กำหนดการเชิงเส้น

17 Nov 2017

สารบัญ

กราฟเส้นตรง

เรื่องนี้ ต้องใช้ความรู้พื้นฐานเรื่องกราฟเส้นตรง ดังนั้น จะขอทบทวนวิธีวาดกราฟเส้นตรงก่อน
วิธีวาดกราฟเส้นตรง คือให้หาจุด (x, y) อะไรก็ได้มา 2 จุด ที่แทนในสมการกราฟแล้วได้สมการที่เป็นจริง
(ส่วนใหญ่ มักนิยมหาจุดตัดแกน X กับจุดตัดแกน Y โดยการแทน $x = 0$ แล้วหา y กับ แทน $y = 0$ แล้วหา x)
จากนั้น พล็อตจุดทั้งสอง แล้วลากเส้นตรงให้ผ่านทั้งสองจุด

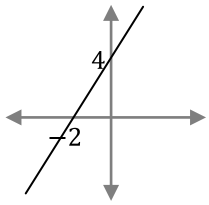
<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $y = 2x + 4$

<u>วิธีทำ</u> หาจุดอะไรก็ได้มา 2 จุด ที่แทนใน $y = 2x + 4$ แล้วเป็นจริง

ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 2(0) + 4 = 4$ ได้จุด $(0, 4)$

ถ้า $y = 0$ จะได้ $x = -\frac{4}{2} = -2$ ได้จุด $(-2, 0)$

จากนั้น พล็อต $(0, 4)$ และ $(-2, 0)$ แล้วลากเส้นตรงผ่าน จะได้กราฟดังรูป



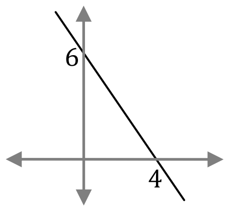
#

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $2y + 3x = 12$

<u>วิธีทำ</u> ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = \frac{12}{2} = 6$ ได้จุด $(0, 6)$

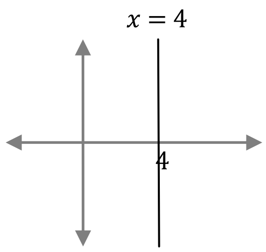
ถ้า $y = 0$ จะได้ $x = \frac{12}{3} = 4$ ได้จุด $(4, 0)$

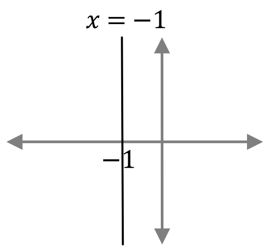
จากนั้น พล็อต $(0, 6)$ และ $(4, 0)$ แล้วลากเส้นตรงผ่าน จะได้กราฟดังรูป

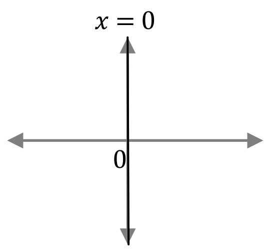


#

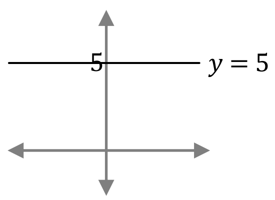
ในกรณีที่ สมการมีแค่ x อย่างเดียว ไม่มี y จะได้กราฟจะเป็นเส้นในแนวดิ่ง ดังรูป

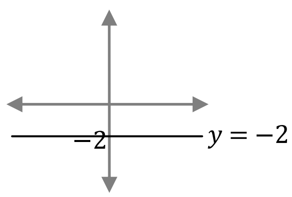


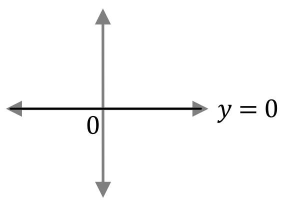




หรือ ในกรณีที่ สมการมีแค่ y อย่างเดียว ไม่มี x จะได้กราฟเป็นเส้นในแนวนอน ดังรูป



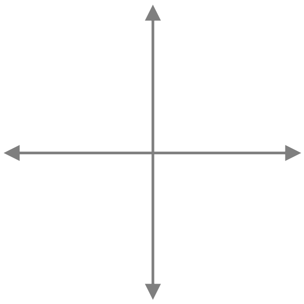




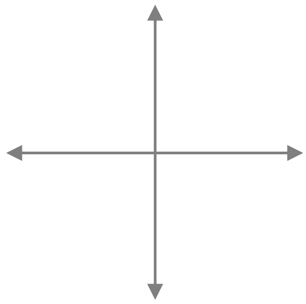
<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงวาดกราฟต่อไปนี้

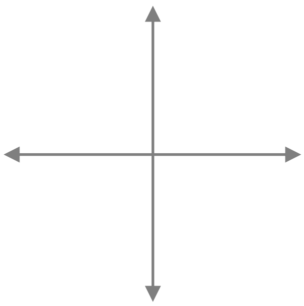
1. $x + y = 2$



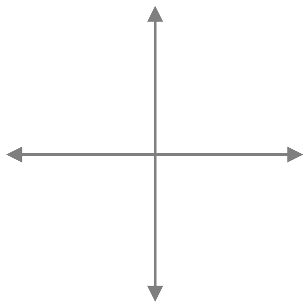
2. $2x + 3y = 6$



3. $2y - x = 4$



4. $x = -2$

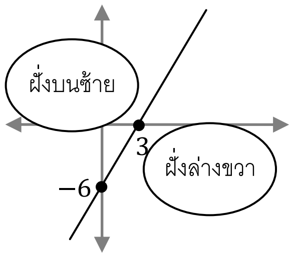


กราฟอสมการ

ความรู้พื้นฐานอีกอย่างที่ต้องใช้ คือการวาดกราฟของอสมการ เช่น $2x - y \le 6$
กราฟของอสมการ จะเป็น “การแรเงา” แสดงพื้นที่ที่สอดคล้องกับอสมการ ซึ่งจะมีขั้นตอนดังนี้

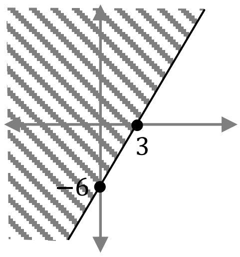
1. ยังไม่ต้องสนใจเครื่องหมาย $\ge$ หรือ $\le$ (ให้มองเป็นเครื่องหมาย $=$) แล้ววาดกราฟแบบหัวข้อที่แล้ว จะได้เส้นตรง 1 เส้น
2. เส้นที่ได้ในข้อ 1. จะแบ่งพื้นที่เป็น 2 ฝั่ง จากนั้น ให้สุ่ม “จุดไหนก็ได้” จาก “ฝั่งไหนก็ได้” แทนในอสมการตั้งต้น ถ้าแทนแล้วจริง ให้แรเงาฝั่งที่สุ่มจุดมา แต่ถ้าแทนแล้วไม่จริง ให้แรเงาอีกฝั่ง

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $2x - y \le 6$
<u>วิธีทำ</u> ขั้นแรก วาดกราฟ $2x - y = 6$ ออกมาก่อน



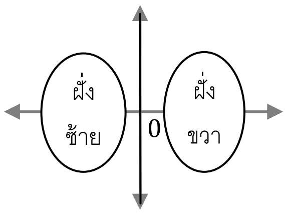
$x = 0 \rightarrow y = -6$ และ $y = 0 \rightarrow x = 3$
จะเห็นว่าเส้นตรงที่ได้ แบ่งพื้นที่ออกเป็นสองฝั่ง ดังรูป

จากนั้น สุ่มจุดไหนก็ได้ จากฝั่งไหนก็ได้ มา 1 จุดแทนในอสมการตั้งต้น
(ปกติ เราจะนิยมจุดที่คิดเลขง่ายๆ เช่น $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ เป็นต้น)
ลองแทน $(0,0)$ ใน $2x - y \le 6$
จะได้ $2(0) - 0 \le 6$ จะเห็นว่าอสมการเป็นจริง



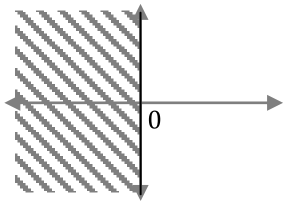
ดังนั้น จะแรเงาในฝั่งที่สุ่ม $(0,0)$ มา (= ฝั่งบนซ้าย) จะได้กราฟดังรูป #

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $x \le 0$
<u>วิธีทำ</u> วาดกราฟ $x = 0$ ก่อน จะได้เป็นเส้นตรงที่ทับแกน Y



กราฟที่ได้ จะแบ่งพื้นที่เป็นสองฝั่ง ดังรูป

ลองแทน $(1,0)$ ในอสมการตั้งต้น $x \le 0$ จะได้ $1 \le 0$ เป็นเท็จ
(ข้อนี้ ใช้จุด $(0,0)$ ไม่ได้ เพราะ $(0,0)$ อยู่ตรงกลาง ไม่ได้อยู่ฝั่งไหน)

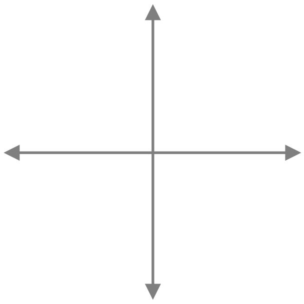


ดังนั้น จะแรเงาอีกฝั่ง (= ฝั่งซ้าย) จะได้กราฟดังรูป #

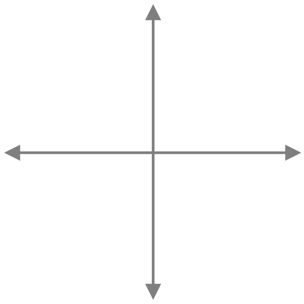
<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงวาดกราฟต่อไปนี้

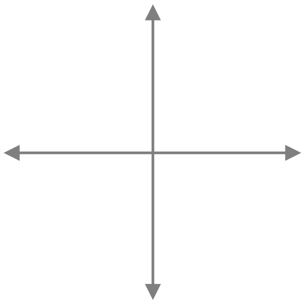
   1. $x + y \leq 4$



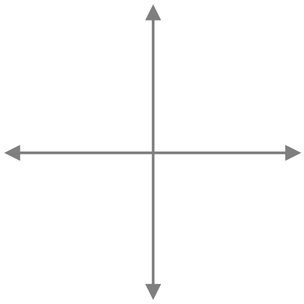
   2. $3x + y \geq 3$



   3. $y - 2x \leq 4$



   4. $y \geq -1$



การหาค่าสูงสุด ต่ำสุด

ในเรื่องแคลคูลัส เราจะได้เรียนวิธีหาค่าสูงสุด ต่ำสุด มาแล้ว
โดยเราจะให้ $f(x)$ แทนปริมาณที่ต้องการหาค่าสูงสุด ต่ำสุด แล้วแก้สมการ $f'(x) = 0$
ข้อจำกัดของวิธีนี้ คือ ปริมาณที่จะหาค่าสูงสุด ต่ำสุด จะขึ้นกับตัวแปร x ได้เพียงตัวแปรเดียวเท่านั้น

แต่ในบางกรณี ปริมาณที่เราต้องการหาค่าสูงสุด ต่ำสุด อาจขึ้นกับปริมาณอื่นอีก 2 ปริมาณ
เช่น ความแข็งของทองเหลือง จะขึ้นกับ ปริมาณทองแดง และ ปริมาณสังกะสี
กำไรของสินค้า จะขึ้นกับ งบในการผลิต และ งบในการโฆษณา เป็นต้น

ในเรื่องนี้ เราจะสามารถกำหนดตัวแปรตามใจชอบ ได้ 2 ตัว คือ x กับ y และในเรื่องนี้ เราจะไม่ใช้สัญลักษณ์ $f(x)$

- ถ้าโจทย์ให้หาค่าสูงสุด เราจะนิยมแทนปริมาณที่โจทย์ต้องการหาค่าสูงสุด ด้วยตัวแปร P
- ถ้าโจทย์ให้หาค่าต่ำสุด เราจะนิยมแทนปริมาณที่โจทย์ต้องการหาค่าต่ำสุด ด้วยตัวแปร C

สิ่งที่โจทย์จะให้ มี 2 อย่าง คือ

1. ข้อจำกัดของ x และ y ในรูปของอสมการหลายๆอสมการ
2. สมการที่บอกว่า P หรือ C คืออะไร (เรียกว่าสมการจุดประสงค์)

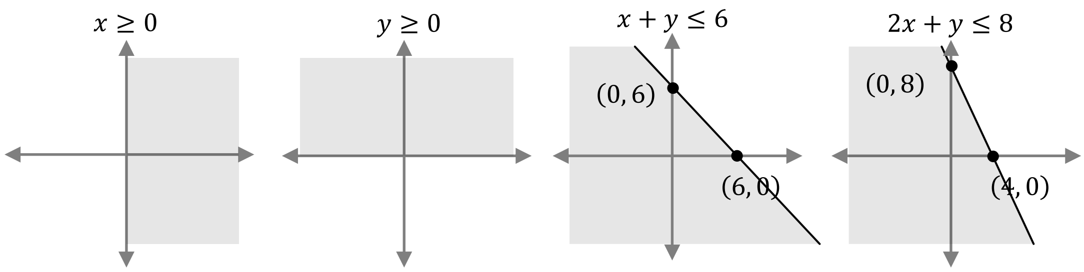
ขั้นตอนการทำ มีดังนี้

1. เอาอสมการข้อจำกัดแต่ละอันมาเขียนกราฟใส่แกน X-Y เดียวกัน จะได้กราฟแสดงพื้นที่หลายๆอันซ้อนกัน
2. หาบริเวณที่พื้นที่ของทุกๆอสมการ "ซ้อนทับ" กัน (คือเอาพื้นที่ของทุกอสมการมาอินเตอร์เซกกันนั่นเอง)
3. หาพิกัดของ "จุดมุม" ของพื้นที่ทับซ้อนที่ได้ในข้อ 2 (ปกติจะมีหลายมุม ต้องหามาให้หมดทุกมุม)
   วิธีหาพิกัดจุดมุมคือให้เอากราฟ 2 กราฟที่ตัดกันตรงจุดมุมนั้นๆ มาเปลี่ยน $\geq$, $\leq$ เป็น $=$ แล้วแก้ระบบสมการ
4. ขั้นสุดท้าย เอาจุดที่ได้ในข้อ 3 ทั้งหมด ไปแทนในสมการจุดประสงค์ของ P (หรือ C)
   เลือกเอาจุดที่ให้ค่า P (หรือ C) สูงสุด (หรือต่ำสุด) เป็นคำตอบ

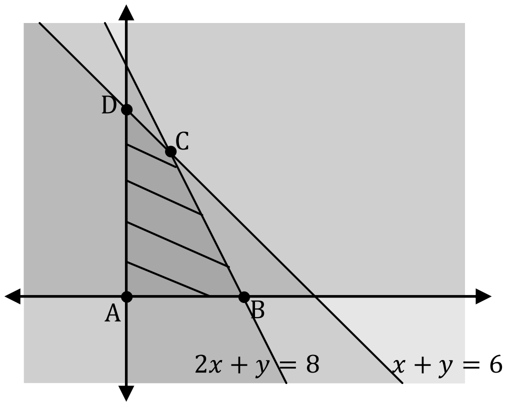
ตัวอย่าง จงหาค่าสูงสุดของ $P = 2x + 3y$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\leq 6 \\ 2x + y &\leq 8 \end{aligned}$$

วิธีทำ ขั้นแรก นำอสมการข้อจำกัดทั้ง 4 มาเขียนกราฟ



เอากราฟทั้ง 4 ไปไว้แกน X-Y เดียวกัน แล้วหาส่วนที่พื้นที่ทั้ง 4 ซ้อนทับกัน ดังนี้



จะเห็นว่าส่วนที่ซ้อนทับกัน คือบริเวณที่แรเงา นั่นเอง

ขั้นถัดมา หาพิกัด "จุดมุม" ของส่วนที่ซ้อนทับกัน ในที่นี้ก็คือจุด A, B, C, D นั่นเอง

พิกัดของจุด A คือ $(0, 0)$

พิกัดของจุด B จากตอนที่วาดกราฟ $2x + y \leq 8$ จะได้พิกัดจุด B คือ $(4, 0)$

พิกัดของจุด C ต้องหาจุดตัดกันของ เส้นตรง $x + y = 6$ กับ $2x + y = 8$

(ตอนหาจุดตัด ให้เปลี่ยน $\geq$, $\leq$ เป็น $=$ ก่อน)

เอาสองสมการนี้มาแก้กัน ดังนี้

$$
\begin{array}{rrcll}
 & x + y & = & 6 & \ldots(1) \\
 & 2x + y & = & 8 & \ldots(2) \\
(2) - (1): & x & = & 2 & \\
\text{แทน } x = 2 \text{ ใน } (1): & 2 + y & = & 6 & \\
 & y & = & 4 &
\end{array}
$$

ดังนั้น พิกัดของ C คือ $(2, 4)$

พิกัดของจุด D จากตอนที่วาดกราฟ $x + y \leq 6$ จะได้พิกัดจุด D คือ $(0, 6)$

ดังนั้น ได้พิกัดจุดมุม คือ $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(2, 4)$ และ $(0, 6)$

ขั้นสุดท้าย เอาจุดมุมทั้ง 4 ไปแทนในสมการจุดประสงค์ $P = 2x + 3y$ แล้วดูว่าอันไหนให้ค่า P สูงสุด

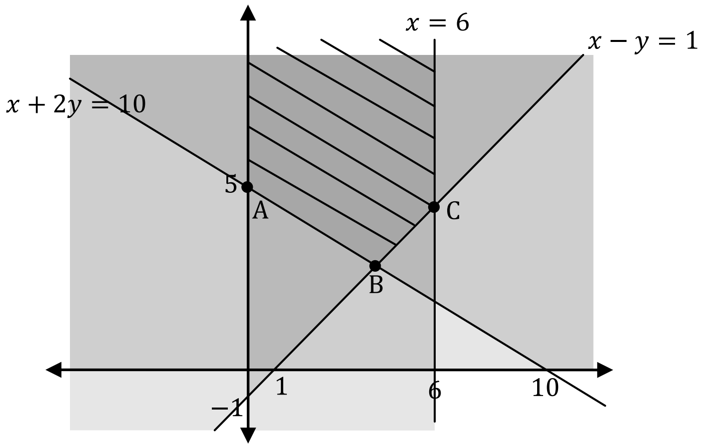
$$
\begin{array}{l}
(0, 0): P = 2(0) + 3(0) = 0 \\
(4, 0): P = 2(4) + 3(0) = 8 \\
(2, 4): P = 2(2) + 3(4) = 16 \\
(0, 6): P = 2(0) + 3(6) = 18
\end{array}
$$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของ P คือ 18 เมื่อ $x = 0$ และ $y = 6$ #

ตัวอย่าง จงหาค่าต่ำสุดของ $C = x + 5y$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} 0 \le\ &x \le 6 \\ y &\ge 0 \\ x - y &\le 1 \\ x + 2y &\ge 10 \end{aligned}$$

วิธีทำ เขียนพื้นที่ของอสมการทั้งหมดในแกน X-Y เดียวกันได้ดังรูป



หมายเหตุ: อสมการ $0 \le x \le 6$ แตกได้เป็น 2 อสมการ คือ $0 \le x$ และ $x \le 6$

พิกัดของ A คือ $(0, 5)$

พิกัดของ B ต้องแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + 2y &= 10 \quad ...(1) \\ x - y &= 1 \quad ...(2) \\ (1) - (2): \quad 3y &= 9 \\ y &= 3 \\ \text{แทน } y = 3 \text{ ใน } (2): \quad x - 3 &= 1 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

จะได้พิกัดของ B คือ $(4, 3)$

พิกัดของ C ต้องแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &= 6 \quad ...(1) \\ x - y &= 1 \quad ...(2) \\ \text{แทน } x = 6 \text{ ใน } (2): \quad 6 - y &= 1 \\ 5 &= y \end{aligned}$$

จะได้พิกัดของ C คือ $(6, 5)$

สุดท้าย เอาสามจุดนี้ไปแทนดูว่าอันไหนได้ $C = x + 5y$ ต่ำสุด

$$\begin{aligned} (0, 5): C &= 0 + 5(5) = 25 \\ (4, 3): C &= 4 + 5(3) = 19 \\ (6, 5): C &= 6 + 5(5) = 31 \end{aligned}$$

(จริงๆมีจุดมุมอีก 2 จุด คือ $(0, \infty)$ กับ $(6, \infty)$ แต่สองจุดนี้ไม่ทำให้ได้ $C = x + 5y$ ต่ำสุดอยู่แล้ว)

ดังนั้น ค่าต่ำสุดของ C คือ 19 เมื่อ $x = 4$ และ $y = 3$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าสูงสุดของ $P = x + 3y$ เมื่อกำหนดเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ 2y + x &\geq 6 \\ 2x + y &\leq 6 \end{aligned}$$

2. จงหาค่าต่ำสุดของ $C = 2x + y$ เมื่อกำหนดเงื่อนไข

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\geq 3 \\ 3x + y &\geq 6 \end{aligned}$$

การเลื่อนเส้นจุดประสงค์

ปกติ เวลาทำโจทย์ในเรื่องนี้ เราจะต้องวาดกราฟอสมการเงื่อนไข แล้วหาพื้นที่ซ้อนทับกันของทุกอสมการ
แล้วหาพิกัดของจุดมุม “ทุกจุด” แล้วมาไล่แทน
หัวข้อนี้ จะพูดถึงอีกเทคนิคในการหาจุดมุมที่เป็นคำตอบ โดยไม่ต้องไล่แทนทุกจุด

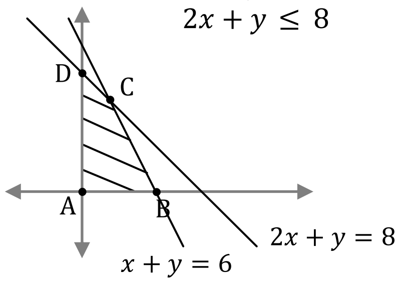
เทคนิคในหัวข้อนี้ จะเริ่มใช้หลังจากที่เราได้พื้นที่ซ้อนทับของทุกเงื่อนไขแล้ว
โดยเราจะวาดเส้นตรงที่ “ชันเท่ากับ P (หรือ C)”
วิธีวาดคือ เราจะวาดเส้นตรงที่มีระยะตัดแกน X ต่อ ระยะตัดแกน Y $=$ ตัวเลขที่คูณ Y : ตัวเลขที่คูณ X
จากนั้น “เลื่อนเส้นตรงที่ได้ในแนวขึ้นลง” โดยให้ยังอยู่ในพื้นที่ซ้อนทับของเงื่อนไข

- จุดมุมสุดท้าย ที่กราฟเลื่อนขึ้น<u>สูงสุด</u> ก่อนจะหลุดจากพื้นที่ซ้อนทับ จะเป็นจุดที่ให้ค่า<u>สูงสุด</u>
- จุดมุมสุดท้าย ที่กราฟเลื่อนลง<u>ต่ำสุด</u> ก่อนจะหลุดจากพื้นที่ซ้อนทับ จะเป็นจุดที่ให้ค่า<u>ต่ำสุด</u>

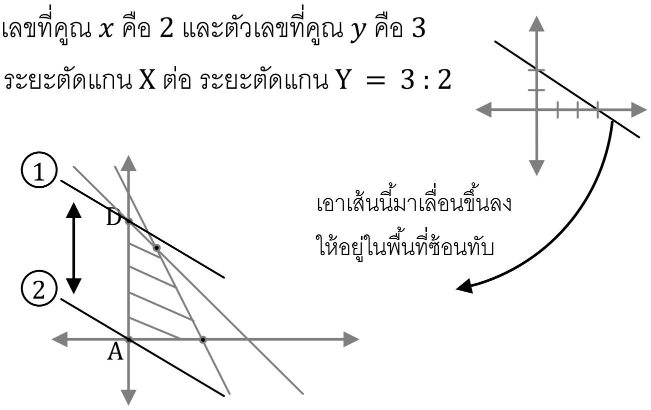
<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าสูงสุดของ $P = 2x + 3y$ เมื่อกำหนดเงื่อนไขดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + y &\leq 6 \\ 2x + y &\leq 8 \end{aligned}$$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เคยทำไปแล้วในหัวข้อที่แล้ว
โดยเราได้พื้นที่ซ้อนทับของทุกเงื่อนไข ดังรูป
ในหัวข้อที่แล้ว เราต้องหาพิกัดของ A B C D
แล้วลองแทนทั้ง 4 จุด ในสมการของ P
ซึ่งได้คำตอบคือ จุด D ทำให้ได้ค่า P สูงสุด



ในหัวข้อนี้ เราจะไม่หาพิกัดของ A B C D แต่จะวาดเส้นตรงที่ ชันเท่ากับ P ก่อน
$P = 2x + 3y$ ดังนั้น ตัวเลขที่คูณ x คือ 2 และตัวเลขที่คูณ y คือ 3
ดังนั้น จะได้เส้นตรงนี้ จะมี ระยะตัดแกน X ต่อ ระยะตัดแกน Y $=$ 3 : 2



จะเห็นว่า เลื่อนได้<u>สูง</u>สุด ที่ 1 ก่อนจะหลุดจาก D $\rightarrow$ จุด D ให้ค่า<u>สูง</u>สุด
เลื่อนได้<u>ต่ำ</u>สุด ที่ 2 ก่อนจะหลุดจาก A $\rightarrow$ จุด A ให้ค่า<u>ต่ำ</u>สุด
เนื่องจากข้อนี้ ต้องการค่า P สูงสุด ดังนั้น เราหาจุดพิกัดของจุด D จุดเดียว จะได้ $\mathrm{D}(0, 6)$
จะได้ $P = 2(0) + 3(6) = 18$ #

ข้อควรระวังในการใช้เทคนิคนี้ คือ รูปกราฟที่วาด ต้องสมจริงพอสมควร

ในกรณีที่รูปกราฟไม่ชัดเจน ว่าจุดมุมสุดท้ายก่อนเส้นจะหลุดคือจุดไหน เราอาจต้องหาทุกจุดที่น่าสงสัยมาลอง แล้วเลือกจุดที่ได้ค่า P สูงกว่า (หรือได้ค่า C ต่ำกว่า)

เช่น ในตัวอย่างที่แล้ว ถ้ารูปไม่ชัดเจนว่าจุด D หรือจุด C เป็นจุดสุดท้ายที่กราฟเลื่อนได้สูงสุด
เราจะหาพิกัด ทั้งจุด D และจุด C มาแทน แล้วตอบจุดที่ได้ค่า P สูงกว่า

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ถ้า $P = 5x + 4y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $x + 2y \leq 40$, $3x + 2y \leq 60$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าสูงสุดของ P เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/28]

2. กำหนดสมการจุดประสงค์ คือ $P = 3x + 2y$ โดยมีอสมการข้อจำกัด ดังนี้
$x + 2y \leq 6$, $2x + y \leq 8$, $-x + y \leq 1$, $x \geq 0$ และ $0 \leq y \leq 2$
ค่าของ P มีค่ามากสุด เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/19]

3. ถ้า C เป็นปริมาณที่มีค่าขึ้นกับค่าของตัวแปร x และ y ด้วยความสัมพันธ์ $C = 3x + 5y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $3x + 4y \geq 5$, $x + 3y \geq 3$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ แล้วค่าต่ำสุดของ C ตามเงื่อนไขข้างต้น มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/28]

4. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์และอสมการข้อจำกัดเป็นดังนี้

$$\begin{aligned} C &= 40x + 32y \\ 6x + 2y &\geq 12 \\ 2x + 2y &\leq 8 \\ 4x + 12y &\geq 24 \end{aligned}$$

ค่าต่ำสุดของ C เท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-14]

5. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ และอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$C = 6x + 2y, \qquad x + y \geq 2, \qquad x + 3y \leq 9, \qquad 0 \leq x \leq y$$

ค่าสูงสุดของ C เท่ากับเท่าใด [A-NET 51/2-7]

6. จงหาผลคูณของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x, y) = x + y + 2$ ภายใต้เงื่อนไขข้อจำกัดต่อไปนี้

(1) $x + 2y \geq 8$ (2) $5x + 2y \geq 20$ (3) $x + 4y \leq 22$

(4) $x \geq 1$ (5) $1 \leq y \leq 8$

[PAT 1 (มี.ค. 54)/38]

7. กำหนดให้ $P = 3x + 4y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$2x + 3y \geq 6$$
$$2x - y \leq 10$$
$$0 \leq y \leq x$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/14]

1. P มีค่ามากสุด เท่ากับ 70
2. ถ้าจุด (a, b) ที่ทำให้ P มีค่าต่ำสุด แล้ว จุด (a, b) สอดคล้องกับสมการ $x - y = 3$

8. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 7x - 5y$ และอสมการข้อจำกัดดังนี้

$x + 3y - 12 \geq 0$, $3x + y - 12 \geq 0$, $x - 2y + 17 \geq 0$ และ $9x + y - 56 \leq 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 59)/14]

1. ถ้า (a, b) เป็นจุดมุมที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัดและให้ค่า P มากที่สุด แล้ว $a^2 + b^2 = 40$
2. ผลต่างระหว่างค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดของ P เท่ากับ 70
3. ถ้า A และ B เป็นพิกัดของจุดมุมที่สอดคล้องกับอสมการข้อจำกัด โดยที่ P มีค่ามากที่สุดที่จุด A และ P มีค่าน้อยที่สุดที่จุด B แล้วจุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $7x + 5y = 52$

9. ภายใต้อสมการข้อจำกัดต่อไปนี้ $x + 2y \leq 4$, $x - y \leq 1$, $x + y \geq 1$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$
สมการจุดประสงค์ในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด [PAT 1 (ต.ค. 58)/25]

1. $z = 2x + 2y$ 2. $z = 3x + 2y$ 3. $z = 2x + 3y$
4. $z = x + 4y$ 5. $z = 4x + y$

10. กำหนดให้ $P = Ax + By$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์
เมื่อ A และ B เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $3A = 2B$ โดยมีอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$x + 2y \leq 20$, $7x + 9y \leq 105$, $5x + 3y \geq 15$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

ถ้า P มีค่ามากที่สุดท่ากับ M และ P มีค่าน้อยที่สุดเท่ากับ N แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
[PAT 1 (มี.ค. 57)/28]

1. $2M = 11N$ 2. $5M = 11N$ 3. $2M = N$ 4. $5M = N$

11. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $a < b$
ถ้าค่ามากสุดและค่าน้อยสุดของ $P = 2x + y$ เมื่อ x, y เป็นไปตามเงื่อนไข $a \leq x + 2y \leq b$, $x \geq 0$ และ $y \geq 0$ มีค่าเท่ากับ 100 และ 10 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-14]

12. กำหนดให้ $P = a(x + y) + 6y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$3x + 4y \leq 48 \ , \quad x + 2y \leq 22 \ , \quad 3x + 2y \leq 42 \ , \quad x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

ถ้า P มีค่ามากสุดเท่ากับ 288 แล้ว ค่ามากที่สุดของ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 56)/14]

13. กำหนดให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ $P_1 = 5x + 2y$ และ $P_2 = 4x + 3y$ โดยมีอสมการข้อจำกัดดังนี้

$$2x + 3y \geq 6 \;,\; 3x - y \leq 15 \;,\; -x + y \leq 4 \;,\; 2x + 5y \leq 27 \;,\; x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

ให้ ค่ามากที่สุดของ P_1 และ P_2 เท่ากับ M_1 และ M_2 ตามลำดับ
และค่าน้อยที่สุดของ P_1 และ P_2 เท่ากับ N_1 และ N_2 ตามลำดับ
ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/18]

1. M_1 มีค่ามากกว่า M_2
2. N_1 มีค่าน้อยกว่า N_2

โจทย์ปัญหา

ในหัวข้อนี้ โจทย์จะไม่ได้ให้อสมการข้อจำกัด กับสมการจุดประสงค์มาตรงๆ แต่จะให้ข้อความยาวๆ บรรยายสถานการณ์ แล้วเราต้องเขียนอสมการข้อจำกัด กับสมการวัตถุประสงค์ เอง

เวลาที่เราให้ x หรือ y แทนจำนวนอะไรซักอย่าง เราต้องคิดด้วยว่า จำนวนนั้นเป็นลบได้ไหม
ถ้าเป็นลบไม่ได้ ต้องเพิ่ม $x \geq 0$ หรือ $y \geq 0$ ลงไปในอสมการข้อจำกัดด้วย

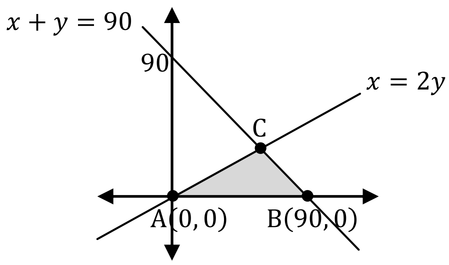
<u>ตัวอย่าง</u> โรงงานผลิตเครื่องเขียนแห่งหนึ่ง ผลิตปากกาและดินสอรวมกันได้ไม่เกิน 90 แท่งต่อหนึ่งวัน โดยที่จำนวนปากกาต้องไม่น้อยกว่าสองเท่าของจำนวนดินสอเสมอ ถ้าปากกาขายได้กำไรแท่งละ 8 บาท และดินสอขายได้กำไรแท่งละ 10 บาท จงหาว่าโรงงานนี้ จะมีกำไรต่อวันได้มากที่สุดเท่าไร และต้องผลิตดินสอและปากกาอย่างละกี่แท่ง

<u>วิธีทำ</u> ให้ผลิตปากกา x แท่ง และผลิตดินสอ y แท่ง

เนื่องจากจำนวนปากกาและดินสอ เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น จะได้ว่า $x \geq 0$ และ $y \geq 0$

จะได้อสมการข้อจำกัดคือ $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 90$ และ $x \geq 2y$

เขียนกราฟ และหาส่วนซ้อนทับกัน จะได้ดังรูป



พิกัดของจุด C จะต้องแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} x &= 2y && (1) \\ x + y &= 90 && (2) \\ (2)-(1): \quad y &= 90 - 2y \\ 3y &= 90 \\ y &= 30 \\ \text{แทน } y = 30 \text{ ใน } (1): \quad x &= 60 \end{aligned}$$

จะได้พิกัดของ C คือ $(60, 30)$

ข้อนี้จะหากำไรสูงสุด ดังนั้น ให้กำไรเป็น P

เนื่องจาก ปากกากำไรแท่งละ 8 บาท ดินสอกำไรแท่งละ 10 บาท ดังนั้น $P = 8x + 10y$

$A(0,0)$: $P = 8(0) + 10(0) = 0$
$B(90,0)$: $P = 8(90) + 10(0) = 720$
$C(60,30)$: $P = 8(60) + 10(30) = 780$

นั่นคือ จะได้กำไรสูงสุด 780 บาท เมื่อผลิตปากกา 60 แท่ง และดินสอ 30 แท่ง #

ตัวอย่าง บริษัทแห่งหนึ่ง ผลิตเครื่องดื่ม 2 ชนิด เครื่องดื่มชนิดแรกใช้น้ำหวานผสมโซดาในอัตราส่วน 1:2 เครื่องดื่มชนิดที่สอง ใช้น้ำหวานผสมโซดาในอัตราส่วน 2:3 โดยเครื่องดื่มชนิดแรกมีกำไร 30 บาทต่อลิตร และเครื่องดื่มชนิดที่สองมีกำไร 32 บาทต่อลิตร ถ้าบริษัทแห่งนี้มีน้ำหวาน 10 ลิตร และโซดา 18 ลิตร จงหาว่าบริษัทนี้ จะมีกำไรได้มากที่สุดเท่าไร

วิธีทำ ให้ผลิตเครื่องดื่มชนิดแรก x ลิตร และผลิตเครื่องดื่มชนิดที่สอง y ลิตร

เทียบบัญญัติไตรยางศ์ เพื่อหาปริมาณน้ำหวานและโซดาที่ต้องใช้ในเครื่องดื่มแต่ละชนิด ดังนี้

เครื่องดื่มชนิดแรก 3 ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน 1 ลิตร และโซดา 2 ลิตร

เครื่องดื่มชนิดแรก 1 ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน $\frac{1}{3}$ ลิตร และโซดา $\frac{2}{3}$ ลิตร

เครื่องดื่มชนิดแรก x ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน $\frac{x}{3}$ ลิตร และโซดา $\frac{2x}{3}$ ลิตร

ทำเหมือนกันกับเครื่องดื่มชนิดที่สอง

เครื่องดื่มชนิดที่สอง 5 ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน 2 ลิตร และโซดา 3 ลิตร

เครื่องดื่มชนิดที่สอง 1 ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน $\frac{2}{5}$ ลิตร และโซดา $\frac{3}{5}$ ลิตร

เครื่องดื่มชนิดที่สอง y ลิตรจะประกอบด้วยน้ำหวาน $\frac{2y}{5}$ ลิตร และโซดา $\frac{3y}{5}$ ลิตร

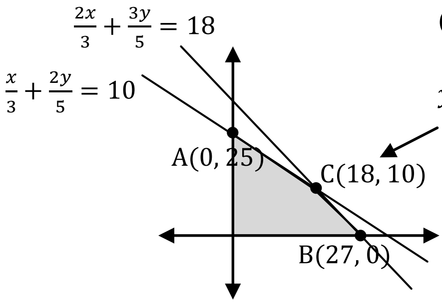
ดังนั้น ใช้น้ำหวานทั้งหมด $\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}$ ลิตร และใช้โซดาทั้งหมด $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}$ ลิตร

เนื่องจากมีน้ำหวาน 10 ลิตร และมีโซดา 18 ลิตร ดังนั้น จะได้สมการข้อจำกัดคือ

$\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}\le 10$, $\frac{2x}{3}+\frac{3y}{5}\le 18$, $x\ge 0$ และ $y\ge 0$

$(0, 25)$, $(30, 0)$ $\quad$ $(0, 30)$, $(27, 0)$

$$\begin{aligned}
& & \tfrac{x}{3}+\tfrac{2y}{5} &= 10 & (1)\\
& & \tfrac{2x}{3}+\tfrac{3y}{5} &= 18 & (2)\\
&2\times(1): & \tfrac{2x}{3}+\tfrac{4y}{5} &= 20 & (3)\\
&(3)-(2): & \tfrac{y}{5} &= 2 &\\
& & y &= 10 &\\
&y=10\rightarrow(1): & \tfrac{x}{3}+4 &= 10 &\\
& & x &= 18 &
\end{aligned}$$



ข้อนี้จะหากำไรสูงสุด ดังนั้น ให้กำไรเป็น P

เนื่องจาก เครื่องดื่มชนิดแรกกำไรลิตรละ 30 บาท ชนิดที่สองกำไรลิตรละ 32 บาท ดังนั้น $P=30x+32y$

$A(0, 25)$: $P=30(0)+32(25)=800$
$B(27, 0)$: $P=30(27)+32(0)=810$
$C(18, 10)$: $P=30(18)+32(10)=860$

นั่นคือ จะได้กำไรสูงสุด 860 บาท เมื่อผลิตเครื่องดื่มชนิดแรก 18 ลิตร และชนิดที่สอง 10 ลิตร #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ในการผลิตสินค้าตามโครงการ OTOP ของตำบลหนึ่ง ในแต่ละวันผลิตผ้าฝ้ายได้ x ชิ้น และผลิตผ้าไหมได้ y ชิ้น โดยมีอสมการข้อจำกัดคือ

$$2x + y \leq 12$$
$$x + y \leq 8$$
$$x \geq 0$$
และ $0 \leq y \leq 6$

ถ้าผ้าฝ้ายและผ้าไหมมีราคาขายชิ้นละ 90 บาท และ 300 บาท ตามลำดับ แล้ว โครงการนี้จะขายสินค้าได้เงินมากที่สุดต่อวัน เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/1-20]

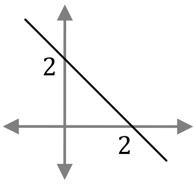
2. มีปุ๋ยอยู่ 2 ชนิด คือชนิด A และ ชนิด B โดยแต่ละชนิดบรรจุถุงละ 100 กรัม ส่วนประกอบและราคาแต่ละชนิดเป็นดังนี้

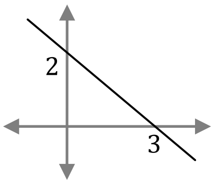
ชนิดปุ๋ย	สารอาหาร N	สารอาหาร P	สารอาหาร K	ราคาถุงละ
ชนิด A	2 หน่วย	1 หน่วย	80 หน่วย	10 บาท
ชนิด B	3 หน่วย	3 หน่วย	60 หน่วย	12 บาท

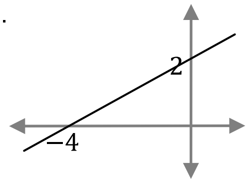
นักวิจัยทดลองผสมปุ๋มชนิด A และชนิด B ให้พืชในแปลงทดลอง โดยส่วนผสมปุ๋ยที่ได้ประกอบด้วยสารอาหาร N อย่างน้อย 18 หน่วย สารอาหาร P อย่างน้อย 12 หน่วย และสารอาหาร K อย่างน้อย 480 หน่วย ค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการผสมปุ๋ยทั้งสองชนิดเท่ากับกี่บาท [PAT 1 (เม.ย. 57)/28]

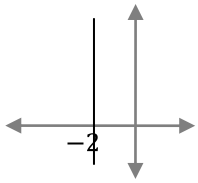
3. นาย ก. วางแผนจะปลูกมันหรือสับปะรดบนที่ดิน 150 ไร่ โดยมีข้อมูลในการลงทุนดังนี้ ในการปลูกมัน จะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 200 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 10 ชั่วโมง ในการปลูกสับปะรดจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 300 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 12.5 ชั่วโมง นาย ก. มีเงินลงทุนสำหรับค่าต้นกล้า 40,000 บาท และมีแรงงานไม่เกิน 1,850 ชั่วโมง ถ้าปลูกมันจะได้กำไรไร่ละ 1,500 บาท ปลูกสับปะรดจะได้กำไรไร่ละ 2,000 บาท นาย ก. จะได้กำไรสูงสุดเท่ากับกี่บาท [PAT 1 (มี.ค. 58)/22]

กราฟเส้นตรง

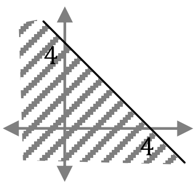
1. 1.


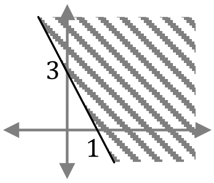
2.


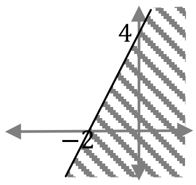
3.


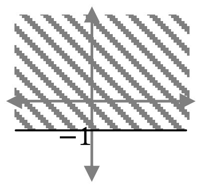
4.


กราฟอสมการ

1. 1.


2.


3.


4.


การหาค่าสูงสุด ต่ำสุด

1. 18
2. $\frac{9}{2}$

การเลื่อนเส้นจุดประสงค์

1. 110
2. $\frac{38}{3}$
3. $\frac{29}{5}$
4. 108
5. 18
6. 157.5
7. 1
8. 1, 2, 3
9. 5
10. 1
11. 70
12. 18
13. 1, 2

โจทย์ปัญหา

1. 1980
2. 78
3. 275,000

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ Theerat Piyaanangul
คุณ Ning Nichakan
ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร