
ทฤษฎีจำนวน

สารบัญ

การหารลงตัว.....	1
จำนวนเฉพาะ.....	5
ขั้นตอนวิธีการหาร.....	8
การแปลงเลขฐาน.....	13
ตัวหารร่วมมาก.....	15
ตัวคูณร่วมน้อย.....	22

การหารลงตัว

เราเคยได้ยินคำว่า “หารลงตัว” มาบ้างแล้วในอดีต

เรื่องนี้ จะพูดถึงทฤษฎีต่างๆมากมายเกี่ยวกับการหารลงตัว และจะได้ฝึกในเรื่องของการพิสูจน์ โดยเราจะสนใจแต่ “จำนวนเต็ม” เท่านั้น ไม่มีเศษส่วนหรือทศนิยมเข้ามาเกี่ยวข้อง

“ a หาร b ลงตัว” แทนด้วยสัญลักษณ์ “ $a \mid b$ ” แปลว่า มีจำนวนเต็ม x ที่คูณ a แล้วได้ b

เช่น $3 \mid 15$ $2 \mid -8$ $-4 \mid 12$ $-7 \mid -21$

$\times 5$ $\times -4$ $\times -3$ $\times 3$

แต่ $3 \nmid 10$ เพราะ ไม่มีจำนวนเต็มไหนเลย ที่คูณ 3 แล้วได้ 10

มีทฤษฎีมากมายที่เกี่ยวกับการหารลงตัว

เช่น ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b + c$

ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid mb + nc$ เมื่อ m กับ n เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

ในกรณีที่โจทย์ถามข้อใดถูกข้อใดผิด ให้ลองพยายามแทนตัวเลขหลายๆแบบลงไปดูก่อน แล้วค่อยตัดสินใจ

นอกจากนี้ ยังมีเรื่องของการพิสูจน์ซึ่งมักจะอยู่ในรูป “ถ้า  แล้ว ”

หลักคือเราจะสมมติให้  เป็นจริง แล้วพยายามจัดรูปให้  เป็นจริงให้ได้

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$ เมื่อ c เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

วิธีทำ สมมติให้ $a \mid b$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม m ที่ $ma = b$

สิ่งที่ต้องการ คือ $a \mid bc$ นั่นคือ เราต้องทำให้ได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่คูณ a แล้วได้ bc

$$\begin{aligned} ma &= b \\ mac &= bc \\ (mc)a &= bc \\ \downarrow \\ \text{คูณ } a \text{ แล้วได้ } bc \end{aligned}$$

เรามี $ma = b$ แต่สิ่งที่เราต้องการเกี่ยวข้องกับ bc
ดังนั้น เราจะคูณทั้ง 2 ข้างด้วย c
จัดรูปนิดหน่อย จะได้ว่ามี mc ที่คูณ a แล้วได้ bc
ดังนั้น จะได้ $a \mid bc$

#

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b + c$

วิธีทำ สมมติให้ $a \mid b$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม m ที่ $ma = b$

$a \mid c$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม n ที่ $na = c$

สิ่งที่ต้องการ คือ $a \mid b + c$ นั่นคือ เราต้องทำให้ได้ว่า มีจำนวนเต็ม x ที่คูณ a แล้วได้ $b + c$

$$\begin{aligned} ma &= b & (1) \\ na &= c & (2) \\ (1) + (2): \quad ma + na &= b + c \\ (m+n)a &= b + c \\ \downarrow \\ \text{คูณ } a \text{ แล้วได้ } b + c \end{aligned}$$

เรามี $ma = b$ กับ $na = c$ แต่เราต้องการเกี่ยวกับ $b + c$
ดังนั้น เราจะเอาสองสมการมาบวกกัน
จัดรูปนิดหน่อย จะได้ว่ามี $m + n$ ที่คูณ a แล้วได้ $b + c$
ดังนั้น จะได้ $a \mid b + c$

#

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid mb + nc$ เมื่อ m กับ n เป็นจำนวนเต็มอะไรก็ได้

วิธีทำ สมมติให้ $a \mid b$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม x ที่ $xa = b$

$a \mid c$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม y ที่ $ya = c$

สิ่งที่ต้องการ คือ $a \mid mb + nc$ นั่นคือ เราต้องทำให้ได้ว่า มีจำนวนเต็มซักตัว ที่ คูณ a แล้วได้ $mb + nc$

	$xa = b$	(1)	เรามี $xa = b$ กับ $ya = c$ แต่เราต้องการเกี่ยวกับ $mb + nc$
	$ya = c$	(2)	
$m \times (1):$	$mx a = mb$	(3)	ดังนั้น เราสมการ b มาคูณ m เราสมการ c มาคูณ n
$n \times (2):$	$ny a = nc$	(4)	แล้วเราสมการที่คูณแล้วมาบวกกัน
$(3) + (4):$	$mx a + ny a = mb + nc$		จัดรูปนิดหน่อย จะได้ว่ามี $mx + ny$ ที่คูณ a แล้วได้ $mb + nc$
	$(mx + ny)a = mb + nc$		ดังนั้น จะได้ $a \mid mb + nc$ #
	↓		
	คูณ a แล้วได้ $mb + nc$		

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

วิธีทำ สมมติให้ $a \mid b$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม m ที่ $ma = b$

$b \mid c$ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็ม n ที่ $nb = c$

สิ่งที่ต้องการ คือ $a \mid c$ นั่นคือ เราต้องทำให้ได้ว่า มีจำนวนเต็มซักตัว ที่ คูณ a แล้วได้ c

$ma = b$	เรามี $ma = b$ กับ $nb = c$ แต่เราต้องการความเกี่ยวข้องกันของ a กับ c
↓	
$nb = c$	จะเห็นว่า เราจะใช้ b เพื่อเชื่อมสองสมการนี้เข้าด้วยกันได้
$n(ma) = c$	โดยแทน $b = ma$ ในสมการ $nb = c$
$(nm)a = c$	จัดรูปนิดหน่อย จะได้ว่ามี nm ที่คูณ a แล้วได้ c
↓	
คูณ a แล้วได้ c	ดังนั้น จะได้ $a \mid c$ #

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดถูกต้อง

- | | |
|--|--|
| 1. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $a \leq b$ | 2. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $ac \mid b$ |
| 3. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $b \mid a$ | 4. ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid a$ แล้ว $a = b$ |
| 5. ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b - c$ | 6. ถ้า $a \mid b + c$ แล้ว $a \mid b$ และ $a \mid c$ |
| 7. ถ้า $a \mid bc$ แล้ว $a \mid b$ หรือ $a \mid c$ | 8. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid b$ แล้ว $ac \mid b$ |

2. จงหาค่า k ที่มากที่สุด ที่ $k - 2$ หาร 24 ลงตัว

3. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $a \mid b$ แล้ว $ac \mid bc$

2. ถ้า $a \mid b$ และ $c \mid d$ แล้ว $ac \mid bd$

4. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ นิยาม $a * b$ หมายถึง $a = kb$ สำหรับบางจำนวนเต็มบวก k
ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง [PAT 1 (ต.ค. 53)/25]

1. ถ้า $x * y$ และ $y * z$ แล้ว $(x + y) * z$

2. ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (yz)$

3. ถ้า $x * y$ และ $x * z$ แล้ว $x * (y + z)$

4. ถ้า $x * y$ แล้ว $y * x$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก นิยาม aRb หมายถึง a หารด้วย b ลงตัว ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้องบ้าง
[PAT 1 (พ.ย. 57)/4]

1. ถ้า xRy และ yRz แล้ว $xR(y+z)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก x, y และ z
2. ถ้า wRx และ yRz แล้ว $(wy)R(xz)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก w, x, y และ z

6. กำหนดให้ $r = \left\{ (x, y) \in I \times I \mid y = \frac{2x^2-8}{x^2+1} \right\}$ เมื่อ I แทนเซตของจำนวนเต็ม
ให้ $D_r = \{ x \mid (x, y) \in r \}$ และ $R_r = \{ y \mid (x, y) \in r \}$
จำนวนสมาชิกของเซต $D_r - R_r$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/7]

จำนวนเฉพาะ

“จำนวนเฉพาะ” คือ จำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ที่ไม่มีตัวไหนหารมันได้ลงตัว ยกเว้น 1, -1, ตัวมันเอง, -ตัวมันเอง
เช่น 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

“จำนวนประกอบ” คือ จำนวนบวกที่มากกว่า 1 ที่ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ
เช่น 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, ...

หนังสือบางเล่ม จะยอมให้จำนวนเฉพาะ
กับจำนวนประกอบ เป็นจำนวนเต็มลบได้

“การแยกตัวประกอบ” คือ การเขียนให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนต่างๆ

โดยเรามักจะแยกตัวประกอบจนสุด ให้อยู่ในรูปผลคูณของจำนวนเฉพาะ

เช่น
$$\begin{array}{ll} 6 = 2 \times 3 & 50 = 2 \times 5^2 \\ 72 = 2^3 \times 3^2 & 84 = 2^2 \times 3 \times 7 \\ 1305 = 3^2 \times 5 \times 29 & 6615 = 3^3 \times 5 \times 7^2 \end{array}$$

โจทย์ที่นิยมออกในเรื่องนี้คือ “สมการจำนวนเต็ม”

ซึ่งจะมีลักษณะคล้ายกับสมการปกติ เพียงแต่ต้องการคำตอบที่เป็นจำนวนเต็มเท่านั้น

- หลักในการแก้คือ
1. จัดตัวแปรมาอยู่ฝั่งเดียวกัน (อีกฝั่งเป็นตัวเลขอะไรก็ได้)
 2. แยกตัวประกอบฝั่งที่เป็นตัวแปร (ถ้าแยกไม่ได้ อนุญาตให้เติมตัวเลขอะไรก็ได้ทั้งสองฝั่ง จนกว่าจะแยกได้)
 3. อ้างว่า ฝั่งที่เป็นตัวเลข แยกตัวประกอบได้แค่ไหนก็แบบ แล้วเทียบแต่ละแบบกับฝั่งตัวแปร

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็ม x และ y ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $xy + y = x + 6$

วิธีทำ จัดรูปให้ตัวแปรมาอยู่ฝั่งเดียวกัน จะได้ $xy + y - x = 6$

จะเห็นว่าฝั่งซ้าย ดึงตัวร่วมได้เป็น $y(x + 1) - x = 6$

จะเห็นว่า ถ้าเติม -1 ให้ฝั่งซ้าย จะสามารถจับกลุ่มดึงตัวร่วมต่อได้ ดังนั้น เราจะเติม -1 ทั้งสองข้าง

$$\begin{array}{rcl} y(x + 1) - x - 1 & = & 6 - 1 \\ y(x + 1) - (x + 1) & = & 5 \\ (x + 1)(y - 1) & = & 5 \end{array}$$

5 ทางฝั่งขวา จะแยกตัวประกอบได้แค่ 4 แบบ คือ $(1)(5)$, $(-1)(-5)$, $(5)(1)$, $(-5)(-1)$

กรณี $x + 1 = 1$, $y - 1 = 5$ จะได้ $x = 0$, $y = 6$

กรณี $x + 1 = -1$, $y - 1 = -5$ จะได้ $x = -2$, $y = -4$

กรณี $x + 1 = 5$, $y - 1 = 1$ จะได้ $x = 4$, $y = 2$

กรณี $x + 1 = -5$, $y - 1 = -1$ จะได้ $x = -6$, $y = 0$

ดังนั้น จะมีทั้งหมด 4 คำตอบ คือ $(0, 6)$, $(-2, -4)$, $(4, 2)$, $(-6, 0)$

#

“ตัวประกอบของ n ” คือ จำนวนที่หาร n ลงตัว

เช่น ตัวประกอบของ 6 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ตัวประกอบของ 30 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$

ตัวประกอบของ 72 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$

ถ้าอยากรู้ว่าเขียนตัวประกอบครบหรือเปล่า ให้แยกตัวประกอบ n เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ

แล้วเอา (เลขชี้กำลัง + 1) มาคูณกันจะได้เท่ากับจำนวนตัวประกอบของ n (แบบไม่นับเครื่องหมาย $\pm$)

เช่น $200 = 2^3 \times 5^2$ จะมีตัวประกอบ $(3+1)(2+1) = 12$ ตัว

$450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$ จะมีตัวประกอบ $(1+1)(2+1)(2+1) = 18$ ตัว

$64 = 2^6$ จะมีตัวประกอบ $(6+1) = 7$ ตัว

$72 = 2^3 \times 3^2$ จะมีตัวประกอบ $(3+1)(2+1) = 12$ ตัว

หมายเหตุ: ถ้าโจทย์ถาม “จำนวนตัวประกอบทั้งหมด” ให้คูณ 2 เข้าไปด้วย เพราะต้องนับทั้งตัวประกอบที่เป็นบวกและลบ

ทฤษฎีเกี่ยวกับจำนวนเฉพาะที่ควรรู้ได้แก่

- ถ้า p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p \mid mn$ แล้ว $p \mid m$ หรือ $p \mid n$

แบบฝึกหัด

1. จงหาจำนวนตัวประกอบทั้งหมดของจำนวนต่อไปนี้

1. 12

2. 23

3. 360

4. 3750

2. ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $A = \{ (x, y) \in I \times I \mid xy - 21 = y - 4x \}$

แล้วจงหาจำนวนสมาชิกของเซต A [PAT 1 (มี.ค. 57)/21]

3. ให้ A แทนเซตของจำนวน $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติ ดังนี้

(ก) $a = b + d$

(ข) $(a + b + c + d)b = (a - c)d$

(ค) $2 + cd = a(c - 1)$

ถ้า M แทนค่ามากที่สุดที่ในเซต A และ m แทนค่าน้อยที่สุดในเซต A แล้วค่า $M - m$ เท่ากับเท่าใด

[PAT 1 (เม.ย. 57)/45]

ขั้นตอนวิธีการหาร

เราเรียนเรื่องการหารลงตัวไปแล้ว คราวนี้มาเรียนการหารแบบไม่ลงตัวกันบ้าง

ในเรื่องนี้ จะมีตัวที่เกี่ยวข้องอยู่ 4 ตัว คือ “ตัวตั้ง” , “ตัวหาร” , “ผลหาร” , “เศษ”

โดยความสัมพันธ์ของทั้ง 4 ตัวนี้ คือ $\text{ตัวตั้ง} = (\text{ตัวหาร} \times \text{ผลหาร}) + \text{เศษ}$

กฎคือ “เศษห้ามเป็นลบ” และ “เศษต้องน้อยกว่า |ตัวหาร|”

$$m = nq + r \text{ โดยที่ } 0 \leq r < |n|$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{)30} \\ \underline{21} \\ 9 \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{)30} \\ \underline{28} \\ 2 \\ \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7 \overline{)30} \\ \underline{35} \\ -5 \\ \times \end{array}$$

$$30 = (7 \times 4) + 2$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)-27} \\ \underline{-20} \\ -7 \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)-27} \\ \underline{-25} \\ -2 \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)-27} \\ \underline{-30} \\ 3 \\ \checkmark \end{array}$$

$$-27 = (5 \times -6) + 3$$

$$\begin{array}{r} -9 \overline{)58} \\ \underline{45} \\ 13 \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9 \overline{)58} \\ \underline{54} \\ 4 \\ \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -9 \overline{)58} \\ \underline{63} \\ -5 \\ \times \end{array}$$

$$58 = (-9 \times -6) + 4$$

$$\begin{array}{r} -6 \overline{)-40} \\ \underline{-36} \\ -4 \\ \times \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6 \overline{)-40} \\ \underline{-42} \\ 2 \\ \checkmark \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6 \overline{)-40} \\ \underline{-48} \\ 8 \\ \times \end{array}$$

$$-40 = (-6 \times 7) + 2$$

ดังนั้น จำนวนที่ หารด้วย n เหลือเศษ r คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป $nk + r$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มชั้กตัว

เช่น จำนวนที่หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 เขียนแทนด้วย $3k + 1$

จำนวนที่หารด้วย 7 เหลือเศษ 4 เขียนแทนด้วย $7k + 4$ เป็นต้น

และเนื่องจากเราแบ่ง เลขคู่ - เลขคี่ จากการหารด้วย 2 ดังนั้นจะได้ว่า

- เลขคู่คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป $2k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มชั้กตัว
- เลขคี่คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูป $2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มชั้กตัว

ตัวอย่าง จงหาผลหาร และเศษเหลือ จากการหาร -125 ด้วย -7

วิธีทำ ลองพยายามเขียน -125 ในรูป $(-7 \times q) + r$ โดย $0 \leq r < |-7|$ ดู

$$-125 = (-7 \times 17) + (-6) \quad \text{เศษเป็นลบ ใช้ไม่ได้}$$

$$-125 = (-7 \times 18) + 1 \quad 0 \leq 1 < |-7| \text{ ใช้ได้เลย}$$

ดังนั้น -125 หารด้วย -7 ได้ผลลัพธ์ 18 เหลือเศษ 1

#

ตัวอย่าง ถ้า n เป็นเลขคี่ จงหาเศษเหลือ เมื่อหาร $3n^2$ ด้วย 6

วิธีทำ เนื่องจาก n เป็นเลขคี่ ดังนั้น n ต้องสามารถเขียนได้ในรูป $2k + 1$

$$\text{ดังนั้น } 3n^2 = 3(2k + 1)^2 = 3((2k)^2 + 2(2k)(1) + 1^2)$$

$$= 3(4k^2 + 4k + 1) = 12k^2 + 12k + 3$$

โจทย์ต้องการเศษเหลือจากการหารด้วย 6 ดังนั้น เราต้องจัดให้อยู่ในรูป $6(\quad) + r$ แล้วเอา r ไปตอบ

เนื่องจาก $12k^2 + 12k + 3 = 6(2k^2 + 2k) + 3$ ดังนั้น จะได้เศษเท่ากับ 3

#

เทคนิคที่ควรทราบในการหาเศษจากการหารด้วยค่าต่างๆ มีดังนี้

เศษจากการหารด้วย 2 หรือ 5 : ให้ดูว่า หลักสุดท้าย หารด้วย 2 หรือ 5 เหลือเศษเท่าใด

เศษจากการหารด้วย 4 : ให้ดูว่า สองหลักท้าย หารด้วย 4 เหลือเศษเท่าใด

เศษจากการหารด้วย 8 : ให้ดูว่า สามหลักท้าย หารด้วย 8 เหลือเศษเท่าใด

เช่น 679 หารด้วย 2 เหลือเศษ 1 เพราะ หลักหน่วย 9 หารด้วย 2 เหลือเศษ 1

487 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 เพราะ สองหลักท้าย 87 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

1152 หารด้วย 8 ลงตัว เพราะ สามหลักท้าย 152 หารด้วย 8 ลงตัว

เศษจากการหารด้วย 3 หรือ 9 : ให้บวกเลขโดดทุกตัว (จะแบ่งกลุ่มเลขโดดอย่างไรก็ได้) แล้วดูว่าผลบวกหารด้วย 3 หรือ 9 เหลือเศษเท่าใด

เช่น 7820 $\rightarrow 7 + 8 + 2 + 0 = 17 \rightarrow 1 + 7 = 8$ ดังนั้น หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 , หารด้วย 9 เหลือเศษ 8

$\rightarrow$ จะแบ่งเป็น $78 + 20$, $7 + 820$, $7 + 82 + 0$ ได้หมดทุกแบบ

เศษจากการหารด้วย 11 : ให้เอา เลขโดดหลักคี่บวกกัน - เลขโดดหลักคู่บวกกัน แล้วดูว่าผลลบหารด้วย 11 เหลือเศษเท่าใด เช่น $35267 \rightarrow (3 + 2 + 7) - (5 + 6) = 1 \rightarrow$ ดังนั้น 35267 หารด้วย 11 เหลือเศษ 1

เทคนิคอีกอย่างหนึ่งในการหาเศษจากการหาร คือ เราสามารถ “กระจายการหาเศษเข้าไปใน $+$, $-$, $\times$ และ ส่วนของการยกกำลังได้ เช่น ถ้าต้องการหาเศษจากการหาร $(125)(57) + 12^{13}$ ด้วย 11

เราสามารถหาเศษจากการหาร 125, 57, และ 12 ด้วย 11 ก่อน ได้ 4, 2 และ 1 แล้วค่อยคิด $(4)(2) + 1^{13} = 9$

ดังนั้น เศษจากการหาร $(125)(57) + 12^{13}$ ด้วย 11 คือ 9

หมายเหตุ : เราไม่สามารถทำแบบนี้กับ “เลขชี้กำลัง” (เช่น 13 ในตัวอย่างข้างบน) ได้

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ 7 หาร $30n$ เหลือเศษ 5

วิธีทำ เราจะกระจายการหารเหลือเศษ เข้าไปในการคูณ เนื่องจาก 30 หารด้วย 7 เหลือเศษ 2

ดังนั้น เศษจากการหาร $30n$ ด้วย 7 จะเท่ากับเศษจากการหาร $2n$ ด้วย 7

เราจะแทน n ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้เศษ = 5

สังเกตว่า $2n$ เพิ่มขึ้นทีละ 2 ดังนั้น เราแค่บวกเพิ่มไปทีละ 2

และเนื่องจาก เราสนใจแค่เศษ

ดังนั้น ถ้าบวกเพิ่มแล้วเกิน 7 ก็เอา 7 หักออกได้ ดังตาราง

ซึ่งจากตาราง จะเห็นว่า $n = 6$ จะได้เศษ = 5

n	$2n \div 7$ เหลือเศษ
1	2
2	4 $\rightarrow +2$
3	6 $\rightarrow +2$
4	8 $\rightarrow 1$ $\rightarrow +2$
5	3 $\rightarrow +2$
6	5 $\rightarrow +2$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลหาร และเศษเหลือของการหารในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $31 \div 6$

2. $100 \div (-6)$

3. $(-50) \div 11$

4. $(-154) \div (-9)$

5. $1442 \div (-17)$

6. $(-1109) \div (-3)$

2. ถ้า n หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 แล้ว $5n + 1$ หารด้วย 10 จะเหลือเศษเท่าไร

3. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ 11 หาร $91n$ เหลือเศษ 7

4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $4 \mid a^2 - 1$

5. จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a + 1$ เป็นจำนวนคู่

6. กำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคี่

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้า ab เป็นจำนวนคู่ แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่

8. จงพิสูจน์ว่า $a + b$, $b + c$ และ $a + c$ จะมีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนเป็นจำนวนคู่

9. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับใดๆ และ r เป็นเศษเหลือจากการหาร n^2 ด้วย 11
จำนวนในข้อต่อไปนี้เป็นค่าของ r ไม่ได้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/47]

1. 1

2. 3

3. 5

4. 7

การแปลงเลขฐาน

เรื่องนี้จะทบทวนเรื่องการแปลงฐานเลข ระหว่างฐาน 10 กับฐานอื่นๆ

ถ้ามีเลขฐาน 10 แล้วจะแปลงเป็นเลขฐาน n ให้ตั้งหารสั้นไปเรื่อยๆจนสุด แล้วเขียนย้อนจากล่างขึ้นบน

แปลง 121 เป็นเลขฐาน 2

$$\begin{array}{r} 2 \overline{)121} \\ 2 \overline{)60} \text{ เศษ } 1 \\ 2 \overline{)30} \text{ เศษ } 0 \\ 2 \overline{)15} \text{ เศษ } 0 \\ 2 \overline{)7} \text{ เศษ } 1 \\ 2 \overline{)3} \text{ เศษ } 1 \\ 1 \text{ เศษ } 1 \end{array}$$

ดังนั้น $121 = 1111001_2$

แปลง 9027 เป็นเลขฐาน 5

$$\begin{array}{r} 5 \overline{)9027} \\ 5 \overline{)1805} \text{ เศษ } 2 \\ 5 \overline{)361} \text{ เศษ } 0 \\ 5 \overline{)72} \text{ เศษ } 1 \\ 5 \overline{)14} \text{ เศษ } 2 \\ 2 \text{ เศษ } 4 \end{array}$$

ดังนั้น $9027 = 242102_5$

แปลง 2479567 เป็นเลขฐาน 16

$$\begin{array}{r} 16 \overline{)2479567} \\ 16 \overline{)154972} \text{ เศษ } 15 \\ 16 \overline{)9685} \text{ เศษ } 12 \\ 16 \overline{)605} \text{ เศษ } 5 \\ 16 \overline{)37} \text{ เศษ } 13 \\ 2 \text{ เศษ } 5 \end{array}$$

ดังนั้น $2479567 = 25D5CF_{16}$

0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	A
11	B
12	C
13	D
14	E
15	F

แต่ถ้าจะแปลงฐานอื่นๆให้เป็นเลขฐาน 10 ก็ให้กระจายด้วยค่าประจำหลักดังนี้

$$\begin{aligned} 1111001_2 &= 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 64 + 32 + 16 + 8 + 0 + 0 + 1 \\ &= 121 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 242102_5 &= 2 \cdot 5^5 + 4 \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^3 + 1 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 \\ &= 6250 + 2500 + 250 + 25 + 0 + 2 \\ &= 9027 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25D5CF_{16} &= 2 \cdot 16^5 + 5 \cdot 16^4 + 13 \cdot 16^3 + 5 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 \\ &= 2097152 + 327680 + 53248 + 1280 + 192 + 15 \\ &= 2479567 \end{aligned}$$

ในกรณีที่ต้องการแปลงจากฐานที่ไม่ใช่ 10 เป็นฐานอื่นที่ไม่ใช่ 10 เรามักต้องแปลงเป็นฐาน 10 ก่อน

เช่น ถ้าต้องการแปลง 132_5 เป็นเลขฐาน 3 เราต้องแปลง 132_5 เป็นฐาน 10 ก่อน แล้วค่อยแปลงฐาน 10 เป็นฐาน 3

$$132_5 = 1 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 25 + 15 + 2 = 42$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{)42} \\ 3 \overline{)14} \text{ เศษ } 0 \\ 3 \overline{)4} \text{ เศษ } 2 \\ 1 \text{ เศษ } 1 \end{array}$$

จากนั้น แปลง 42 เป็นฐาน 3

ได้ 1120_3

ดังนั้น 132_5 แปลงเป็นเลขฐาน 3 ได้ 1120_3

ในกรณีที่เรากำลังต้องการแปลงระหว่างเลขฐาน 2 กับฐาน 4, 8, 16 เราจะมีวิธีลัด โดย “จับกลุ่มแปลง”

ฐาน 2 $\leftrightarrow$ ฐาน 4: จับกลุ่ม 2 หลัก

ฐาน 2 $\leftrightarrow$ ฐาน 8: จับกลุ่ม 3 หลัก

ฐาน 2 $\leftrightarrow$ ฐาน 16: จับกลุ่ม 4 หลัก

0	00
1	01
2	10
3	11

4	100
5	101
6	110
7	111

8	1000
9	1001
A	1010
B	1011

C	1100
D	1101
E	1110
F	1111

เช่น $1111001_2 = \underline{1} \ \underline{11} \ \underline{10} \ \underline{01}_2 = 1321_4$

$11011101_2 = \underline{11} \ \underline{011} \ \underline{101}_2 = 335_8$

$1011101_2 = \underline{101} \ \underline{1101}_2 = 5D_{16}$

$730_8 = 111 \ 011 \ 000_2$ เป็นต้น

แบบฝึกหัด

1. จงแปลงฐานของตัวเลขในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. แปลง 54 ให้เป็นเลขฐาน 3

2. แปลง 14 ให้เป็นเลขฐาน 4

3. แปลง 1201_3 ให้เป็นเลขฐาน 10

4. แปลง $1A_{16}$ ให้เป็นเลขฐาน 2

ตัวหารร่วมมาก

ตัว “หารร่วม” ของ a และ b คือ จำนวนที่หารทั้ง a และ b ลงตัว

เช่น 6 เป็นตัวหารร่วมของ 24 และ 36 เพราะ 6 หาร 24 และ 36 ลงตัว
 5 เป็นตัวหารร่วมของ 20, 35 และ 50 เพราะ 5 หาร 20, 35 และ 50 ลงตัว
 13 เป็นตัวหารร่วมของ 52 และ 78 เพราะ 13 หาร 52 และ 78 ลงตัว
 -2 เป็นตัวหารร่วมของ 52 และ 78 เพราะ -2 หาร 52 และ 78 ลงตัว
 1 เป็นตัวหารร่วมของ 52 และ 78 เพราะ 1 หาร 52 และ 78 ลงตัว

จะเห็นว่า ตัวหารร่วมเป็นเลขติดลบได้ และ 1 สามารถเป็นตัวหารร่วมของทุกจำนวน (เพราะ 1 หารทุกจำนวน ลงตัว)
 โดยตัวหารร่วม อาจมีได้หลายตัวสุดๆ เช่น ตัวหารร่วมของ 24 และ 36 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$
 หรืออาจจะมีแค่ไม่กี่ตัว เช่น ตัวหารร่วมของ 55 และ 72 มีแค่ ± 1 เท่านั้น

ตัว “หารร่วมมาก” (หรือเรียกสั้นๆว่า ห.ร.ม.) ของ a และ b แทนด้วยสัญลักษณ์ (a, b)

หมายถึง จำนวนที่มากที่สุด ที่หารทั้ง a และ b ลงตัว

เช่น ห.ร.ม. ของ 24 และ 36 คือ 12 เพราะ 12 เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่หาร 24 และ 36 ลงตัว
 ห.ร.ม. ของ 55 และ 72 คือ 1 เพราะ 1 เป็นจำนวนที่มากที่สุดที่หาร 55 และ 72 ลงตัว

สมบัติอย่างแรกที่เราควรรู้ คือ “ตัวหารร่วม” หาร “ตัวหารร่วมมาก” ลงตัวเสมอ

เช่น ตัวหารร่วมของ 24 และ 36 คือ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$
 ตัวหารร่วมมากของ 24 และ 36 คือ 12
 จะเห็นว่าทุกตัวใน $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ ต่างก็หาร 12 ลงตัว

ในกรณีที่ ห.ร.ม. = 1 เราจะเรียกจำนวนนั้นๆว่าเป็น “จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์” กัน

เช่น 55 และ 72 เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน เพราะ ห.ร.ม. ของ 55 และ 72 คือ 1
 55 และ 85 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน เพราะมี 5 เป็นตัวหารร่วม

เมื่อตอนประถม เราได้เรียนวิธีหา ห.ร.ม. มาบ้างแล้ว

เช่น ถ้าจะหา ห.ร.ม. ของ 888 และ 1200 จะมีวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 ตั้งหารสั้นไปจนไม่มีตัวหารร่วม

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 888 \quad 1200} \\ 2 \overline{) 444 \quad 600} \\ 2 \overline{) 222 \quad 300} \\ 3 \overline{) 111 \quad 150} \\ \underline{37 \quad 50} \end{array}$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$$

$$= 24$$

วิธีที่ 2 ตั้งสองแถว

$$\begin{array}{r|l} 2 & \begin{array}{r} 888 \\ 624 \\ 264 \\ 240 \\ 24 \end{array} & \begin{array}{r} 1200 \\ 888 \\ 312 \\ 264 \\ 48 \end{array} & \begin{array}{l} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{array} \\ \hline & \begin{array}{r} 888 \\ 888 \\ 312 \\ 264 \\ 48 \end{array} & & \\ \hline & \begin{array}{r} 48 \\ 48 \end{array} & & \\ \hline \end{array}$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 24$$

ในกรณีที่เลขเยอะๆ แล้วหาตัวหารร่วมไม่เจอ เขามักนิยมใช้วิธีตั้งสองแถวมากกว่า

หรือในกรณีที่ต้องการหา ห.ร.ม. ของ จำนวน 3 จำนวน จะมีวิธีดังนี้

วิธีที่ 1 ตั้งหารสั้น (ตัวหาร ต้องหารทุกจำนวนลงตัว)

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 888 \quad 1200 \quad 1524} \\ 2 \overline{) 444 \quad 600 \quad 762} \\ 3 \overline{) 222 \quad 300 \quad 381} \\ \underline{74 \quad 100 \quad 127} \end{array}$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

วิธีที่ 2 ตั้งสองแถว (เอา ห.ร.ม. คู่แรก ไปหา ห.ร.ม. กับตัวที่เหลือ)

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} 2 & \begin{array}{r} 888 \\ \underline{624} \\ 264 \\ \underline{240} \\ 24 \end{array} & \begin{array}{r} 1200 \\ \underline{888} \\ 312 \\ \underline{264} \\ 48 \end{array} & 1 & 2 \\ 5 & & & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c} 24 & 1524 & 63 \\ \underline{24} & \underline{1512} & \underline{12} \end{array}$$

$$\text{ห.ร.ม.} = 12$$

อย่างไรก็ตาม ในเรื่องนี้เราจะนำวิธีตั้งสองแถว มาเขียนในอีกรูปแบบหนึ่งซึ่งเรียกว่า “ขั้นตอนวิธีของยุคลิด”

หลักคือ แทนที่จะเขียนในรูปตั้งหารยาว ก็เขียนในรูป ตัวตั้ง = (ตัวหาร)(ผลหาร) + เศษ จนกว่าเศษจะเป็น 0 ดังนี้

$$\begin{array}{c|c|c} 2 & \begin{array}{r} 888 \\ \underline{624} \\ 264 \\ \underline{240} \\ 24 \end{array} & 1 \\ 5 & \begin{array}{r} 1200 \\ \underline{888} \\ 312 \\ \underline{264} \\ 48 \end{array} & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 1200 = (888)(1) + 312 \\ 888 = (312)(2) + 264 \\ 312 = (264)(1) + 48 \\ 264 = (48)(5) + 24 \\ 48 = (24)(2) \end{array}$$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 3848 และ 2775 ลงตัว

วิธีทำ ข้อนี้ต้องหา ห.ร.ม. ของ 3848 และ 2775 นั้นเอง

เราจะใช้ขั้นตอนวิธีของยุคลิด ตั้งหารในรูป ตัวตั้ง = (ตัวหาร)(ผลหาร) + เศษ ไปเรื่อยๆ จนกว่าเศษจะเป็น 0

$$\begin{aligned} 3848 &= (2775)(1) + 1073 \\ 2775 &= (1073)(2) + 629 \\ 1073 &= (629)(1) + 444 \\ 629 &= (444)(1) + 185 \\ 444 &= (185)(2) + 74 \\ 185 &= (74)(2) + 37 \\ 74 &= (37)(2) \end{aligned}$$

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ 3848 และ 2775 คือ 37

#

จะเห็นว่าที่ผ่านมา ห.ร.ม. เป็นค่าที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัว

แต่ถ้าใจหยั่งถามเกี่ยวกับการหารไม่ลงตัว บางทีเราอาจยังสามารถแปลงให้เป็นเรื่องการหารลงตัวได้

หลักคือ ถ้าหัก “เศษ” ออกจาก “ตัวตั้ง” ก็จะทำให้การหารนั้น ลงตัว ได้

เช่น 7 หาร n เหลือเศษ 3 จะเหมือนกับประโยค 7 หาร $(n - 3)$ ลงตัว
 a หาร 159 เหลือเศษ 7 จะเหมือนกับประโยค a หาร 152 ลงตัว
 3 หาร m และ n เหลือเศษเท่ากัน จะเหมือนกับประโยค 3 หาร $(m - n)$ ลงตัว

ตัวอย่าง จงหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 267 เหลือเศษ 3 และหาร 317 เหลือเศษ 5

วิธีทำ เราจะแปลงประโยคการหารเหลือเศษ ให้เป็นเรื่องการหารลงตัว ดังนี้

- “หาร 267 เหลือเศษ 3” แปลว่า “หาร 264 ลงตัว”
- “หาร 317 เหลือเศษ 5” แปลว่า “หาร 312 ลงตัว”

ดังนั้น เราต้องหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 264 และ 312 ลงตัว นั่นคือ หา ห.ร.ม. ของ 264 และ 312 นั่นเอง

$$\begin{aligned} 312 &= (264)(1) + 48 \\ 264 &= (48)(5) + 24 \\ 48 &= (24)(2) \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้คำตอบคือ 24

#

ตัวอย่าง จงหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 214, 301 และ 446 แล้วเหลือเศษเท่ากัน

วิธีทำ ข้อนี้ เราจะแยกเป็นคู่ๆ คือ แยกเป็นคู่ของ 214 กับ 301 และคู่ของ 301 กับ 446

- “หาร 214 และ 301 เหลือเศษเท่ากัน” แปลว่า “หาร $301 - 214 = 87$ ลงตัว”
- “หาร 301 และ 446 เหลือเศษเท่ากัน” แปลว่า “หาร $446 - 301 = 145$ ลงตัว”

ดังนั้น เราต้องหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 87 และ 145 ลงตัว นั่นคือ หา ห.ร.ม. ของ 87 และ 145 นั่นเอง

$$\begin{aligned} 145 &= (87)(1) + 58 \\ 87 &= (58)(1) + 29 \\ 58 &= (29)(2) \end{aligned}$$

ซึ่งจะได้คำตอบคือ 29

#

สิ่งสุดท้ายที่เราควรทำได้ คือ การเขียน ห.ร.ม. ในรูป “ผลรวมเชิงเส้น” ของตัวตั้ง

กล่าวคือ ถ้า d เป็น ห.ร.ม. ของ a กับ b แล้ว เราต้องรู้วิธีหาตัวเลขมาเติมประโยค $(?)a + (?)b = d$ ให้ได้

เช่น ห.ร.ม. ของ 8 กับ 14 คือ 2 เราต้องหาตัวเลขมาเติมประโยค $(?)8 + (?)14 = 2$ ให้ได้

$$\text{ลองสุ่มๆดู จะได้ } (2)8 + (-1)14 = 16 - 14 = 2$$

หรือ ห.ร.ม. ของ 9 กับ 14 คือ 1 เราต้องหาตัวเลขมาเติมประโยค $(?)9 + (?)14 = 1$ ให้ได้

$$\text{ลองสุ่มๆดู จะได้ } (-3)9 + (2)14 = -27 + 28 = 1$$

จะเห็นว่าถ้าตัวเลขเริ่มเยอะ จะเริ่มสุ่มไม่ไหว

เช่น ห.ร.ม. ของ 363 กับ 135 คือ 3 เราต้องหาตัวเลขมาเติมประโยค $(?)363 + (?)135 = 3$ ให้ได้

$$\text{สุ่มยังไงก็คงไม่ได้ว่า } (16)363 + (-43)135 = 4944 - 4941 = 3$$

ในกรณีนี้ เราจะเอาขั้นตอนวิธีของยุคลิด มา “ลุยย้อน” จากล่างขึ้นบนโดยมีขั้นตอนดังนี้

1. หา ห.ร.ม. ด้วยขั้นตอนวิธีของยุคลิด จากนั้น เอาแถวรองสุดท้าย (ที่ ห.ร.ม. เป็นเศษ) มาย้ายข้างให้ ห.ร.ม. อยู่ตัวเดียว เดี่ยวๆ

$$\begin{aligned} 363 &= (135)(2) + 93 \\ 135 &= (93)(1) + 42 \\ 93 &= (42)(2) + 9 \\ 42 &= (9)(4) + 6 \\ 9 &= (6)(1) + 3 &\longrightarrow 3 = 9 - (6)(1) \\ 6 &= (3)(2) \end{aligned}$$

2. จากนั้น เราจะย้ายข้างแบบเดียวกันในแถวก่อนหน้า เช่น $6 = 42 - (9)(4)$ แล้วแทนค่าย้อนกลับไปที่เรื่อยๆ โดยระหว่างที่ทำ เราจะไม่คูณตัวเลขในหลักซ้าย (363, 135, 93, 42, 9, 6) แต่จะทำเหมือนว่ามันเป็นตัวแปร เช่น $9 + (9)(4)$ จะคิดเหมือน $x + x(4)$ ซึ่งจะได้ $5x$

$$\begin{aligned}
 3 &= 9 - (6)(1) \\
 &= 9 - (42 - (9)(4)) \quad \rightarrow \text{จากแถวที่ 4 จะได้ } 6 = 42 - 9(4) \\
 &= 9 - 42 + (9)(4) \\
 &= (9)(5) - 42 \\
 &= (93 - (42)(2))(5) - 42 \quad \rightarrow \text{จากแถวที่ 3 จะได้ } 9 = 93 - (42)(2) \\
 &= (93)(5) - (42)(10) - 42 \\
 &= (93)(5) - (42)(11) \\
 &= (93)(5) - (135 - (93)(1))(11) \quad \rightarrow \text{จากแถวที่ 2 จะได้ } 42 = 135 - (93)(1) \\
 &= (93)(5) - (135)(11) + (93)(11) \\
 &= (93)(16) - (135)(11) \\
 &= (363 - (135)(2))(16) - (135)(11) \quad \rightarrow \text{จากแถวที่ 1 จะได้ } 93 = 363 - (135)(2) \\
 &= (363)(16) - (135)(32) - (135)(11) \\
 &= (363)(16) - (135)(43)
 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะสามารถเขียน 3 เป็นผลรวมเชิงเส้นได้เป็น $(16)363 + (-43)135$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาตัวหารร่วมมากของจำนวนต่อไปนี้

1. 84 และ 108

2. 576 และ 648

3. 45, 75 และ 105

4. 413, 531 และ 649

2. จำนวนในข้อใดต่อไปนี้ เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กัน

1. 126 และ 77

2. 311 และ 215

3. จงหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 390 เหลือเศษ 6 แต่หาร 224 ลงตัว
4. จงหาจำนวนที่มากที่สุด ที่หาร 313 , 514 และ 782 เหลือเศษเท่ากัน
5. จำนวนเต็มบวกที่หาร 51 และ 75 เหลือเศษเท่ากัน มีทั้งหมดจำนวน
6. จงหา ห.ร.ม. ของจำนวนต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียน ห.ร.ม. ในรูปผลรวมเชิงเส้น
 1. 48 และ 123

2. 391 และ 160

7. ถ้า a เป็น ห.ร.ม. ของ 403 และ 465 และ b เป็น ห.ร.ม. ของ 431 และ 465 แล้ว $a - b$ มีค่าเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 52)/2-2]

8. มีกล่องลูกหินสีดำจำนวน 221 ลูก และกล่องลูกหินสีขาวจำนวน 260 ลูก ต้องการแบ่งลูกหินทั้งสองกล่องนี้ออกเป็นกองเล็กๆ โดยที่

- (1) แต่ละกองมีสีเดียวกัน
- (2) ลูกหินแต่ละกองมีจำนวนเท่ากัน

ถ้าต้องการให้จำนวนลูกหินในกองเล็กๆเหล่านี้มีจำนวนมากที่สุด แล้วจะแบ่งได้กี่กอง [PAT 1 (มี.ค. 53)/46]

9. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และจำนวน 1059 , 1417 และ 2312 หารด้วย d แล้วมีเศษเหลือเท่ากัน คือ r แล้วค่าของ $d + r$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/47]
10. ถ้า d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และจำนวน 3456 , 2561 และ 1308 หารด้วย d มีเศษเหลือเท่ากัน คือ r แล้ว $d + r$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/31]
11. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุด ซึ่งมีสมบัติว่า n หาร 551 และ 731 เหลือเศษ r เท่ากัน หาร 1093 เหลือเศษ $r + 2$ แล้ว $\frac{r-1}{n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 51/1-4]

ตัวคูณร่วมน้อย

เรื่องนี้จะกลับกันกับเรื่องที่แล้วนิดหน่อย โดยจะเปลี่ยนจากตัวหาร เป็นตัวตั้งแทน
ตัว “คูณร่วม” ของ a และ b คือ จำนวนที่เป็นตัวตั้งให้ทั้ง a และ b หารลงตัว

เช่น 154 เป็นตัวคูณร่วมของ 12 และ 9 เพราะ 12 และ 9 หาร 154 ลงตัว
60 เป็นตัวคูณร่วมของ 2, 3 และ 5 เพราะ 2, 3 และ 5 หาร 60 ลงตัว
72 เป็นตัวคูณร่วมของ 8 และ 12 เพราะ 8 และ 12 หาร 72 ลงตัว
24 เป็นตัวคูณร่วมของ 8 และ 12 เพราะ 8 และ 12 หาร 24 ลงตัว
240 เป็นตัวคูณร่วมของ 8 และ 12 เพราะ 8 และ 12 หาร 240 ลงตัว

ตัว “คูณร่วมน้อย” (หรือเรียกสั้นๆว่า ค.ร.น.) ของ a และ b แทนด้วยสัญลักษณ์ $[a, b]$

หมายถึง จำนวนบวกที่น้อยที่สุด ที่เป็นตัวตั้งให้ทั้ง a และ b หารลงตัว

เช่น ค.ร.น. ของ 12 และ 9 คือ 36 เพราะ 36 เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่ 12 และ 9 หารลงตัว
ค.ร.น. ของ 10 และ 21 คือ 210 เพราะ 210 เป็นจำนวนที่น้อยที่สุดที่ 10 และ 21 หารลงตัว

จะเห็นว่า “ตัวคูณร่วมน้อย” หาร “ตัวคูณร่วม” ลงตัวเสมอ

เช่น ตัวคูณร่วมของ 8 และ 12 คือ 24, 48, 72, 96, 120, 144, ...

ตัวคูณร่วมน้อยของ 8 และ 12 คือ 24

จะเห็นว่า 24 หารทุกตัวใน 24, 48, 72, 96, 120, 144, ... ลงตัว

ดังนั้น ถ้าต้องการหา “ตัวคูณร่วม” ก็ให้หา ค.ร.น. ออกมาก่อน แล้วค่อยหาคำคูณ ค.ร.น. ไปเรื่อยๆ

เช่น ค.ร.น. ของ 10 และ 12 คือ 60 ดังนั้น ตัวคูณร่วมของ 10 และ 12 จะต้องอยู่ในรูป $60k$

จะได้ตัวคูณร่วมของ 10 และ 12 คือ 60, 120, 180, 240, 300, ...

วิธีหา ค.ร.น. เราจะตั้งหารสั้น

โดยแต่ละแถว ต้องมีตัวตั้งอย่างน้อย 2 ตัว หารลงตัว

ตัวที่หารไม่ลงตัว ก็ชักลงมาเฉยๆ

ตอนจบ ให้เอาตัวหารทุกตัว กับ ตัวตั้งที่เหลือ มาคูณกัน

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 90} \quad 108 \quad 168 \\ 2 \overline{) 45} \quad 54 \quad 84 \\ 3 \overline{) 45} \quad 27 \quad 42 \\ 3 \overline{) 15} \quad 9 \quad 14 \\ \quad 5 \quad 3 \quad 14 \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{ค.ร.น.} &= 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 3 \times 14 \\ &= 7560 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค.ร.น. จะมีหลายอย่างคล้ายกับ ห.ร.ม. คือเป็นตัวเลขที่เกี่ยวข้องกับการหารลงตัว

และถ้าโจทย์ถามเกี่ยวกับการหารไม่ลงตัว ก็สามารถใช่วิธีหาค่า “เศษ” ออกจาก “ตัวตั้ง” เหมือนเมื่อก่อน

สิ่งที่ต้องระวังคือ ในเรื่องนี้ เรามีตัวตั้งร่วมคือ ค.ร.น. แค่ว่าเดียว ดังนั้น ถ้ามี “เศษหลายค่า” จะไม่มีวิธีง่ายๆ

ในกรณีที่มีเศษหลายค่า มักจะต้องใช้แรงไล่แทนจนกว่าจะเจอค่าที่ต้องการ

สุดท้าย ในกรณีที่มี a กับ b แค่ 2 จำนวน จะมีสมบัติที่ควรรู้คือ

$$(\text{ห.ร.ม. ของ } a \text{ และ } b) \times (\text{ค.ร.น. ของ } a \text{ และ } b) = a \times b$$

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ที่ 70 และ 105หารลงตัว

วิธีทำ ขั้นตอนต้องหา ค.ร.น. ของ 70 และ 105 นั่นเอง

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 70} \quad 105 \\ 7 \overline{) 14} \quad 21 \\ \underline{2} \quad 3 \end{array}$$

จะได้ ค.ร.น. คือ $5 \times 7 \times 2 \times 3 = 210$

#

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ที่ 24, 75 และ 90 หารเหลือเศษ 3

วิธีทำ หาจำนวนที่ 24, 75 และ 90 หารลงตัวออกมาก่อนแล้วค่อยเอามาวก 3 ก็จะได้จำนวนที่หารเหลือเศษ 3

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \quad 75 \quad 90 \\ 3 \overline{) 12} \quad 75 \quad 45 \\ 5 \overline{) 4} \quad 25 \quad 15 \\ \underline{4} \quad 5 \quad 3 \end{array}$$

จะได้ ค.ร.น. คือ $2 \times 3 \times 5 \times 4 \times 5 \times 3 = 1800$

ดังนั้น จำนวนที่ 24, 75 และ 90 หารเหลือเศษ 3 คือ 1803

#

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่ง 8 หารเหลือเศษ 3 แต่ 11 หารเหลือเศษ 4

วิธีทำ ข้อนี้ลำบากหน่อย เพราะเศษของการหารทั้ง 2 ครั้ง ไม่เท่ากัน ครั้งแรกเหลือเศษ 3 แต่ครั้งหลังเหลือเศษ 4

ในกรณีนี้ จะไม่มีวิธีง่าย ๆ ต้องใช้วิธีไล่แทนเอา

โดยจะ (1) ไล่เขียนจำนวนที่ 8 หารเหลือเศษ 3 ออกมา แล้วหาว่าตัวไหน 11 หารเหลือเศษ 4

หรือจะ (2) ไล่เขียนจำนวนที่ 11 หารเหลือเศษ 4 ออกมา แล้วหาว่าตัวไหน 8 หารเหลือเศษ 3 ก็ได้

ปกติ เรานิยม (2) มากกว่า เพราะเลขเพิ่มทีละ 11 จะทำให้ไปถึงคำตอบเร็วกว่า

จำนวนที่หารด้วย 11 เหลือเศษ 4 จะอยู่ในรูป $11n + 4$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \dots$

นั่นคือ เราต้องหา n ที่ทำให้ $11n + 4$ หารด้วย 8 เหลือเศษ 3

เนื่องจาก 11 หารด้วย 8 เหลือเศษ 3

ดังนั้น $\frac{11n+4}{8}$ จะเหลือเศษเท่ากับ $\frac{3n+4}{8}$

สังเกตว่า $3n + 4$ เพิ่มทีละ 3 ดังนั้น เราแค่บวกเพิ่มไปทีละ 3

และเนื่องจากเราสนใจแค่เศษ ดังนั้น ถ้า +3 แล้วเกิน 8 ก็เอา 8 หักออกได้

จะเห็นว่าเมื่อ $n = 5$ จะได้เศษ = 3 ดังนั้น ตอบ $11(5) + 4 = 59$

n	$\frac{3n+4}{8}$ เหลือเศษ
0	4 $\rightarrow +3$
1	7 $\rightarrow +3$
2	10 $\rightarrow 2 \rightarrow +3$
3	13 $\rightarrow 5 \rightarrow +3$
4	16 $\rightarrow 8 \rightarrow 0 \rightarrow +3$
5	19 $\rightarrow 3$

#

ตัวอย่าง จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุด ซึ่ง 10, 12 และ 15 หาร $n - 3$ ลงตัว แต่ 11 หารเหลือเศษ 10

วิธีทำ ข้อนี้ลำบากอีกแล้ว เพราะเศษของการหารทั้ง 2 ครั้ง ไม่เท่ากัน

ดังนั้น เราจะหา n ที่ 10, 12 และ 15 หาร $n - 3$ ลงตัวก่อน แล้วค่อยไล่แทนว่าตัวไหน 11 หารเหลือเศษ 10

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 10} \quad 12 \quad 15 \\ 3 \overline{) 5} \quad 6 \quad 15 \\ 5 \overline{) 5} \quad 2 \quad 5 \\ \underline{1} \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

ค.ร.น. = $2 \times 3 \times 5 \times 2 = 60$

จะเห็นว่า ค.ร.น. ของ 10, 12, 15 คือ 60

ดังนั้น จำนวนที่ 10, 12, 15 หารลงตัว ต้องอยู่ในรูป $60k$

ดังนั้น $n - 3 = 60k$ จะได้ $n = 60k + 3$

เราต้องหา k ที่ทำให้ $\frac{60k+3}{11}$ เหลือเศษ 10

เนื่องจาก 60 หารด้วย 11 เหลือเศษ 5 ดังนั้น $\frac{60k+3}{11}$ เหลือเศษเท่ากับ $\frac{5k+3}{11}$

โดย $5k+3$ จะเพิ่มทีละ 5 และเราสนใจแค่เศษจากการหารด้วย 11 ดังนั้น ถ้าเกิน 11 ก็ลบ 11 ออกได้

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{60k+3}{11}$ เหลือเศษ	3	8	2	7	1	6	0	5	10

$\begin{array}{cccccccccc}
& \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow & \searrow & \swarrow \\
& +5 & +5 & +5 & +5 & +5 & +5 & +5 & +5 & +5 \\
& & & -11 & & -11 & & -11 & &
\end{array}$

จะได้เศษ 2 เมื่อ $k = 8$ ดังนั้น จำนวนนั้นคือ $60k + 3 = (60)(8) + 3 = 483$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหา ค.ร.น. ของจำนวนต่อไปนี้

1. 15 และ 24

2. 12, 15 และ 30

2. จงหาจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. หารด้วย 20, 24, และ 25 เหลือเศษ 2

2. หารด้วย 9 เหลือเศษ 6 แต่หารด้วย 11 เหลือเศษ 5

3. หารด้วย 10 และ 15 ลงตัว

4. หารด้วย 5 และ 7 เหลือเศษ 2

แต่หารด้วย 7 เหลือเศษ 1

แต่หารด้วย 11 เหลือเศษ 3

5. หารด้วย 12 เหลือเศษ 11 แต่หารด้วย 15 เหลือเศษ 14
3. ถ้า $(x, 27) = 9$ และ $[x, 27] = 135$ แล้ว จงหาค่า x
4. ให้ a เป็นจำนวนคู่บวก และ b เป็นจำนวนคี่บวก ข้อใดต่อไปนี้ถูก [A-NET 49/1-1]
 1. a และ b เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์
 2. $a + b$ เป็นจำนวนเฉพาะ
 3. ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ ห.ร.ม. ของ a และ $2b$
 4. ค.ร.น. ของ a และ b เท่ากับ ค.ร.น. ของ a และ $2b$

5. ถ้า x เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด ซึ่ง 9, 12 และ 15 หาร x ลงตัว แต่ 11 หาร x เหลือเศษ 7 แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-10]
6. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีค่าน้อยที่สุด ซึ่งหารด้วย 7 แล้วมีเศษเหลือเท่ากับ 4 ถ้า 9 และ 11 ต่างก็หาร $n - 2$ ลงตัวแล้ว n คือจำนวนใด [A-NET 50/2-1]
7. ถ้า a, b, c, d, e เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $5a = 4b = 3c = 2d = e$ และ $a + 2b + 3c + 4d + 5e$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุด แล้วค่าของ $a + 4b + 3c + 4d + e$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/29]

การหารลงตัว

- | | | | |
|------|-------|------|------|
| 1. 5 | 2. 26 | 3. - | 4. 1 |
| 5. 2 | 6. 4 | | |

จำนวนเฉพาะ

- | | | | |
|----------|--------|-------|-------|
| 1. 1. 12 | 2. 4 | 3. 48 | 4. 40 |
| 2. 4 | 3. 384 | | |

ขั้นตอนวิธีการหาร

- | | | | |
|---------------|--------------|-------------|-------------|
| 1. 1. 5 เศษ 1 | 2. -16 เศษ 4 | 3. -5 เศษ 5 | 4. 18 เศษ 8 |
| 5. -84 เศษ 14 | 6. 370 เศษ 1 | | |
| 2. 6 | 3. 6 | | |

4. สมมติให้ a เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $a = 2m + 1$ ดังนั้น $a^2 - 1 = (2m + 1)^2 - 1$
 $= 4m^2 + 4m + 1 - 1 = 4(m^2 + m)$ ดังนั้น มี $m^2 + m$ ซึ่ง $a^2 - 1 = (4)(m^2 + m)$
 ดังนั้น $4 \mid a^2 - 1$

5. สมมติให้ a เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น จะมี $m \in \mathbb{I}$ ซึ่ง $a = 2m + 1$ ดังนั้น $a + 1 = 2m + 1 + 1 = 2(m + 1)$
 ดังนั้น มี $m + 1$ ซึ่ง $a + 1 = (2)(m + 1)$ ดังนั้น $a + 1$ เป็นจำนวนคู่
 สมมติให้ $a + 1$ เป็นจำนวนคู่ ดังนั้น จะมี $m \in \mathbb{I}$ ซึ่ง $a + 1 = 2m$ ดังนั้น $a = 2m - 1 = 2(m - 1) + 1$
 ดังนั้น a เป็นจำนวนคี่

6. สมมติให้ a เป็นจำนวนคี่ จะได้ $a = 2m + 1$
 ดังนั้น $a^3 = 8m^3 + 12m^2 + 6m + 1 = 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1$ เป็นจำนวนคี่
 สมมติให้ a ไม่เป็นจำนวนคี่ จะได้ $a = 2m$
 ดังนั้น $a^3 = 8m^3 = 2(4m^3)$ ดังนั้น a^3 ไม่เป็นจำนวนคี่

7. จะพิสูจน์ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนคี่ แล้ว ab เป็นจำนวนคี่
 จะได้ $(2m + 1)(2n + 1) = 4mn + 2m + 2n + 1 = 2(2mn + m + n) + 1$ เป็นจำนวนคี่

8. สมมติให้ ทั้ง 3 จำนวนเป็นจำนวนคี่
 จะได้ $(a + b) + (b + c) + (a + c) = (2k + 1) + (2m + 1) + (2n + 1)$
 $2a + 2b + 2c = 2k + 2m + 2n + 3$

จะเห็นว่าฝั่งซ้ายเป็นจำนวนคู่ แต่ฝั่งขวาเป็นจำนวนคี่ เกิดการขัดแย้ง

9. 4

การแปลงเลขฐาน

1. 1. 2000_3 2. 32_4 3. 46 4. 11010_2

ตัวหารร่วมมาก

1. 1. 12 2. 72 3. 15 4. 59
 2. 2 3. 32 4. 67 5. 8
 6. 1. $3 = (18)(48) + (-7)(123)$ 2. $1 = (-9)(391) + (22)(160)$
 7. 30 8. 37 9. 343 10. 234
 11. $\frac{1}{18}$

ตัวคูณร่วมน้อย

1. 1. 120 2. 60
 2. 1. 602 2. 60 3. 120 4. 212
 5. 59
 3. 45 4. 4 5. 1800 6. 200
 7. 312

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Siwakorn Booncharoensinchai

คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

คุณ Gunta Serikijcharoen

คุณ Wabut Thongbor

คุณ Theerat Piyaanangul

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร ครับ