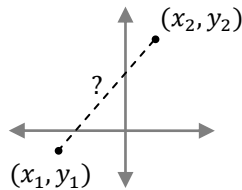

เรขาคณิตวิเคราะห์

สารบัญ

ระยะระหว่างจุด	1
จุดกึ่งกลาง.....	3
ความชัน	4
สมการกราฟเส้นตรง	7
ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง.....	11
ระยะระหว่างเส้นขนาน	14

ระยะระหว่างจุด

เรื่องนี้ จะเรียนเกี่ยวกับการหาค่าของสิ่งต่างๆที่อยู่บนแกน X - Y โดยจะมีสูตรต่างๆมากมายที่ต้องท่อง
สูตรแรก เป็นสูตรในการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้



ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

หาได้จากสูตร $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

(เอาจุดไหนเป็นตัวตั้ง จุดไหนเป็นตัวลบก็ได้ ได้คำตอบเท่ากัน)

เช่น ระยะระหว่างจุด $(1, 2)$ กับ $(4, 6)$ คือ $\sqrt{(4 - 1)^2 + (6 - 2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

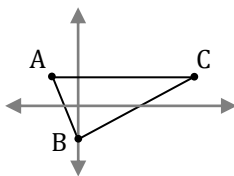
ระยะระหว่างจุด $(1, -2)$ กับ $(-3, 0)$ คือ $\sqrt{(1 - (-3))^2 + (-2 - 0)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$
 $= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ระยะระหว่างจุด $(-2, -3)$ กับ $(-1, 1)$ คือ $\sqrt{(-2 - (-1))^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2}$
 $= \sqrt{17}$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าสามเหลี่ยมที่มีจุด $A(-1, 1)$, $B(0, -1)$, $C(5, 1)$ เป็นจุดยอด เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ สามเหลี่ยมมุมฉาก จะต้องมีความยาวด้านทั้งสาม สอดคล้องกับสูตร $a^2 + b^2 = c^2$

ดังนั้น เราจะหาความยาว AB , BC และ AC เพื่อตรวจสอบว่า $a^2 + b^2 = c^2$ หรือไม่



$$AB = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(5 - 0)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$$

$$AC = \sqrt{(5 - (-1))^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36}$$

จะเห็นว่า $\sqrt{5}^2 + \sqrt{29}^2 = 5 + 29 = 34 \neq \sqrt{36}^2$

ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดต่อไปนี้

1. $(-1, 3)$ และ $(3, 0)$

2. $(-1, -4)$ และ $(-6, 8)$

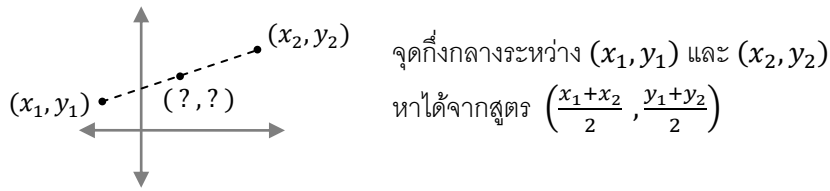
3. $(-1, 1)$ และ $(1, -1)$

4. $(0, 3)$ และ $(-3, 3)$

2. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, -2)$ ถ้าวงกลมวงนี้ผ่านจุด $(3, -1)$ แล้ว จงหารัศมีของวงกลม
3. จุด A เป็นจุดบนแกน Y ซึ่งห่างจากจุด $(1, 1)$ กับ $(-4, 6)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาพิกัดของจุด A
4. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-2, 3)$ $B(2, 8)$ $C(4, 4)$ และ $D(0, -3)$
พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/9]
5. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางคือ $C(h, k)$ อยู่บนเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และวงกลมนี้ผ่านจุด $A(-5, -2)$ และจุด $B(-2, 5)$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/31]

จุดกึ่งกลาง

สูตรที่สอง เป็นสูตรสำหรับหาพิกัดของจุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้



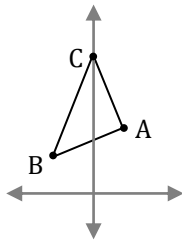
เช่น จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(1, 2)$ และ $(5, 8)$ คือ $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (3, 5)$

จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(-3, 0)$ และ $(1, -4)$ คือ $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) = (-1, -2)$

จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(4, -2)$ และ $(-1, -2)$ คือ $\left(\frac{4+(-1)}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, -2\right)$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ และ $C(0, 6)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาความยาวส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปแบ่งครึ่งด้าน BC

วิธีทำ



จุดที่แบ่งครึ่งด้าน BC คือ $\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-1, 4)$

ดังนั้น ระยะจาก A ไปยัง $(-1, 4) = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{5}$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดต่อไปนี้

1. $(2, 3)$ กับ $(4, -1)$

2. $(-2, 2)$ กับ $(-2, -2)$

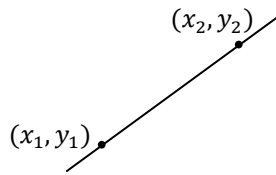
3. $(0, -3)$ กับ $(4, 2)$

4. $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ กับ $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$

2. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางคือ $(2, -1)$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ถ้าพิกัดของจุด A คือ $(-1, -3)$ แล้ว จงหาพิกัดของจุด B

ความชัน

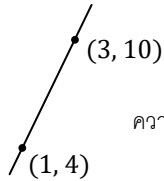
เรื่องนี้จะสนใจว่าเส้นตรงที่กำหนดให้ “ชัน” ขนาดไหน



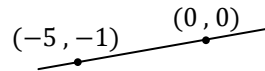
ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

หาได้จากสูตร $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (หรือ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ก็ได้)

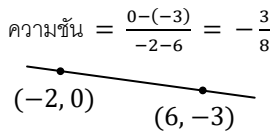
เช่น



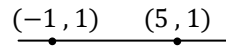
$$\text{ความชัน} = \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$$



$$\text{ความชัน} = \frac{0-(-1)}{0-(-5)} = \frac{1}{5}$$



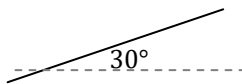
$$\text{ความชัน} = \frac{0-(-3)}{-2-6} = -\frac{3}{8}$$



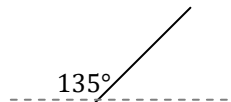
$$\text{ความชัน} = \frac{1-1}{5-(-1)} = 0$$

อีกสูตรหนึ่งที่ใช้หาความชันได้ คือ ความชัน $= \tan \theta$ เมื่อ θ คือ มุมที่เส้นกราฟทำกับแกน X บวก

เช่น

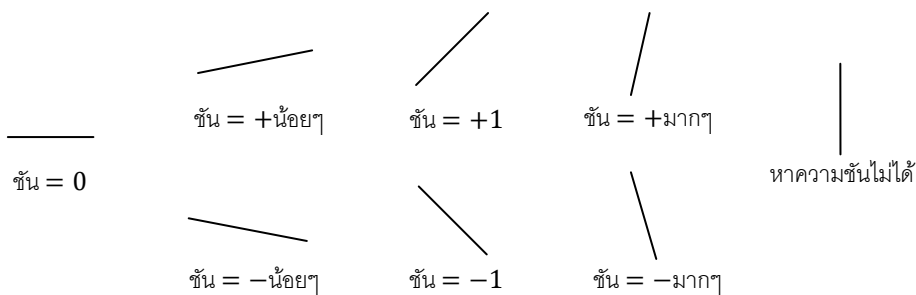


$$\text{ความชัน} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



$$\text{ความชัน} = \tan 45^\circ = 1$$

และความชันแต่ละค่า จะมีความหมายดังนี้

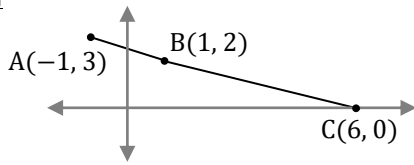


และเราสามารถนำความชันไปใช้ตรวจสอบการขนานกัน หรือ ตั้งฉากกัน ของเส้นตรง 2 เส้น ได้ ดังนี้

- เส้นตรงที่ขนานกัน จะมีความชันเท่ากัน
- เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $A(-1, 3)$, $B(1, 2)$ และ $C(6, 0)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ



ทั้งสามจุด จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันเมื่อ $\overline{AB}$ กับ $\overline{BC}$ “ชันเท่ากัน”

$$\left. \begin{array}{l} \text{ความชัน } \overline{AB} = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2} \\ \text{ความชัน } \overline{BC} = \frac{2-0}{1-6} = -\frac{2}{5} \end{array} \right\} \neq$$

ดังนั้น ทั้งสามจุดไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

#

ตัวอย่าง กำหนด $A(-1, 6)$, $B(0, 3)$, $C(1, 5)$ จงพิจารณาว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ ข้อนี้ จะหาระยะระหว่างจุด มาใช้ว่า $a^2 + b^2 = c^2$ หรือไม่ แบบหัดข้อก่อนหน้าก็ได้

แต่อีกวิธีที่ง่ายกว่า คือ เช็คจากกฎที่บอกว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

โดยเราจะหาความชันของ AB , BC , AC ออกมา แล้วดูว่ามีคู่ไหน ความชันคูณกันได้ -1 หรือเปล่า

$$\text{ความชัน } \overline{AB} = \frac{6-3}{-1-0} = -3$$

$$\text{ความชัน } \overline{BC} = \frac{5-3}{1-0} = 2$$

$$\text{ความชัน } \overline{AC} = \frac{6-5}{-1-1} = -\frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ความชัน } \overline{BC} = 2 \\ \text{ความชัน } \overline{AC} = -\frac{1}{2} \end{array} \right\} \text{ คูณกันได้ } -1 \rightarrow \overline{BC} \perp \overline{AC}$$

ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุดต่อไปนี้

1. $(1, -1)$ และ $(2, 3)$

2. $(0, -2)$ และ $(-2, 0)$

3. $(3, 2)$ และ $(3, -3)$

4. $(1, 2)$ และ จุดกึ่งกลางระหว่าง $(3, -1)$ กับ $(1, 1)$

2. จงพิจารณาว่า สี่เหลี่ยมที่เกิดจาก $A(-2, 2)$, $B(3, 4)$, $C(5, -6)$, $D(-1, -3)$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูหรือไม่

3. กำหนดให้ $A(-1, -3)$ และ $B(9, -8)$ ถ้า C เป็นจุดบนแกน X ที่ทำให้ $\overline{AC} \perp \overline{BC}$ แล้ว จงหาพิกัดของจุด C

4. จุด $A(1, 0)$ และ จุด $B(b, 0)$ เมื่อ $b > 1$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $(-1, 0)$ และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/34]

สมการกราฟเส้นตรง

กราฟเส้นตรง คือ กราฟที่มีสมการในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

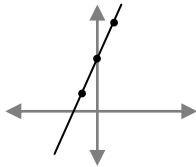
เมื่อตอน ม. ต้น เราได้เรียนวิธีวาดกราฟ ของสมการกราฟเส้นตรง ไปแล้ว

โดยเราจะใช้วิธีแทนค่า หาจุดซัก 2 - 3 จุดที่ทำให้สมการกราฟเป็นจริง แล้วลากเส้นผ่าน

เช่น

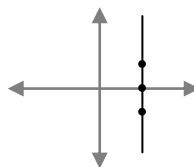
$$2x - y + 3 = 0$$

x	-1	0	1
y	1	3	5



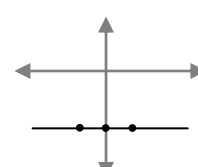
$$x = 2$$

x	2	2	2
y	-1	0	1



$$y = -3$$

x	-1	0	1
y	-3	-3	-3



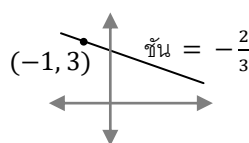
ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดเงื่อนไขต่างๆของกราฟมา เราต้องสามารถย้อนกลับไปหาสมการกราฟได้

สูตรสำหรับหาสมการกราฟ จากเงื่อนไขต่างๆ มีดังนี้

- ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน $= m$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

เช่น



$$\frac{y-3}{x-(-1)} = -\frac{2}{3}$$

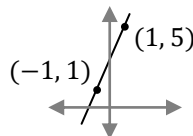
$$3y - 9 = -2x - 2$$

$$2x + 3y - 7 = 0$$

- ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

เช่น



$$\frac{y-5}{x-1} = \frac{5-1}{1-(-1)}$$

$$2y - 10 = 4x - 4$$

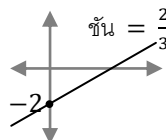
$$0 = 4x - 2y + 6$$

$$0 = 2x - y + 3$$

- มีความชัน $= m$ และมีระยะตัดแกน Y คือ c

$$y = mx + c$$

เช่น



$$y = \frac{2}{3}x + (-2)$$

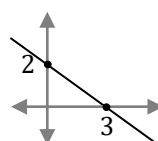
$$3y = 2x - 6$$

$$0 = 2x - 3y - 6$$

- มีระยะตัดแกน X คือ a และมีระยะตัดแกน Y คือ b

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เช่น



$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3y - 6 = 0$$

ตัวอย่าง จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x + 3y + 2 = 0$

วิธีทำ เส้นตรงที่ต้องการตั้งฉากกับ $4x + 3y + 2 = 0$

แปลว่า ความชันของเส้นที่ต้องการ คูณกับความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ ต้องได้ -1

$$4x + 3y + 2 = 0$$

$$3y = -4x - 2$$

$$y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$$

หาความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ ก่อน

โดยจัดรูปให้เป็น $y = mx + c$ แล้วเอา m ไปใช้

จะได้ความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ คือ $-\frac{4}{3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นที่ต้องการ คือ $\frac{3}{4}$ (เพราะ $\frac{3}{4}$ คูณ $-\frac{4}{3}$ ได้ -1)

ใช้สูตร $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ หาสมการเส้นตรงที่ผ่าน $(-1, 2)$ และ ชัน $= \frac{3}{4}$ ได้ $\frac{y-2}{x-(-1)} = \frac{3}{4}$

$$4y - 8 = 3x + 3$$

$$0 = 3x - 4y + 11$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $3x - 4y + 11 = 0$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 1)$ และ $(3, -1)$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และขนานกับเส้นตรง $2x + y - 1 = 0$

3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 1 - 3y$

4. กำหนดให้ $P(-1, -1)$ และ $Q(1, c)$ เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า ℓ เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P, Q และมีความชันเท่ากับ 3 แล้ว จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุด Q

5. ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x + 2y = 6$ พื้นที่ของบริเวณในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 1 ซึ่งล้อมรอบด้วย แกน x แกน y เส้นตรง L เส้นตรง $x + 2y = 6$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย
[PAT 1 (ต.ค. 55)/40]

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A(0, 0)$ และ $B(2, 2)$ เป็นจุดยอด และ $C(x, y)$ เป็นจุดยอดในจุดภาค (quadrant) ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/15]

1. $x - y + 4 = 0$

2. $4x + 3y - 1 = 0$

3. $2x - y - 3 = 0$

4. $x + y - 5 = 0$

7. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $\widehat{ABC}$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ $(-4, 3)$ และ $(-1, 2)$ ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C [PAT 1 (ก.ค. 53)/9]

1. $x + 8y - 27 = 0$

2. $8x + y - 27 = 0$

3. $4x - 5y + 3 = 0$

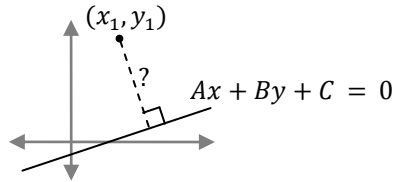
4. $-5x + 4y + 3 = 0$

8. กำหนดให้ $\alpha > \tan 60^\circ$ และ $A(\alpha, 3)$, $B(7, 8)$ และ $C(-4, 9)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ให้ L เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B
 จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้พาราโบลา $ky = x^2 + 2k$ มีจุดร่วมกับเส้นตรง L เพียงจุดเดียว
 [PAT 1 (มี.ค. 54)/34]

ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง

หัวข้อนี้เป็นสูตรสำหรับหาระยะตั้งฉาก จากจุด ไปยังเส้นตรง

ก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน

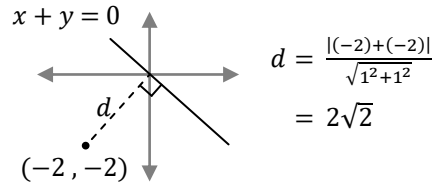
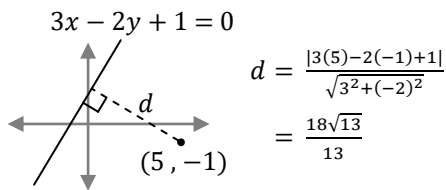


ระยะตั้งฉาก จากจุด (x_1, y_1)

ไปยัง เส้นตรง $Ax + By + C = 0$

หาได้จากสูตร $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

เช่น



ตัวอย่าง จงหาระยะห่างระหว่างจุด $(-2, 1)$ กับเส้นตรง $y = 2x - 3$

วิธีทำ จัด $y = 2x - 3$ ให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน ได้เป็น $2x - y - 3 = 0$

$$\text{จะได้ ระยะห่าง คือ } \frac{|2(-2) - (1) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{|-8|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

#

ตัวอย่าง จงหาสมการกราฟเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และอยู่ห่างจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย

วิธีทำ ความชัน $= \frac{3}{4}$ ดังนั้น สมการกราฟต้องอยู่ในรูป $y = \frac{3}{4}x + c$

$$\begin{aligned} \text{จัดให้อยู่ในรูป } Ax + By + C = 0 \text{ ได้ } y &= \frac{3}{4}x + c \\ 4y &= 3x + 4c \\ 0 &= 3x - 4y + 4c \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ระยะจาก } (1, 0) \text{ ไป เส้นตรงนี้ จะเท่ากับ } \frac{|3(1) - 4(0) + 4c|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|3 + 4c|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{|3 + 4c|}{5}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{|3 + 4c|}{5} = 2$$

$$|3 + 4c| = 10$$

$$3 + 4c = \pm 10$$

$$4c = 7, -13$$

ไม่ต้องหา c ก็ได้ เอา $4c$ ไปแทน

ใน $3x - 4y + 4c = 0$ ได้เลย

จะได้สมการกราฟ คือ $3x - 4y + 7 = 0$ กับ $3x - 4y - 13 = 0$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะระหว่างจุดกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1. $(-2, 1)$ กับ เส้นตรง $x - y + 1 = 0$

2. $(-3, -5)$ กับ เส้นตรง $y = 0$

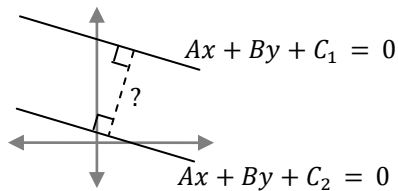
- วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ และมีเส้นตรง $x + y - 4 = 0$ เป็นเส้นสัมผัส จงหารัศมีของวงกลมวงนี้
- จงหาสมการกราฟเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $12x + 5y - 3 = 0$ และอยู่ห่างจากจุด $(-1, -1)$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย
- สามเหลี่ยม ABC มีจุด $A(3, 4)$, $B(0, -2)$, $C(3, 1)$ จงหาความยาวของส่วนสูงที่ลากจาก A ไปยังฐาน $\overline{BC}$

5. จุด $A(-3, 1)$ $B(1, 5)$ $C(8, 3)$ และ $D(2, -3)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/9]
1. ด้าน AB ขนานกับ ด้าน DC
 2. ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ $10\sqrt{2}$ หน่วย
 3. ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย
 4. ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย
6. กำหนดให้ $M(a, b)$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุดตัดระหว่างกราฟ $xy = 6$ กับเส้นตรง $x - y - 1 = 0$ จงหาระยะระหว่างจุด M กับเส้นตรง $6x - 8y + 13 = 0$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/30*]
7. ให้ A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x - 3y + 1 = 0$ และ $2x + 5y - 9 = 0$ ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m เมื่อ $m < 0$ มีระยะห่างจากจุดกำเนิด $(0, 0)$ เท่ากับ k หน่วย โดยที่ $k^2 + 2m = 1$ และผ่านจุด A แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (เม.ย. 57)/10]
1. $2x + y - 5 = 0$
 2. $3x + y - 7 = 0$
 3. $x + 2y - 4 = 0$
 4. $x + 3y - 5 = 0$

ระยะระหว่างเส้นขนาน

หัวข้อนี้จะเป็นสูตรสำหรับหาระยะตั้งฉาก ระหว่างเส้นขนาน

ก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน



ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$

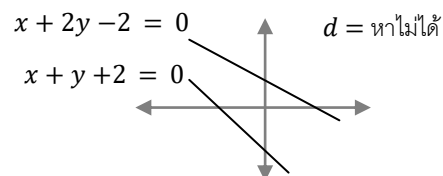
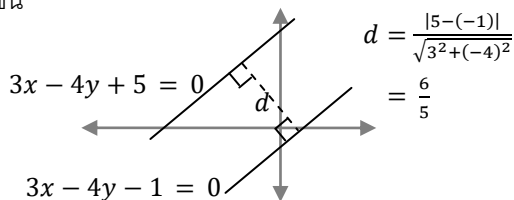
กับเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$

หาได้จากสูตร $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

จะเห็นว่าก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการของทั้งสองเส้น ให้มีส่วน $Ax + By$ เท่ากันก่อน

(ถ้าจัดไม่ได้ แปลว่าเส้นตรงสองเส้นนั้นไม่ขนานกัน หาระยะตั้งฉากไม่ได้)

เช่น



ตัวอย่าง จงหาระยะห่างระหว่าง $2(x - y) = 5$ และ $y = x + 2$

วิธีทำ จัดรูปทั้งสองสมการให้เป็นรูป $Ax + By + C = 0$ ที่มี $Ax + By$ เหมือนกันก่อน

$$\begin{array}{ll} 2(x - y) = 5 & y = x + 2 \\ 2x - 2y = 5 & 0 = x - y + 2 \\ 2x - 2y - 5 = 0 & 0 = 2x - 2y + 4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{คูณ 2 ตลอด จะได้เป็น} \\ 2x - 2y \text{ เหมือนฝั่งนั้น} \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น ระยะห่าง} = \frac{|4 - (-5)|}{\sqrt{2^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

#

ตัวอย่าง จงหาระยะห่างระหว่าง $x - y + 1 = 0$ และ $x + y - 2 = 0$

วิธีทำ ข้อนี้จะเห็นว่าทั้งสองสมการอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ อยู่แล้ว

แต่อันแรกเป็น $x - y$ อีกอันเป็น $x + y$ ดังนั้น เอาอะไรมาคูณก็ไม่มีทางเป็น $Ax + By$ เหมือนกันได้

ดังนั้น สองเส้นนี้ไม่ขนานกัน หาระยะห่างไม่ได้

#

แบบฝึกหัด

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงต่อไปนี้

1. $12x + 5y - 32 = 0$ และ $12x + 5y + 33 = 0$

2. $4x - 3y - 1 = 0$ และ $6y - 8x = 2$

3. $x - y = 2$ และ $y - x = 3$

4. $y = -1$ และ $y = 5$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่อยู่ห่างจากเส้นตรง $y = \sqrt{3}x - 2$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย

3. จงหาส่วนของสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD เมื่อกำหนดพิกัด $A(1, 4)$, $B(7, 4)$, $C(3, -2)$, $D(-1, 1)$

4. กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(-2, -4)$ มีความชันเป็นจำนวนเต็มบวก และตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และจุด B ตามลำดับ โดยผลบวกของระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 3 หน่วย ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และผ่านจุด $(0, -13)$ ถ้า C เป็นจุดบนเส้นตรง L_2 โดยที่ $CA = CB$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางหน่วย [PAT 1 (พ.ย. 57)/17]

ระยะระหว่างจุด

1. 1. 5 2. 13 3. $2\sqrt{2}$ 4. 3
2. $\sqrt{10}$ 3. (0, 5) 4. 32 5. 14.5

จุดกึ่งกลาง

1. 1. (3, 1) 2. (-2, 0) 3. $(2, -\frac{1}{2})$ 4. $(-1, -\frac{1}{2})$
2. (5, 1)

ความชัน

1. 1. 4 2. -1 3. หาไม่ได้ 4. -2
2. เป็น 3. (5, 0) หรือ (3, 0) 4. 17

สมการกราฟเส้นตรง

1. $2x + 5y - 1 = 0$ 2. $2x + y + 2 = 0$
3. $3x - y - 1 = 0$
4. $y = -2x + 7$

จากสูตรความชัน $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ จะได้ ℓ จะมีความชัน $= \frac{c - (-1)}{1 - (-1)} = 3$ แก้สมการจะได้ $c = 5$

เส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 จะอยู่ในรูป $y = -2x + k$ และต้องผ่านจุด Q(1,5) แสดงว่า $5 = -2(1) + k$
แก้สมการ ได้ $k = 7$ ดังนั้น คำตอบคือ $y = -2x + 7$

5. 8.2 6. 1 7. 2 8. 4

ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง

1. 1. $\sqrt{2}$ 2. 5
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 3. $5x - 12y - 46 = 0$, $5x - 12y + 32 = 0$
4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 5. 4 6. 2 7. 1

ระยะระหว่างเส้นขนาน

1. 1. 5 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 4. 6
2. $\sqrt{3}x - y + 4 = 0$, $\sqrt{3}x - y - 8 = 0$ 3. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$
4. 8.5

เครดิต

ขอขอบคุณ คุณ Theerat Piyaanangul

และ คุณ Buay Sahasaporn

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ