
เลขยกกำลัง

สารบัญ

รากที่ n	1
ค่าหลักรากที่ n	2
การ บวก ลบ คูณ หาร รุท.....	7
รุทสองของจำนวนที่ติดรุท.....	16
เลขยกกำลัง.....	19
สมการเลขชี้กำลัง.....	26
อสมการเลขชี้กำลัง.....	33

รากที่ n

รากที่ n ของ x คือ จำนวนที่ยกกำลัง n แล้วได้ x

เช่น รากที่ 2 ของ 16 $\rightarrow$ อะไร $^2 = 16 \rightarrow 4$ กับ -4

รากที่ 2 ของ $-16 \rightarrow$ อะไร $^2 = -16 \rightarrow$ ไม่มี (รากที่ 2 ของ -16 หาค่าไม่ได้)

รากที่ 3 ของ 8 $\rightarrow$ อะไร $^3 = 8 \rightarrow 2$

รากที่ 3 ของ $-8 \rightarrow$ อะไร $^3 = -8 \rightarrow -2$

สรุป

รากที่คู่ ของจำนวนบวก $\rightarrow$ มีสองจำนวน (บวกกับลบ)
 รากที่คู่ ของจำนวนลบ $\rightarrow$ หาค่าไม่ได้
 รากที่คี่ ของจำนวนบวก $\rightarrow$ มีจำนวนเดียว และเป็นบวก
 รากที่คี่ ของจำนวนลบ $\rightarrow$ มีจำนวนเดียว และเป็นลบ

แบบฝึกหัด

1. จงเติมคำตอบที่ถูกต้องลงในช่องว่าง

1. รากที่ 2 ของ 64 คือ

2. รากที่ 9 ของ 1 คือ

3. รากที่ 4 ของ -16 คือ

4. รากที่ 3 ของ -1 คือ

5. รากที่ 2 ของ 25 คือ

6. รากที่ 4 ของ 1 คือ

7. รากที่ 5 ของ -1 คือ

8. รากที่ 2 ของ -1 คือ

9. จำนวนที่ยกกำลัง 2 ได้ 16 คือ

10. จำนวนที่ยกกำลัง 3 ได้ 8 คือ

11. จำนวนที่ยกกำลัง 4 ได้ -1 คือ

12. จำนวนที่ยกกำลัง 5 ได้ -32 คือ

2. ถ้า $(p - 2)^2 = 25$ และ $(q + 1)^2 = 81$ แล้ว ค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $p - 2q$ เท่ากับเท่าใด

[O-NET 54/26]

ค่าหลักรากที่ n

หัวข้อนี้ คล้ายหัวข้อที่แล้ว ต่างกันแค่ว่า “ค่าหลัก” โผล่มา

จากหัวข้อที่แล้ว รากที่คู่ของจำนวนบวก จะมีสองจำนวน (บวกกับลบ) เราจะเรียกรากที่เป็นบวกว่าราก “ค่าหลัก”

เช่น รากที่สองของ 16 คือ 4 และ -4

แต่ “ค่าหลักรากที่สอง” ของ 16 คือ 4 แค่จำนวนเดียว

ส่วนรากที่คี่ จะมีจำนวนเดียวอยู่แล้ว จำนวนนั้นเลยได้เป็น “ค่าหลัก” โดยอัตโนมัติ

เช่น รากที่สามของ 8 คือ 2

รากที่สามของ -8 คือ -2

ค่าหลักรากที่สามของ 8 ก็คือ 2

ค่าหลักรากที่สามของ -8 ก็คือ -2

“ค่าหลักรากที่ n ” จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $\sqrt[n]{}$ (อ่านกว่า “กรณฑ์อันดับที่ n ” หรือ “รูทที่ n ”)

ในกรณีที่ $n = 2$ มักจะละ n ไว้ในฐานที่เข้าใจ เช่น $\sqrt{16}$ จะหมายถึง $\sqrt[2]{16}$ นั่นเอง

เช่น $\sqrt{16} = 4$

$\sqrt{-16}$ = หาไม่ได้

$\sqrt[3]{8} = 2$

$\sqrt[3]{-8} = -2$

$\sqrt[3]{4^3} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

ตัวอย่างที่แสดง ตัวเลขไม่เยอะ ทำให้คิดง่าย แต่ถ้าตัวเลขมากๆ ก็ต้องใช้วิธี

เมื่อ x มีค่าเยอะๆ ถ้าจะหา $\sqrt[n]{x}$ เรามักจะใช้วิธีแยกตัวประกอบ x โดยการตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

- ถ้าตัวประกอบซ้ำครบ n ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ได้ 1 ตัว
- ถ้าตัวประกอบที่ซ้ำไม่ถึง n ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ไม่ได้ ต้องติดอยู่ในเครื่องหมายราก

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt[3]{1728}$

วิธีทำ เอา 1728 มาแยกตัวประกอบโดยตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

ข้อนี้ หารากที่ 3 ดังนั้น ตัวประกอบซ้ำ 3 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

$$\begin{array}{l}
 \text{ได้ 2 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{l} 2 \overline{) 1728} \\ 2 \overline{) 864} \\ 2 \overline{) 432} \end{array} \right. \\
 \text{ได้ 2 อีกตัว} \left\{ \begin{array}{l} 2 \overline{) 216} \\ 2 \overline{) 108} \\ 2 \overline{) 54} \end{array} \right. \\
 \text{ได้ 3 อีกตัว} \left\{ \begin{array}{l} 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \overline{) 3} \end{array} \right.
 \end{array}$$

จะได้คำตอบคือ $2 \times 2 \times 3 = 12$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{588}$

วิธีทำ เอา 588 มาแยกตัวประกอบโดยตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆ

ตัวประกอบซ้ำ 2 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

$$\begin{array}{r} \text{ได้ 2 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 2 \overline{) 588} \\ 2 \overline{) 294} \\ 3 \overline{) 147} \end{array} \right. \\ \text{ได้ 7 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array} \right. \end{array}$$

จะเห็นว่า 2 กับ 7 มีซ้ำครบคู่ แต่ 3 ซ้ำไม่ครบสองตัว ดังนั้น คำตอบคือ $2 \times 7 \times \sqrt{3} = 14\sqrt{3}$

#

หมายเหตุ: ถ้าเห็นตัวเลขอยู่หน้ารูท แปลว่ามันกำลัง “คูณ” กับรูทอยู่

$$\text{กล่าวคือ } 14\sqrt{3} = 14 \times \sqrt{3} = \sqrt{3} \times 14$$

แต่ $14\sqrt{3}$ ไม่เหมือนกับ $\sqrt[14]{3}$ นะ

14 คูณรากที่สองของ 3 ค่าหลักรากที่ 14 ของ 3

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt[3]{-500}$

วิธีทำ ข้อนี้ ถ้าถามรากที่คู่ของจำนวนลบ จะยังพหหาได้ (แต่ถ้าถามรากที่คู่ของจำนวนลบ จะหาไม่ได้)

จากหัวข้อที่แล้ว รากที่คู่ของจำนวนลบ จะได้คำตอบเป็นจำนวนลบ

ดังนั้น วิธีทำคือ เราจะทำโดยไม่สนใจเครื่องหมายลบ แต่ตอนสุดท้าย เราจะเติมเครื่องหมายลบเค้าไปก่อนตอบ

ข้อนี้หารากที่ 3 นั่นคือ ตัวประกอบซ้ำ 2 ตัว จะกลายเป็นผลลัพธ์ 1 ตัว

$$\begin{array}{r} \text{ได้ 5 หนึ่งตัว} \left\{ \begin{array}{r} 2 \overline{) 500} \\ 2 \overline{) 250} \\ 5 \overline{) 125} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array} \right. \end{array}$$

จะเห็นว่า 2 ได้ไม่ครบสามตัว ดังนั้น ได้ตัวเลขคำตอบ คือ $5\sqrt[3]{2 \times 2} = 5\sqrt[3]{4}$

แต่เนื่องจากรากที่คู่ของจำนวนลบ ต้องได้จำนวนลบ ดังนั้น คำตอบคือ $-5\sqrt[3]{4}$

#

จะเห็นว่า ต้องจับคู่ครบ n ตัว จึงจะสามารถโยนออกมานอก $\sqrt[n]{\quad}$ ได้ 1 ตัว

ทำนองกลับกัน ถ้าเราจะหัดตัวนอก $\sqrt[n]{\quad}$ กลับเข้าไปข้างใน จะต้องแตกซ้ำ n ตัว

$$\text{เช่น } 2\sqrt{3} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = \sqrt{12}$$

$$3\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3 \times 5} = \sqrt[3]{135}$$

$$2\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = \sqrt[4]{32}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{\frac{6}{2 \times 2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

ตัวอย่าง จงเรียงลำดับจำนวนต่อไปนี้ จากมากไปหาน้อย $3\sqrt{5}$, $4\sqrt{3}$, $5\sqrt{2}$

วิธีทำ ข้อนี้ มีทั้งตัวเลขหน้ารากและหลังราก ทำให้เปรียบเทียบยาก

ดังนั้น เราจะหัดตัวเลขหน้าราก กลับเข้าไปอยู่หลังราก ดังนี้

$$3\sqrt{5} = \sqrt{3 \times 3 \times 5} = \sqrt{45}$$

$$4\sqrt{3} = \sqrt{4 \times 4 \times 3} = \sqrt{48}$$

$$5\sqrt{2} = \sqrt{5 \times 5 \times 2} = \sqrt{50}$$

เนื่องจาก $\sqrt{45} < \sqrt{48} < \sqrt{50}$ ดังนั้น $3\sqrt{5} < 4\sqrt{3} < 5\sqrt{2}$

#

ถ้าต้องการดึง “ตัวแปร” ออกมาจาก $\sqrt[n]{\quad}$ ก็ยังใช้วิธีเดิม คือ ตัวแปรเข้าครบ n ตัว ดึงออกมาเป็น 1 ตัว

สิ่งที่ต้องระวัง คือ ในกรณีที่ n เป็นเลขคู่ ผลลัพธ์จะเป็นลบไม่ได้

ดังนั้น เราต้องใส่เครื่องหมาย ค่าสัมบูรณ์ เพื่อให้ผลลัพธ์เป็นบวกเสมอ

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \sqrt{a^7} &= |a^3|\sqrt{a} & \sqrt{\frac{12x^3y^5}{z^4}} &= \frac{2|x|y^2}{z^2}\sqrt{3xy} & \text{ไม่ต้องเอา } z^4 \text{ ไว้ในค่าสัมบูรณ์ก็ได้} \\ \sqrt{x^2} &= |x| & \sqrt[4]{x^{12}y^{15}z^{16}} &= |x^3y^3|(z^4)(\sqrt[4]{y^3}) & \text{เพราะ } z^4 \text{ เป็นบวกตลอดอยู่แล้ว} \end{aligned}$$

แต่ถ้า n เป็นเลขคี่ ก็ทำเหมือนปกติ ไม่มีอะไรต้องระวัง

$$\text{เช่น } \sqrt[3]{a^4} = a\sqrt[3]{a} \qquad \sqrt[3]{a^6b^5} = a^2b\sqrt[3]{b^2}$$

$$\sqrt[5]{a^{13}b^{15}} = a^2b^3\sqrt[5]{a^3} \qquad \sqrt[3]{\frac{a^7b^{12}}{c^3}} = \frac{a^2b^4}{c} \cdot \sqrt[3]{a}$$

หมายเหตุ: คนส่วนใหญ่มักคิดว่า $\sqrt{x^2} = x$ ซึ่งจะถูกต้องเฉพาะเมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์เท่านั้น

ประโยคที่ถูกต้องจริงๆ คือ $\sqrt{x^2} = |x|$ ตามที่แสดงในตัวอย่างข้างต้น

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดถูกต้อง

1. $\sqrt[3]{(-3)^3} = -3$

2. $\sqrt[4]{(-4)^4} = -4$

3. $\sqrt[5]{-2}$ หาค่าไม่ได้

4. $\sqrt{x^2} = x$

5. $\sqrt{x^2} = x$ เมื่อ $x \geq 0$

6. $\sqrt{x^4} = x^2$

2. จงหาผลสำเร็จของค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sqrt[4]{81}$

2. $\sqrt[3]{216}$

3. $\sqrt[5]{-243}$

4. $\sqrt[3]{-432}$

5. $\sqrt{1764}$

6. $\sqrt[3]{10125}$

7. $\sqrt{(-17)^2}$

8. $\sqrt{a^{10}b^4}$

9. $\sqrt{\frac{8x^5y^6}{z^7}}$

10. $\sqrt[2n+1]{x^{2n+1}}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

3. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และ n เป็นจำนวนคู่บวก ข้อใดถูกต้องบ้าง [O-NET 53/9]

1. $(\sqrt[n]{a})^n = |a|$

2. $\sqrt[n]{a^n} = |a|$

4. $(|4\sqrt{3} - 5\sqrt{2}| - |3\sqrt{5} - 5\sqrt{2}| + |4\sqrt{3} - 3\sqrt{5}|)^2$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 53/8]

การ บวก ลบ คูณ หาร ราก

จำนวนที่ติดราก จะบวกลบกันได้ เมื่อส่วนที่เป็นรากของทั้งสองตัว เหมือนกัน

เช่น $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ บวกกันได้ เพราะส่วนที่เป็นรากเท่ากัน เท่ากับ $\sqrt{5}$

$2\sqrt{5} + 4\sqrt{2}$ บวกกันไม่ได้ เพราะตัวแรกเป็น $\sqrt{5}$ แต่ตัวหลังเป็น $\sqrt{2}$

$2\sqrt{5} - 3\sqrt[3]{5}$ ลบกันไม่ได้ เพราะตัวตั้งเป็น $\sqrt{5}$ แต่ตัวลบเป็น $\sqrt[3]{5}$

ในกรณีที่บวกลบกันได้ ผลลัพธ์จะได้จากการเอาตัวเลขหน้ารากมาบวกลบกัน (ถ้าไม่มีตัวเลขหน้าราก ให้ถือว่าเป็น 1)

เช่น $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

$\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2}$

$2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} + \sqrt{3} =$ รวมกันไม่ได้ $= \sqrt{2} + \sqrt{3}$

$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2} = 4\sqrt{2} + \sqrt{3}$

ในกรณีที่บวกลบกันไม่ได้ ให้ลองพยายามจัดรูปดูก่อน โดยจะมีวิธีจัดคือ

- หดตัวเลขเข้าออกราก

เช่น $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt{50} = \sqrt{2 \times 5 \times 5} = 5\sqrt{2}$

$\sqrt{12} = \sqrt{2 \times 2 \times 3} = 2\sqrt{3}$ เป็นต้น

- $\sqrt[n]{(\quad)^m} \rightarrow$ คูณหรือหาร m และ n ด้วยตัวเลขที่เท่ากันได้ (เหมือนตัดเศษส่วน)

เช่น $\sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^2}$

$\sqrt[5]{5^6} = \sqrt[4]{5^3}$

$\sqrt[5]{2^2} = \sqrt[3]{2}$

$\sqrt[4]{3^2} = \sqrt{3}$

$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2}$

$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8}$ เป็นต้น

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt[4]{4}$

วิธีทำ ดูเผินๆ ข้อนี้เหมือนรวมกันไม่ได้ แต่ถ้าดูดีๆ จะพบว่า $\sqrt{8} = \sqrt{2 \times 2 \times 2} = 2\sqrt{2}$

$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3 \times 3} = 3\sqrt{2}$

$\sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

ดังนั้น $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt[4]{4} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{2}$

$= (2 + 3 - 1)\sqrt{2}$

$= 4\sqrt{2}$

#

สำหรับการคูณจำนวนติดราก จะคูณกันได้เมื่อ “อันดับของรากเท่ากัน”

เช่น $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}$ คูณกันได้เลย เพราะเป็นรากอันดับที่ 2 เหมือนกัน

$2\sqrt{5} \times 4\sqrt[3]{2}$ ตัวแรกเป็นรากที่สอง แต่ตัวหลังเป็นรากที่สาม ยังคูณกันไม่ได้ (ต้องจัดรูปให้อันดับรากเท่ากันก่อน)

ในกรณีที่อันดับรากเท่ากัน ให้เอาตัวนอกรากคูณตัวนอกราก และ ตัวในรากคูณตัวในราก

ถ้าตัวในราก คูณกันแล้วเกิด ซ้ำมากพอ ก็จับกลุ่มดึงออกไปนอกรากได้

เช่น $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$

$$2\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 6\sqrt{2 \times 6} = 6\sqrt{2 \times 2 \times 3} = 12\sqrt{3}$$

$$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = \sqrt{3 \times 3} = 3$$

$$(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 4$$

ถ้าอันดับรากไม่เท่ากัน ให้ลองแปลง $\sqrt[n]{(\quad)^m}$ โดย คูณหรือหาร m กับ n ด้วยตัวเลขที่เท่ากันก่อน

เช่น $\sqrt{2} \times \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \times \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$

$$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{2^3} \times \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{72} \quad \text{เป็นต้น}$$

ถ้าตัวที่คูณกัน มีการบวกกันอยู่ด้วย ให้เราใช้วิธีกระจาย เหมือนตอนคูณพหุนาม

เช่น $(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - \sqrt{3} \times 3$
 $= 8 + 2\sqrt{3} - 3 = 5 + 2\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6} + \sqrt{6} + 2$$

 $= 5 + 2\sqrt{6}$

$$(5 + 2\sqrt{2})(5 - 2\sqrt{2}) = 25 - 10\sqrt{2} + 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \times 2$$

 $= 25 - 8 = 17$

สำหรับการหารจำนวนติดราก ให้ทำเหมือนคูณ คือ ตัวหน้าราก ก็หารกับตัวหน้าราก ส่วนตัวในราก ก็หารกับตัวในราก

เช่น $\frac{8\sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$

$$3\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{3}$$

$$\frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{6\sqrt[3]{3}}{2\sqrt[3]{15}} = \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$$

แต่ในเรื่องการหาร จะมีสิ่งที่ต้องทำเพิ่มคือ ต้องจัดรูปผลลัพธ์ให้ “ตัวส่วนไม่ติดราก”

เพราะตัวติดราก มักจะเป็นตัวเลขไม่ลงตัว ถ้าเป็นตัวส่วน จะคิดเลขลำบากกว่าเป็นเศษ

วิธีจัดรูป ให้คูณอะไรสักอย่าง ให้รากที่ตัวส่วนหายไป โดยต้องคูณทั้งเศษและส่วน เพื่อไม่ให้ค่าเปลี่ยน ดังนี้

- คูณด้วย “ตัวที่ขาด” โดยเมื่อคูณแล้ว ตัวส่วนจะซ้ำครบคู่ และดึงออกไปนอกรากได้

เช่น $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$$\frac{6}{5\sqrt{3}} = \frac{6}{5\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{(5)(3)} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

$$\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{10}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}$$

- คูณด้วย “คอนจูเกต” ในกรณีที่ตัวส่วน เป็น $\sqrt{\quad}$ บวกหรือลบ กับจำนวนอื่น ให้
หมายเหตุ : “คอนจูเกต” หรือ “สังยุค” คือ จำนวนที่เครื่องหมายตรงกลางเปลี่ยนเป็นตรงข้าม

เช่น คอนจูเกตของ $5 + 2\sqrt{2}$ คือ $5 - 2\sqrt{2}$

คอนจูเกตของ $\sqrt{3} - 4$ คือ $\sqrt{3} + 4$ เป็นต้น

การคูณด้วยคอนจูเกต จะทำให้เข้าสูตร $(n - l)(n + l) = n^2 - l^2$ ทำให้ $\sqrt{\quad}$ หายไปได้

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \frac{2}{\sqrt{6}-2} &= \frac{2}{\sqrt{6}-2} \times \frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}+2} & \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{(2)(\sqrt{6}+2)}{6-4} & &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+3}{2-3} \\ &= \sqrt{6} + 2 & &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{6}+3}{-1} \\ & & &= -\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} - 3 \end{aligned}$$

- คูณด้วยตัวอื่นๆ ที่เข้าสูตร ผลบวก - ผลต่าง กำลัง n
เช่น ในกรณีที่ตัวส่วน เป็น $\sqrt[n]{\quad}$ บวกหรือลบ กับจำนวนอื่น จะต้องให้คูณด้วย $(n^2 \pm nl + l^2)$

เพื่อเข้าสูตร $(n - l)(n^2 + nl + l^2) = n^3 - l^3$

$(n + l)(n^2 - nl + l^2) = n^3 + l^3$

$$\begin{aligned} \text{เช่น } \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}} &= \frac{2}{2-\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}}{2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{(2)(2^2+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2^2})}{2^3-\sqrt[3]{2^3}} \\ &= \frac{(2)(4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4})}{6} = \frac{4+2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}{3} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $\sqrt{2} = 1.414$ จงหาค่าประมาณของ $\frac{2}{3\sqrt{2}}$

วิธีทำ ข้อนี้ แทน $\sqrt{2}$ ลงไปตรงๆ จะได้ $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3(1.414)} = \frac{2}{4.242} \rightarrow$ หารเลขลำบาก เพราะส่วนเป็นตัวเลขไม่สวย

เราจะจัดรูปให้ส่วนไม่ติดรากก่อน จะได้ $\frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{(3)(2)} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

แทน $\sqrt{2} = 1.414$ จะได้ $\frac{1.414}{3} = 0.471 \rightarrow$ จะเห็นว่าคิดเลขง่ายกว่าเยอะเลย

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

วิธีทำ ข้อนี้ ตัวส่วนมี 3 ตัว เราจะค่อยๆกำจัด $\sqrt{\quad}$ โดยค่อยๆคูณด้วยคอนจูเกตทีละเปลาะ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} &= \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2+2\sqrt{2}\sqrt{3}+3-5} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12} \end{aligned}$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลบวกและผลลบของจำนวนต่อไปนี้

1. $3\sqrt{5} + 5\sqrt{5}$

2. $2\sqrt{3} - \sqrt{3}$

3. $\sqrt{32} - \sqrt{18} + \sqrt{2}$

4. $\sqrt{3} + \sqrt{\frac{1}{3}}$

5. $\sqrt{50} - \sqrt[4]{4} + \sqrt{\frac{9}{2}}$

6. $2\sqrt{x^3} - x\sqrt{x} - x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$

2. จงหาผลคูณของจำนวนต่อไปนี้

1. $\sqrt{6} \times \sqrt{2}$

2. $3\sqrt{2} \times \sqrt{8}$

3. $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[3]{9}$

4. $\sqrt[3]{-2} \times 3\sqrt[3]{4}$

5. $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{2}$

6. $\sqrt[4]{9} \times \sqrt{5}$

7. $\sqrt[5]{3} \times \sqrt{2}$

8. $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + \sqrt{3})$

9. $(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2})$

10. $(1 - \sqrt{2})^2$

11. $(\sqrt{3} - 1)^2$

12. $(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2$

3. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดราก

1. $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. $\frac{2}{\sqrt{3}+1}$

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2$

6. $\frac{\sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{10}}{\sqrt{6} \times \sqrt{5}}$

7. $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$

8. $\frac{6\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}$

9. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$

10. $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{7}}$

4. กำหนดให้ $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$ และ $\sqrt{5} = 2.236$ จงหาค่าประมาณของ จำนวนต่อไปนี้ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 2

1. $\sqrt{8} - \sqrt{\frac{1}{2}}$

2. $\sqrt{6} \times \sqrt{8}$

3. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

4. $(\sqrt{5} - 2)^{-1}$

5. ถ้า $a = -5$ และ $b = 8$ แล้ว $\sqrt[6]{a^2b} \sqrt[6]{a^4b}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 59/4]

6. $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1]

7. $\sqrt{18} + 2\sqrt[3]{-125} - 3\sqrt[4]{4}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/3]

8. ค่าของ $\frac{1}{(1-\sqrt{3})^2}$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [O-NET 56/4]

1. [1.5, 1.6)

2. [1.6, 1.7)

3. [1.7, 1.8)

4. [1.8, 1.9)

5. [1.9, 2.0)

9. $\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/1]

10. $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}-1} \div \frac{\sqrt{2}+2}{2-\sqrt{3}}$ มีค่าเท่ากับข้อใด [O-NET 56/5]

1. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $-\sqrt{2}$

4. $\sqrt{2}$

5. $\frac{1}{2}$

11. ถ้า $x = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ และ $y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ แล้ว $x^2 - 4xy + y^2$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/23]

12. ถ้า $a = \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ แล้ว $\sqrt{a + \frac{1}{a} - 2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/4]

13. ถ้า $a = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ แล้ว $a^2 + \frac{1}{a^2}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 58/8]

14. $\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| - |2 - \sqrt{2}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [O-NET 50/1]

1. $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}$

3. $\frac{5}{2} - \frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{5}{2}$

15. $(1 - \sqrt{2})^2 (2 + \sqrt{8})^2 (1 + \sqrt{2})^3 (2 - \sqrt{8})^3$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/3]

รุทสองของจำนวนที่ติดรุท

ในหัวข้อนี้ จะเรียนเรื่องการหารุท ของจำนวนที่ติดรุท โดยจะพูดถึงการหารุทสอง ของจำนวนในรูป $x \pm 2\sqrt{y}$

เนื่องจาก $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (a + b) + 2\sqrt{ab}$ ดังนั้น $\sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$\downarrow$
 บวกกัน
 'ได้ x '

$\downarrow$
 คูณกัน
 'ได้ y '

ดังนั้น ถ้าจะหา $\sqrt{x + 2\sqrt{y}}$ วิธีง่ายๆ คือ ให้หาตัวเลขสองตัวที่ “บวกกันได้ x คูณกันได้ y ” แล้วเอาสองตัวนั้นมาใส่รุท บวกกัน ตอบได้ทันที

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{17 + 2\sqrt{72}}$

วิธีทำ ต้องลองหาว่าอะไรบวกกันได้ 17 คูณกันได้ 72 ลองสุ่มหาดูซักพัก จะได้ 9 กับ 8

ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{9} + \sqrt{8} = 3 + 2\sqrt{2}$

#

ในกรณีที่เครื่องหมายตรงกลางเป็นลบ ก็ทำเหมือนเดิม และตอบคำตอบในรูป $\sqrt{\text{ตัวมาก}} - \sqrt{\text{ตัวน้อย}}$ เนื่องจาก $\sqrt{\quad}$ จะให้ผลลัพธ์เป็นบวกเท่านั้น จึงต้องเอาตัวมากขึ้นก่อนเสมอ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$

วิธีทำ หาว่าอะไรบวกกันได้ 4 คูณกันได้ 3 ลองสุ่มดูซักพัก จะได้ 1 กับ 3

แต่ 3 มากกว่า 1 ดังนั้น ต้องตอบโดยเอา 3 ขึ้นก่อน

ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{3} - \sqrt{1} = \sqrt{3} - 1$

#

ตัวอย่าง จงหารากที่สองของ $11 - 2\sqrt{24}$

วิธีทำ ข้อนี้ เหมือนกันกับคำถามว่า $\sqrt{11 - 2\sqrt{24}}$ เท่ากับเท่าไหร่นั้นเอง

เพียงแต่ถ้าถาม “รากที่สอง” แบบนี้ ต้องตอบสองค่า คือค่าบวกกับค่าลบ

หาว่าอะไรบวกกันได้ 11 คูณกันได้ 24 ลองสุ่มดูซักพัก จะได้ 8 กับ 3 โดยจะได้ 8 เป็นตัวมาก

ดังนั้น คำตอบคือ $\pm(\sqrt{8} - \sqrt{3}) = \pm(2\sqrt{2} - \sqrt{3})$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{12 + 6\sqrt{3}}$

วิธีทำ จะเห็นว่า มี 6 คูณอยู่หน้า $\sqrt{3}$ แต่ตามสูตร จะต้อง มี 2 คูณอยู่หน้า $\sqrt{\quad}$

ดังนั้น ยังทำไม่ได้ ต้องจัดรูปก่อน $12 + 6\sqrt{3} = 12 + (2)(3)\sqrt{3} = 12 + 2\sqrt{27}$

$\swarrow$
 หด 3 เข้าไปในรุท กลายเป็น 9

ดังนั้น ข้อนี้ เราต้องหาว่าอะไรบวกกันได้ 12 คูณกันได้ 27 ซึ่งจะได้ 9 กับ 3

ดังนั้น คำตอบคือ $\sqrt{9} + \sqrt{3} = 3 + \sqrt{3}$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

วิธีทำ จะเห็นว่าข้อนี้ไม่มีเลข 2 อยู่หน้า $\sqrt{15}$ แต่ตามสูตรมันต้องมีเลข 2 หน้า $\sqrt{15}$ ถึงจะตรงกับรูปแบบของเรา

ดังนั้น ยังทำไม่ได้ ต้องจัดรูปก่อน วิธีจัดคือ เราจะคูณ $\frac{2}{2}$ เข้าไปที่ $\sqrt{15}$ แล้วหัด $\frac{1}{2}$ เข้าไป แต่คง 2 ข้างบนไว้

$$\text{นั่นคือ } 4 - \sqrt{15} = 4 - \left(\frac{2}{2} \times \sqrt{15}\right) = 4 - 2\sqrt{\frac{15}{2 \times 2}} = 4 - 2\sqrt{\frac{15}{4}}$$

ดังนั้น ข้อนี้ เราต้องหาว่าอะไรบวกกันได้ 4 คูณกันได้ $\frac{15}{4}$ คราวนี้ยากหน่อย เพราะเป็นเศษส่วน

$$\text{สูตรชักรักๆ จะได้ } \frac{5}{2} \text{ กับ } \frac{3}{2} \text{ ดังนั้น คำตอบคือ } \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}}$$

แต่บางคนก็ไม่ชอบให้มีตัวส่วนในรูป ก็ต้องจัดรูปต่อ

$$\text{จะได้ } \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2} \times \frac{2}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2} \times \frac{2}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{10} - \sqrt{6}}{2}$$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลสำเร็จของค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $\sqrt{13 + 2\sqrt{30}}$

2. $\sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$

3. $\sqrt{9 - 2\sqrt{20}}$

4. $\sqrt{13 - 4\sqrt{10}}$

5. รากที่สองของ $8 - 4\sqrt{3}$

6. รากที่สองของ $8 + 2\sqrt{7}$

7. $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$

8. $\sqrt{6-\sqrt{35}}$

9. รากที่สองของ $2-\sqrt{3}$

10. รากที่สองของ $6+3\sqrt{3}$

11. $\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}$

12. รากที่ 4 ของ $7+4\sqrt{3}$

2. จำนวนจริง $\sqrt{84+18\sqrt{3}}$ มีค่าเท่าใด [O-NET 59/3]

3. ค่าของ $\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{18}+\sqrt{12}$ อยู่ใดช่วงใด [O-NET 58/7]

1. (2.2 , 2.3)

2. (2.3 , 2.4)

3. (2.4 , 2.5)

4. (2.5 , 2.6)

5. (2.6 , 2.7)

เลขยกกำลัง

หัวข้อนี้ จะเป็นการทบทวนความรู้เกี่ยวกับเรื่องเลขยกกำลังที่เคยเรียนมาเมื่อตอน ม. ต้น โดยเราจะได้เจอเลขชี้กำลังที่เป็นเศษส่วน ทศนิยม ด้วย แต่กฎเดิมก็ยังใช้ได้

- ฐานเหมือนกัน คูณกัน ให้เอาเลขชี้กำลังมาบวกกัน
ฐานเหมือนกัน หารกัน ให้เอาเลขชี้กำลังมาลบกัน

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } 2^5 \times 2^4 = 2^9 & 2^3 \times 2 = 2^4 \\ \frac{m^4}{m} = m^3 & 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = 3^{\frac{5}{6}} \\ 3^{1.5} \times 3^{2.2} = 3^{3.7} & \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \\ a^2b \cdot ab^3 = a^3b^4 & \frac{x^5yz}{xy^3} = \frac{x^4z}{y^2} \end{array}$$

- ยกกำลังซ้อน ให้เอาเลขชี้กำลังมาคูณกัน

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } (2^3)^4 = 2^{12} & ((a^2)^3)^4 = a^{24} \\ \left(m^{\frac{1}{2}}\right)^6 = m^3 & \end{array}$$

- เลขยกกำลัง กระจายเข้าไปในคูณหารได้ แต่กระจายในบวกลบไม่ได้

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } (2 \times 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4 & (2 \cdot 3^2)^4 = 2^4 \cdot (3^2)^4 = 2^4 \cdot 3^8 \\ (a^2b^{\frac{1}{3}})^6 = a^{12}b^2 & \left(\frac{a^2b}{c^3}\right)^2 = \frac{a^4b^2}{c^6} \\ \text{แต่ } (2+3)^4 \neq 2^4 + 3^4 & \end{array}$$

- ย้ายบนลงล่าง หรือล่างขึ้นบน เลขชี้กำลังจะเปลี่ยนเครื่องหมาย บวก $\rightarrow$ ลบ , ลบ $\rightarrow$ บวก

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } 2^{-3} = \frac{1}{2^3} & \frac{1}{3^{-4}} = 3^4 \\ a^{-2}b^3c^{-1} = \frac{b^3}{a^2c} & \frac{a^{-2}}{b^{-3}} = \frac{b^3}{a^2} \end{array}$$

หมายเหตุ: ปกติเราจะไม่ชอบให้เลขชี้กำลังเป็นลบ ก่อนตอบจึงนิยมนำย้ายขึ้นลงให้เลขชี้กำลังเป็นบวกก่อนค่อยตอบ

- อะไรก็ตามยกกำลังศูนย์ จะได้ 1 เสมอ และ ศูนย์ยกกำลังอะไรก็ตาม จะได้ 0 เสมอ ยกเว้น 0^0 หาค่าไม่ได้

- ถ้า “เลขชี้กำลัง” เป็นเศษส่วน ให้เปลี่ยน “ส่วน” ของเลขชี้กำลังเป็น “ราก”
 ถ้า “เลขชี้กำลัง” เป็นทศนิยม ให้เปลี่ยนทศนิยมเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ แล้วเปลี่ยนตัวส่วนให้เป็นราก

$$\begin{array}{ll} \text{เช่น } 2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2^1} = \sqrt[3]{2} & 3^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{3^3} \\ \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} & 25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5 \end{array}$$

จากสมบัติข้อหลังสุดนี้ จะเห็นว่า รุท ก็คือการยกกำลังแบบหนึ่ง นั่นคือ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ นั่นเอง

ตรงจุดนี้ จะทำให้ รุท มีสมบัติทุกอย่างของเรื่องเลขยกกำลัง

ตัวอย่างเช่น จากสมบัติที่ว่า “เลขยกกำลัง กระจายเข้าไปในคูณหารได้ แต่กระจายในบวกลบไม่ได้”

$$\text{ถ้านำมาใช้กับรุท ก็เช่น } \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3} \quad \text{และ} \quad \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

แต่ $\sqrt{x+2} \neq \sqrt{x} + \sqrt{2}$ เป็นต้น

อีกเรื่องที่โจทย์นิยมนำมาออกข้อสอบ คือ การเปรียบเทียบเลขยกกำลัง ว่าตัวไหนมาก ตัวไหนน้อย

หลักคือ เราต้องพยายามจัดรูปเลขยกกำลัง ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่สุด ให้ตัวเลขน้อยที่สุด ก่อน

- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเลขเยอะๆ ที่ตัดตัวส่วนทุกส่วนลงตัว (ค.ร.น.)
- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเยอะๆ เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเศษส่วนที่ทอนเลขชี้กำลังให้ได้มากที่สุด (ห.ร.ม.)

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ และ $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้น ข้อนี้ถามว่า $2^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}}$ หรือไม่ นั่นเอง

เราจะปรับ $\frac{1}{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ ให้เป็นจำนวนเต็มง่ายๆ ก่อน โดยการยกกำลัง 6 ทั้งสองข้าง ($6 = \text{ค.ร.น. ของ } 2 \text{ กับ } 3$)

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 &> \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 \\ 2^3 &> 3^2 \\ 8 &> 9 &\rightarrow \text{ไม่จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ เป็นประโยคที่เป็นเท็จ

#

ตัวอย่าง จงตรวจสอบว่า $2^{36} < 3^{24}$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า 36 กับ 24 สามารถทอนให้น้อยลงได้ โดยยกกำลัง $\frac{1}{12}$ ทั้งสองข้าง ($12 = \text{ห.ร.ม. ของ } 36 \text{ กับ } 24$)

$$\begin{aligned} \left(2^{36}\right)^{\frac{1}{12}} &< \left(3^{24}\right)^{\frac{1}{12}} \\ 2^3 &< 3^2 \\ 8 &< 9 &\rightarrow \text{จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{36} < 3^{24}$ จริง

#

อีกเรื่องที่ต้องระวัง คือ ยิ่งยกกำลังมาก ไม่ได้แปลว่าจะได้ผลลัพธ์มากขึ้นเสมอไป

$$\begin{array}{ccc} \text{เช่น} & 2^2 = 4 & \downarrow \\ & 2^3 = 8 & \downarrow \text{มากขึ้น} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & (0.8)^2 = 0.64 & \downarrow \\ & (0.8)^3 = 0.512 & \downarrow \text{น้อยลง} \end{array}$$

จะเห็นว่า ถ้า “ฐานน้อยกว่า 1” ยิ่งยกกำลังมาก กลับจะยังได้น้อย

$$\text{เช่น } 0.5^5 > 0.5^9$$

$$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{15} \geq \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{20}$$

$$(\sqrt{2})^5 > (\sqrt{2})^4$$

$$(0.2)^{0.5} < (0.2)^{0.4}$$

$$3^{0.5} > 3^{0.2}$$

$$(\sin 60^\circ)^6 < \sin 60^\circ$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$\sin$ หรือ $\cos$ ของมุมบวกที่น้อยกว่า 90° จะน้อยกว่า 1 เสมอ

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดถูกต้อง

1. $(-4)^{10} < 0$

2. $(-1)^{\frac{2}{6}} > 0$

3. $(-1)^0 = 1$

4. $1^{-5} = -1$

2. จงเติมเครื่องหมาย มากกว่า หรือ น้อยกว่า ให้ถูกต้อง

1. $2^3 \dots 2^5$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^3 \dots \left(\frac{1}{2}\right)^5$

3. $2^{\frac{1}{3}} \dots 2^{\frac{1}{5}}$

4. $(\sqrt{2})^3 \dots (\sqrt{2})^5$

5. $(\sqrt{3})^{-3} \dots (\sqrt{3})^{-5}$

6. $(\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{3}} \dots (\sqrt{2}-1)^{\frac{1}{5}}$

7. $\sqrt{0.5} \dots (0.5)^4$

8. $\sqrt[3]{1.5} \dots \sqrt[5]{1.5}$

9. $(0.2)^3 \cdot (0.2)^5 \dots (0.2)^4 \cdot (0.2)^6$

10. $\sqrt{2^4} \sqrt{2} \dots 2$

11. $\sqrt[6]{25} \dots \sqrt[9]{1000}$

12. $\sqrt[10]{16} \dots \sqrt[15]{27}$

3. จงทำให้อยู่ในรูปผลสำเร็จ

1. $3^{\frac{30}{60}}$

2. $32^{\frac{2}{5}} + 64^{\frac{2}{3}}$

3. $\left(2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}\right)^6$

4. $125^{\frac{3}{2}} \times \sqrt[4]{25^{-1}}$

5. $(-8)^{\frac{1}{3}}$

6. $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{3}}$

7. $27 \cdot 3^{\frac{1}{3}}$

8. $8^{\frac{1}{2}} + 18^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{4}}$

9. $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}}{ab}\right)^{-6}$

10. $\left(\frac{a^2b^3c^4}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{a\sqrt{b}}{2^3x^{\frac{1}{2}}}\right)^{-1}$

11. $\frac{5^{n+2}+5^{n+1}}{5^n}$

12. $\frac{3^n-3^{n-2}}{3^n-3^{n-1}}$

13. $\frac{3 \cdot 2^{n+1}+2^n}{2^n-2^{n-1}}$

4. กำหนดให้ a และ x เป็นจำนวนจริงใดๆ ข้อใดต่อไปนี้ถูก [O-NET 50/27]

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a^x < 0$ | 2. ถ้า $a < 0$ แล้ว $a^{-x} < a$ |
| 3. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^{-x} > 0$ | 4. ถ้า $a > 0$ แล้ว $a^x > a$ |

5. $\frac{8^{\frac{2}{3}}}{\sqrt[4]{144}} \cdot \frac{(18)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{6}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/2]

6. $\frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[3]{27}} + \frac{2^6}{(64)^{\frac{3}{2}}}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/1-2]

7. ค่าของ $\sqrt{(-2)^2} + \left(\frac{8^{1/2} + 2\sqrt{2}}{\sqrt{32}}\right)$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 52/2]

8. ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\sqrt[3]{a^3 \sqrt{a}}$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 58/5]

- | | | | | |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 1. $a^{\frac{1}{9}}$ | 2. $a^{\frac{2}{9}}$ | 3. $a^{\frac{4}{9}}$ | 4. $a^{\frac{5}{9}}$ | 5. $a^{\frac{7}{9}}$ |
|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|

9. ข้อใดมีค่าต่างจากข้ออื่น [O-NET 53/7]

1. $(-1)^0$

2. $(-1)^{0.2}$

3. $(-1)^{0.4}$

4. $(-1)^{0.8}$

10. ถ้า $x = 1 + \sqrt{3}$ แล้ว $\frac{x^{\frac{1}{2}} - \sqrt{3}x^{-\frac{1}{2}}}{x}$ เท่ากับเท่าใด [O-NET 59/6]

1. $1 + \sqrt{3}$

2. $(1 + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$

3. $(1 + \sqrt{3})^{-\frac{1}{2}}$

4. $(1 + \sqrt{3})^{-1}$

5. $(1 + \sqrt{3})^{-\frac{3}{2}}$

11. ข้อใดต่อไปนี้ผิด [O-NET 51/22]

1. $(24)^{30} < 2^{20} \cdot 3^{30} \cdot 4^{40}$

2. $(24)^{30} < 2^{30} \cdot 3^{20} \cdot 4^{40}$

3. $2^{20} \cdot 3^{40} \cdot 4^{30} < (24)^{30}$

4. $2^{30} \cdot 3^{40} \cdot 4^{20} < (24)^{30}$

12. อสมการในข้อใดต่อไปนี้จริง [O-NET 49/1-18]

1. $2^{1000} < 3^{600} < 10^{300}$

2. $3^{600} < 2^{1000} < 10^{300}$

3. $3^{600} < 10^{300} < 2^{1000}$

4. $10^{300} < 2^{1000} < 3^{600}$

13. ให้ $A = 2^{5/6}$, $B = 3^{1/2}$ และ $C = 5^{1/3}$ จงเรียงลำดับ A, B, C จากน้อยไปมาก [O-NET 57/2]

14. ให้ $A = 2^{\frac{3}{2}}$, $B = 3^{\frac{2}{3}}$ และ $C = 216^{\frac{1}{6}}$ จงเรียงลำดับ A, B, C จากน้อยไปมาก [O-NET 58/6]

สมการเลขชี้กำลัง

หัวข้อนี้ จะพูดถึงสมการที่เอา x ไปใช้เป็นเลขชี้กำลัง

หลักในการแก้คือ ต้องจัดรูปสมการให้ “ฐานเท่ากัน” แล้วดูเลขชี้กำลังลงมาเท่ากัน

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $3^{x+1} = 9^{x-2}$

วิธีทำ ต้องทำฐานให้เท่ากันก่อน จะเห็นว่า ผังซ้าย ฐาน = 3 ผังขวา ฐาน = 9

ดังนั้น เราจะทำฐานฝั่งขวา จาก 9^{x-2} ให้เป็นฐาน 3

$$\begin{aligned} 3^{x+1} &= 9^{x-2} \\ 3^{x+1} &= (3^2)^{x-2} \\ 3^{x+1} &= 3^{(2)(x-2)} \\ 3^{x+1} &= 3^{2x-4} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{เมื่อฐานเท่ากัน จะดูเลขชี้กำลัง} \\ \text{ลงมาเท่ากันได้} \end{array}$$

$$\begin{aligned} x+1 &= 2x-4 \\ 5 &= x \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $(\sqrt{8})^{x+1} = 4^{x+1}$

วิธีทำ จะเห็นว่า ฐานของทั้งสองฝั่ง สามารถแปลงให้เป็นฐาน 2 ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} (\sqrt{8})^{x+1} &= 4^{x+1} \\ (\sqrt{2^3})^{x+1} &= (2^2)^{x+1} \\ \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{x+1} &= (2^2)^{x+1} \\ 2^{\left(\frac{3}{2}\right)(x+1)} &= 2^{(2)(x+1)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)(x+1) = (2)(x+1) \\ (3)(x+1) = (4)(x+1) \\ 3x+3 = 4x+4 \\ -1 = x \end{array}$$

#

การเปลี่ยนฐาน จะยากขึ้นได้อีก เมื่อเลขชี้กำลังเป็นลบ

เพราะเมื่อเลขชี้กำลังเป็นลบ จะมีการกลับเศษส่วน ทำให้รูปฐานเปลี่ยนไป

เช่น $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$$(2-\sqrt{3})^{-1} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = \frac{1}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{4-3} = 2+\sqrt{3}$$

ดังนั้น $\frac{8}{27}$ สามารถเปลี่ยนเป็นฐาน $\frac{3}{2}$ ได้

และ $2+\sqrt{3}$ ก็สามารถเปลี่ยนเป็นฐาน $2-\sqrt{3}$ ได้ เป็นต้น

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\left(\frac{8}{27}\right)^{x+4} = \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1}$

วิธีทำ จะเห็นว่า ฐานของทั้งสองฝั่ง สามารถแปลงให้เป็นฐาน 2 กับ 3 ได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} \left(\frac{8}{27}\right)^{x+4} &= \left(\frac{9}{4}\right)^{x-1} \\ \left(\frac{2^3}{3^3}\right)^{x+4} &= \left(\frac{3^2}{2^2}\right)^{x-1} \\ \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{x+4} &= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^{x-1} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{(3)(x+4)} &= \left(\frac{3}{2}\right)^{(2)(x-1)} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{(3)(x+4)} &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-(2)(x-1)} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \text{กลับ เศษ - ส่วน เลขชี้กำลัง} \\ \text{เปลี่ยนจาก บวก } \rightarrow \text{ลบ} \end{array}$$

$$\begin{aligned} (3)(x+4) &= -(2)(x-1) \\ 3x+12 &= -2x+2 \\ 5x &= -10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $(\sqrt{5} + 2)^{x-2} = (\sqrt{5} - 2)^{x-6}$

วิธีทำ ข้อนี้ เริ่มจะดูยากกว่าต้องเปลี่ยนเป็นฐานอะไร ถ้านึกไม่ออก ลองเอาฐานซึกตัว มายกกำลัง -1 ดู

จะได้ $(\sqrt{5} + 2)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{1}{\sqrt{5}+2} \cdot \frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}-2}{5-4} = \sqrt{5}-2$ ซึ่งโชคดีได้เป็นฐานอีกตัวพอดี

ดังนั้น เราจะเปลี่ยน $\sqrt{5}-2$ ในสมการ ให้กลายเป็น $(\sqrt{5} + 2)^{-1}$ ดังนี้

$$\begin{array}{l|l} (\sqrt{5} + 2)^{x-2} = (\sqrt{5} - 2)^{x-6} & x - 2 = (-1)(x - 6) \\ (\sqrt{5} + 2)^{x-2} = ((\sqrt{5} + 2)^{-1})^{x-6} & x - 2 = -x + 6 \\ (\sqrt{5} + 2)^{x-2} = (\sqrt{5} + 2)^{(-1)(x-6)} & 2x = 8 \\ & x = 4 \end{array}$$

#

ในกรณีที่ในสมการมีมากกว่า 2 พจน์ เรามักต้องใช้ความรู้เรื่องการแก้สมการกำลังสองเข้ามาผสม

ส่วนใหญ่ เรามักจะต้องหา “ตัวที่เป็นกำลังสองของอีกตัว” ให้จัดให้อยู่ในรูป $a(\quad)^2 + b(\quad) + c = 0$

จากนั้น แยกตัวประกอบ จับแต่ละวงเล็บเป็นศูนย์ แล้วแก้สมการแต่ละวงเล็บ ก็จะได้คำตอบ

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$

วิธีทำ ข้อนี้ มี 3 พจน์ มาบวกกันอยู่ เราจะพยายามจัดรูปให้เป็นสมการกำลังสอง เพื่อแยกตัวประกอบ

จะเห็นว่า $5^{2x} = (5^x)^2$ ดังนั้น เราจัดรูปให้เป็น สมการกำลังสองได้ดังนี้

$$\begin{array}{l} 5^{2x} - 6 \cdot 5^x + 5 = 0 \\ (5^x)^2 - 6(5^x) + 5 = 0 \\ (5^x - 1)(5^x - 5) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{มอง } 5^x \text{ เป็นเหมือนตัวแปรตัวใหม่ เป็น } A^2 - 6A + 5 = 0 \\ (A - 1)(A - 5) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 5^x - 1 = 0 & 5^x - 5 = 0 \\ 5^x = 1 & 5^x = 5 \\ 5^x = 5^0 & 5^x = 5^1 \\ x = 0 & x = 1 \end{array}$$

จะได้คำตอบของสมการคือ 0 และ 1

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x = 2$

วิธีทำ ข้อนี้มี 4^x ที่สามารถทำเป็น $(2^2)^x$ แล้วกลายเป็น $(2^x)^2$ ได้

แต่ก่อนอื่น เราต้องแยก 4^{x+1} ออกเป็น $4^x \cdot 4^1$ ก่อน ดังนี้

$$\begin{array}{l} 4^{x+1} + 7 \cdot 2^x = 2 \\ 4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \\ 4^x \cdot 4^1 + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \\ (2^2)^x \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \\ (2^x)^2 \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 = 0 \\ 4(2^x)^2 + 7(2^x) - 2 = 0 \\ (4 \cdot 2^x - 1)(2^x + 2) = 0 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{มอง } 2^x \text{ เป็นเหมือนตัวแปรตัวใหม่ เป็น } 4A^2 + 7A - 2 = 0 \\ (4A - 1)(A + 2) = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 4 \cdot 2^x - 1 = 0 & 2^x + 2 = 0 \\ 2^2 \cdot 2^x = 1 & 2^x = -2 \\ 2^{x+2} = 2^0 & \text{(ไม่มีคำตอบ)} \\ x + 2 = 0 & \\ x = -2 & \end{array}$$

จะได้คำตอบของสมการคือ -2

#

แบบฝึกหัด

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $2^{x+2} = 4^{x-5}$

2. $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x} = \frac{1}{16^{x+1}}$

3. $25^x = \sqrt{5}$

4. $\sqrt{2}^5 = 4^{\frac{1}{x}+3}$

5. $\sqrt{3^{x^2-1}} = 9^{x-1}$

6. $8^{-x} = \frac{1}{32}$

7. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x+5} = 1$

8. $3^x = 2^x$

$$9. \frac{4^x}{9^x} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$10. \frac{5^{x+1}}{3^{2x}} = \frac{9^5}{25^2}$$

$$11. \frac{5^{x+3}}{2^{x+2}} = \frac{16}{125}$$

$$12. 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$13. 5^{2x+1} - 26 \cdot 5^x + 5 = 0$$

$$14. 2^{x+1} - 2^x = 64$$

$$15. 3^x + 3^{x-1} = 108$$

$$16. 2^{2x} + 4^{x-1} + 64^{\frac{x}{3}} = 576$$

2. ถ้า $4^a = \sqrt{2}$ และ $16^{-b} = \frac{1}{4}$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 49/2-2]

3. ถ้า $64^k = 16$ แล้ว $8^k + 8^{-k}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/8]

4. ถ้า $2^{x-1} = \frac{\sqrt{2}}{8}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 56/7]

5. ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{27}}\right)^4 = \left(\frac{16}{81}\right)^{\frac{1}{x}}$ และ $y = 3x$ แล้ว y เท่ากับเท่าใด [O-NET 54/24]

6. ถ้า $\left(\sqrt{\frac{8}{125}}\right)^4 = \left(\frac{16}{625}\right)^{\frac{1}{x}}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 51/2]

7. ถ้า $\left(3 + \frac{3}{8}\right)^{3x} = \frac{16}{81}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/5]

8. ถ้า $A = \{x \mid 9^{x^2} = (1 + \sqrt[3]{8})^x\}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกทุกตัวใน A มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 57/7]

9. ค่าของ x ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{2}^{x^2} = \frac{2^{4x}}{4^4}$ เท่ากับข้อใด [O-NET 49/1-13]

10. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $2^{x^2} = 16$ และ $-3 \leq y \leq x$ แล้ว
ค่าที่มากที่สุดที่เป็นไปได้ของ xy เท่ากับเท่าใด [O-NET 58/35]

11. ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $(4^x)^{2x-1} = \frac{(16)^4}{2^{2x}}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด
[O-NET 59/35]

12. ถ้า $8^x - 8^{x+1} + 8^{x+2} = 228$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [O-NET 50/21]

อสมการเลขชี้กำลัง

คราวนี้เป็น “อ” สมการ นั่นคือ ในสมการจะมีเครื่องหมายอื่นที่ไม่ใช่ $=$ ซึ่งได้แก่ $>, <, \geq, \leq, \neq$ วิธีทำยังคล้ายๆเดิม คือ ต้องจัดรูปสมการให้ “ฐานเท่ากัน” แล้วจุดเลขชี้กำลังลงมามีคิด

และเนื่องจาก ในหัวข้อก่อนหน้านี้ จะเห็นว่า ถ้า “ฐานน้อยกว่า 1” ยิ่งยกกำลังมาก กลับจะยิ่งได้ค่าน้อย ดังนั้น ตอนจุดเลขชี้กำลังลงมา ถ้า ฐานน้อยกว่า 1 ต้องเปลี่ยน “มากกว่า” เป็น “น้อยกว่า”
“น้อยกว่า” เป็น “มากกว่า” ด้วย

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

วิธีทำ ข้อนี้ ฐานคือ $\frac{1}{2}$ ซึ่งน้อยกว่า 1 ดังนั้น ตอนดึงเลขชี้กำลังลงมา ต้องกลับเครื่องหมาย $\leq$ เป็น $\geq$

$$\begin{array}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 \\ x+1 \geq 3 \\ x \geq 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{ฐาน คือ } \frac{1}{2} \text{ ซึ่งน้อยกว่า 1 ดังนั้นตอนจุดกำลัง} \\ \text{ลงมา ต้องเปลี่ยนน้อยกว่าเป็นมากกว่า} \end{array}$$

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $[2, \infty)$

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $(\sqrt{3})^{x-4} > (\sqrt{3})^{3x}$

วิธีทำ ข้อนี้ ฐานคือ $\sqrt{3}$ ซึ่งมีค่าประมาณ 1.732 ซึ่งมากกว่า 1

ดังนั้น ตอนดึงเลขชี้กำลังลงมา ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย

$$\begin{array}{l} (\sqrt{3})^{x-4} > (\sqrt{3})^{3x} \\ x-4 > 3x \\ -4 > 2x \\ -2 > x \end{array} \quad \begin{array}{l} \swarrow \text{ฐาน คือ } \sqrt{3} \text{ ซึ่งมากกว่า 1 ดังนั้นตอนจุด} \\ \text{กำลังลงมา ไม่ต้องเปลี่ยนเครื่องหมาย} \end{array}$$

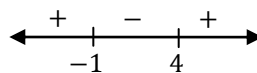
ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $(-\infty, -2)$

#

ตัวอย่าง จงแก้สมการ $\left(\frac{3}{2}\right)^{4-x^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x}$

วิธีทำ ข้อนี้ ต้องทำฐานทั้ง 2 ข้างให้เท่ากันก่อน จะเห็นว่า $\frac{3}{2}$ ก็คือ $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$ นั่นเอง

$$\begin{array}{l} \left(\frac{3}{2}\right)^{4-x^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} \\ \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right)^{4-x^2} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{(-1)(4-x^2)} < \left(\frac{2}{3}\right)^{3x} \\ (-1)(4-x^2) > 3x \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (-1)(4-x^2) > 3x \\ -4+x^2 > 3x \\ x^2-3x-4 > 0 \\ (x-4)(x+1) > 0 \end{array} \right.$$



ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ $(-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

#

แบบฝึกหัด

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $2^x < 4$

2. $3^{2x+1} > \sqrt{3}$

3. $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq \frac{1}{16}$

4. $\left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^{2x+3} \leq \left(\frac{a^2}{a^2+1}\right)^5$

5. $\left(\frac{1}{9}\right)^{2x} < 3^{x-1}$

6. $\left(\frac{1}{8}\right)^{3-x} \geq 4^{5x-1}$

7. $3^{x^2+x} > 9^{3x-3}$

8. $0.8 < (0.8)^{x^2}$

9. $(0.09)^{x^2+3x} > (0.3)^{x+3}$

10. $2^{x-2} \geq \frac{1}{4^{x^2+x}}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ผิด [O-NET 50/23]

1. $\sqrt{0.9 + 10} < \sqrt{0.9} + \sqrt{10}$

2. $(\sqrt{0.9})(\sqrt[4]{0.9}) < 0.9$

3. $(\sqrt{0.9})(\sqrt[3]{1.1}) < (\sqrt{1.1})(\sqrt[3]{0.9})$

4. $\sqrt[300]{125} < \sqrt[200]{100}$

3. จงหาเซตคำตอบของสมการ $4^{2x^2-4x-5} \leq \frac{1}{32}$ [O-NET 50/28]

รากที่ n

- | | | | |
|---------------|------------|-----------|----------|
| 1. 1. $8, -8$ | 2. 1 | 3. ไม่มี | 4. -1 |
| 5. $5, -5$ | 6. $1, -1$ | 7. -1 | 8. ไม่มี |
| 9. $4, -4$ | 10. 2 | 11. ไม่มี | 12. -2 |
2. 27

ค่าหลักรากที่ n

- | | | | |
|---|--------------------|---------|--------------------|
| 1. $1, 5, 6$ | | | |
| 2. 1. 3 | 2. 6 | 3. -3 | 4. $-6\sqrt[3]{2}$ |
| 5. 42 | 6. $15\sqrt[3]{3}$ | 7. 17 | 8. $ a^5 b^2$ |
| 9. $\frac{2x^2 y^3 }{ z^3 }\sqrt{\frac{2x}{z}}$ | 10. x | | |
3. $1, 2$ 4. 0

การ บวก ลบ คูณ หาร ราก

- | | | | |
|-----------------------------|---------------------------------------|-------------------------|---|
| 1. 1. $8\sqrt{5}$ | 2. $\sqrt{3}$ | 3. $2\sqrt{2}$ | 4. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ |
| 5. $\frac{11\sqrt{2}}{2}$ | 6. 0 | | |
| 2. 1. $2\sqrt{3}$ | 2. 12 | 3. 3 | 4. -6 |
| 5. $\sqrt[6]{108}$ | 6. $\sqrt{15}$ | 7. $\sqrt[10]{288}$ | 8. $2 + \sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ |
| 9. -1 | 10. $3 - 2\sqrt{2}$ | 11. $4 - 2\sqrt{3}$ | 12. $30 + 12\sqrt{6}$ |
| 3. 1. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ | 2. $\frac{5\sqrt{3}}{6}$ | 3. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 4. $\sqrt{3} - 1$ |
| 5. $\frac{1}{6}$ | 6. $\sqrt{2}$ | 7. $7 - 4\sqrt{3}$ | 8. $3\sqrt{6} - 6$ |
| 9. 6 | 10. $\frac{3+2\sqrt{3}-\sqrt{21}}{3}$ | | |
| 4. 1. 2.121 | 2. 6.928 | 3. 2.121 | 4. 4.236 |
| 5. 10 | 6. 200 | 7. -10 | 8. 4 |
| 9. 0.3 | 10. 2 | 11. 94 | 12. 4 |
| 13. 98 | 14. 4 | 15. -32 | |

รากสองของจำนวนที่ติดราก

- | | | | |
|--|--|-------------------|--------------------------------------|
| 1. 1. $\sqrt{10} + \sqrt{3}$ | 2. $\sqrt{5} - 1$ | 3. $\sqrt{5} - 2$ | 4. $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$ |
| 5. $\pm(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ | 6. $\pm(\sqrt{7} + 1)$ | 7. $2 - \sqrt{3}$ | 8. $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{10}}{2}$ |
| 9. $\pm\left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}\right)$ | 10. $\pm\left(\frac{\sqrt{18} + \sqrt{6}}{2}\right)$ | | |

11. $\sqrt{2} - 1$

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}} &= \sqrt{\sqrt{17-12\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{17-2\sqrt{72}}} \\ &= \sqrt{\sqrt{9}-\sqrt{8}} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}-\sqrt{1} \\ &= \sqrt{2}-1\end{aligned}$$

12. $\pm\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\right)$

2. $9+\sqrt{3}$

3. 2

เลขยกกำลัง

1. 3

2. 1. <

2. >

3. >

4. <

5. >

6. <

7. >

8. >

9. >

10. <

11. <

12. >

3. 1. $\sqrt{3}$

2. 20

3. 108

4. 625

5. -2

6. $5^{\frac{5}{6}}$

7. $3^{\frac{10}{3}}$

8. $4\sqrt{2}$

9. a^3b^4

10. $\frac{8bc^2}{x}$

11. 30

12. $\frac{4}{3}$

13. 14

4. 3

5. 2

6. $-\frac{13}{24}$

7. 3

8. 3

9. 2

10. 5

11. 3

12. 3

13. $C < B < A$

14. $B < C < A$

สมการเลขชี้กำลัง

1. 1. 12

2. -1, 4

3. $\frac{1}{4}$

4. $-\frac{4}{7}$

5. 1, 3

6. $\frac{5}{3}$

7. $-\frac{5}{2}$

8. 0

9. $\frac{1}{4}$

10. -5

11. -6

12. 0, 2

13. 1, -1

14. 6

15. 4

16. 4

2. 0.75

3. $\frac{17}{4}$

4. $-\frac{3}{2}$

5. 2

6. $\frac{2}{3}$

7. $-\frac{4}{9}$

8. 0.5

9. 4

10. 6

11. 2

12. $\frac{2}{3}$

อสมการเลขชี้กำลัง

- | | | | |
|----------------------|----------------------------------|--|---------------|
| 1. $x < 2$ | 2. $x > -\frac{1}{4}$ | 3. $x \leq 4$ | 4. $x \geq 1$ |
| 5. $x > \frac{1}{5}$ | 6. $x \leq -1$ | 7. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$ | |
| 8. $x \in (-1, 1)$ | 9. $x \in (-3, \frac{1}{2})$ | 10. $x \in (-\infty, -2] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$ | |
| 2. 2 | 3. $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ | | |

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490 ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ