
ฟังก์ชัน

สารบัญ

ทบทวนความสัมพันธ์.....	1
ทบทวนฟังก์ชัน.....	4
ประเภทของฟังก์ชัน.....	9
ฟังก์ชันอินเวอร์ส.....	13
ฟังก์ชันเพิ่ม - ลด	17
บวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชัน.....	19
ฟังก์ชันประกอบ	21
ฟังก์ชันที่วนกลับไปหาตัวเอง	32

ทบทวนความสัมพันธ์

ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ คือ เซตของคู่อันดับ ที่ตัวหน้ามาจาก A และตัวหลังมาจาก B
โดย $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$

ความสัมพันธ์ระหว่าง A ไปยัง B คือ การจับคู่สมาชิกบางตัว ระหว่าง A ไปยัง B
โดเมน ของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ D_r หมายถึง เซตของ x ทั้งหมดที่อยู่ใน r
เรนจ์ ของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ R_r หมายถึง เซตของ y ทั้งหมดที่อยู่ใน r
วิธีหา โดเมน หรือ เรนจ์ คือ

ขั้นที่ 1: จัดรูปสมการ ถ้าจะหาโดเมน ต้องจัดรูปสมการให้ y แยกไปอยู่ตัวเดียว

ถ้าจะหาเรนจ์ ต้องจัดรูปสมการให้ x แยกไปอยู่ตัวเดียว

ขั้นที่ 2: หาวว่า x กับ y เป็นอะไรได้บ้าง $\rightarrow$ ส่วน หรือ ตัวหาร ห้ามเป็นศูนย์
 $\rightarrow$ ข้างใน $\sqrt{\quad}$ ห้ามติดลบ

อินเวอร์สของความสัมพันธ์ r แทนด้วยสัญลักษณ์ r^{-1} จะหาได้จาก การเปลี่ยน x เป็น y และเปลี่ยน y เป็น x
แล้วจัดรูป ให้ y แยกไปอยู่ตัวเดียว

แบบฝึกหัด

- กำหนดให้ $A = \{1, 2, \{1, 2\}, (1, 2)\}$ เมื่อ $(1, 2)$ หมายถึงคู่อันดับ และ $B = (A \times A) - A$
จำนวนสมาชิกของเซต B เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-2]

- กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{5-|3-x|}}\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง จงหาโดเมนของ r
[PAT 1 (ธ.ค. 54)/5]

3. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{12 - |x|} + \sqrt{y + 1} = 3\}$
 ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 56)/5]

1. $D_r \cap R_r \subset (-1, 8)$
2. $D_r - R_r = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leq 12\}$

4. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 16\}$
 $s = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy^2 + x + 3y^2 + 2 = 0\}$

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $D_r - D_s$ [A-NET 50/1-4]

1. $[-4, -1]$
2. $[-3, 0]$
3. $[-2, 1]$
4. $[-1, 2]$

5. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid (x - 2)(y - 1) = 1\}$

และ $s = \{(x, y) \mid xy^2 = (y + 1)^2\}$

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $R_r \cap R_s$ [A-NET 51/1-9]

1. $(-\infty, -1)$
2. $(-2, -\frac{1}{2})$
3. $(\frac{1}{2}, 2)$
4. $(1, \infty)$

6. กำหนดให้ $A = [-2, -1] \cup [1, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in A \times A \mid x - y = -1\}$
 ถ้า $a, b > 0$ และ $a \in D_r$, $b \in R_r$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (มี.ค. 52)/9]

7. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ S' แทนคอมพลีเมนต์ของเซต S
 ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y^2 + |1 - x|y^2 = 4\}$ และ $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{1 - x^4}\}$
 และให้ A เป็นเรนจ์ของ f และ B เป็นโดเมนของ g ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 58)/4]
1. $A \subset B'$
 2. $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

8. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid x \in [-1, 1] \text{ และ } y = x^2\}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ก.ค. 52)/10]
1. $r^{-1} = \{(x, y) \mid x \in [0, 1] \text{ และ } y = \pm\sqrt{|x|}\}$
 2. กราฟของ r และกราฟของ r^{-1} ตัดกัน 2 จุด

ทบทวนฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน คือ ความสัมพันธ์ที่ x แต่ละตัว ห้าม จับคู่กับ y หลายตัว

- ถ้า y ถูกยกกำลังคู่ หรือ อยู่ในเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ จะไม่ใช่ฟังก์ชัน ยกเว้น กรณีที่โจทย์จำกัดช่วงให้เหลือเฉพาะบริเวณที่ y ไม่สามารถเป็น $(\pm k)^2$ หรือ $|\pm k|$ ได้
- ถ้าสามารถลากเส้นตั้ง ตัดกราฟได้มากกว่า 1 จุด แปลว่าไม่ใช่ฟังก์ชัน

แบบฝึกหัด

1. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ความสัมพันธ์ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน [PAT 1 (ต.ค. 53)/4]

1. ความสัมพันธ์ $r_1 = \{(x, y) \in R \times R \mid x = \sqrt{4 - y^2} \text{ และ } xy \geq 0\}$
2. ความสัมพันธ์ $r_2 = \{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ และ } xy > 0\}$
3. ความสัมพันธ์ $r_3 = \{(x, y) \in R \times R \mid ||x| - |y|| = 1\}$
4. ความสัมพันธ์ $r_4 = \{(x, y) \in R \times R \mid |x - y| = 1\}$

2. กำหนด R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid |x|y + y - x - 1 = 0\}$

ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 55)/4]

1. r เป็นความสัมพันธ์ที่มีโดเมน $D_r = \{x \in R \mid x \neq -1\}$
2. ความสัมพันธ์ r^{-1} เป็นฟังก์ชัน

3. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid 25x^4 + 16y^2 + 2 = 10x^2 + 8y\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง
ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 54)/3]

1. r ไม่เป็นฟังก์ชัน
2. $D_r \neq R_r$

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x} & , |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ค่าของ $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$ ตรงกับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 56)/11]

5. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ และ $g(x) = \sqrt{f(x)} - \sqrt{x-1}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 53)/6]
1. $D_g = (2, \infty)$
 2. ค่าของ $x > 0$ ที่ทำให้ $g(x) = 0$ มีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

6. กำหนดให้ $h(x) = |1 - x^5|$ และ $g(x) = x^5$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(g(x)) = h(x)$ แล้ว $f(5)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 49/2-1]

7. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + x + 1$ และ a, b เป็นค่าคงตัวโดยที่ $b \neq 0$

ถ้า $f(a + b) = f(a - b)$ แล้ว a^2 อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/9]

1. $(0, 0.5)$ 2. $(0.5, 1)$ 3. $(1, 1.5)$ 4. $(1.5, 2)$

8. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตจำนวนจริง

โดยที่ $f(x) = \frac{2x^2 + 4x + 4}{x + 1}$ เมื่อ $x \neq -1$ แล้วจงหาเรนจ์ของฟังก์ชัน f [PAT 1 (มี.ค. 57)/6]

9. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + a^2x - 75}{x^5 + b^2x - 270}$ เมื่อ $a, b \in I$
 ถ้า $A = \{(a, b) \in I \times I \mid f(3) = 0\}$ และ $B = \{(a, b) \in I \times I \mid \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} < 3\}$
 แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/28]

10. ให้ $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นจำนวนจริง
 ถ้ากราฟ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟ $y = 3x + 2$ ที่ $x = -1, 0, 1, 2$
 แล้วค่าของ $f(3) - f(-2)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/31]

11. กำหนดให้ $y_1 = f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 1
 $y_2 = f(y_1), y_3 = f(y_2), \dots, y_n = f(y_{n-1})$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$
 $y_{2553} + y_{2010}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/5]

1. $\frac{x-1}{x+1}$

2. $\frac{x^2+1}{x-1}$

3. $\frac{x^2+1}{2x}$

4. $\frac{1+2x-x^2}{x-1}$

12. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq -1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 54)/5]
1. $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
 2. $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 1$
 3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$
 4. $f(-2-x) = -2-f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ประเภทของฟังก์ชัน

หัวข้อก่อนหน้า เราได้เรียนเกี่ยวกับความหมาย และสัญลักษณ์พื้นฐาน ในเรื่องฟังก์ชันไปบ้างแล้ว
ในหัวข้อนี้ เราจะเรียนเพิ่มอีกมี 3 คำ คือ “จาก” “ทั่วถึง” และ “หนึ่งต่อหนึ่ง”

ฟังก์ชัน “จาก” A ไป B แทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \rightarrow B$ หมายถึง ฟังก์ชันที่ $(x, y) \in A \times B$ และ “โดเมน = A ”
ซึ่งจะเห็นว่า “โดเมน = A ” ได้เมื่อทุกตัวใน A ถูก f โยงหมดนั่นเอง

เช่น ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

$f = \{(1, a), (2, b), (3, a), (4, b)\}$ → เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ ทุกตัวใน A ถูกโยงหมด

โดเมน = $\{1, 2, 3, 4\} = A$

$g = \{(1, b), (2, b), (4, c)\}$ → ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B เพราะ 3 ไม่ถูกโยง

โดเมน = $\{1, 2, 4\} \neq A$

ฟังก์ชัน จาก A ไป “ทั่วถึง” B แทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{\text{onto}} B$ หมายถึง ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่มี “เรนจ์ = B ”
ซึ่งจะเห็นว่า “เรนจ์ = B ” ได้เมื่อ B ถูก f โยงมาหาหมดทุกตัวนั่นเอง

เช่น ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$

$f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$ → เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ B ถูกโยงหาหมดทุกตัว

เรนจ์ = $\{a, b, c\} = B$

$g = \{(1, b), (2, b), (3, c), (4, c)\}$ → ไม่เป็นฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B เพราะ a ไม่ถูกโยงหา

เรนจ์ = $\{b, c\} \neq B$

ฟังก์ชัน “หนึ่งต่อหนึ่ง” จาก A ไป B แทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow{1-1} B$

หมายถึง ฟังก์ชันจาก A ไป B ที่จับคู่แบบ “หนึ่ง x คู่หนึ่ง y ”

เช่น ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$

$f = \{(1, c), (2, b), (3, d)\}$ → เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไป B

$g = \{(1, c), (2, b), (3, b)\}$ → ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะ ทั้ง 2 และ 3 จับคู่กับ b

$h = \{(1, c), (1, b), (2, d)\}$ → ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง เพราะ 1 คู่ทั้ง c และ b (ไม่เป็นฟังก์ชัน)

วิธีในการตรวจสอบว่าเป็นหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ จะคล้ายๆกับตอนที่ใช้ตรวจสอบว่า เป็นฟังก์ชันหรือไม่

- จากสมการฟังก์ชัน : ถ้า x หรือ y ถูกยกกำลังคู่ หรือ อยู่ในเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ มักจะไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง
- จากกราฟ : ถ้าลากเส้นในแนวนอนหรือแนวตั้ง ตัดกราฟได้มากกว่า 1 จุด แปลว่าไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

ฟังก์ชันบางฟังก์ชัน อาจเป็น “จาก” “ทั่วถึง” และ “หนึ่งต่อหนึ่ง” พร้อมๆกันได้

เช่น ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$

จะได้ $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง B เป็นต้น

โดย ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก A ไปทั่วถึง B จะแทนด้วยสัญลักษณ์ $f: A \xrightarrow[1-1]{\text{onto}} B$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x-2}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ จะดูว่าเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ หรือไม่ ต้องหาว่า โดเมน $= \mathbb{R}^+$ ไหม

เนื่องจาก ใน $\sqrt{\quad}$ ห้ามติดลบ ดังนั้น $x-2 \geq 0$

$$x \geq 2 \quad \text{ดังนั้น } D_f = [2, \infty)$$

จะเห็นว่า $D_f \neq \mathbb{R}^+$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไป $\mathbb{R}$

#

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 2x + 4$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก x ไม่เป็นตัวหาร และไม่อยู่ใน $\sqrt{\quad}$ จะได้ $D_f = \mathbb{R}$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน “จาก $\mathbb{R}$ ”

ถัดไป จะพิจารณาว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึง $\mathbb{R}$ หรือไม่ โดยหาว่า $R_f = \mathbb{R}$ ไหม

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า } f \text{ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง เป็นพาราโบลาหงาย มีจุดยอด} &= \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right) \\ &= \left(-\frac{2}{2(1)}, \frac{4(1)(4)-2^2}{4(1)}\right) = (-1, 3) \end{aligned}$$

จะได้ค่า y ต่ำสุดคือ 3 ส่วนค่า y สูงสุดไม่มี ดังนั้น $R_f = [3, \infty)$

จะเห็นว่า $R_f \neq \mathbb{R}$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง $\mathbb{R}$

#

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ หรือไม่

วิธีทำ เนื่องจาก x ไม่อยู่ใน $\sqrt{\quad}$ และไม่เป็นตัวหาร ดังนั้น $D_f = \mathbb{R} \rightarrow$ เป็นฟังก์ชัน จาก $\mathbb{R}$

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $y \geq 0$ จะได้ $R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow$ เป็นฟังก์ชัน ทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

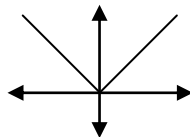
แต่เนื่องจากในสมการของฟังก์ชัน มี x^2 อยู่ จึงมีแนวโน้มว่าจะไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

ลองสุ่มแทนค่าดู จะพบว่า มี $(1, 1)$ และ $(-1, 1)$ อยู่ใน f ดังนั้น ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

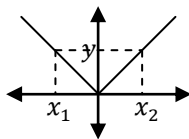
ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

#

ตัวอย่าง จากกราฟของ f ต่อไปนี้ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่



วิธีทำ



จะเห็นว่าสามารถลากเส้นแนวนอน ให้ตัดกราฟมากกว่า 1 จุดได้

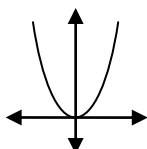
นั่นคือ มี y บางตัว ที่จับคู่กับ x สองตัว

ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่ง

#

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ หรือไม่ โดยใช้กราฟ

วิธีทำ ฟังก์ชัน $y = x^2$ จะมีกราฟดังรูป



จากกราฟ $D_f = \mathbb{R} \rightarrow$ เป็นฟังก์ชัน จาก $\mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightarrow$ เป็นฟังก์ชัน ทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

แต่จะเห็นว่า ลากเส้นแนวนอนตัดได้หลายจุด

จึงไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง



ดังนั้น f ไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

#

แบบฝึกหัด

- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$ และ $f = \{(1, a), (2, a), (3, a)\}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชัน
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไป B
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{a, b\}$ และ $f = \{(a, 1), (b, 2)\}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชัน
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก B ไปทั่วถึง A
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก B ไป A
- กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ และ $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3)\}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชัน
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง B
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก B ไปทั่วถึง A
- กำหนดให้ $A = \{2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ และ $f = \{(2, 3), (3, 2)\}$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชัน
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป B
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก B ไป A
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไป A
 - f เป็นฟังก์ชัน จาก A ไปทั่วถึง A
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$ จาก A ไปทั่วถึง A
- กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 1$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$
- กำหนดให้ $f(x) = x^2$ โดยที่ $x > 0$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$
 - f เป็นฟังก์ชัน $1-1$
- กำหนดให้ $g(x) = |x - 5|$ ข้อใดถูกต้องบ้าง
 - g เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
 - g เป็นฟังก์ชัน $1-1$

8. กำหนดให้ $h(x) = \sqrt{x} + 3$ ข้อใดถูกต้องบ้าง

1. h เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
2. h เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ไป $\mathbb{R}$
3. h เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$
4. h เป็นฟังก์ชัน $1-1$

9. กำหนดให้ $r(x) = 3^x$ ข้อใดถูกต้องบ้าง

1. r เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$
2. r เป็นฟังก์ชัน $1-1$

10. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ เมื่อ $x \in (-\infty, -1] \cup [0, 1]$

และ $g(x) = 2^x$ เมื่อ $x \in (-\infty, 0]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก [PAT 1 (มี.ค. 52)/10]

1. $R_g \subset D_f$
2. $R_f \subset D_g$
3. f เป็นฟังก์ชัน $1-1$
4. g ไม่เป็นฟังก์ชัน $1-1$

11. กำหนดให้ n เป็นจำนวนนับ

ถ้า $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ เป็นฟังก์ชัน $1-1$ และทั่วถึง ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = f(1)f(2) \dots f(n)$$

แล้วค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ $f(1) - f(n)$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ก.ค. 52)/46]

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

จากเรื่องความสัมพันธ์ อินเวอร์สของ f จะแทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1}

โดย ในเรื่องฟังก์ชันนี้ f^{-1} จะมีสมบัติทุกอย่างเหมือนกับตอนที่เรียนเรื่องอินเวอร์สของความสัมพันธ์

เช่น ถ้า $f = \{(-1, 2), (0, 5), (1, 4), (2, -1), (3, 6), (4, 3)\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(2, -1), (5, 0), (4, 1), (-1, 2), (6, 3), (3, 4)\}$

สิ่งที่ต้องระวัง คือ ถึง f จะเป็นฟังก์ชัน ก็ไม่ได้แปลว่า f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันด้วย

เช่น ถ้า $f = \{(1, 4), (3, 4)\} \rightarrow$ เป็นฟังก์ชัน

จะได้ $f^{-1} = \{(4, 1), (4, 3)\} \rightarrow$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

จะเห็นว่า f^{-1} จะเป็นฟังก์ชัน ก็ต่อเมื่อ f เป็นหนึ่งต่อหนึ่งเท่านั้น

ในกรณีที่ f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียก f^{-1} ว่า “ฟังก์ชันอินเวอร์ส”

สิ่งที่ต้องระวังคือ “อินเวอร์สของฟังก์ชัน” กับ “ฟังก์ชันอินเวอร์ส” เป็นคำศัพท์คนละคำกัน

- “อินเวอร์สของฟังก์ชัน” f แทนด้วยสัญลักษณ์ f^{-1} คือ การเอา f มาสลับ x กับ y
- f^{-1} อาจจะเป็นฟังก์ชัน หรือไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้
- ถ้า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน เราจะเรียก f^{-1} ว่า “ฟังก์ชันอินเวอร์ส” และจึงจะสามารถใช้สัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ ได้

เช่น ถ้า $f = \{(-1, 2), (0, 5), (1, 4), (2, -1), (3, 6), (4, 3)\}$

จะได้ $f^{-1} = \{(2, -1), (5, 0), (4, 1), (-1, 2), (6, 3), (3, 4)\}$

จะเห็นว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน ดังนั้น เราสามารถใช้สัญลักษณ์ $f^{-1}(x)$ ได้

เช่น $f^{-1}(3) = 4$, $f^{-1}(-1) = 2$ และ $f^{-1}(0) =$ หาค่าไม่ได้ เป็นต้น

จะเห็นว่า $f^{-1}(a) = b$ ก็ต่อเมื่อ $f(b) = a$ นั่นเอง

เช่น ถ้า $f = \{(1, 3), (2, 4), (3, 2)\}$ จะเห็นว่า $f(1) = 3$ ดังนั้น $f^{-1}(3) = 1$

ถ้า $f = \{(-1, 1), (0, -1), (1, 0)\}$ จะเห็นว่า $f(0) = -1$ ดังนั้น $f^{-1}(-1) = 0$ เป็นต้น

และมันจะเหมือนกับว่าเราสามารถย้ายข้าง f จากฝั่งหนึ่ง ไปเป็น f^{-1} ที่อีกฝั่งหนึ่งได้เลย

$$\begin{array}{l|l|l} \text{เช่น } f(a) = b & f(x) = x^2 - 2x + 1 & f^{-1}\left(\frac{x+3}{2}\right) = 2x - 1 \\ a = f^{-1}(b) & x = f^{-1}(x^2 - 2x + 1) & \frac{x+3}{2} = f(2x - 1) \end{array}$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 2$ จงหา $f^{-1}(-10)$

วิธีทำ ให้ $f^{-1}(-10) = k$ ดังนั้น $-10 = f(k)$

$$\begin{aligned} \text{จากสมการ } f(x) \text{ ที่โจทย์ให้ จะได้ } f(k) &= k^3 - 2 \quad \text{ดังนั้น} \quad -10 = k^3 - 2 \\ 0 &= k^3 + 8 \\ 0 &= (k + 2)(k^2 - 2k + 4) \\ k &= -2 \quad k = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} \rightarrow \text{หาไม่ได้} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f^{-1}(-10) = -2$

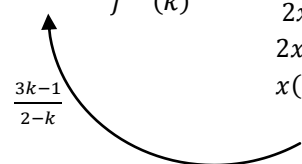
#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ จงหา $f^{-1}(x)$

วิธีทำ จาก $f(x) = \frac{2x+1}{x+3}$ จะได้ $x = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$

แต่โจทย์อยากได้แบบที่หลัง f^{-1} เป็นตัวแปรตัวเดียว ดังนั้น เราจะเปลี่ยนรูป $f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right)$ ให้เป็น $f^{-1}(k)$

ดังนี้

$$\begin{array}{rcll}
 x = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{x+3}\right) & & & \\
 \downarrow & \longrightarrow & \frac{2x+1}{x+3} & = k \\
 f^{-1}(k) & & 2x+1 & = xk+3k \\
 & & 2x-xk & = 3k-1 \\
 & & x(2-k) & = 3k-1 \\
 & & x & = \frac{3k-1}{2-k}
 \end{array}$$


จะได้ $f^{-1}(k) = \frac{3k-1}{2-k}$ ดังนั้น $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x}$

#

แบบฝึกหัด

1. จงหา f^{-1} เมื่อกำหนด f ดังนี้

1. $f = \{(1, 3), (2, 1), (4, 2)\}$

2. $f(x) = 2x + 1$

3. $f(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

4. $f(x) = \sqrt{x+1}$

2. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x} - 3$ จงหาค่าของ $f^{-1}(1)$

3. กำหนดให้ $f(x) = x^2 + 3x - 3$ โดยที่ $x < 0$ จงหาค่าของ $f^{-1}(1)$

4. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x & ; x \geq -2 \\ x^2 + 1 & ; x < -2 \end{cases}$ จงหาค่าของ $f^{-1}(10) + f^{-1}(3)$

5. กำหนดให้ $f^{-1}(x) = ax - 3$ ถ้า $f(2) = 5$ แล้ว จงหาค่า $f(1)$

6. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{-1+\sqrt{1+4x^2}}{2x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$
 ถ้า $f^{-1}(a) = \frac{2}{3}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-3]

7. กำหนดให้ $f(x) = 3x - 1$ และ $g^{-1}(x) = \begin{cases} x^2 & , x \geq 0 \\ -x^2 & , x < 0 \end{cases}$
 ค่าของ $f^{-1}(g(2) + g(-8))$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (มี.ค. 52)/8]

8. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{และ} \quad g(x) = x^2 + 4x + 13$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $g(a) = 25$

แล้ว $f^{-1}(-2a) + f^{-1}(13a)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 51/1-8]

ฟังก์ชันเพิ่ม - ลด

ฟังก์ชันเพิ่ม คือ ฟังก์ชันที่ เมื่อ x เพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้น

และ เมื่อ x ลดลง จะส่งผลให้ $f(x)$ มีค่าลดลง

ฟังก์ชันลด คือ ฟังก์ชันที่ เมื่อ x เพิ่มขึ้น จะส่งผลให้ $f(x)$ มีค่าลดลง

และ เมื่อ x ลดลง จะส่งผลให้ $f(x)$ มีค่าเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $f(x) = 10 - 2x$ เป็นฟังก์ชันลด

วิธีทำ จะเห็นว่า x มี -2 คูณอยู่ข้างหน้า ดังนั้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น จะทำให้ $f(x)$ ลดลง ดังนั้น $f(x)$ เป็นฟังก์ชันลด

หรือถ้าจะพิสูจน์ เราต้องแสดงว่า ถ้า $x_1 > x_2$ แล้ว จะได้ $f(x_1) < f(x_2)$ ดังนี้

$$\begin{array}{rcl} x_1 & > & x_2 \\ -2x_1 & < & -2x_2 \quad \text{คูณทั้งสองข้างด้วยเลขลบ} \\ 10 - 2x_1 & < & 10 - 2x_2 \quad \text{ต้องกลับ > เป็น <} \\ f(x_1) & < & f(x_2) \end{array}$$

#

สิ่งที่ต้องระวังก็คือ บางฟังก์ชัน จะเป็นฟังก์ชันเพิ่มแค่บางช่วง และเป็นฟังก์ชันลดในอีกช่วง

เช่น $f(x) = x^2$ จะเห็นว่าเมื่อ x เป็นบวก ถ้า x ยิ่งมาก ก็จะทำให้ x^2 ยิ่งมาก

แต่เมื่อ x เป็นลบ จะเห็นว่า x ยิ่งน้อย กลับจะทำให้ x^2 จะยิ่งมาก

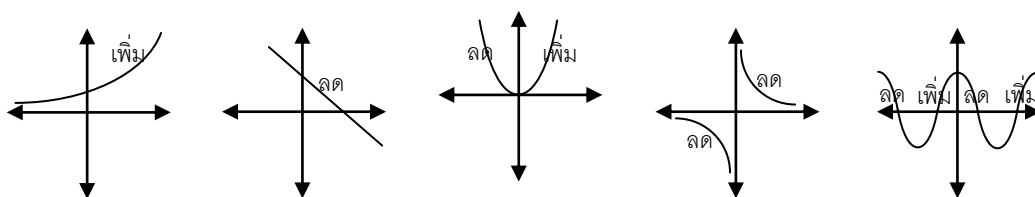
$$\begin{array}{ccccc} x \text{ เพิ่ม} & \downarrow & 2^2 = 4 & \downarrow f(x) \text{ เพิ่ม} & x \text{ ลด} & \downarrow & (-2)^2 = 4 & \downarrow f(x) \text{ เพิ่ม} \\ & & 3^2 = 9 & & & & (-3)^2 = 9 & \end{array}$$

ดังนั้น $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มบน R^+ แต่เป็นฟังก์ชันลดบน R^-

อีกวิธีที่นิยมใช้ คือให้ดูจากกราฟ: ถ้ากราฟเป็นช่วงขาขึ้น ↗ แปลว่าช่วงนั้นเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ถ้ากราฟเป็นช่วงขาลง ↘ แปลว่าช่วงนั้นเป็นฟังก์ชันลด

เช่น



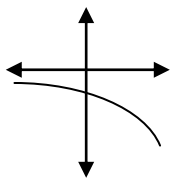
แบบฝึกหัด

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม หรือ ฟังก์ชันลด ในช่วงใดบ้าง

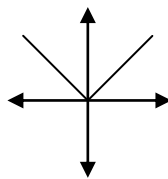
1. $f(x) = 2x + 5$

2. $f(x) = 3 - x$

3.



4.



5. $f(x) = (x - 1)^2$

2. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x) = ax + b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันลด และ $f(f(f(f(x)))) = 16x + 45$
แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ก.ค. 53)/18]

บวก ลบ คูณหาร ฟังก์ชัน

ฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชัน สามารถเอามาวก ลบ คูณหาร กันได้ โดยให้เอาค่า y ของ x เดียวกัน มาบวก ลบ คูณหาร กัน

เช่น ถ้า $f = \{ (1, 4), (2, 6), (3, 0), (4, 5), (5, 3) \}$

$g = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 2), (5, 0), (6, 3) \}$

จะได้ $f + g = \{ (1, 6), (2, 9), (3, 2), (5, 3) \}$

$f - g = \{ (1, 2), (2, 3), (3, -2), (5, 3) \}$

$f \cdot g = \{ (1, 8), (2, 18), (3, 0), (5, 0) \}$

$\frac{f}{g} = \{ (1, 2), (2, 2), (3, 0) \}$

สังเกตว่า

- ไม่ต้องเอา x มาบวกกัน (บวกแต่ y)
- ถ้า x ไม่เท่ากัน ไม่ต้องเอามาคิด
- การหารจะสู้จินตหน่วย ตรงที่ห้ามตัวหารเป็นศูนย์

จะเห็นว่า $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ จะมีโดเมน $= D_f \cap D_g$

และ $\frac{f}{g}$ จะมีโดเมนคล้ายๆกัน เพียงแต่ตัดตัวที่ตัวหารเป็นศูนย์ออก

ในกรณีที่โจทย์ให้สมการของฟังก์ชันมา ให้เราเอาสมการมา บวก ลบ คูณหาร กันได้เลย

เช่น ถ้า $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = x - 3$

จะได้ $(f + g)(x) = (x^2 - 2x) + (x - 3) = x^2 - x - 3$

$(f - g)(x) = (x^2 - 2x) - (x - 3) = x^2 - 3x + 3$

$(f \cdot g)(x) = (x^2 - 2x)(x - 3) = x^3 - 5x^2 + 6x$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2 - 2x}{x - 3}$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = 2x$, $g(x) = x^2$ จงหา $(f + g)(1)$

วิธีทำ เนื่องจาก $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

ดังนั้น $(f + g)(1) = f(1) + g(1)$
 $= 2(1) + 1^2 = 3$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$ จงหา D_{f+g} , D_{f-g} , $D_{f \cdot g}$ และ $D_{\frac{f}{g}}$

วิธีทำ D_{f+g} , D_{f-g} และ $D_{f \cdot g}$ จะหาได้จาก $D_f \cap D_g$

- เนื่องจากใน $\sqrt{\quad}$ ห้ามติดลบ ดังนั้น $D_f = [1, \infty)$
- เนื่องจากตัวหารห้ามเป็น 0 ดังนั้น $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

ดังนั้น D_{f+g} , D_{f-g} และ $D_{f \cdot g}$ คือ $[1, \infty) - \{2\}$

สำหรับ $D_{\frac{f}{g}}$ จะต้องหักตัวที่ทำให้ $g(x)$ เป็นศูนย์ออกไปอีก

จะเห็นว่า $g(x)$ เป็นศูนย์ เมื่อ $x = 3$ ดังนั้น $D_{\frac{f}{g}} = [1, \infty) - \{2, 3\}$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f = \{ (1, 2), (2, 3), (3, 4) \}$ และ $g = \{ (2, 1), (3, 2) \}$ จงหาค่าของ $(f^{-1} + g)(2)$

2. กำหนดให้ $f(x) = x + 1$ และ $g(x) = x^2 - 3x - 4$ จงหา $D_{\frac{f}{g}}$

3. กำหนดให้ $f = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1 \}$ และ $g = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x} + 1 \}$ จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. D_{f-g}

2. $(f - g)(1)$

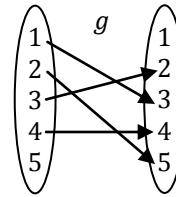
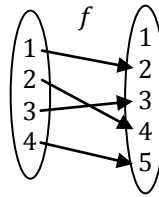
4. ถ้า $f(x) = \sqrt[3]{x}$ และ $g(x) = \frac{x}{1+x}$ แล้ว $(f^{-1} + g^{-1})(2)$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-4]

ฟังก์ชันประกอบ

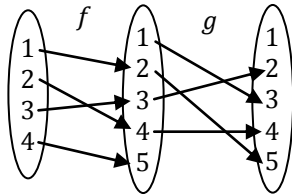
“ฟังก์ชันประกอบ f และ g ” หมายถึงการนำ f กับ g มาโยงต่อกันเป็นทอด

เช่น $f = \{ (1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 5) \}$

$g = \{ (1, 3), (2, 5), (3, 2), (4, 4) \}$



ถ้านำ f กับ g มา “ประกอบ” กัน จะได้ดังรูป



f โยง 1 ไป 2 และ g โยง 2 ต่อไป 5 → ฟังก์ชันประกอบ f และ g โยง 1 ไป 5

f โยง 2 ไป 4 และ g โยง 4 ต่อไป 4 → ฟังก์ชันประกอบ f และ g โยง 2 ไป 4

f โยง 3 ไป 3 และ g โยง 3 ต่อไป 2 → ฟังก์ชันประกอบ f และ g โยง 3 ไป 2

ฟังก์ชันประกอบ f และ g เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ (อ่านว่า จีโอเอฟ)

ในตัวอย่างข้างบน จะได้ $g \circ f = \{ (1, 5), (2, 4), (3, 2) \}$

จะเห็นว่า f โยง 4 ไป 5 แต่ g ไม่โยง 5 ต่อ จึงไม่มีการโยงนี้ใน $g \circ f$

ทำนองเดียวกัน f ไม่ได้โยงอะไรไปที่ 1 ถึง g จะโยง 1 ต่อไปที่ 3 แต่ก็จะไม่มีการโยงนี้ใน $g \circ f$ เช่นกัน

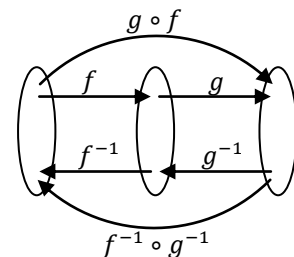
ดังนั้น โดเมนของ $g \circ f$ จะเท่ากับ โดเมนของ f เฉพาะตัวที่ g โยงต่อได้

เขียนแบบเข้าใจยากๆ ได้ว่า $D_{g \circ f} = \{ x \in D_f \mid f(x) \in D_g \}$

$(g \circ f)^{-1}$ คือ การโยงกลับของ $g \circ f$

เนื่องจาก $g \circ f$ ขาไป จะเอา f โยงก่อน แล้วค่อย g โยงต่อ

ดังนั้น $(g \circ f)^{-1}$ ขากลับ ต้องให้ g^{-1} โยงกลับก่อน แล้วค่อยให้ f^{-1} โยงกลับ



ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่ มักนิยมท่องว่า

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$g \circ f$ กับ $f \circ g$ ไม่จำเป็นต้องเหมือนกัน

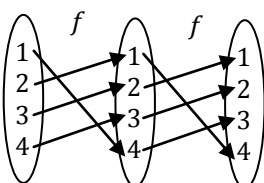
- $g \circ f$ คือ f โยงก่อน แล้ว g โยงต่อ
- $f \circ g$ คือ g โยงก่อน แล้ว f โยงต่อ

เช่นในตัวอย่างข้างบน $g \circ f = \{ (1, 5), (2, 4), (3, 2) \}$

แต่ $f \circ g = \{ (1, 3), (3, 4), (4, 5) \}$

และถ้าเห็น $f \circ f$ ก็ไม่ต้องตกใจ หมายถึงเอา f โยงก่อน แล้วเอา f ตัวเดิมโยงต่อ

เช่น ถ้า $f = \{ (1, 4), (2, 1), (3, 2), (4, 3) \}$



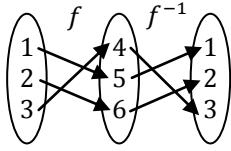
จะได้ $f \circ f = \{ (1, 3), (2, 4), (3, 1), (4, 2) \}$

ถ้าเห็น $f^{-1} \circ f$ หรือ $f \circ f^{-1}$ ก็ทำคล้ายๆ กัน

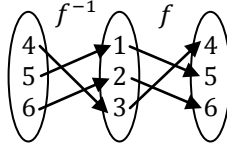
แต่จะเห็นว่าคราวนี้ f กับ f^{-1} โยงสวนกัน ดังนั้น $f^{-1} \circ f$ จะโยงกลับมาที่เดิม

เช่น ถ้า $f = \{(1, 5), (2, 6), (3, 4)\}$

$$f^{-1} = \{(5, 1), (6, 2), (4, 3)\}$$



$$f^{-1} \circ f = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$$



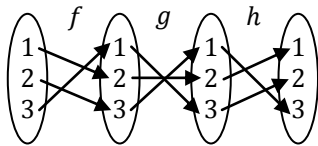
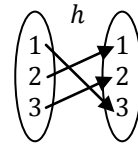
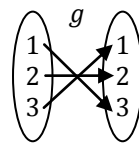
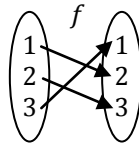
$$f \circ f^{-1} = \{(5, 5), (6, 6), (4, 4)\}$$

หรือจะเอาฟังก์ชัน 3 ฟังก์ชัน มาประกอบกันก็ยังได้

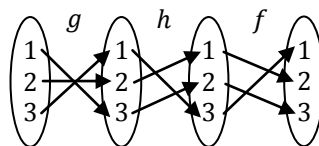
เช่น ถ้า $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

$$g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

$$h = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\}$$



$$h \circ g \circ f = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$$



$$f \circ h \circ g = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$$

หมายเหตุ: การประกอบฟังก์ชัน สลับที่ไม่ได้ แต่เปลี่ยนกลุ่มได้

$$\text{กล่าวคือ } f \circ g \text{ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ } g \circ f \quad \text{แต่ } h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

ในกรณีที่โจทย์ให้ฟังก์ชันในรูปสมการ ก็จะใช้หลักเดิมอยู่ เพียงแต่คราวนี้จะโยงด้วยสมการฟังก์ชัน

เช่น ถ้า $f(x) = 3x + 2$ หมายความว่า f โยง 1 ไปที่ $3(1) + 2 = 5$ เป็นต้น

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 5$ และ $g(x) = (x - 1)^3$ จงหา $(g \circ f)(1)$ และ $(f \circ g)(1)$

วิธีทำ $(g \circ f)(1)$ คือ f โยง 1 ไปก่อนได้เท่าไรให้ g โยงต่อ

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 5 = 4 \quad \rightarrow f \text{ โยง 1 ไปที่ 4}$$

$$g(4) = (4 - 1)^3 = 27 \quad \rightarrow g \text{ โยง 4 ไปที่ 27}$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(1) = 27$$

$(f \circ g)(1)$ คือ g โยง 1 ไปก่อนได้เท่าไรให้ f โยงต่อ

$$g(1) = (1 - 1)^3 = 0 \quad \rightarrow g \text{ โยง 1 ไปที่ 0}$$

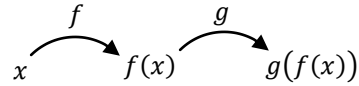
$$f(0) = 0^2 - 2(0) + 5 = 5 \quad \rightarrow f \text{ โยง 0 ไปที่ 5}$$

$$\text{ดังนั้น } (f \circ g)(1) = 5$$

สุดท้าย ในกรณีที่ต้องการหาสมการของ $g \circ f$

เราจะใช้สูตร

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 2x + 5$ และ $g(x) = (x - 1)^3$ จงหา $(g \circ f)(x)$ และ $(f \circ g)(x)$

วิธีทำ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

$$= g(x^2 - 2x + 5)$$

$$= (x^2 - 2x + 5 - 1)^3$$

$$= (x^2 - 2x + 4)^3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$$= f((x - 1)^3)$$

$$= ((x - 1)^3)^2 - 2((x - 1)^3) + 5$$

$$= (x - 1)^6 - 2(x - 1)^3 + 5$$

#

ตัวอย่าง กำหนดให้ $(f \circ g)(x) = x - 1$ ถ้า $f^{-1}(x) = 2x + 3$ แล้ว จงหา $g(x)$

วิธีทำ

$$f(g(x)) = x - 1$$

$$g(x) = f^{-1}(x - 1)$$

$$= 2(x - 1) + 3$$

$$= 2x + 1$$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$ จงหาค่าของ

1. $(f \circ g)(2)$

2. $(g \circ f)(1)$

3. $(f \circ f)(3)$

4. $(f \circ g \circ g)(2)$

2. กำหนดให้ $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x - 1$ จงหาค่าของ

1. $(f \circ g)(2)$

2. $(g \circ f)(1)$

3. $(f \circ f)(3)$

4. $(f \circ g \circ g)(2)$

3. กำหนดให้ $f = \{ (x, y) \mid y = -x + 1 \}$ จงหา $(f \circ f \circ f)(x)$

4. กำหนดให้ $f^{-1}(x) = 3x^2$ และ $g^{-1}(x) = 2 - x$ จงหา $(f \circ g)^{-1}(1)$

5. ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ และ $g(x) = 2f(x)$ แล้ว $g \circ f(3) + f \circ g^{-1}(3)$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-3]

6. กำหนดให้ R เป็นเซตของจำนวนจริง

บทนิยาม ให้ $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันใดๆ
กำหนดการดำเนินการ $\otimes$ ของ f และ g ดังนี้

$$(f \otimes g)(x) = f(g(x)) - g(f(x))$$
สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ และ $g(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว $(f \otimes g)(1)$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/47]

7. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 3$ และ $g(x) = bx^2 + 3x + a$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง
ถ้า $f(3) = 0$ และ $x - 2$ หาร $f(x)$ มีเศษเหลือเท่ากับ 5 แล้วค่าของ $(g \circ f)(1)$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 57)/43]

8. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน [PAT 1 (มี.ค. 56)/7]
- ความสัมพันธ์ $\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4, xy > 0 \}$ เป็นฟังก์ชัน
 - ถ้า $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$ และ $g(3x - 1) = 2x^2 + 3x$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$
แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(25) = 14$

9. ฟังก์ชัน f, g, h มีสมบัติว่า $(f \circ g)(x) = 3x - 14$
 $f\left(\frac{x+6}{3}\right) = x - 2$, $h(2x - 1) = 6g(x) + 12$ จงหาสมการของ $h(x)$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/28*]

10. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = -1 \\ \frac{x-1}{x+1} & , x \neq -1 \end{cases}$
 ถ้า $A = \{x \in R \mid (f \circ f)(x) = 2 - \sqrt{3}\}$ แล้วข้อใดไม่เป็นเซตว่าง [PAT 1 (ท.ค. 54)/7*]
 1. $A \cap (-3, -2)$ 2. $A \cap (-4, -3)$ 3. $A \cap (2, 3)$ 4. $A \cap (3, 4)$

11. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 3x - 5\}$ และ
 $g = \{(x, y) \in R \times R \mid y = 2x + 1\}$
 ถ้า $a \in R$ และ $(g^{-1} \circ f^{-1})(a) = 4$ แล้ว $(f \circ g)(2a)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/42]

12. กำหนดให้ $f(x) = 3x + 5$ และ $h(x) = 3x^2 + 3x - 1$
 ถ้า g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งทำให้ $f \circ g = h$ แล้ว $g(5)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 50/2-7]

13. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \frac{x+3}{x+6} \text{ และ } (f^{-1} \circ g)(x) = \frac{-6x}{x-1} \text{ ถ้า } g(a) = 2 \text{ แล้ว } a \text{ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้} \quad [\text{PAT 1 (ก.ค. 53)}/5]$$

1. $[-1, 1)$ 2. $[1, 3)$ 3. $[3, 5)$ 4. $[5, 7)$

14. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R

$$\text{โดยที่ } f(x+5) = x^3 - x^2 + 2x \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

$$\text{และ } g^{-1}(2x-1) = x+4 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง}$$

[PAT 1 (ต.ค. 55)/6]

1. $(f-g)(0) < -169$
 2. $\{x \in I \mid (g \circ f)(x) + 5 = 0\}$ เป็นเซตว่าง

15. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนด $g(x) = x^2 + x + 3$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน และสอดคล้องกับ

$$(f \circ g)(x) + 2(f \circ g)(1-x) = 6x^2 - 10x + 17$$

$$2(f \circ g)(x) + (f \circ g)(1-x) = 6x^2 - 2x + 13$$

ค่าของ $f(383)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/38]

16. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $g(x) = \frac{1}{2x+3}$ เมื่อ $x \neq -\frac{3}{2}$
 ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่ $(f \circ g)(x) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้ว จงหาสมการของ $f(x)$
 [PAT 1 (มี.ค. 54)/20*]

17. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า f_1, f_2, f_3, f_4, g และ h เป็นฟังก์ชันจาก R ไปยัง R โดยที่

$$f_1(x) = x + 1, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = x^2 + 4, \quad f_4(x) = x^2 - 4$$

$$(f_1 \circ g)(x) + (f_2 \circ h)(x) = 2 \quad \text{และ} \quad (f_3 \circ g)(x) - (f_4 \circ h)(x) = 4x$$

 ค่าของ $(g \circ h)(1)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/28]

18. กำหนดให้ $f(x) = x - 5$ และ $g(x) = x^2$
 ถ้า a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $g \circ f(a) = f \circ g(a)$ แล้ว $(fg)(a)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ก.ค. 52)/8]

19. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย $f(x) = x^2 + 1$ และ $g(x) = ax$ เมื่อ $a \in (0, 1)$
 ถ้า k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $(f \circ g)(k) = (g \circ f)(k)$
 แล้ว $(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{k^2}\right)$ มีค่าเท่ากับเท่าไร [A-NET 51/1-7]
20. กำหนดให้ f, g เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(x) = (x - 1)^3 + 3$
 และ $g^{-1}(x) = x^2 - 1, \quad x \geq 0$
 ถ้า $g \circ f^{-1}(a) = 0$ แล้ว a^2 อยู่ในเซตใดต่อไปนี้ [A-NET 50/1-5]
1. $[10, 40]$
 2. $[40, 70]$
 3. $[70, 100]$
 4. $[100, 130]$
21. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันพหุนามจาก R ไปยัง R โดยที่ $f(x) = 2x - 5$,
 $(f^{-1} \circ g)(x) = 4x$ และ $(g \circ h)(x)$ หาด้วย $x - 1$ แล้ว เหลือเศษเท่ากับ -21 ให้ c เป็นจำนวนเต็มบวกที่
 น้อยสุดที่สอดคล้องกับ $h(x - c) = x^3 - 3x^2 - 2$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 58)/20]
1. $(f \circ h)(c) = 23$
 2. $(h + g)(c) = 35$

22. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $g(x) = 2f(x) + 5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
 ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $(f \circ g^{-1})(1 + a) = (g \circ f^{-1})(1 + a)$ แล้วค่าของ a^2 เท่ากับเท่าใด
 [PAT 1 (พ.ย. 57)/42]

23. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่ $(f \circ g)(x) = 4x - 5$ และ $g^{-1}(x) = 2x + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ต้องบ้าง
 [PAT 1 (เม.ย. 57)/6]
1. $4(f^{-1} \circ g)(2x + 1) = g(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
 2. $(g^{-1} \circ (f^{-1} \circ g))(x) = f^{-1}(x) + 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

24. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x - 1)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/35]

25. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f(x + g(y)) = 2x + y + 15$ สำหรับจำนวนจริง x และ y ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/30]
1. $(g \circ f)(x) = 2x + 15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y
 2. $g(25 + f(57)) = 75$

ฟังก์ชันที่วนกลับไปหาตัวเอง

ในหัวข้อที่ผ่านมา สมการของฟังก์ชัน มักจะมีพจน์ที่ติด f แค่พจน์เดียว เช่น $f(x) = 2x - 1$, $f\left(\frac{x+1}{2}\right) = x^2$ แต่ในเรื่องนี้ สมการของฟังก์ชัน จะมีพจน์ที่ติด f หลายพจน์ เช่น $f(x) = f(x-1) + 2x$ เป็นต้น
วิธีทำโจทย์ประเภทนี้ มักต้องใช้สมการที่โจทย์ให้ มาแทน x เป็นค่าต่างๆหลายรอบ เพื่อหาค่าที่โจทย์ต้องการ

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(2x) = f(x) + 3$ ถ้า $f(1) = -2$ จงหา $f(32)$

วิธีทำ ถ้าจะหา $f(32)$ เราต้องนำสมการที่โจทย์ให้ มาแทน x ด้วย 16 ดังนี้

$$\begin{aligned} f(2 \cdot 16) &= f(16) + 3 \\ f(32) &= f(16) + 3 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า การหา $f(32)$ นั้น จะต้องหา $f(16)$ ออกมาให้ได้ก่อน

ถ้าจะหา $f(16)$ เราต้องนำสมการที่โจทย์ให้ มาแทน x ด้วย 8 ดังนี้

$$\begin{aligned} f(2 \cdot 8) &= f(8) + 3 \\ f(16) &= f(8) + 3 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

ทำแบบนี้ซ้ำไปเรื่อยๆ จะได้

$$\begin{aligned} f(8) &= f(4) + 3 \\ f(4) &= f(2) + 3 \\ f(2) &= f(1) + 3 \end{aligned}$$

แทน $f(1) = -2$ จะได้ $f(2) = -2 + 3 = 1$

แทน $f(2) = 1$ จะได้ $f(4) = 1 + 3 = 4$

แทนแบบนี้ ย้อนกลับไปเรื่อยๆ จะได้

$$\begin{aligned} f(8) &= 4 + 3 = 7 \\ f(16) &= 7 + 3 = 10 \\ f(32) &= 10 + 3 = 13 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้ $f(32) = 13$

#

แบบฝึกหัด

1. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $f : I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติดังนี้

$$(1) f(1) = 1$$

$$(2) f(2x) = 4f(x) + 6$$

$$(3) f(x+2) = f(x) + 12x + 12$$

แล้วค่าของ $f(7) + f(16)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/48]

2. กำหนดให้ $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการ $f(x+y) = f(x) + f(y) + 4xy$ โดยที่ $f(1) = 4$ จงหาค่าของ $f(20)$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/49]

3. สำหรับ $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ กำหนดให้ $F(x, y)$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x, y) = \begin{cases} F(1, y-1) & , \quad x=0, y \neq 0 \\ x+1 & , \quad y=0 \\ F(F(x-1, y), y-1) & , \quad x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ $F(1, 2) + F(3, 1)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/48]

4. ให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และให้ $f: I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(n+1) = f(n) + 3n + 2$ สำหรับ $n \in I$ ถ้า $f(-100) = 15,000$ แล้ว $f(0)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/30]

5. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ $(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x))$ สำหรับทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(4)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/50]

6. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $xf(x) + f(1 - x) = 2x - x^2$ เมื่อ $x \in R$ แล้ว จงหาสมการของ $f(x)$ [PAT 1 (มี.ค. 54)/41*]

ทบทวนความสัมพันธ์

- | | | | |
|-------|--------------|------|---------|
| 1. 15 | 2. $(-2, 8)$ | 3. - | 4. 4 |
| 5. 3 | 6. 3 | 7. 2 | 8. 1, 2 |

ทบทวนฟังก์ชัน

- | | | | |
|------|---------|-------|-------------------------------------|
| 1. 2 | 2. - | 3. 2 | 4. 6 |
| 5. - | 6. 4 | 7. 1 | 8. $(-\infty, -4] \cup [4, \infty)$ |
| 9. 8 | 10. 135 | 11. 2 | 12. 4 |

ประเภทของฟังก์ชัน

- | | | | |
|---------|---------|------------|------------------|
| 1. 1, 2 | 2. 1, 4 | 3. 1, 2, 4 | 4. 1, 2, 4, 5, 6 |
| 5. - | 6. 1, 2 | 7. 1 | 8. 2, 4 |
| 9. 2 | 10. 1 | 11. 2 | |

ฟังก์ชันอินเวอร์ส

- | | | |
|------------------------------------|---------------------------|------------------------|
| 1. 1. $\{(3, 1), (1, 2), (2, 4)\}$ | 2. $\frac{x-1}{2}$ | 3. $\frac{-x-1}{2x-1}$ |
| 4. $x^2 - 1; x \geq 0$ | | |
| 2. 16 | 3. -4 | 4. -4 |
| 5. 4 | | |
| 6. 0.5 | 7. $\frac{1-\sqrt{2}}{3}$ | 8. 0 |

ฟังก์ชันเพิ่ม - ลด

- | | | |
|---|---|---------------------------------------|
| 1. 1. $(-\infty, \infty) \rightarrow$ เพิ่ม | 2. $(-\infty, \infty) \rightarrow$ ลด | 3. $(-\infty, \infty) \rightarrow$ ลด |
| 4. $(-\infty, 0) \rightarrow$ ลด, $(0, \infty) \rightarrow$ เพิ่ม | 5. $(-\infty, 1) \rightarrow$ ลด, $(1, \infty) \rightarrow$ เพิ่ม | |
| 2. -11 | | |

บวก ลบ คูณ หาร ฟังก์ชัน

- | | |
|---------------------|--------------------|
| 1. 2 | 2. $R - \{-1, 4\}$ |
| 3. 1. $[0, \infty)$ | 2. 1 |
| 4. 6 | |

ฟังก์ชันประกอบ

- | | | | |
|---------|-------|-------|-------|
| 1. 1. 1 | 2. 3 | 3. 2 | 4. 3 |
| 2. 1. 8 | 2. -1 | 3. 63 | 4. 24 |

3. $-x + 1$

4. -1

5. 7.5

6. 7

7. 721

8. $1, 2$

9. $3x + 3$

10. 2

11. 262

12. 28

13. 3

14. $-$

15. 763

16. $\frac{1}{2x} - \frac{3}{2}$

17. 1

18. -18

19. 2

20. 1

21. 1

22. 36

23. $1, 2$

24. 9

25. $-$

ฟังก์ชันที่วนกลับไปหาตัวเอง

1. 911

2. 840

3. 10

4. 50

5. 4

6. $1 - x$