ระบบสมการเชิงเส้น
และเมทริกซ์

25 Oct 2019

สารบัญ

เมทริกซ์

เมทริกซ์ คือ กลุ่มของตัวเลขอะไรก็ได้ ที่เรียงเป็นสี่เหลี่ยม ภายในเครื่องหมาย [ ]

ตัวอย่างของเมทริกซ์ เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ 4 & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $[-5]$

$$\begin{array}{r c} & \begin{array}{cccc} \text{หลักที่ } 1 & \text{หลักที่ } 2 & \text{หลักที่ } 3 & \text{หลักที่ } 4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \text{แถวที่ } 1 \rightarrow \\ \text{แถวที่ } 2 \rightarrow \\ \text{แถวที่ } 3 \rightarrow \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

เราจะ เรียกตัวเลขแต่ละตัวในเมทริกซ์ว่า “สมาชิก”
เรียกแต่ละช่องในแนวนอนว่า “แถว”
เรียกแต่ละช่องในแนวตั้งว่า “หลัก”
และเรียก “แถว × หลัก” ว่า “มิติ” หรือ “ขนาด”

เช่น จากตัวอย่างข้างบน สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 2 คือ 2 สมาชิกแถวที่ 1 หลักที่ 4 คือ 2
สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 คือ 4 สมาชิกแถวที่ 4 หลักที่ 4 หาค่าไม่ได้
และ มิติ ของเมทริกซ์นี้ คือ 3×4

เรานิยมแทนเมทริกซ์ ด้วยตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวใหญ่ เช่น $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

และนิยมแทนสมาชิกในเมทริกซ์ ด้วยตัวอักษรเดียวกันตัวเล็ก ห้อยด้วยหมายเลขแถวกับหลัก

เช่น a_{21} = สมาชิกแถวที่ 2 หลักที่ 1 ของ $A = 1$

b_{32} = สมาชิกแถวที่ 3 หลักที่ 2 ของ $B = 3$

$a_{11} + a_{12} + a_{13} = 2 + 0 + (-1) = 1$

$b_{31} - b_{22} + b_{11} = (-2) - 3 + (-1) = -6$ เป็นต้น

เมทริกซ์จัตุรัส คือ เมทริกซ์ที่มีจำนวนแถวกับจำนวนหลักเท่ากัน เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $[6]$

และ เมทริกซ์ที่มี m แถว n หลัก สามารถแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $[a_{ij}]_{m \times n}$

เช่น $[a_{ij}]_{3 \times 2}$ เป็นสัญลักษณ์แทนเมทริกซ์ขนาด 3 แถว 2 หลัก เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนเมทริกซ์ $[a_{ij}]_{3 \times 2}$ เมื่อกำหนดให้ $a_{ij} = 2^i + j$

<u>วิธีทำ</u> $[a_{ij}]_{3 \times 2}$ จะเป็นเมทริกซ์ขนาด 3 แถว 2 หลัก $\rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$

โจทย์กำหนดให้ $a_{ij} = 2^i + j$ ดังนั้น $a_{11} = 2^1 + 1 = 3$ $a_{12} = 2^1 + 2 = 4$

$a_{21} = 2^2 + 1 = 5$ $a_{22} = 2^2 + 2 = 6$

$a_{31} = 2^3 + 1 = 9$ $a_{32} = 2^3 + 2 = 10$

ดังนั้น เมทริกซ์ในข้อนี้ คือ $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$ #

เมทริกซ์สองเมทริกซ์ จะเท่ากัน เมื่อสมาชิกทุกตำแหน่งเท่ากัน (ตำแหน่งต่อตำแหน่ง)
กล่าวคือ การสลับตำแหน่งของสมาชิก จะกลายเป็นอีกเมทริกซ์ ซึ่งไม่เท่ากับเมทริกซ์เดิม

เช่น $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\begin{bmatrix}4 & x+y\\ x & x+z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & y\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ x , y , z

<u>วิธีทำ</u> เมทริกซ์จะเท่ากันได้ สมาชิกทุกตำแหน่งต้องเท่ากัน (ตำแหน่งต่อตำแหน่ง)

นั่นคือ

$$\begin{bmatrix}4 & x+y\\ x & x+z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & 5\\ 2 & y\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 4 &= 4\\ x+y &= 5\\ x &= 2\\ x+z &= y \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการดังกล่าว จะได้ $x = 2$, $y = 3$, $z = 1$ #

เมทริกซ์สองเมทริกซ์ จะบวกลบกันได้ เมื่อมีจำนวนแถวเท่ากัน และจำนวนหลักเท่ากัน
โดยผลลัพธ์จะได้จากการนำสมาชิกที่ตำแหน่งตรงกัน มาบวกลบกัน

เช่น $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 5\\ 5 & 8\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\ 1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 4\end{bmatrix}$

$[3] + [5] = [8]$ $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$

แต่ $\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \rightarrow$ บวกกันไม่ได้ $\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} =$ ลบกันไม่ได้

เราสามารถนำตัวเลข มาคูณเมทริกซ์ได้ โดยให้แจกแจงตัวเลขที่มาคูณเข้าไปคูณสมาชิกทุกตัวของเมทริกซ์

เช่น $3 \times \begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$ $-1 \cdot \begin{bmatrix}-1\\ 2\\ -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ -2\\ 3\end{bmatrix}$

$\left(\frac{1}{2}\right)\begin{bmatrix}-4\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\ \frac{3}{2}\end{bmatrix}$ $2\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -8\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \cdot 2 = \begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ $0 \cdot \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

หมายเหตุ: "เมทริกซ์ศูนย์" คือ เมทริกซ์ที่สมาชิกทุกตัว $= 0$ เช่น $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$, $[0]$, ...

เราจะแทนเมทริกซ์ศูนย์ ด้วยสัญลักษณ์ $\underline{0}$

จะเห็นว่า ไม่ว่า A เป็นเมทริกซ์อะไรก็ตาม $0 \cdot A = A \cdot 0 = \underline{0}$ และ $\underline{0} + A = A + \underline{0} = A$ เสมอ

และเนื่องจาก $\underline{0} + A = A + \underline{0} = A$ ดังนั้น $\underline{0}$ เป็น "เอกลักษณ์การบวก" ของเมทริกซ์

และสุดท้าย "A ทรานสโพส" แทนด้วยสัญลักษณ์ A^t คือ การนำเมทริกซ์ A มาสลับแถวกับหลัก

เช่น $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$$

$$[3]^t = [3] \qquad \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 3 & 2\end{bmatrix}$$

และถ้าทรานสโพสซ้อนสองครั้ง จะทำให้กลับมาเป็นเมทริกซ์เดิม

เช่น $\left(\begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}^t\right)^t = \left(\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)^t = \begin{bmatrix}0 & 2\\ 3 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าของ
   1. $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$
   2. $\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^t - \left(2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\right)^t$

2. ถ้า $\begin{bmatrix}1 & a\\ 1 & 1\end{bmatrix}^t - 2\begin{bmatrix}-1 & b\\ c & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}c & c-b\\ b+d & 3d\end{bmatrix}$ แล้ว จงหาค่า a , b , c , d

3. ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง ถ้า $3\begin{bmatrix} 5^a & b \\ 2^c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^a & 6 \\ d-1 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5^a + b \\ 2^c & 2d \end{bmatrix}$
แล้วค่าของ $b + c$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/30]

4. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\begin{bmatrix} |x| & 1 \\ 2 & x - |y| \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} y & 3 \\ -1 & |y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 + x & 0 \\ 7 & 7 - y \end{bmatrix}^t$
แล้วค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/36]

เมทริกซ์คูณเมทริกซ์

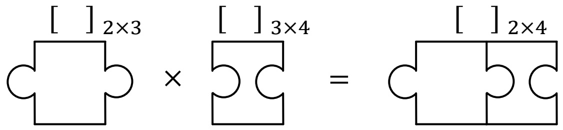
หัวข้อที่แล้ว ได้พูดเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์กับตัวเลขไปแล้ว
หัวข้อนี้จะพูดถึงการคูณเมทริกซ์กับเมทริกซ์ ซึ่งจะมีวิธีคิดที่ยุ่งยากกว่ามาก
ก่อนอื่น ต้องรู้ก่อนเลยว่า ผลคูณจะไม่ได้มาจากการนำสมาชิกที่ตำแหน่งตรงกัน มาคูณกัน

เช่น $\begin{bmatrix}2 & 3\\4 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 3\\2 & 1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}8 & 9\\8 & 5\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}8\\3\end{bmatrix}$

งานแรกที่ต้องทำ ก่อนจะลงมือคูณเมทริกซ์ คือ ต้องพิจารณาว่าเมทริกซ์ที่กำหนด “คูณกันได้หรือไม่”
เมทริกซ์สองเมทริกซ์ จะคูณกันได้ เมื่อ “ตัวหลังของมิติหน้า” เหมือนกันกับ “ตัวหน้าของมิติหลัง”
และมิติของผลคูณ จะเท่ากับ “ตัวหน้าของมิติหน้า” คูณ “ตัวหลังของมิติหลัง”

เช่น
$[\;]_{2\times3}\times[\;]_{3\times4}=[\;]_{2\times4}$ $\qquad$ $[\;]_{3\times1}\times[\;]_{1\times2}=[\;]_{3\times2}$
$[\;]_{3\times2}\times[\;]_{3\times3}=$ คูณกันไม่ได้ $\qquad$ $[\;]_{3\times3}\times[\;]_{3\times2}=[\;]_{3\times2}$
$[\;]_{2\times3}\times[\;]_{2\times1}=$ คูณกันไม่ได้ $\qquad$ $[\;]_{1\times3}\times[\;]_{3\times1}=[\;]_{1\times1}$
$[\;]_{1\times2}\times[\;]_{3\times2}=$ คูณกันไม่ได้ $\qquad$ $[\;]_{2\times2}\times[\;]_{2\times2}=[\;]_{2\times2}$

หมายเหตุ : เรานิยมเปรียบการคูณคูณเมทริกซ์ เหมือนการต่อจิ๊กซอว์
คือ มันจะต่อกันได้ เมื่อด้านหลังของตัวหน้า เหมือนกับด้านหน้าของตัวหลัง



ถ้าคูณไม่ได้ ก็ตอบคุณครูว่าคูณไม่ได้ แต่ถ้าคูณกันได้ ก็ต้องนั่งคิดกันต่อ โดยผลคูณจะต้องค่อยๆหาทีละตัว
ผลลัพธ์ในแถวที่ i หลักที่ j จะได้จาก “แถวที่ i ทั้งแถวของตัวตั้ง” กับ “หลักที่ j ทั้งหลักของตัวคูณ” มา “คูณๆๆ บวก” กัน

เช่น ถ้าต้องการหา $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

เนื่องจาก $[\;]_{2\times3}\times[\;]_{3\times3}$ จะได้ผลลัพธ์เป็นเมทริกซ์มิติ 2×3

ดังนั้น $\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\3 & 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 2 & -2\\0 & 1 & -1\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{bmatrix}$

โดยเรามีวิธีหา a_{11} , a_{12} , … , a_{23} ดังนี้

a_{12} = แถวที่ 1 ตัวตั้ง × หลักที่ 2 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= (2)(2) + (-1)(1) + (2)(3)$

$= \ 4 \ + \ -1 \ + \ 6$

$= \ 9$

a_{11} = แถวที่ 1 ตัวตั้ง × หลักที่ 1 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= (2)(1) + (-1)(0) + (2)(-1)$

$= \ 2 \ + \ 0 \ + \ -2$

$= \ 0$

a_{13} = แถวที่ 1 ตัวตั้ง × หลักที่ 3 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= (2)(-2) + (-1)(-1) + (2)(2)$

$= \ -4 \ + \ 1 \ + \ 4$

$= \ 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}_{2\times3} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times3}$$

a_{23} = แถวที่ 2 ตัวตั้ง × หลักที่ 3 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= (3)(-2) + (1)(-1) + (-1)(2)$

$= \ -6 \ + \ -1 \ + \ -2$

$= \ -9$

a_{21} = แถวที่ 2 ตัวตั้ง × หลักที่ 1 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= (3)(1) + (1)(0) + (-1)(-1)$

$= \ 3 \ + \ 0 \ + \ 1$

$= \ 4$

a_{22} = แถวที่ 2 ตัวตั้ง × หลักที่ 1 ตัวคูณ

$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$= (3)(2) + (1)(1) + (-1)(3)$

$= \ 6 \ + \ 1 \ + \ -3$

$= \ 4$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 9 & 1 \\ 4 & 4 & -9 \end{bmatrix}$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   1. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

   2. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

   3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

   4. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. $[-4] \cdot [-2]$

7. $[2] \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^2$

11. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^3$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. AB

2. BA

3. $(AB)C$

4. $A(BC)$

5. $B(A+C)$

6. $BA+BC$

7. $(AB)^t$

8. A^tB^t

3. ให้ x, y, z และ w สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & -1 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & -1 \\ z & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & w \end{bmatrix}$
ค่าของ $4w-3z+2y-x$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/32]

สรุปสมบัติที่ควรทราบเกี่ยวกับการคูณเมทริกซ์ มีดังนี้

- สลับที่การคูณ "ไม่ได้" นั่นคือ โดยปกติแล้ว $AB \neq BA$
- เปลี่ยนกลุ่มการคูณ "ได้" กล่าวคือ $(AB)C = A(BC)$

  เช่น ถ้ามี $\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ จะคูณคู่ไหนก่อนก็ได้ แต่<u>ห้ามสลับที่</u>
- กระจายในการบวกลบได้ กล่าวคือ $A(B+C) = AB + AC$

  $$(A-B)C = AC - BC$$

  แต่ตอนกระจาย ห้ามสลับซ้ายขวา นั่นคือ ถ้ากระจายมาจากทางไหน ก็ต้องเข้ามาคูณทางนั้น

  และเนื่องจากเมทริกซ์สลับที่การคูณไม่ได้ ดังนั้น สูตรหลายสูตร จะไม่เป็นจริงในเรื่องเมทริกซ์

  เช่น $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$ $\quad$ $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

  $\neq A^2 + 2AB + B^2$ $\quad$ $\neq A^2 - B^2$
- $(AB)^t = B^t A^t$ เช่น $\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \right)^t = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}^t \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}^t$

  $$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 1 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$
- "เอกลักษณ์การคูณ" ได้แก่ $[1]$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, …

  ถ้าเอาเมทริกซ์เหล่านี้ ไปคูณกับอะไรก็ตาม ไม่ว่าจะคูณจากฝั่งไหน จะได้ผลลัพธ์เท่าเดิมเสมอ

  เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

  เรานิยมแทนเอกลักษณ์การคูณด้วยสัญลักษณ์ I

  นั่นคือ ไม่ว่า A จะเป็นเมทริกซ์อะไรก็ตาม จะได้ว่า $A \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot A = A$

ดีเทอร์มิแนนต์

"ดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์จัตุรัส A" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\det(A)$ หมายถึงตัวเลขที่หาได้จากสูตรต่อไปนี้ (เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น ที่หาค่าดีเทอร์มิแนนต์ได้)

- กรณี 1×1: ถ้า $A = [\,a\,]$ จะได้ $\det(A) = a$

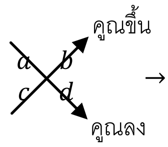
  เช่น $\det([\,3\,]) = 3$ $\quad$ $\det([\,-1\,]) = -1$

  $\det([\,0\,]) = 0$ $\quad$ $\det\left([\,-\sqrt{2}\,]\right) = -\sqrt{2}$

- กรณี 2×2: ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = ad - bc$

  เช่น $\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right) = 12 - 2 = 10$

  $\det\left(\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = -6 - 4 = -10$



→ คูณลง − คูณขึ้น

  หมายเหตุ: เรานิยมแทนสัญลักษณ์ $\det([\quad])$ ด้วย $|\quad|$

  เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -6 - (-1) = -5$

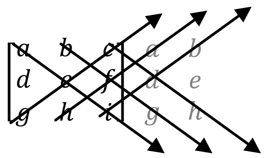
  และสังเกตว่า $\det(A) = \det(B)$ ได้ ถึงแม้ว่า $A \neq B$ เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$

  $\det(A) = 0$ ได้ ถึงแม้ว่า $A \neq \underline{0}$ เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 0$

- กรณี 3×3: ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$

  เช่น $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (8 + 6 + 1) - (-4 + 6 - 2) = 15$

  $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0 + 0 + 3) - (-6 + 0 + 2) = 7$



→ คูณลง − คูณขึ้น

- กรณี 4×4 ขึ้นไป สูตรสำหรับหา det จะเริ่มซับซ้อน และไม่มีให้ท่อง

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาดีเทอร์มิแนนต์ ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

   1. $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$
   2. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
   3. $[21]$
   4. $\left[-\frac{1}{2}\right]$

5. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 9 & 12 & 0 \\ -15 & 21 & 0 \\ 14 & 51 & 0 \end{bmatrix}$

นอกจากนี้ เรายังมีอีกวิธีที่จะหา det ได้ แต่ต้องรู้คำศัพท์เพิ่มอีก 2 คำ คือ "ไมเนอร์" และ "โคแฟกเตอร์"

<u>ไมเนอร์</u> ของ a_{ij} แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{M}_{ij}(A)$ หาได้จากการตัดแถวกับหลักของ a_{ij} ทิ้ง แล้วหา det ของส่วนที่เหลือ

เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ จะได้ ไมเนอร์ของ 4 $= \mathrm{M}_{11}(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3$

ไมเนอร์ของ 6 $= \mathrm{M}_{23}(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 18$

ไมเนอร์ของ 5 $= \mathrm{M}_{22}(A) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 29$

ถ้า $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $\mathrm{M}_{32}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$= (0+0-3)-(0+3+4) = -10$

$\mathrm{M}_{24}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

$= (0+0+0)-(0+2+0) = -2$

ถ้า $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ จะได้ $\mathrm{M}_{11}(C) = -4$, $\mathrm{M}_{21}(C) = 2$ เป็นต้น

<u>แบบฝึกหัด</u>

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1. $\mathrm{M}_{11}(B)$
2. $\mathrm{M}_{12}(A)$
3. $\mathrm{M}_{22}(B)$
4. $\mathrm{M}_{14}(C)$

<u>โคแฟกเตอร์</u> ของ a_{ij} แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{C}_{ij}(A)$ หาได้จากการนำไมเนอร์ $\mathrm{M}_{ij}(A)$ มาคูณกับ $(-1)^{i+j}$
นั่นคือ ถ้า $i+j$ เป็นคี่ ให้ตอบ $-\mathrm{M}_{ij}(A)$ แต่ถ้าเป็นคู่ ให้ตอบ $\mathrm{M}_{ij}(A)$ เหมือนเดิม
จะเห็นว่า ตำแหน่งที่ $i+j$ เป็นคี่ ก็คือ ตำแหน่งตารางหมากฮอสดังรูป นั่นเอง

$$\begin{matrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{matrix}$$

เช่น ถ้า $A=\begin{bmatrix}7 & 5 & 6\\ 2 & 8 & 3\\ 1 & 4 & 9\end{bmatrix}$ จะได้ โคแฟกเตอร์ของ 4 $=\mathrm{C}_{32}(A) = -\mathrm{M}_{32}(A) = -(21-12) = -9$

โคแฟกเตอร์ของ 7 $=\mathrm{C}_{11}(A) = \mathrm{M}_{11}(A) = 72-12 = 60$

ถ้า $B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1\end{bmatrix}$ จะได้ $\mathrm{C}_{12}(B) = -\mathrm{M}_{12}(B) = -\big((-2)-(4+1)\big) = 7$

$\mathrm{C}_{22}(B) = \mathrm{M}_{22}(B) = (0)-(-3) = 3$

ถ้า $C=\begin{bmatrix}3 & -2\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ จะได้ $\mathrm{C}_{21}(B) = -\mathrm{M}_{21}(B) = -(-2) = 2$

$\mathrm{C}_{22}(B) = \mathrm{M}_{22}(B) = 3$

<u>แบบฝึกหัด</u>

3. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{bmatrix}$ และ $C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 1 & -1 & -1 & 0\end{bmatrix}$ จงหาค่าของ

1. $\mathrm{C}_{21}(B)$
2. $\mathrm{C}_{21}(A)$
3. $\mathrm{C}_{11}(B)$
4. $\mathrm{C}_{22}(C)$

หลังจากที่รู้จักกับโคแฟกเตอร์แล้ว เราจะมีวิธีหา det เพิ่มอีกหนึ่งวิธี

โดยข้อดีของวิธีนี้ คือ สามารถหา det ของเมทริกซ์ 4×4 , 5×5 , 6×6 , … ได้ด้วย ซึ่งจะมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือกแถวหรือหลักที่จะใช้หา det โดยจะใช้แถวไหนหรือหลักไหนก็ได้ แต่ควรเลือกแถวหรือหลักที่มี 0 เยอะๆ

   เช่น ถ้าจะหา $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ จะใช้แถวที่หนึ่งก็ได้ แต่ถ้าใช้แถวที่สอง หรือหลักที่หนึ่ง จะคิดเลขน้อยกว่า

2. ในแถวหรือหลักที่เลือก ให้เอาแต่ละตัว คูณกับโคแฟกเตอร์ของมัน ได้เท่าไหร่ เอามาบวกกัน ตอบเป็นค่า det

   และ ถ้าสมาชิกตัวไหนเป็น 0 ให้เราข้ามตัวนั้นไปเลย ไม่ต้องหาโคแฟกเตอร์

   เช่น ถ้าเลือกแถวที่หนึ่ง $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

   โคแฟกเตอร์ของ $4 = 10$

   โคแฟกเตอร์ของ $-2 = -(-12) = 12$

   โคแฟกเตอร์ของ $-1 = 6$

   ดังนั้น $\det = (4)(10) + (-2)(12) + (-1)(6)$

   $= 10$

   ถ้าเลือกแถวที่สอง $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

   โคแฟกเตอร์ของ $0 = ?$ (ไม่ต้องหา)

   โคแฟกเตอร์ของ $2 = 9$

   โคแฟกเตอร์ของ $-4 = -(-2) = 2$

   ดังนั้น $\det = (0)(?) + (2)(9) + (-4)(2)$

   $= 10$ เท่ากันกับแบบแรก

   ถ้าเลือกหลักที่หนึ่ง $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

   โคแฟกเตอร์ของ $4 = 10$

   โคแฟกเตอร์ของ $0 = ?$ (ไม่ต้องหา)

   โคแฟกเตอร์ของ $-3 = 10$

   ดังนั้น $\det = (4)(10) + (0)(?) + (-3)(10)$

   $= 10$ เท่ากันกับสองแบบแรก

จะเห็นว่า ไม่ว่าเราเลือกแถวไหน หรือหลักไหน ก็จะได้ค่า det เท่ากันหมด

ดังนั้น เพื่อให้คิดเลขน้อยๆ เราจะนิยมเลือกแถวหรือหลักที่มี 0 เยอะๆ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้เป็น 4×4 ไม่มีสูตร ดังนั้น ต้องหา det ด้วยโคแฟกเตอร์

จะเห็นว่าควรใช้หลักที่สาม เพราะมีศูนย์เยอะที่สุด $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$\det A = (-2)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)(1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-1)\,[(-1-1)-(1-1)] + (1)(1)[(2-3)-(-2+3)] = -6 \qquad \#$$

แบบฝึกหัด

4. จงหาดีเทอมิแนนต์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้ด้วยวิธีโคแฟกเตอร์

1. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

และสุดท้าย สมบัติของ $\det$ มีดังนี้

- $\det$ กระจายในคูณ หรือ ยกกำลัง ได้ แต่กระจายในบวกลบไม่ได้

  เช่น $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

  $\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^5\right) = \left(\det\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\right)^5$

  แต่ $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\right) \neq \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

- $\det(A) = \det(A^t)$ เช่น $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

- ถ้า A มีแถวหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งแถว (หรือมีหลักหนึ่งเป็นศูนย์ทั้งหลัก) จะได้ $\det(A) = 0$ ทันที

  เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

- ถ้า A มีสองแถวไหนซ้ำกัน (หรือมีสองหลักไหนซ้ำกัน) จะได้ $\det(A) = 0$ ทันที

  เช่น $\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$

- ถ้าสลับสองแถวไหน (หรือสองหลักไหน) จะทำให้ค่า det เปลี่ยนเป็นลบของ det เดิม ต่อการสลับ 1 ครั้ง

  เช่น ถ้ากำหนดให้ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$ จะได้ $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$

  และ $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 3$

- ถ้าแถวใดแถวหนึ่ง (หรือหลักใดหลักหนึ่ง) เพิ่มเป็น k เท่า จะทำให้ค่า det เปลี่ยนเป็น k เท่าของ det เดิม

  เช่น ถ้ากำหนดให้ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$ จะได้ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 10$

  และ $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 3 & -9 & -12 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -30$

- $\det(kA) = k^n \det(A)$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ และ k เป็นตัวเลขอะไรก็ได้ที่มาคูณเมทริกซ์

  เพราะ kA คือ เอา k คูณทุกแถว ทำให้ $\det(kA)$ เพิ่มเป็น k^n เท่าของของเดิม

  เช่น ถ้ากำหนดให้ $\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$

  จะได้ $\det(2A) = \begin{vmatrix} -4 & 2 & -2 \\ -2 & 6 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2^3 \times 5 = 40$

- ถ้า A มีสมาชิก<u>ใต้แนวเฉียงลง</u> เป็น 0 หมด (หรือ<u>เหนือแนวเฉียงลง</u> เป็น 0 หมด)

  จะได้ $\det(A) =$ ผลคูณสมาชิกในแนวเฉียงลง

  เช่น $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(-3)(5) = -30$

  $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-2)(2)(3) = 12$

- ถ้า เอาแถวหนึ่ง บวกหรือลบด้วย (k คูณอีกแถว) หรือ เอาหลักหนึ่ง บวกหรือลบด้วย (k คูณอีกหลัก)

  เมื่อ k เป็นตัวเลขอะไรก็ตาม จะ<u>ไม่</u>ทำให้ ค่า det เปลี่ยน

  เช่น เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ เอาแถว 3 บวกด้วย 2 คูณแถว 1 จะได้เป็น $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

  จากสมบัติข้อนี้ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ มี det เท่ากัน

  ประโยชน์ของสูตรนี้ เพื่อใช้เปลี่ยนรูปเมทริกซ์ที่จะหา det ให้ "มี 0 เยอะๆ" ก่อน เพื่อหา det ได้ง่ายขึ้น

หมายเหตุ : เรานิยมใช้ R เป็นสัญลักษณ์แทน “แถว” และ C เป็นสัญลักษณ์แทน “หลัก”

เช่น R_1 แทน แถวที่ 1 , R_3 แทน แถวที่ 3 , C_2 แทน หลักที่ 2

$R_3 + 2R_1$ แทน “เอาแถว 3 บวกด้วย 2 คูณแถว 1”

ตัวอย่างการใช้สัญลักษณ์ ในสมบัตินี้ เช่น

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \overset{R_3+2R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2-3C_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_2+R_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เป็น 4×4 ต้องหาด้วยโคแฟกเตอร์ โดยเราจะเปลี่ยนรูปเมทริกซ์ให้มี 0 เยอะๆ ก่อน ดังนี้

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_2-R_1 \\ R_3+2R_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4+R_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

หา det โดยใช้หลักที่ 1 จะได้ $\mathrm{C}_{11}(A) = \mathrm{M}_{11}(A) = (6) - (-5) = 11$

ดังนั้น $\det = (1)(11) = 11$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det[A(B+C)]$ เท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

ค่าของ $\det(2A^t + BC^2 + B^tC)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/12]

7. กำหนดเมทริกซ์ A และ B ดังนี้

$A = \begin{bmatrix} x^2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & x \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} -2 & -4x \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\det(2A) = -76$ แล้ว

เมทริกซ์ C ในข้อใดต่อไปนี้ ที่ทำให้ค่าของ $\det(BC)$ อยู่ภายในช่วง $(-100,\ -50)$ [A-NET 51/1-17]

1. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
2. $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ B เป็นเมทริกซ์ใดๆ มีมิติ 2×2

ให้ x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\det(A^2 + x\mathrm{I}) = 0$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 57)/7]

1. $\det(A + x\mathrm{I}) = 0$
2. $\det(A^2 + x\mathrm{I} - B) = \det(B^t)$

9. ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/27]

1. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่ $abc = 1$

   และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3 แล้ว $\det(A^2 + A + \mathrm{I}) = 0$

2. ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$

   เมื่อ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว $\det(B) = -18$

10. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 5 & a & -a \end{vmatrix} = -17$

แล้วค่าของ $\begin{vmatrix} 5+2a & 2 & 5 \\ 8+a & 2b & a \\ 2-a & 0 & -a \end{vmatrix}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 58)/36]

11. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $AB + 3A = 2\mathrm{I}$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $x + y$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/13]

12. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $(A+B)^2 - 2AB = A^2 + B^2$ แล้ว $\det(A)$ เท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-6]

13. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ x & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $\mathrm{C}_{12}(A) = 4$ แล้ว $\det(2A)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 50/2-4]

14. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & x & 2 \\ 2 & 1 & y \end{bmatrix}$ โดยที่ x และ y เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\mathrm{C}_{11}(A) = 13$ และ $\mathrm{C}_{21}(A) = 9$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/21]

อินเวอร์สการคูณ

อินเวอร์สการคูณ ของ A แทนด้วยสัญลักษณ์ A^{-1} หมายถึง เมทริกซ์ที่คูณ A แล้วหักกันกลายเป็นเอกลักษณ์ I (ไม่ว่าจะคูณทางซ้าย หรือคูณทางขวาก็ตาม)

เช่น อินเวอร์สการคูณของ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ คือ $\begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

เพราะ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3/2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$

สูตรสำหรับหาอินเวอร์สการคูณ มีดังนี้ (เฉพาะเมทริกซ์จัตุรัสเท่านั้น ที่จะหาอินเวอร์สการคูณได้)

- กรณี 1×1: ถ้า $A = [\, a \,]$ จะได้ $A^{-1} = \left[\, \frac{1}{a} \,\right]$
  เช่น $[\, 3 \,]^{-1} = \left[\frac{1}{3}\right]$, $\left[-\sqrt{2}\,\right]^{-1} = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, $[\, 0 \,]^{-1} =$ หาอินเวอร์สไม่ได้

- กรณี 2×2: ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$
  เช่น $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(2)(-4)-(-2)(3)} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$
  $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(3)(1)-(-2)(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
  $\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(-1)(6)-(3)(-2)} \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} =$ หาอินเวอร์สไม่ได้

- กรณี 3×3 ขึ้นไป สูตรสำหรับหา A^{-1} จะเริ่มซับซ้อน และไม่มีให้ท่อง

จะเห็นว่า ในกรณีที่ $\det A = 0$ เวลาแทนสูตร จะได้ ส่วนเป็น 0 ทำให้หาค่า A^{-1} ไม่ได้
ในกรณีนี้ ให้ตอบว่า A <u>ไม่มี</u>อินเวอร์สการคูณ

ถ้า A^{-1} หาค่า<u>ไม่</u>ได้ เราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์เอกฐาน (Singular Matrix)

ถ้า A^{-1} หาค่าได้ เราจะกล่าวว่า A เป็นเมทริกซ์<u>ไม่</u>เอกฐาน (Non-singular Matrix)

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่า เมทริกซ์ต่อไปนี้ เป็น Singular หรือ Non-singular พร้อมทั้งหาอินเวอร์ส ถ้าเป็น Non-singular

   1. $\left[\frac{1}{3}\right]$
   2. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
   3. $\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
   4. $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

นอกจากนี้ เรายังมีอีกวิธีที่จะหา A^{-1} ได้ โดยใช้โคแฟกเตอร์ มาสร้าง "เมทริกซ์ผูกพัน" ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. หาโคแฟกเตอร์ของสมาชิก "ทุกตัว" ของ A แล้วนำโคแฟกเตอร์เหล่านั้น มาสร้างเป็นเมทริกซ์

   เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ จะได้ $C_{11}(A) = -4 \quad C_{12}(A) = 2$

   $C_{21}(A) = -3 \quad C_{22}(A) = 2$

   นำโคแฟกเตอร์มาสร้างเป็นเมทริกซ์ จะได้ $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

   ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $C_{11}(A) = 1 \quad C_{12}(A) = -2 \quad C_{13}(A) = 2$

   $C_{21}(A) = 2 \quad C_{22}(A) = 2 \quad C_{23}(A) = 1$

   $C_{31}(A) = 1 \quad C_{32}(A) = 1 \quad C_{33}(A) = 2$

   นำโคแฟกเตอร์มาสร้างเป็นเมทริกซ์ จะได้ $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

2. นำเมทริกซ์ของโคแฟกเตอร์ในขั้นที่ 1 มาทรานสโพส

   เราจะเรียกเมทริกซ์ที่ได้ ว่า "เมทริกซ์ผูกพัน" (Adjoint matrix) ของ A แทนได้ด้วยสัญลักษณ์ $\operatorname{adj}(A)$

   เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ จะได้ $C(A) = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $C(A) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

3. สุดท้าย ตอบ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \operatorname{adj}(A)$

   เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   ถ้า $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ จะได้ $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือไม่ ถ้าไม่ จงหาอินเวอร์สการคูณ

<u>วิธีทำ</u> จะหาว่าเป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือไม่ ต้องพิจารณาว่า $\det = 0$ หรือไม่

$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2+2) - (1) = 3$ ดังนั้น เป็น Non-singular หาอินเวอร์สได้

หาโคแฟกเตอร์ของทุกตัว แล้วนำมาสร้างเมทริกซ์ จะได้ $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

จะได้ $\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

2. จงหาอินเวอร์สการคูณของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

สุดท้าย สมบัติของอินเวอร์สมีดังนี้

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

  เช่น ถ้าต้องการหา $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\right)$ ทำแบบตรงๆก็ต้องไปหา $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ ก่อน แล้วค่อยหา det

  $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ แล้วค่อยหา det ได้ $(1)(-2)-(1)(-1) = -1$

  หรือจะใช้สมบัติ $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ ก็ได้ จะได้ $\det\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -1$

  จะเห็นว่าแบบหลังนี้ เราไม่ต้องเหนื่อยหา A^{-1}

- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ (ข้อนี้ คล้ายๆสมบัติของทรานสโพส $(AB)^t = B^tA^t$)

  เช่น $\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

- $A \cdot \operatorname{adj}(A) = \operatorname{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \mathrm{I}$

- $\det(\operatorname{adj}(A)) = (\det(A))^{n-1}$ เมื่อ A เป็นเมทริกซ์มิติ $n \times n$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ จงหา $\det(A^2 \cdot \mathrm{adj}(B) \cdot C^{-1})$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\det$ กระจายใน คูณ ยกกำลัง อินเวอร์สได้

จะได้ $\det(A^2 \cdot \mathrm{adj}(B) \cdot C^{-1}) = (\det A)^2 \cdot \det(\mathrm{adj}\, B) \cdot (\det C)^{-1}$

$= (\det A)^2 \cdot (\det B)^{2-1} \cdot (\det C)^{-1}$

$= 2^2 \cdot 5 \cdot \frac{1}{-1} = -20$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$ และ $C = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ จงหาว่า ABC เป็นเมทริกซ์เอกฐานหรือไม่

4. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน

   และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S

   ถ้า $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ $\det(((A^t)^{-1})^t)^{-1}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/33]

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 4 \end{bmatrix}$, $\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab \neq 0$ และเมทริกซ์ A สอดคล้องกับสมการ $2(A - \mathrm{I})^{-1} = 4\mathrm{I} - A$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/7]

   1. $ab = 2$
   2. $\det(3A^2A^tA^{-1}) = 324$

6. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det B \neq 0$ ถ้า $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $\det(B^t C B^{-1}) = -4$ แล้ว $\det(C^t A C)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/33]

7. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 8 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 3 หลักที่ 1 ของ A^{-1} เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 52)/2-11]

8. กำหนดให้ $A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ สมาชิกในแถวที่ 2 และหลักที่ 3 ของ A^{-1} เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 52)/22]

9. กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็มและ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่มี $\det A = 3$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์มีมิติ 2×2 โดยที่ $BA + BA^{-1} = 2\mathrm{I}$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 2×2 แล้วค่าของ $\det B$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 54)/12]

1. $[1, 2]$ 2. $[-1, 0]$ 3. $[0, 1]$ 4. $[-2, -1]$

10. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน (nonsingular matrix) มิติ 3×3 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3

ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c, d, e, f, g, h และ i เป็นจำนวนจริง และ $A^3 = 2\mathrm{I}$, $\det(C^{-1}) = 4$ และ

$B^t C = \begin{bmatrix} -3g & -3h & -3i \\ -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(B)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/30]

11. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์จัตุรัสมิติเท่ากัน โดยที่ $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) \neq 0$ ถ้า $\det(A^{-1} + B^{-1}) \neq 0$ และ $\det(A + B) \neq 0$ แล้ว $(A + B)^{-1}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 57)/27]

1. $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})A^{-1}$ 2. $B^{-1}(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A^{-1}$
3. $B(A^{-1} + B^{-1})A$ 4. $B(A^{-1} + B^{-1})^{-1}A$

12. กำหนดให้ a, b, c, d, x และ y เป็นจำนวนจริง และ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ และ } \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ถ้า $A^2 = \mathrm{I}$ และ $AB = 2C$ แล้ว ค่าของ $\det(B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/13]

13. ถ้า $\det\left(2\begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}^{-1}\right) = \frac{1}{x-1}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-12]

14. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-x & 2 & 2x \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\mathrm{C}_{22}(A) = 14$ แล้ว $\det(\mathrm{adj}(A))$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-4]

15. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ ที่มีมิติ 3×3 และ $\det(A) \neq 0$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/13]
    1. $(\det(A))^3 = \det(\operatorname{adj}(A))$
    2. ถ้า $A^2 = 2A$ แล้ว $\det(A) = 2$

16. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติ 2×2 และ $\det(A) = 4$
ถ้า I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์และ $A - 3\mathrm{I}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน แล้ว $\det(A + 3\mathrm{I})$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ก.ค. 52)/21]

17. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) > 0$, $\det(A\operatorname{adj}A) - 2(\det A)^2 - 3\det A = 0$
และ $AB = I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง
[PAT 1 (มี.ค. 58)/21]
    1. $7\det B - \det A^t < 0$
    2. $\det(2A - 3\operatorname{adj}B) = 2$

18. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$ และ $\det(\mathrm{I} - A^{-1}) = 0$, $x > 0$
จงหาค่าของ $\det\left[\frac{1}{2}A^{-1}(3\mathrm{I} - 2A^t)\right]$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/32]

19. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $abcd = 9$ และ $ad \neq bc$ ถ้า $AB^{-1} = B^{-1}A$ และ $\det(A^tB) = -24$ แล้วค่าของ $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 58)/26]

20. ให้ a, b, c, d, t เป็นจำนวนจริง ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ โดยที่ $\det A = t \neq 0$ และ $\det(A + t^2A^{-1}) = 0$ แล้วค่าของ $\det(A - t^2A^{-1})$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/31]

สมการเมทริกซ์

สมการเมทริกซ์ จะคล้ายๆกับสมการที่เราเคยเจอ เพียงแต่คราวนี้จะเป็นเมทริกซ์บวกลบคูณกัน โดยเรานิยมแทน เมทริกซ์ที่เป็นตัวแปร ด้วยตัวอักษร X

วิธีแก้ จะทำเหมือนตอนแก้สมการแบบเก่า คือใช้วิธี “ย้ายข้าง” ให้เหลือ X แยกอยู่ตัวเดียว
โดยในเรื่องเมทริกซ์ จะไม่มีการ “หาร A” แต่จะใช้วิธี “คูณ A^{-1}” แทน เช่น

$$\begin{aligned} AX + B &= C \\ AX &= C - B \\ X &= A^{-1}(C - B) \end{aligned}$$

เนื่องจากเมทริกซ์สลับที่การคูณไม่ได้
ดังนั้น ถ้าย้ายจากริมซ้าย ก็ต้องไปโปะริมซ้าย
ถ้าย้ายจากริมขวา ก็ต้องไปโปะริมขวา
และ ห้ามย้ายเมทริกซ์ที่คูณอยู่ตรงกลาง

เช่น

$$\begin{aligned} AXBCD &= EF \\ AXBC &= EFD^{-1} \\ AXB &= EFD^{-1}C^{-1} \\ AX &= EFD^{-1}C^{-1}B^{-1} \\ X &= A^{-1}EFD^{-1}C^{-1}B^{-1} \end{aligned}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} 2X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\ X &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \left(-\frac{1}{4}\right) \begin{bmatrix} -4 & -8 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} 2A - 3B &= \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -3 & -5 \end{bmatrix} & \dots (1) \\ 3A + 2B &= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \dots (2) \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} 2\times(1):\quad 4A - 6B &= \begin{bmatrix} -8 & 2 \\ -6 & -10 \end{bmatrix} & \dots (3) \\ 3\times(2):\quad 9A + 6B &= \begin{bmatrix} 21 & 24 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} & \dots (4) \\ (3)+(4):\quad 13A &= \begin{bmatrix} 13 & 26 \\ 0 & -13 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ (2):\quad 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 2B &= \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\ 2B &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่า X จากสมการ $AXB + C = 2D$

   เมื่อกำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -6 & 4 \end{bmatrix}$, และ $D = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้ X เป็นเมทริกซ์ที่สอดคล้องกับสมการ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + 4X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

   แล้วค่าของ $\det\left(2X^t(X + X^t)\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/36]

3. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & y \\ y & z \end{bmatrix}$

   ถ้า $A^{-1}BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ xyz เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/12]

4. ถ้า A และ B เป็นเมทริกซ์ซึ่ง $2A - B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A + 2B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$
แล้ว $(AB)^{-1}$ คือเมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/23]
1. $\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
4. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$

5. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีขนาด 2×2 โดยที่ $2A - B = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ และ $A - 2B = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$
ค่าของ $\det(A^4B^{-1})$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/31]

6. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $ABA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 58)/18]
1. $BAB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 32 \end{bmatrix}$
2. $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$

7. กำหนดให้ A เป็น 2×3 เมทริกซ์ B เป็น 3×2 เมทริกซ์ และ C เป็น 2×2 เมทริกซ์ โดยที่ $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/26]
   1. $\det(AB) - \det(BA) = 0$
   2. ถ้า $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $CAB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$, $a \leq 0$ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 2×2
ถ้า $A^2B = \mathrm{I}$ และ $2A^{-1} - 3B = \mathrm{I}$ แล้ว จงหาค่าของ $2a + 3b$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/10]

เมทริกซ์แต่งเติม

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้เรียนวิธีแก้สมการเมทริกซ์ไป ซึ่งขั้นตอนที่ใช้แรงมากที่สุด คือตอนหาอินเวอร์สการคูณ
ในเรื่องนี้ เราจะเรียนอีกเทคนิคในการแก้สมการ $AX = B$ โดยใช้ "เมทริกซ์แต่งเติม" ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. นำสมการเมทริกซ์ $AX = B$ มาสร้างเมทริกซ์แต่งเติม ซึ่งมีรูปแบบคือ $[\,A \mid B\,]$

   เช่น $\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 8\\1 & 3 & 8\end{array}\right]$

   $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\2 & 1 & 3\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\7 & 3 & 0\\5 & 6 & 3\end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -2 & 0 & -2 & -6 & 0\\2 & 1 & 3 & 7 & 3 & 0\\1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3\end{array}\right]$

2. แปลงรูปส่วนซ้ายในเมทริกซ์แต่งเติมให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \ldots$ โดยใช้วิธีต่อไปนี้
   - เอาตัวเลขอะไรก็ได้ มาคูณหรือหารแถวไหนก็ได้ ทั้งแถว
   - สลับสองแถวไหนก็ได้
   - เอาแถวไหนก็ได้ บวกหรือลบด้วย (k คูณอีกแถว) เมื่อ k เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

   เมื่อแปลงสำเร็จ จะได้ เมทริกซ์ส่วนขวา เป็นค่า X ที่ต้องการ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า X จากสมการ $\begin{bmatrix}-2 & 2\\1 & 3\end{bmatrix}\cdot X = \begin{bmatrix}8\\8\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> สร้างเมทริกซ์แต่งเติม ได้เป็น $\left[\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 8\\1 & 3 & 8\end{array}\right]$ จากนั้น เราจะเปลี่ยนส่วนซ้าย ให้กลายเป็น $\begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}$ ดังนี้

$$\left[\begin{array}{cc|c}-2 & 2 & 8\\1 & 3 & 8\end{array}\right] \underset{\sim}{-\tfrac{1}{2}R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -4\\1 & 3 & 8\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 - R_1} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -4\\0 & 4 & 12\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{4}R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & -1 & -4\\0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_1 + R_2} \left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & -1\\0 & 1 & 3\end{array}\right]$$

ดังนั้น คำตอบคือ $X = \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}$ #

จะเห็นว่า สิ่งที่ยากในเรื่องนี้ คือ การแปลงส่วนซ้ายให้เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์
หลักในการแปลงคือ เราจะ แปลงทีละหลัก จะเริ่มจากหลักไหนก่อนก็ได้ (นิยมทำหลักที่คิดเลขได้ง่ายๆก่อน)
โดยในแต่ละหลัก เราจะแปลงให้ได้ 1 ในหลักนั้นๆก่อน จากนั้น ใช้ 1 ที่ได้ ไปหักลบแถวอื่นให้กลายเป็น 0

เช่น กรณี 2×2 :

$$\begin{matrix}? & ?\\? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ?\\? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ?\\0 & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ?\\0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0\\0 & 1\end{matrix}$$

กรณี 3×3 :

$$\begin{matrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ? & ?\\0 & ? & ?\\0 & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & ? & ?\\0 & 1 & ?\\0 & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0 & ?\\0 & 1 & ?\\0 & 0 & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0 & ?\\0 & 1 & ?\\0 & 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{matrix}$$

หรือ 3×3 แบบไม่เรียงหลัก แบบนี้ก็ได้

$$\begin{matrix}? & ? & ?\\? & ? & ?\\? & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}? & ? & ?\\? & 1 & ?\\? & ? & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}? & 0 & ?\\? & 1 & ?\\? & 0 & ?\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}? & 0 & ?\\? & 1 & ?\\? & 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}? & 0 & 0\\? & 1 & 0\\? & 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0 & 0\\? & 1 & 0\\? & 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{matrix}$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า X จากสมการ $\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2 & -6 & 0\\ 7 & 3 & 0\\ 5 & 6 & 3\end{bmatrix}$

<u>วิธีทำ</u> $\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & -2 & 0 & -2 & -6 & 0\\ 2 & 1 & 3 & 7 & 3 & 0\\ 1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3\end{array}\right] \underset{\sim}{R_1 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 7 & 3 & 0\\ 2 & -2 & 0 & -2 & -6 & 0\end{array}\right]$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix}R_2-2R_1\\ R_3-2R_1\end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3\\ 0 & -5 & 1 & -3 & -9 & -6\\ 0 & -8 & -2 & -12 & -18 & -6\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 3 & 1 & 5 & 6 & 3\\ 0 & -8 & -2 & -12 & -18 & -6\\ 0 & -5 & 1 & -3 & -9 & -6\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix}R_1-R_3\\ R_2+2R_3\end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 8 & 0 & 8 & 15 & 9\\ 0 & -18 & 0 & -18 & -36 & -18\\ 0 & -5 & 1 & -3 & -9 & -6\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-\tfrac{1}{18}R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 8 & 0 & 8 & 15 & 9\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -5 & 1 & -3 & -9 & -6\end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\begin{matrix}R_1-8R_2\\ R_3+5R_2\end{matrix}} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & -1\end{array}\right]$$

ดังนั้น คำตอบคือ $X=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการต่อไปนี้ โดยใช้เมทริกซ์แต่งเติม

   1. $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & -2\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}7\\ -7\end{bmatrix}$

   2. $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 6 & -3\end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

2. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 3 & x & 3 \\ 2 & 0 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & x & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 9 & 5 & -36 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 8 \end{array}\right]$

แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-8]

ระบบสมการเชิงเส้น

ประโยชน์อย่างหนึ่งของเมทริกซ์ คือ สามารถนำไปใช้แก้ "ระบบสมการเชิงเส้น" ได้

ตัวอย่างระบบสมการเชิงเส้น เช่น $\begin{aligned} 2x+3y &= 1 \\ x-2y &= 4 \end{aligned}$ และ $\begin{aligned} a+b+c &= 2 \\ 2a+c &= 4 \\ a+3b-c &= -4 \end{aligned}$

ในสมัย ม.ต้น เราได้เรียนวิธีแก้ระบบสมการพวกนี้ไปแล้ว ดังนี้

$$\begin{array}{lrcll} & 2x+3y &=& 1 & (1) \\ & x-2y &=& 4 & (2) \\ (1)-2(2) & 7y &=& -7 & \\ & y &=& -1 & \\ (2) & x-2(-1) &=& 4 & \\ & x &=& 2 & \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcll} & a+b+c &=& 2 & (1) \\ & 2a+c &=& 4 & (2) \\ & a+3b-c &=& -4 & (3) \\ (3)-3(1) & -2a-4c &=& -10 & \\ & -a-2c &=& -5 & (4) \\ (2)+2(4) & -3c &=& -6 & \\ & c &=& 2 & \\ (2) & 2a+2 &=& 4 & \\ & a &=& 1 & \\ (1) & 1+b+2 &=& 2 & \\ & b &=& -1 & \end{array}$$

อย่างไรก็ตาม เราสามารถแก้ระบบสมการเหล่านี้ โดยใช้ความรู้ในเรื่องเมทริกซ์มาช่วยได้

โดยก่อนอื่น เราต้องแปลงระบบสมการเชิงเส้น ให้กลายเป็นสมการเมทริกซ์

โดยรูปแบบของสมการเมทริกซ์ คือ [สัมประสิทธิ์] $\cdot$ [ตัวแปร] $=$ [ตัวเลขทางขวา]

เช่น $\begin{aligned} 2x+3y &= 1 \\ x-2y &= 4 \end{aligned}$ แปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$\begin{aligned} a+b+c &= 2 \\ 2a+c &= 4 \\ a+3b-c &= -4 \end{aligned}$ แปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

หลังจากที่แปลงเป็นสมการเมทริกซ์แล้ว ค่อยใช้ความรู้ในเรื่องสมการเมทริกซ์ เพื่อหาค่าเมทริกซ์ตัวแปร

หมายเหตุ : สังเกตว่า ถ้าเราคูณเมทริกซ์ที่ได้ แล้วจับสมาชิกแต่ละตำแหน่งมาเท่ากัน เราจะได้ระบบสมการอันเดิม

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น $\begin{aligned} 2x+3y &= 1 \\ x-2y &= 4 \end{aligned}$

<u>วิธีทำ</u> แปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

ย้ายข้าง $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ไปเป็นอินเวอร์ส จะได้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \frac{1}{-7}\begin{bmatrix} -14 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ $x = 2$ และ $y = -1$ เป็นคำตอบของระบบสมการ #

ตัวอย่าง จงแก้ระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{aligned} a+b+c &= 2 \\ 2a+c &= 4 \\ a+3b-c &= -4 \end{aligned}$$

วิธีทำ แปลงเป็นสมการเมทริกซ์ได้เป็น $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

จะย้ายข้าง $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ ไปเป็นอินเวอร์สก็ได้ หรือจะใช้เมทริกซ์แต่งเติมก็ได้

ถ้าใช้เมทริกซ์แต่งเติม จะได้ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -4 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-2R_1}{R_3-R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{array}\right]$

$$\underset{\sim}{\tfrac{1}{2}R_3 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_1-R_2}{R_3+2R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{-\tfrac{1}{3}R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\underset{\sim}{\overset{R_1-2R_3}{R_2+R_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

ดังนั้น จะได้ $a=1$, $b=-1$ และ $c=2$ เป็นคำตอบของระบบสมการ #

อย่างไรก็ตาม นักเรียนส่วนใหญ่ มักนิยมใช้วิธีเดิมในสมัย ม.ต้น มากกว่า การใช้เมทริกซ์
เพราะวิธีในสมัย ม.ต้น จะยืดหยุ่นให้เราคิดเลขน้อย และทดเลขได้คล่องตัวกว่า
ดังนั้น หากมีโจทย์สมการเมทริกซ์ของ ม.ปลาย เราจะนิยมแปลงให้เป็นระบบสมการ แล้วใช้ความรู้ ม.ต้น แก้

แบบฝึกหัด

1. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริงซึ่งสอดคล้องกับระบบสมการเชิงเส้น

$$2x-2y-z=1$$

$$x-3y+z=7$$

$$-x+y-z=-5$$

แล้ว $\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{3}{z}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/22]

2. กำหนดให้ x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$2x - 2y - z = -5$$

$$x - 3y + z = -6$$

$$-x + y - z = 4$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก [PAT 1 (มี.ค. 52)/23]

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 6$
2. $x + y + z = 2$
3. $xyz = 6$
4. $\frac{xy}{z} = -2$

3. ถ้า $x,\ y,\ z$ สอดคล้องกับระบบสมการ

$$x + 2y - 2z = -2$$

$$2x + y + 2z = 5$$

$$x - 3y - 2z = 3$$

แล้ว ดีเทอร์มิแนนต์ $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \\ x+2y & 2x+y & x-3y \end{vmatrix}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-4]

4. กำหนดให้ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ สอดคล้องกับสมการ $AX = C$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ และ } C = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ถ้า $(2A + B)X = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $a + b + c$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-11]

กฎของเครเมอร์

สำหรับคนที่ชอบคูณเลข หัวข้อนี้จะมีวิธีแก้ระบบสมการเชิงเส้นอีกแบบ โดยใช้ “กฎของเครเมอร์” ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. สร้างสมการเมทริกซ์ $AX = B$ จากระบบสมการเชิงเส้นที่โจทย์ให้ (เหมือนหัวข้อที่แล้ว)

เช่น
$$\begin{aligned} x + 2y &= 4 \\ 2x - y &= -7 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} 2x - y + z &= 8 \\ -3x - 2y + 2z &= -5 \\ x + 2y + 3z &= 4 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

2. หา $\det$ ของเมทริกซ์สัมประสิทธิ์ ที่อยู่ทางซ้าย $(= \det A)$

จากนั้น จะได้คำตอบ ในรูป $\rightarrow \dfrac{\text{เอา } B \text{ ไปทับหลักต่างๆของ } A \text{ แล้วหา } \det}{\det A}$

เช่น $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

เอา $\begin{matrix} 4 \\ -7 \end{matrix}$ ไปทับหลักต่างๆของ A

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{10}{-5} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -7 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{-15}{-5} = 3$$

จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $x = -2$ และ $y = 3$

เช่น $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (-12 - 2 - 6) - (-2 + 8 + 9) = -35$$

เอา $\begin{matrix} 8 \\ -5 \\ 4 \end{matrix}$ ไปทับหลักต่างๆของ A

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-48-8-10)-(-8+32+15)}{-35} = \frac{-105}{-35} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 & 1 \\ -3 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-30+16-12)-(-5+16-72)}{-35} = \frac{35}{-35} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 8 \\ -3 & -2 & -5 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-16+5-48)-(-16-20+12)}{-35} = \frac{-35}{-35} = 1$$

จะได้คำตอบของระบบสมการ คือ $x = 3$, $y = -1$ และ $z = 1$

<u>หมายเหตุ</u> : ถ้า $\det A = 0$ จะทำให้ตัวส่วนเป็น 0 และไม่สามารถคำนวณค่า x, y, z ได้
ในกรณีนี้ จะเป็นไปได้ 2 แบบ คือ ระบบสมการ “ไม่มีคำตอบ” หรือ “มีคำตอบมากมายนับไม่ถ้วน”

แบบฝึกหัด

1. จงแก้ระบบสมการต่อไปนี้ โดยใช้กฎของเครเมอร์

   1. $$\begin{aligned} 2x - y &= 6 \\ 3x - y &= 7 \end{aligned}$$

   2. $$\begin{aligned} 2x + z &= 3 \\ x + y - z &= 6 \\ 3z - y &= -6 \end{aligned}$$

เมทริกซ์

1. 1. $\begin{bmatrix}-6\\-4\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}-2 & -3\\-5 & 0\end{bmatrix}$
2. $7, -2, 3, 3$ 3. 4 4. 3

เมทริกซ์คูณเมทริกซ์

1. 1. $\begin{bmatrix}3 & 6 & -1\\0 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 2. คูณกันไม่ได้ 3. $\begin{bmatrix}-2 & 4\\4 & 2\end{bmatrix}$ 4. คูณกันไม่ได้
   5. $[-3]$ 6. $[8]$ 7. คูณกันไม่ได้ 8. $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}$
   9. $\begin{bmatrix}-1 & 2 & -2\\2 & 3 & 1\\2 & 4 & -3\end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix}-1 & -1\\2 & -2\end{bmatrix}$ 11. $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$
2. 1. $\begin{bmatrix}2 & 2\\4 & -2\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}4 & -2\\2 & -4\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}-2 & 6\\2 & 6\end{bmatrix}$ 4. $\begin{bmatrix}-2 & 6\\2 & 6\end{bmatrix}$
   5. $\begin{bmatrix}3 & 7\\3 & -1\end{bmatrix}$ 6. $\begin{bmatrix}3 & 7\\3 & -1\end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix}2 & 4\\2 & -2\end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix}4 & 2\\-2 & -4\end{bmatrix}$
3. 6

ดีเทอร์มิแนนต์

1. 1. -13 2. 7 3. 21 4. $-\frac{1}{2}$
   5. 8 6. -10 7. 0 8. 0
2. 1. -2 2. 4 3. 1 4. 5
3. 1. 3 2. 3 3. -2 4. 0
4. 1. 8 2. -5 3. -10
   4. -6

ใช้แถวแรกหา det จะได้ $= (2)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 2 & -1 & 1\\0 & 3 & 0 & 0\\1 & 3 & 3 & 0\\2 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$ ใช้แถว 2 หา det

$$\begin{aligned}
&= (2)(-1)^{1+2}(3)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\1 & 3 & 0\\2 & 0 & 1\end{vmatrix}\\
&= (2)(-1)^{1+2}(3)(-1)^{2+2}\big((6+0+0)-(6+0-1)\big)\\
&= \qquad (-6) \qquad\qquad (\ 1\ ) \quad = -6
\end{aligned}$$

5. 6 6. 2 7. 1 8. $1, 2$
9. 1 10. 68 11. -2.5 12. 3.5
13. 16 14. 33

อินเวอร์สการคูณ

1. 1. $[3]$ 2. $-\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & -1\\-2 & 2\end{bmatrix}$ 3. Singular 4. $\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 1\\0 & 3\end{bmatrix}$

2. 1. $-\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 1 & -5 & 8\end{bmatrix}$ 2. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix}5 & 5 & -5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & 2\end{bmatrix}$

3. เป็น 4. 2 5. 2 6. 320

7. 0.2 8. $\frac{2}{3}$ 9. 3 10. 48

11. 2 12. 0.25 13. 4 14. 36

15. - 16. 26 17. 1 18. 5

19. 8 20. 4

สมการเมทริกซ์

1. $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$

$$X = A^{-1}(2D - C)B^{-1} = \left(\frac{1}{1+4}\right)\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}14 & -9\\ 12 & -2\end{bmatrix}\left(\frac{1}{6+2}\right)\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{40}\begin{bmatrix}-10 & -5\\ 40 & -20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 8 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{8}\begin{bmatrix}-8 & 0\\ 16 & -16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & -2\end{bmatrix}$$

2. 396 3. -3 4. 4 5. 32

6. $1, 2$ 7. - 8. 4

เมทริกซ์แต่งเติม

1. 1. $\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 4 & -2\end{bmatrix}$ 3. $\begin{bmatrix}2\\ 4\\ -1\end{bmatrix}$

2. 4

ระบบสมการเชิงเส้น

1. 0 2. 1 3. 60 4. 9

กฎของเครเมอร์

1. 1. $x = 1\ ,\ y = -4$ 2. $x = 2\ ,\ y = 3, z = -1$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Jam Geejee

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร