัวของสมชายซึ่งเป็นหนึ่งในสี่ครอบครัวนั้นไม่ได้รับของแจกเลยเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 54)/22*]

26. โยนเหรียญบาท(เที่ยงตรง)หนึ่งเหรียญ จำนวน 10 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่ได้หัวอย่างน้อย 2 ครั้งติดกันเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 54)/21]

แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์

ในกรณีที่มีหลายเหตุการณ์ เราสามารถใช้แผนภาพเวนน์ – ออยเลอร์ ในเรื่องเซตมาช่วยได้
โดยความน่าจะเป็นของทุกส่วนรวมกัน จะเท่ากับ 1 เสมอ

แบบฝึกหัด

27. ในการสอบถามนักเรียน จำนวน 100 คน ปรากฏว่า มี 50 คน ชอบวิชาคณิตศาสตร์ มี 40 คน ชอบวิชาฟิสิกส์ มี 33 คน ชอบวิชาภาษาอังกฤษ มี 5 คน ชอบทั้งสามวิชา มี 10 คน ชอบวิชาภาษาอังกฤษอย่างเดียว มี 12 คน ชอบวิชาฟิสิกส์อย่างเดียว และมี 20 คน ชอบวิชาคณิตศาสตร์และวิชาฟิสิกส์
ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 53)/22]

1. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งไม่ชอบทั้งสามวิชา เท่ากับ 0.15
2. ความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งชอบวิชาคณิตศาสตร์อย่างเดียว เท่ากับ 0.40

28. กำหนดให้ S เป็นแซมเปิลสเปซ และ A, B เป็นเหตุการณ์ใดๆใน S ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้องบ้าง
[PAT 1 (มี.ค. 53)/20]

1. $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B')$
2. ถ้า $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A \cup B') = 0.7$ แล้ว $P(A - B) = 0.4$

29. ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง และ A, B และ C เป็นเหตุการณ์

โดยที่ $A \cup B \cup C = S$ และ $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$

ถ้า $P(A \cup B) = 0.7$ และ $P(B \cup C) = 0.5$ แล้ว $P(A' \cap C')$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-3]

30. กำหนด A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ และกำหนดให้ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ถ้า $P(B) = 0.30$, $P(A \cap B) = 0.06$ และ $P((A \cup B) - (A \cap B)) = 0.38$ แล้วค่าของ $P(A - B)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/45]

31. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง ถ้า $P(B - A) = 0.2$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A' \cup B) = 0.8$ แล้ว จงหา $P(A \cup B')$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/20]

32. กำหนดให้ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ โดยที่ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{5}{8}$ และ $P(A' \cap B') = \frac{1}{4}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 56)/21]
1. $P(A' \cup B) = \frac{5}{8}$
 2. $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$

สมบัติของความน่าจะเป็น

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้เรียนวิธีหาความน่าจะเป็นโดยใช้แผนภาพเวนน – ออยเลอร์มาแล้ว

ในหัวข้อนี้ เราจะกล่าวถึงอีกวิธี ซึ่งจะใช้สูตรในการคำนวณ แทนที่จะใช้แผนภาพ

สูตรแรก คือสูตรการหา $P(E')$

เหตุการณ์ E' ก็คือเหตุการณ์ที่ตรงข้ามกับ E ซึ่งสองเหตุการณ์นี้ จะ “เติมเต็ม” ซึ่งกันและกันเสมอ

และเนื่องจาก ความน่าจะเป็นของทุกเหตุการณ์ จะรวมกันได้ 1

ดังนั้นสูตร คือ

$$P(E') = 1 - P(E)$$

เช่น ถ้าความน่าจะเป็นที่จะสอบตก คือ $\frac{2}{7}$ จะได้ความน่าจะเป็นที่จะสอบผ่าน $= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

ถ้าความน่าจะเป็นที่หุ้นจะขึ้น คือ $\frac{1}{5}$ จะได้ความน่าจะเป็นที่หุ้นจะไม่ขึ้น $= 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ เป็นต้น

สูตรที่สอง คือสูตรหา $P(E_1 \cap E_2)$ สูตรนี้จะเป็นสูตรใหม่ ไม่เคยเรียนมาก่อน

สูตรคือ

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) &= P(E_1) \cdot P(E_2|E_1) \\ &= P(E_2) \cdot P(E_1|E_2) \end{aligned}$$

สัญลักษณ์ $E_2|E_1$ หมายถึง เหตุการณ์ที่เกิด E_2 “โดยมีเงื่อนไขว่า E_1 ได้เกิดขึ้นแล้ว”

$P(E_2|E_1)$ จะคล้ายๆ กับ $P(E_2)$ กล่าวคือ

$P(E_2)$ = ความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุการณ์ E_2

$P(E_2|E_1)$ = ความน่าจะเป็นที่เกิดเหตุการณ์ E_2 “โดยมีเงื่อนไขว่า E_1 ได้เกิดขึ้นแล้ว”

ความแตกต่างของ $P(E_2|E_1)$ กับ $P(E_2)$ จะอยู่ที่ “โดยมีเงื่อนไขว่า E_1 ได้เกิดขึ้นแล้ว”

เช่น ถ้ามีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีเหลือง 4 ลูก หยิบลูกบอล 2 ครั้งแบบไม่ใส่คืน

$$\rightarrow P(\text{ครั้งที่สองได้สีแดง} \mid \text{ครั้งแรกได้สีแดง}) = \frac{2}{6}$$

$$\rightarrow P(\text{ครั้งที่สองได้สีแดง} \mid \text{ครั้งแรกได้สีเหลือง}) = \frac{3}{6} \quad \text{ เป็นต้น}$$

ตัวอย่าง มีลูกบอลสีแดง 3 ลูก สีเหลือง 5 ลูก สีเขียว 2 ลูก หยิบลูกบอลสองครั้งโดยไม่ใส่คืน จงหาความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้สีเหลืองทั้งสองครั้ง

วิธีทำ ให้ E_1 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งแรกได้สีเหลือง , E_2 เป็นเหตุการณ์ที่หยิบครั้งที่สองได้สีเหลือง

โจทย์ข้อนี้ ต้องการหา $P(E_1 \cap E_2)$ นั่นเอง ซึ่งจากสูตร จะเท่ากับ $P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$

$$P(E_1) \text{ คือ ความน่าจะเป็นที่หยิบครั้งแรกได้สีเหลือง } = \frac{5}{3+5+2} = \frac{5}{10}$$

$P(E_2|E_1)$ คือ ความน่าจะเป็นที่หยิบครั้งที่สองได้สีเหลือง โดยมีเงื่อนไขว่าหยิบครั้งแรกได้สีเหลือง

ถ้าหยิบครั้งแรกได้สีเหลือง จะเหลือลูกบอลสีเหลือง 4 ลูก

จากลูกบอลทั้งหมดที่เหลือในถัง $3 + 4 + 2 = 9$ ลูก ดังนั้น จะได้ $P(E_2|E_1) = \frac{4}{9}$

$$\text{ดังนั้น } P(E_1 \cap E_2) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$$

ในกรณีที่ E_1 กับ E_2 ไม่เกี่ยวอะไรกัน เราจะกล่าวว่า E_1 กับ E_2 “เป็นอิสระต่อกัน”

ซึ่งในกรณีนี้ $P(E_2|E_1)$ จะเท่ากับ $P(E_2)$

เช่น เหตุการณ์รถติด กับเหตุการณ์โยนเหรียญออกหัว เป็นอิสระต่อกัน

ดังนั้น $P(\text{รถติด} | \text{โยนเหรียญออกหัว})$ จะเท่ากับ $P(\text{รถติด})$

เหตุการณ์โยนเหรียญครั้งแรกออกหัว กับ เหตุการณ์โยนเหรียญครั้งที่สองออกหัว เป็นอิสระต่อกัน

(การที่โยนเหรียญครั้งแรกได้หัว ไม่ได้ทำให้โยนเหรียญที่สองได้หัวยากขึ้น)

ดังนั้น $P(\text{ครั้งที่สองออกหัว} | \text{ครั้งแรกออกหัว})$ จะเท่ากับ $P(\text{ครั้งที่สองออกหัว})$ เป็นต้น

ดังนั้น ถ้า E_1 กับ E_2 เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2|E_1)$
 $= P(E_1) \cdot P(E_2)$

จะได้สูตรคือ

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

(เมื่อ E_1 กับ E_2 เป็นอิสระต่อกัน)

ตัวอย่าง โยนเหรียญสิบครั้ง จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้หัวหมดทุกครั้ง

วิธีทำ จะเห็นว่าการโยนเหรียญแต่ละครั้ง ไม่ขึ้นต่อกัน

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(\text{ครั้งแรกได้หัว} \cap \dots \cap \text{ครั้งที่สิบได้หัว}) &= P(\text{ครั้งแรกได้หัว}) \cdot \dots \cdot P(\text{ครั้งที่สิบได้หัว}) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2^{10}} \end{aligned}$$

#

ส่วนสูตรที่เหลือ จะมาจากสูตรจำนวนสมาชิกในเรื่องเซต ดังนี้

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2) &= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) \\ P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) \\ &\quad + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\ P(E_1 - E_2) &= P(E_1) - P(E_1 \cap E_2) \end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $P(E_1) = 0.2$, $P(E_2) = 0.6$ โดยที่ E_1 และ E_2 เป็นอิสระต่อกัน จงหา $P(E_1')$, $P(E_2')$,

$P(E_1 \cap E_2)$, $P(E_1 \cup E_2)$ และ $P(E_1 - E_2)$

วิธีทำ $P(E_1') = 1 - P(E_1)$

$$= 1 - 0.2 = 0.8$$

$$P(E_2') = 1 - P(E_2)$$

$$= 1 - 0.6 = 0.4$$

เนื่องจาก E_1 และ E_2 เป็นอิสระต่อกัน ดังนั้น $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$

$$= 0.2 \times 0.6 = 0.12$$

$$\text{จากสูตร } P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= 0.2 + 0.6 - 0.12 = 0.68$$

$$\text{และสุดท้าย } P(E_1 - E_2) = P(E_1) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= 0.2 - 0.12 = 0.08$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาความน่าจะเป็นที่จะตอบข้อสอบแบบ 4 ตัวเลือก จำนวน 10 ข้อ แล้วผิดทุกข้อ
2. ถ้าความน่าจะเป็นที่หุ่นขึ้น เท่ากับ $\frac{1}{3}$ ความน่าจะเป็นที่ขึ้นสอบตกเท่ากับ $\frac{1}{4}$ จงหาความน่าจะเป็นที่หุ่นขึ้น และขึ้นสอบผ่าน

ทบทวนความรู้พื้นฐาน

- | | | | |
|----------|--------|-----------|--------|
| 1. 6 | 2. 6 | 3. 16, 64 | 4. 35 |
| 5. 4 | 6. 156 | 7. 44 | 8. 9 |
| 9. 106 | 10. 25 | 11. 4 | 12. 22 |
| 13. 1440 | 14. 30 | 15. 528 | 16. 22 |
| 17. 200 | 18. 42 | 19. 1806 | |

การเรียงสับเปลี่ยน

- | | | | |
|----------|-------|------|--------|
| 1. 1. 56 | 2. 24 | 3. 1 | 4. n |
| 2. 120 | | | |

เรียงของเป็นวงกลม

- | | | |
|--------|-------|-------|
| 1. 6 | 2. 48 | 3. 72 |
| 4. 480 | | |

ต้องการแบบที่ ธงไทย ไม่อยู่ติดกัน แต่แบบนี้ลำบาก

เราจะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม คือ นับแบบที่ ธงไทยอยู่ติดกันแทน แล้วเอาทั้งหมด ตั้งลบ

นับแบบที่ ธงไทย อยู่ติดกัน เราจะเอาธงไทยสองธง มัดเป็นธงใหม่ 1 ผืน

ก็จะกลายเป็นว่า มีธง แค่ 6 ผืน เอามาเรียงเป็นวงกลม จะเรียงได้ 5! วิธี

แต่ในมัดธงไทย จะได้ว่า ธงไทยยังสลับกันในมัดได้อีก 2! แบบ ดังนั้น จำนวนแบบที่ธงไทยอยู่ติดกัน จึงมี 5!2! แบบ

ต่อมา เราจะนับจำนวนแบบทั้งหมด มาตั้งลบ มีธง 7 ผืน เรียงเป็นวงกลมได้ 6! แบบ

ดังนั้น คำตอบคือ $6! - 5!2! = 480$ แบบ

- | | |
|-------|--------|
| 5. 96 | 6. 192 |
|-------|--------|

การจัดหมู่

- | | | | |
|--------------------|---------------------------------|---|-------|
| 1. 1. 4 | 2. 45 | 3. 21 | 4. 8 |
| 2. $\binom{52}{4}$ | 3. $\binom{52}{3}\binom{49}{3}$ | 4. $\binom{52}{13}\binom{39}{13}\binom{26}{13}$ | 5. 90 |
| 6. 54 | 7. 600 | | |
| 8. 288 | | | |

โจทย์ให้ว่ามีกรรมการ 3 คน แต่ 2 คนต้องมาจากอาชีพเดียวกัน

แปลว่าในกรรมการทั้ง 3 คน จะมีแค่ 2 อาชีพ (อาชีพ A อยู่ 2 คน และ อาชีพ B อีก 1 คน)

ขั้นตอนที่ 1 เลือกว่า อาชีพ A คืออาชีพอะไรจาก 4 อาชีพ $\rightarrow$ เลือกได้ 4 แบบ

ขั้นตอนที่ 2 เลือก 2 คน จากอาชีพ A ที่มี 4 คน มาเป็นกรรมการ $\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ แบบ

ขั้นตอนที่ 3 เลือกว่า อาชีพ B คืออาชีพอะไร จากอาชีพที่เหลือ 3 อาชีพ ที่ไม่ใช่อาชีพ A $\rightarrow$ เลือกได้ 3 แบบ

ขั้นตอนที่ 4. เลือก 1 คน จากอาชีพ B ที่มี 4 คน มาเป็นกรรมการ $\rightarrow$ เลือกได้ 4 แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบของคณะกรรมการ = $4 \times 6 \times 3 \times 4 = 288$ แบบ

9. 108

มีผู้แทน 3 คน ต้องมาจากต่างพรรค แสดงว่า จะมี 3 พรรคจาก 4 พรรค ที่ได้เป็นผู้แทน $\rightarrow \binom{4}{3}$

พอได้ว่า 3 พรรคไหนจะได้เป็นผู้แทนแล้ว ก็มาเลือกในพรรค ว่าจะเอาคนไหน

แต่ละพรรค ต้องเลือก 1 คน จาก 3 คนในพรรค และต้องคูณ 3 ครั้ง เพราะมี 3 พรรค

$$\text{ได้} = \binom{4}{3} \binom{3}{1} \binom{3}{1} \binom{3}{1} = 108$$

10. 95

11. 45

12. 49

13. 40

14. 40

15. $\binom{8}{3} 2^3 4^5$

16. 12

17. 36

18. 126

19. $\binom{6}{2} + 6 = 21$

20. 21

21. 56

22. 352

23. 135

24. 110

25. 36

26. 270

27. 1001

28. 120

29. 26

30. 340

การจัดหมู่ของซ้ำ

1. 1. 4

2. 10

3. 23

2. 1. 11

2. 43

การเรียงสับเปลี่ยนของซ้ำ

1. 1. 13

2. 42

3. 97

2. 1. 114

2. 476

3. 204

ทฤษฎีบททวินาม

1. 1. $112x^6y^2$ 2. $-160x^3y^3$ 3. $-20xy^9$ 4. $216x^4y^2$

2. 1. 84

2. -56

3. 45

4. -448

5. 160

6. 60

3. 6

สตาร์ แอนด์ บาร์

1. 36

2. 28

3. 15

ก่อนอื่น แจกให้ก่อนเลย คนละ 1 เล่ม จะเหลือสมุด 7 เล่ม

งานที่เหลือคือ ต้องแจกสมุดที่เหลือ 7 เล่ม ให้ได้ “คนละ 1 เล่มเป็นอย่างน้อย” (เพราะถ้ารวมกับ 1 เล่มที่ได้ไปแล้ว จะได้ “คนละ 2 เล่ม เป็นอย่างน้อย” ตามเงื่อนไขของโจทย์)

ดังนั้น คำตอบของข้อนี้ จะเท่ากับ จำนวนแบบในการแจกหนังสือ 7 เล่ม ให้คน 3 คน โดยได้คนละ 1 เล่มเป็นอย่างน้อย

$$= \binom{7-1}{3-1} = 15$$

4. $\binom{9+4-1}{4-1} = 220$ 5. $\binom{9+4-1}{5-1} = 495$

ทบทวนความน่าจะเป็น

- | | | | |
|------------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. 2 | 2. $\frac{4}{35}$ | 3. $\frac{1}{22}$ | 4. $\frac{72}{425}$ |
| 5. $\frac{4}{21}$ | 6. $\frac{9}{11}$ | 7. $\frac{1}{20}$ | 8. $\frac{5}{9}$ |
| 9. $\frac{1400}{6561}$ | 10. $\frac{1}{6}$ | 11. $\frac{15}{36}$ | 12. $\frac{2}{9}$ |
| 13. $\frac{1}{12}$ | 14. $\frac{9}{35}$ | 15. $\frac{2}{91}$ | 16. 0.9 |
| 17. $\frac{42}{55}$ | 18. $\frac{12}{125}$ | 19. $\frac{49}{153}$ | 20. $\frac{58}{143}$ |
| 21. $\frac{22}{91}$ | 22. $\frac{9}{20}$ | 23. $\frac{8}{45}$ | 24. 0.2 |
| 25. 0.15 | 26. $\frac{55}{64}$ | 27. - | 28. 1 |
| 29. 0.2 | 30. 0.14 | 31. 0.8 | 32. 1, 2 |

สมบัติของความน่าจะเป็น

1. $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ 2. $\frac{1}{4}$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร