เอกซ์โพเนนเชียล
และลอการิทึม

1 Sep 2019

สารบัญ

สมการติดรูท

เรื่องนี้ จะต้องแก้สมการที่มีเครื่องหมาย $\sqrt{\ }$ อยู่
วิธีการแก้สมการประเภทนี้ จะต้องกำจัดเครื่องหมายรูทให้หมดไป โดยการยกกำลังสองทั้งสองข้าง
การยกกำลังสอง จะทำให้รูทหายไปได้ กล่าวคือ $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ ภายใต้เงื่อนไข $a \geq 0$

สิ่งที่ต้องระวังคือ การยกกำลังสองทั้งสองข้าง อาจทำให้ได้ "คำตอบปลอม" โผล่ออกมาได้
เพราะการยกกำลังสอง จะทำให้สิ่งที่ "เคยไม่จริง" กลายเป็นจริงได้
เช่น $2 \neq -2$ แต่พอยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $4 = 4$ กลายเป็นสมการที่เป็นจริง
ดังนั้น ถ้ามีการยกกำลังสองทั้งสองข้าง เมื่อแก้สมการเสร็จ ต้องเช็คเสมอ ว่าเลขที่ได้เป็นคำตอบจริงหรือไม่
โดยลองนำคำตอบที่ได้ ไปแทนสมการตั้งต้น ถ้าไม่จริงแปลว่านั่นไม่ใช่ตำตอบ

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\sqrt{x+2} = x$

<u>วิธีทำ</u> กำจัดรูทโดยการยกกำลังสองทั้งสองข้างก่อน จะได้
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= (x)^2 \\ x+2 &= x^2\end{aligned}$$

พอรูทหาย ก็ค่อยแก้สมการตามปกติ

$$\begin{aligned} x+2 &= x^2 \\ 0 &= x^2 - x - 2 \\ 0 &= (x-2)(x+1) \\ x &= 2, -1 \end{aligned}$$

จากนั้น ตรวจคำตอบ โดยการนำตัวเลขที่ได้ ไปแทนในสมการตั้งต้น $\sqrt{x+2} = x$
นำ 2 ไปแทน: $\sqrt{2+2} = 2$ จริง
นำ -1 ไปแทน: $\sqrt{-1+2} = -1$ ไม่จริง
ดังนั้น คำตอบของสมการนี้คือ 2 เพียงคำตอบเดียว #

สิ่งที่ต้องระวังคือ การยกกำลังสอง กระจายในการบวกลบไม่ได้ นั่นคือ $\left(\sqrt{x}+2\right)^2 \neq \sqrt{x}^{\,2} + 2^2$
แต่เราต้องกระจายด้วยสูตร
$$\begin{aligned}(\text{น}+\text{ล})^2 &= \text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2 \\ (\text{น}-\text{ล})^2 &= \text{น}^2 - 2\text{นล} + \text{ล}^2\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x}+2\right)^2 &= \sqrt{x}^{\,2} + 2\left(\sqrt{x}\right)(2) + 2^2 \\ &= x + 4\sqrt{x} + 4\end{aligned}$$

จะเห็นว่าในกรณีที่ตัวติดรูท มีตัวอื่นบวกลบอยู่ "ข้างนอกรูท" เช่น $\sqrt{x}+2$ ถึงยกกำลังสองไป ก็กำจัดรูทไม่ได้
ในกรณีนี้ ให้ย้ายตัวที่บวกลบอยู่นอกรูท ไปไว้อีกฝั่งก่อน ค่อยยกกำลัง
เช่น $\sqrt{x} - 1 = x - 4$ $\rightarrow$ ต้องย้าย -1 ไปทางขวาก่อน ค่อยยกกำลังสอง
$\sqrt{x+2} + 1 = x + 3$ $\rightarrow$ ต้องย้าย $+1$ ไปทางขวาก่อน ค่อยยกกำลังสอง
$\sqrt{x-1} - \sqrt{x-2} = 1$ $\rightarrow$ ต้องย้าย $\sqrt{x-1}$ หรือไม่ก็ $\sqrt{x-2}$ มาทางขวาก่อน

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\sqrt{x+6}+3 = 2x$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ มี 3 บวกอยู่นอกรูท ถ้าเอามายกกำลังสองเลย รูทจะไม่หาย

ต้องย้าย 3 ไปอีกฝั่งก่อน ค่อยยกกำลังสอง ดังนี้

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+6} &= 2x-3 \\
\left(\sqrt{x+6}\right)^2 &= (2x-3)^2 \\
x+6 &= (2x)^2-2(2x)(3)+3^2 \\
x+6 &= 4x^2-12x+9 \\
0 &= 4x^2-13x+3 \\
0 &= (4x-1)(x-3) \\
x &= \tfrac{1}{4},\ 3
\end{aligned}$$

นำ $\frac{1}{4}$ ไปตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned}
\sqrt{\tfrac{1}{4}+6}+3 &= 2\times\tfrac{1}{4} \\
\sqrt{\tfrac{25}{4}}+3 &= \tfrac{1}{2} \\
\tfrac{5}{2}+3 &= \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

ไม่จริง

นำ 3 ไปตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned}
\sqrt{3+6}+3 &= 2\times 3 \\
\sqrt{9}+3 &= 6 \\
3+3 &= 6
\end{aligned}$$

จริง

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ 3 เพียงคำตอบเดียว #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x} = 3$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ มีรูทสองตัว ต้องค่อยๆกำจัดทีละตัว

เริ่มจากกำจัด $\sqrt{}$ ที่ $\sqrt{x+2}$ ก่อน แต่ก่อนยก ต้องย้ายตัวที่บวกอยู่กับ $\sqrt{x+2}$ ไปไว้อีกฝั่งก่อน

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+2} &= 3-\sqrt{3-x} \\
\left(\sqrt{x+2}\right)^2 &= \left(3-\sqrt{3-x}\right)^2 \\
x+2 &= 9-6\sqrt{3-x}+3-x \\
2x-10 &= -6\sqrt{3-x} \\
x-5 &= -3\sqrt{3-x} \quad \text{หาร 2 ตลอด} \\
(x-5)^2 &= (-3)^2\left(\sqrt{3-x}\right)^2 \\
x^2-10x+25 &= 9(3-x) \\
x^2-10x+25 &= 27-9x \\
x^2-x-2 &= 0 \\
(x-2)(x+1) &= 0 \\
x &= 2,-1
\end{aligned}$$

นำ 2 ไปตรวจคำตอบ: $\sqrt{2+2}+\sqrt{3-2} = 3$ จริง

นำ -1 ไปตรวจคำตอบ: $\sqrt{-1+2}+\sqrt{3-(-1)} = 3$ ก็จริงอีก

ดังนั้น ข้อนี้คำตอบ คือ 2 และ -1 ทั้งสองตัว #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการต่อไปนี้

    1. $\sqrt{2x+1}+7 = 10$
    2. $\sqrt{1-x^2} = 1-x$
    3. $\sqrt{x-3}+2 = x-3$
    4. $\sqrt{x^2-9} = 2x-6$
    5. $x+\sqrt{x+1} = 5$

อีกเทคนิคที่นิยมใช้ในการแก้สมการติดรูท คือ “การเปลี่ยนตัวแปร”
วิธีนี้ จะกำจัดรูท ด้วยการ สมมติให้ตัวติดรูทเป็นตัวแปรใหม่ แล้วพยายามเปลี่ยนตัวแปรเก่าทั้งหมด เป็นตัวแปรใหม่ เมื่อแก้สมการตัวแปรใหม่ได้แล้ว จึงค่อยย้อนไปหาค่าของตัวแปรเก่า

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + x - 1} \ = \ 5$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ตัวติดรูท เป็นตัวแปรใหม่ จะได้ $\sqrt{x^2 + x - 1} \ = \ A$

พยายามเปลี่ยนตัวแปร x ตัวเก่า ให้เป็น A

$$\underbrace{2x^2 + 2x}_{\text{เปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ } A} + \cancelto{A}{\sqrt{x^2 + x - 1}} = 5$$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + x - 1} \ &= \ A \\ x^2 + x - 1 \ &= \ A^2 \\ x^2 + x \ &= \ A^2 + 1 \\ 2x^2 + 2x \ &= \ 2A^2 + 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการ $2x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + x - 1} \ = \ 5$ จะกลายเป็น $2A^2 + 2 + A \ = \ 5$

แก้สมการใหม่ที่มี A เป็นตัวแปร จะได้

$$\begin{aligned} 2A^2 + 2 + A \ &= \ 5 \\ 2A^2 + A - 3 \ &= \ 0 \\ (2A + 3)(A - 1) \ &= \ 0 \\ A \ &= \ -\tfrac{3}{2} \ , \ 1 \end{aligned}$$

หลังจากที่ได้ค่า A เราจะแก้ต่อไปหาค่า x

เนื่องจาก $A \ = \ \sqrt{x^2 + x - 1}$ แต่ $\sqrt{}$ ไม่สามารถให้ผลลัพธ์เป็นลบได้ ดังนั้น A จึงเป็น $-\frac{3}{2}$ ไม่ได้ นั่นคือ A เป็นได้แค่ 1 เท่านั้น

$$\begin{aligned} A \ &= \ 1 \\ \sqrt{x^2 + x - 1} \ &= \ 1 \\ x^2 + x - 1 \ &= \ 1 \\ x^2 + x - 2 \ &= \ 0 \\ (x + 2)(x - 1) \ &= \ 0 \\ x \ &= \ -2 \ , \ 1 \end{aligned}$$

สุดท้าย ตรวจว่าเป็นคำตอบ โดยแทนค่า -2 กับ 1 ลงไปในสมการตั้งต้น

แทน -2 จะได้ $2(-2)^2 + 2(-2) + \sqrt{(-2)^2 + (-2) - 1} = 5$

$8 + (-4) + \sqrt{1} = 5$ จริง

แทน 1 จะได้ $2(1)^2 + 2(1) + \sqrt{(1)^2 + (1) - 1} = 5$

$2 + 2 + \sqrt{1} = 5$ จริง

ดังนั้น คำตอบคือ $x \ = \ -2 \ , \ 1$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-4} = \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-3}$

2. $x - \sqrt{x} - 6 = 0$

3. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = 5$

4. $\sqrt{x^2+x+2} = 2x^2+2x-2$

5. $\sqrt{x^2+x+4} + x^2 = 16 - x$

3. ถ้า $S=\left\{x \in R \,\middle|\, \sqrt{3x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{7x+1}\right\}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง
แล้ว ผลบวกของสมาชิกใน S เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/27]

4. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง
ถ้า $S=\left\{x \in R \,\middle|\, \sqrt{x+1}+\sqrt{3x-1}=\sqrt{7x-1}\right\}$
และ $T=\{y \in R \mid y=3x+1,\ x \in S\}$
แล้ว ผลบวกของสมาชิกใน T เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/27]

5. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุดที่เป็นคำตอบของสมการ $\sqrt{14+3x-x^2}-\sqrt{9+5x-x^2} = 1$
แล้วค่าของ $\left|\frac{4-12x^{-1}+9x^{-2}}{3x^{-2}-2x^{-1}}\right|$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/31]

6. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{x \in R \;\middle|\; 2x^2 - 2x + 9 - 2\sqrt{x^2 - x + 3} = 15\right\}$
แล้ว ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกในเซต A เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/27]

7. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{\, x \in \mathbb{R} \;\middle|\; x^2 + \sqrt{x^2 - 3x + 4} > 3x + 2\right\}$
แล้วเซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 57)/4]

1. $(-\infty,2) \cup (3,4)$ 2. $(-\infty,0) \cup (3,\infty)$ 3. $(-\infty,-1) \cup (4,\infty)$ 4. $(-1,\infty)$

8. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{3x+2+2\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+10+6\sqrt{3x+1}} = 14$
และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^2-6x+11+2\sqrt{x^2-3x+5} = 25$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/27]

9. ถ้า A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $x < \sqrt{6+x-x^2}+1 < x+3$
แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 58)/3]

1. $(-1, 2)$
2. $(0, 3)$
3. $(1, 4)$
4. $(2, 5)$

10. ให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$ ถ้าผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S เท่ากับ $\frac{a}{b}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (พ.ย. 57)/39]

11. ให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $x + 3\sqrt{3x-2-x^2} = 3 + 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2-x}$
ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของสมาชิกในเซต S ตามลำดับ แล้ว ค่าของ $25b + 58a$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 58)/39]

รูทไม่รู้จบ

เราสามารถใช้หลักของสมการ เพื่อหาค่าของจำนวนติดรูท “ไม่รู้จบ”

เช่น $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ หรือ $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}$ ได้ด้วย

หลักคือ จำนวนประเภทนี้ จะมีรูทอยู่ไม่รู้จบ ดังนั้น ถ้า “ปอกชั้นนอกออก ค่าจะไม่เปลี่ยน”

เช่น ถ้าเอา $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$ มาปอกชั้นนอกออก จะเหลือ $\sqrt{2\sqrt{2\dots}}$

เนื่องจาก มีรูทต่อไปเรื่อยๆไม่รู้จบ จะทำให้ได้ว่า $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}} = \sqrt{2\sqrt{2\dots}}$

เราจะใช้หลักนี้ในการทำ โดย
1. สมมติให้ตัวที่เราต้องการหา เท่ากับ x
2. จะได้ “ไส้ในทั้งยวง” เท่ากับ x ด้วย $\rightarrow$ เปลี่ยนไส้ในทั้งยวง เป็น x แล้วแก้สมการ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}}$

<u>วิธีทำ</u> สมมติให้ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}} = x$ จะได้ไส้ใน $\sqrt{2\sqrt{2\dots}} = x$ ด้วย

เปลี่ยนไส้ใน $\sqrt{2\sqrt{2\dots}}$ เป็น x จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} \sqrt{2x} &= x \\ 2x &= x^2 \\ 0 &= x^2-2x \\ 0 &= x(x-2) \\ x &= 0\,,\ 2 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}} > 0$ ดังนั้น จะได้ $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\dots}}} = 2$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าของจำนวนต่อไปนี้

   1. $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\dots}}}$
   2. $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\dots}}}$

3. $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$

4. $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\cdots}}}$

5. $\sqrt{\frac{8}{\sqrt{\frac{8}{\sqrt{\frac{8}{\cdots}}}}}}$

6. $1+\frac{6}{1+\frac{6}{1+\frac{6}{\cdots}}}$

2. กำหนดให้ $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$, $b = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2 \ldots}}}}$ และ $c = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
[PAT 1 (มี.ค. 55)/25]

1. $\frac{1}{c} > \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
2. $\frac{1}{c} > \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$
3. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$
4. $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$

เลขยกกำลัง

ในเรื่องนี้ จะต้องยุ่งกับเลขยกกำลังค่อนข้างมาก สมบัติของเลขยกกำลังที่ควรทราบ มีดังนี้

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(ab)^m = a^m b^m$	$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$	$1^a = 1$
$a^m \div a^n = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$	$a^0 = 1\ ;\ a \neq 0$
$(a^m)^n = a^{mn}$	$(a \pm b)^m \neq a^m \pm b^m$		$0^a = 0\ ;\ a \neq 0$
			0^0 หาค่าไม่ได้

โจทย์ยอดนิยมในเรื่องนี้ คือ การเปรียบเทียบเลขยกกำลัง ว่าตัวไหนมาก ตัวไหนน้อย

หลักคือ เราต้องพยายามจัดรูปเลขยกกำลัง ให้อยู่ในรูปอย่างง่ายที่สุด ให้ตัวเลขน้อยที่สุด ก่อน

- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นเศษส่วน เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเลขเยอะๆ ที่ตัดตัวส่วนทุกส่วนลงตัว (ค.ร.น.)
- ถ้าเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเยอะๆ เรามักยกกำลังทั้งสองข้างด้วยเศษส่วนที่ทอนเลขชี้กำลังให้ได้มากที่สุด (ห.ร.ม.)

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$ และ $\sqrt[3]{3} = 3^{\frac{1}{3}}$ ดังนั้น ข้อนี้ถามว่า $2^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{1}{3}}$ หรือไม่ นั่นเอง

เราจะปรับ $\frac{1}{2}$ กับ $\frac{1}{3}$ ให้เป็นจำนวนเต็มง่ายๆก่อน โดยการยกกำลัง 6 ทั้งสองข้าง ($6 =$ ค.ร.น. ของ 2 กับ 3)

$$\begin{aligned} \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6 &> \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6 \\ 2^3 &> 3^2 \\ 8 &> 9 \quad \rightarrow \text{ ไม่จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ เป็นประโยคที่เป็นเท็จ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $2^{36} < 3^{24}$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า 36 กับ 24 สามารถทอนให้น้อยลงได้ โดยยกกำลัง $\frac{1}{12}$ ทั้งสองข้าง ($12 =$ ห.ร.ม. ของ 36 กับ 24)

$$\begin{aligned} (2^{36})^{\frac{1}{12}} &< (3^{24})^{\frac{1}{12}} \\ 2^3 &< 3^2 \\ 8 &< 9 \quad \rightarrow \text{ จริง} \end{aligned}$$

ดังนั้น $2^{36} < 3^{24}$ จริง #

อีกเทคนิคหนึ่งที่นิยมใช้ คือเทคนิค "แปลงให้ฐานเท่ากัน" หรือไม่ก็ "แปลงเลขชี้กำลังให้เท่ากัน"

ในกรณีที่แปลงให้เท่ากันไม่ได้ เราจะใช้วิธีประมาณ หาตัวที่ใกล้ที่สุด

<u>ตัวอย่าง</u> จงตรวจสอบว่า $7^{(8^9)} < 88^8$ หรือไม่

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราแปลงฐาน 88 ให้กลายเป็นฐาน 7 โดยใช้วิธีประมาณ โดยหาว่า 88 อยู่ระหว่าง 7 ยกกำลังอะไรบ้าง

จะเห็นว่า $7^2 < 88 < 7^3$ ยกกำลัง 8 ตลอด จะได้ $7^{16} < 88^8 < 7^{24}$

จากนี้ เราจะไม่เทียบ $7^{(8^9)}$ กับ 88^8 โดยตรง แต่จะเทียบกับค่าใกล้เคียงของ 88^8 ซึ่งคือ 7^{16} กับ 7^{24}

เนื่องจาก 8^9 มากกว่า 24 เห็นๆ ดังนั้น $7^{24} < 7^{(8^9)}$

แต่เนื่องจาก $88^8 < 7^{24}$ ดังนั้น $88^8 < 7^{(8^9)}$ #

วิธีเปรียบเทียบเลขยกกำลัง เรามักจะจัดรูป ให้ ฐาน เท่ากัน แล้วเปรียบเทียบ เลขชี้กำลัง
หรือไม่ก็จัดรูป ให้ เลขชี้กำลัง เท่ากัน แล้วเปรียบเทียบ ฐาน
สิ่งที่ต้องระวังแบบสุดๆ เวลาเทียบมากกว่าน้อยกว่า คือ ข้อยกเว้นต่างๆ

<u>กรณี ฐานเท่ากัน</u> เลขชี้กำลังยิ่งมาก จะยิ่งทำให้ผลการยกกำลัง มีค่ามาก
<u>ยกเว้น</u> $0 <$ ฐาน < 1 $\rightarrow$ เลขชี้กำลังยิ่งมาก กลับจะได้ผลยกกำลังน้อยลง

$2^2 = 4$
$2^3 = 8$ $\downarrow$ มากขึ้น

$(0.1)^2 = 0.01$
$(0.1)^3 = 0.001$ $\downarrow$ น้อยลง

เช่น $0.5^5 > 0.5^9$

$\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{15} > \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^{20}$

$\left(\sqrt{2}\right)^5 > \left(\sqrt{2}\right)^4$

$(0.2)^{0.5} < (0.2)^{0.4}$

$3^{0.5} > 3^{0.2}$

$(\sin 60°)^6 < \sin 60°$ $\rightarrow$ sin หรือ cos ของมุมบวกที่น้อยกว่า 90° จะน้อยกว่า 1 เสมอ

$\left(\frac{2}{3}\right)^{-5} > \left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$

$\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{2}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}}$

<u>กรณี เลขชี้กำลังเท่ากัน</u> ฐานยิ่งมาก จะยิ่งทำให้ผลการยกกำลัง มีค่ามาก
<u>ยกเว้น</u> เลขชี้กำลังติดลบ $\rightarrow$ ฐานยิ่งมาก กลับจะได้ผลยกกำลังน้อยลง
เพราะเลขชี้กำลังติดลบ จะหมายถึงการกลับค่าลงไปเป็นตัวส่วน

เช่น $2^{-5} > 3^{-5}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^{-8} > 2^{-8}$

$(0.5)^2 > (0.3)^2$

$7^{-1} < 2^{-1}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^8 < 2^8$

$(0.5)^{-\frac{1}{2}} < (0.3)^{-\frac{1}{2}}$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

    1. 0.3^0
    2. $3^5 \times 3^3$
    3. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
    4. $((x^2)^{-3})^{0.5}$
    5. $\frac{a^n \cdot a^{n+1}}{a^{2n}}$
    6. $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-1}\left(\frac{x^3y}{xy^{-1}}\right)^2$

7. $\sqrt[3]{\left(x^{\frac{5}{2}}\right)\sqrt{x}}$

8. $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x^2}}}$

2. จงเติมเครื่องหมาย มากกว่า หรือ น้อยกว่า ให้ถูกต้อง

1. 2^{40} ...... 3^{50}

2. 2^{50} ...... 3^{40}

3. $(0.5)^{0.5}$ ...... $(0.5)^{0.3}$

4. $5^{0.5}$ ...... $5^{0.3}$

5. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ ...... $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$

6. $(\sin 80°)^{2^3}$ ...... $(\sin 80°)^{3^2}$

7. 2^{-5} ...... 2^{-7}

8. $4^{\left(\frac{1}{24}\right)}$ ...... $5^{\left(\frac{1}{36}\right)}$

9. $3^{3^{-1}}$ ...... $4^{4^{-1}}$

10. $\sqrt{2}^{\,30}$ ...... $\sqrt[3]{3}^{\,20}$

11. 3^{333} ...... 88^{88}

12. $5^{(5^5)}$ ...... $4^{(5^6)}$

3. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่ต่างกัน ซึ่งสอดคล้องสมการ $x^y = y^x$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ผิด [A-NET 49/1-2]
   1. $y^{\left(\frac{x}{y}\right)} = x$
   2. $x^{\left(\frac{y}{x}\right)} = y$
   3. $(xy)^y = x^{(x+y)}$
   4. $\left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{(x-y)}$

4. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $C = \left\{x \in R \mid (3x^2 - 11x + 7)^{(3x^2+4x+1)} = 1\right\}$ จำนวนสมาชิกของเซต C เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/29]

5. กำหนด $a = 2^{48}$, $b = 3^{36}$ และ $c = 5^{24}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ก.ค. 53)/24]
   1. $\frac{1}{b} > \frac{1}{c} > \frac{1}{a}$
   2. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c}$
   3. $\frac{1}{b} > \frac{1}{a} > \frac{1}{c}$
   4. $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$

6. กำหนดให้ $A = 7^{(7^7)}$, $B = 7^{77}$, $C = 77^7$ และ $D = (77^7)^7$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

[PAT 1 (มี.ค. 53)/22]

1. $B < A < C < D$
2. $B < C < A < D$
3. $C < B < D < A$
4. $C < A < D < B$

7. ให้ $A = 0.3^{0.4}$, $B = 0.3^2$, $C = 2^{0.3}$, $D = 2^{0.8}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A < B < C < D$
2. $B < A < C < D$
3. $A < C < D < B$
4. $C < D < B < A$

8. กำหนดให้ $A = \sqrt{7\sqrt[3]{5}}$, $B = \sqrt{5\sqrt[3]{7}}$, $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ และ $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

[PAT 1 (มี.ค. 56)/25]

1. $D > C > A > B$
2. $A > C > B > D$
3. $A > B > D > C$
4. $C > A > D > B$

9. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $ab = 24$ และ $cd = 8$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง

[PAT 1 (พ.ย. 57)/21]

1. ถ้า $d > b$ แล้ว $\frac{\sqrt{a}}{(c+1)^b} < \frac{\sqrt{c}}{(a+1)^d}$
2. ถ้า $a < c$ แล้ว $(0.01)^b < (0.05)^d$

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ที่ผ่านมาส่วนใหญ่ ตัวแปร x มักจะปรากฏเป็น "ฐาน" ของการยกกำลัง (เช่น x^3)
ในเรื่องนี้ เราจะศึกษากรณีที่ ตัวแปร x ถูกใช้เป็น "เลขชี้กำลัง" (เช่น 3^x)

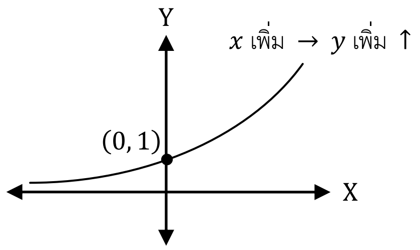
"ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล" คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a^x$ เมื่อ a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้ ที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$
หมายเหตุ: สัญลักษณ์ $f(x)$ สามารถแทนได้ด้วยตัวแปร y
ดังนั้น $f(x) = a^x$ อาจเขียนได้เป็น $y = a^x$
ตัวอย่างฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล เช่น $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ เป็นต้น
ในกรณีที่ฝั่งขวา ไม่อยู่ในรูป a^x เราอาจต้องจัดรูปก่อน
เช่น $y = 3^{2x}$ จัดรูปได้เป็น $y = (3^2)^x = 9^x$
$y = 2^{(-x)}$ จัดรูปได้เป็น $y = (2^{-1})^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นต้น

ถ้ายังจำหัวข้อที่แล้วได้ เลขยกกำลัง <u>ส่วนใหญ่</u> ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งมาก
ยกเว้นกรณี $0 <$ ฐาน < 1 ที่ เลขชี้กำลังมาก กลับจะได้ผลยกกำลังน้อยลง
ดังนั้น หัวข้อนี้จะแบ่งฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $y = a^x$ เป็น 2 กรณี

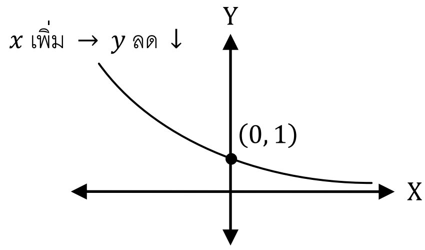
- กรณี $a > 1$ → x ยิ่งมาก ผลยกกำลังก็จะยิ่งมาก → "ฟังก์ชันเพิ่ม"
- กรณี $0 < a < 1$ → x ยิ่งมาก กลับจะได้ผลยกกำลังที่น้อยลง → "ฟังก์ชันลด"

รูปกราฟของเอกซ์โพเนนเชียล จะมี 2 แบบ คือแบบ $a > 1$ กับแบบ $0 < a < 1$

<u>กรณี</u> $a > 1$: เช่น $y = 2^x$



<u>กรณี</u> $0 < a < 1$: เช่น $y = 0.5^x$



สิ่งที่ควรสังเกตคือ

- ทั้งสองกรณี กราฟจะผ่านจุด $(0, 1)$ เสมอ → เพราะ $a^0 = 1$
- <u>กรณี</u> $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งเส้น <u>กรณี</u> $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลดตลอดทั้งเส้น
  ดังนั้น ถ้า x เปลี่ยนไป แล้ว ค่า y จะไม่มีทางกลับมาเหมือนเดิมได้อีก
  พูดง่ายๆคือ ถ้า $m \neq n$ แล้ว ไม่มีทางเลยที่ $a^m = a^n$ ได้
- เลขชี้กำลัง (ค่า x) เป็น บวก ลบ ศูนย์ ได้หมด → โดเมน = R
  แต่ผลการยกกำลัง (a^x) เป็น บวก ได้อย่างเดียว ห้ามเป็น ลบ หรือ ศูนย์ → เรนจ์ = R^+
  สิ่งที่ต้องเคลียให้ชัดเจน คือ "เลขชี้กำลังที่เป็นลบ จะ<u>ไม่</u>ทำให้ ผลยกกำลังเป็นลบ"

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า สมการ $2^x = 21$ มีกี่คำตอบ พร้อมทั้งหาค่าประมาณของคำตอบ

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก ค่าของ 2^x เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งเส้น ดังนั้น จะมี x ได้แค่ค่าเดียว ที่ $2^x = 21$

เพราะ ถ้า x เปลี่ยนไปจากนี้ แล้ว 2^x จะไม่มีทางเป็น 21 ได้อีก ดังนั้น สมการนี้มีได้ไม่เกิน 1 คำตอบ

ถัดไป หาค่าประมาณของคำตอบ ด้วยวิธีแทนค่า

เนื่องจาก ค่าของ 2^x เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น ต้อง<u>เพิ่ม</u> x เพื่อให้ผลยกกำลังจะเพิ่ม

$x = 3 \rightarrow 2^3 = 8 \rightarrow$ น้อยไป ต้อง <u>เพิ่ม</u> ค่า x

$x = 4 \rightarrow 2^4 = 16 \rightarrow$ น้อยไป ต้อง <u>เพิ่ม</u> ค่า x อีก

$x = 5 \rightarrow 2^5 = 32 \rightarrow$ เกินแล้ว

ดังนั้น สมการนี้มี 1 คำตอบ โดยคำตอบจะอยู่ระหว่าง 4 กับ 5 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่า สมการ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 10$ มีกี่คำตอบ พร้อมทั้งหาค่าประมาณของคำตอบ

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก ค่าของ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลดตลอดทั้งเส้น ดังนั้น จะมี x ได้แค่ค่าเดียว ที่ $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 10$

ถัดไป หาค่าประมาณของคำตอบ ด้วยวิธีแทนค่า

เนื่องจาก ค่าของ $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ เป็นฟังก์ชันลด ดังนั้น ต้อง<u>ลด</u> x เพื่อให้ผลยกกำลังจะเพิ่ม

$x = -2 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4 \rightarrow$ น้อยไป ต้อง <u>ลด</u> ค่า x

$x = -3 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8 \rightarrow$ น้อยไป ต้อง <u>ลด</u> ค่า x อีก

$x = -4 \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 2^4 = 16 \rightarrow$ เกินแล้ว

ดังนั้น สมการนี้มี 1 คำตอบ โดยคำตอบจะอยู่ระหว่าง -3 กับ -4 #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. $f(x) = x^2$	2. $y = 2^x$
3. $y = 2x$	4. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
5. $f(x) = 3^{-x}$	6. $y = 2^{2x}$
7. $xy = 1$	8. $f(x) = 2^x + 5$
9. $f(x) = 1.8^x$	10. $y = \sqrt{2}^x$
11. $y = 3^{\left(\frac{x}{2}\right)}$	12. $f(x) = 1^x$
13. $f(x) = (-1)^x$	14. $y = 0.1^x$
15. $y = 2^{-3x}$	16. $f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)^x$
17. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$	18. $y = 2^5$
19. $y = \frac{1}{5^x}$	20. $3^x = \frac{1}{y}$

2. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

1. $y = 2^x$
2. $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
3. $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$
4. $y = 29^x$
5. $y = 1.5^x$
6. $f(x) = \left(\frac{20}{21}\right)^x$
7. $f(x) = (\sin 40°)^x$
8. $y = (0.5)^{2x}$
9. $y = 2^{-x}$
10. $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$
11. $f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{-x}$
12. $y = \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^x$

3. จงวาดกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกโดเมน และเรนจ์

1. $y = 2^x$
2. $f(x) = (0.9)^x$
3. $f(x) = (0.1)^x$
4. $y = 70^x$
5. $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$
6. $f(x) = 10^{-2x}$

4. จงหาว่าสมการต่อไปนี้ มีกี่คำตอบ พร้อมระบุว่าคำตอบเหล่านั้น อยู่ระหว่างจำนวนเต็มใด

1. $2^x = 10$
2. $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 10$
3. $3^x = \frac{1}{10}$
4. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 5$

5. $2^{2x} + 5 = 50$

6. $2^{x} + 3^{x} = 100$

7. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} + 3^{-x} = 50$

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x} + \left(\frac{1}{5}\right)^{x} = \frac{9}{20}$

5. กำหนดสมการ $\left(\frac{4}{25}\right)^{x} + \left(\frac{9}{25}\right)^{x} = 1$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   ก. ถ้า a เป็นคำตอบของสมการ แล้ว $a > 1$

   ข. ถ้าสมการมีคำตอบ แล้วคำตอบจะมีเพียงค่าเดียว

   ข้อใดต่อไปนี้ถูก [PAT 1 (มี.ค. 52)/20]

   1. ก. ถูก และ ข. ถูก
   2. ก. ถูก และ ข. ผิด
   3. ก. ผิด และ ข. ถูก
   4. ก. ผิด และ ข. ผิด

สมการ อสมการ เอกซ์โพเนนเชียล

คือ สมการ หรือ อสมการ ที่มี x อยู่ในเลขชี้กำลัง
หลักเบื้องต้นในการแก้คือ ต้องจัดรูปให้สองฝั่งมีฐานเท่ากัน แล้วตัดฐานทิ้งทั้งสองข้างให้เลขชี้กำลังตกลงมา
และในกรณีที่ ฐาน < 1 ต้องกลับเครื่องหมาย มากกว่า น้อยกว่า ด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $4^{x+2} = 8^{x-2}$

<u>วิธีทำ</u> ฐาน 4 และ 8 จะทำเป็นฐานเท่ากัน ได้ที่ 2 ดังนั้น

$$\begin{aligned} (2^2)^{x+2} &= (2^3)^{x-2} \\ 2^{2x+4} &= 2^{3x-6} \\ 2x+4 &= 3x-6 \\ 10 &= x \end{aligned}$$

#

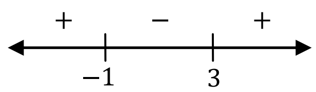
<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $(\sin 30°)^{x^2-x} \le (\sin 30°)^{x+3}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ฐานเท่ากันแล้ว ตัดฐานทิ้งทั้งสองข้างได้เลย

แต่เนื่องจาก ฐาน $= \sin 30° < 1$ $\rightarrow$ ยิ่งยกกำลังมาก ค่ายิ่งน้อย

ดังนั้น ต้องกลับเครื่องหมาย จาก "$\le$" เป็น "$\ge$" ดังนี้

$$\begin{aligned} x^2 - x &\ge x+3 \\ x^2-2x-3 &\ge 0 \\ (x-3)(x+1) &\ge 0 \end{aligned}$$



ดังนั้น คำตอบคือ $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2} > (5+2\sqrt{6})^{x-2}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ยากขึ้นมาหน่อย เพราะเริ่มจะเดายากว่าจะทำฐานให้เท่ากันได้ยังไง

ถ้าสังเกตดีๆ $5+2\sqrt{6}$ จะถอดรูทสองได้ลงตัว โดยใช้ความรู้เรื่อง $x \pm 2\sqrt{y}$

เนื่องจาก $\sqrt{5+2\sqrt{6}} = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ จะได้ว่า $5+2\sqrt{6} = (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

ดังนั้น เราจะเปลี่ยน $5+2\sqrt{6}$ ในสมการ ให้กลายเป็น $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$ ดังนี้

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2} &> \left((\sqrt{3}+\sqrt{2})^2\right)^{x-2} \\ (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{x+2} &> (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2x-4} \end{aligned}$$

เมื่อฐานเท่ากันแล้ว จึงตัดฐานทิ้งทั้งสองข้าง และข้อนี้ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะ $\sqrt{3}+\sqrt{2} > 1$

$$\begin{aligned} x+2 &> 2x-4 \\ 6 &> x \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบคือ $(-\infty, 6)$ #

เทคนิคการเปลี่ยนตัวแปร ก็สามารถนำมาใช้กับเรื่องนี้ได้ด้วย

โดยเราต้องสังเกตว่า ในสมการ มีก้อนไหน ยกกำลังสองแล้วได้อีกก้อน $\rightarrow$ ก้อนนั้น $= A$, อีกก้อน $= A^2$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

<u>วิธีทำ</u> แตก 2^{2x+1} เป็น $2^{2x} \cdot 2^1$ จะได้สมการเป็น $2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

สังเกตว่ามี 2^{2x} กับ 2^x ในสมการ ที่เป็นกำลังสองอีกตัว กล่าวคือ $(2^x)^2 = 2^{2x}$

ดังนั้น เราจะให้ $2^x = A$ และให้ $2^{2x} = A^2$ จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} 2A^2 - 9A + 4 &= 0 \\ (2A-1)(A-4) &= 0 \\ A &= \tfrac{1}{2}\,,\ 4 \end{aligned}$$

เมื่อได้ค่า A จึงแปลงกลับเป็น 2^x เพื่อหาค่า x

$2^x = \frac{1}{2}$	$2^x = 4$
$2^x = 2^{-1}$	$2^x = 2^2$
$x = -1$	$x = 2$

ดังนั้น คำตอบของสมการ คือ $x = -1\,,\ 2$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้ สมการ หรือ อสมการ ต่อไปนี้
   1. $3^{x-3} = 243$
   2. $2^{2x+1} = 128$
   3. $4^{1-x} = 32$
   4. $3^x = 9^{-x+6}$

5. $4^{x+1} > 2^{x-3}$

6. $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} \leq \left(\frac{1}{16}\right)^{3}$

7. $\left(\sqrt{2}\right)^{x} = 8$

8. $5^{2x} = 5\sqrt{5}$

9. $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{x} = 32$

10. $(0.1)^{2x} > \frac{1}{(0.01)^{5}}$

11. $\sqrt{2}^{x} = \frac{1}{4^{5-2x}}$

12. $\frac{2^{x}}{3^{x}} = \frac{9}{4}$

13. $\frac{9^x}{2^{2x+1}} > \frac{8}{81}$

14. $\left(1+\sqrt{2}\right)^x = 3+2\sqrt{2}$

15. $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^{3x} = \left(5-2\sqrt{6}\right)^{x-1}$

16. $\left(\sqrt{2}-1\right)^x \leq \left(3-2\sqrt{2}\right)^{x+2}$

17. $2\cdot 2^{2x} - 17\cdot 2^x + 8 = 0$

18. $25^x - 6\cdot 5^x + 5 = 0$

19. $3^{2x+2} - 28\cdot 3^x + 3 = 0$

20. $\frac{28}{3^x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{x-1} = 3$

2. จงหาคำตอบของสมการ $2^{3x+1} - 17(2^{2x}) + 2^{x+3} = 0$

3. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3x+7} < \left(\frac{1}{4}\right)^{2x+11}$

4. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\left(\frac{3}{5}\right)^{(5x^2-23x+3)} > \left(\frac{5}{3}\right)^{(x+5)}$ แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 55)/9]

1. $\{\, x \in \mathrm{R} \mid (5x-1)(x-3) < 0 \,\}$
2. $\{\, x \in \mathrm{R} \mid (4x-1)(x-4) < 0 \,\}$
3. $\{\, x \in \mathrm{R} \mid (2x-1)(x-5) < 0 \,\}$
4. $\{\, x \in \mathrm{R} \mid |\, x-1| < 2 \,\}$

5. ถ้า $4^{x-y} = 128$ และ $3^{2x+y} = 81$ แล้ว ค่าของ y เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/18]

6. ถ้า x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับ $x + y + z = 16$, $y^{x+z} = x^{2(x+z)}$ และ $3^y = 3(9^z)$ แล้วผลคูณของ xyz เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/43]

7. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $3^{(1+2x)} + 9^{(2-x)} = 244$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 55)/12]

1. $(-1, 4)$
2. $(-2, 0.5)$
3. $(0, 5)$
4. $(-3, 0)$

8. กำหนดให้ $A = \{ x \in \mathrm{R} \mid 2^{2x} - 2^{x+2} > 2^{x+\frac{1}{2}} - \sqrt{32} \}$ เมื่อ R แทนเซตของจำนวนจริง จงหาจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $\mathrm{R} - A$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/4]

9. กำหนดให้ $x, y > 0$ ถ้า $x^y = y^x$ และ $y = 5x$ แล้ว ค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/19]

   1. $[0, 1)$ 2. $[1, 2)$ 3. $[2, 3)$ 4. $[3, 4)$

10. ถ้า $x > 0$ และ $8^x + 8 = 4^x + 2^{x+3}$ แล้ว ค่าของ x อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-8]

   1. $[0, 1)$ 2. $[1, 2)$ 3. $[2, 3)$ 4. $[3, 4)$

11. ถ้าสมการ $\left(\frac{1}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} + a = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนจริงบวก แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/12]

   1. $(-\infty, -3)$ 2. $(-3, 0)$ 3. $(0, 1)$ 4. $(1, 3)$

12. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $(x-2)^{x^2+2} < (x-2)^{2x+10}$ เมื่อ $x > 2$
แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 55)/5]
1. $(2, 3)$
2. $(3.5, 5)$
3. $(2.5, 4)$
4. $(4, 7)$

13. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $5^{\left(1+\sqrt{x^2-4x-1}\right)} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$
ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/30]

14. ให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $(4^x + 2^x - 6)^3 = (2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/43]

15. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > 0$ และ $b > 1$ ถ้า $ab = b^a$ และ $b = ab^{3a}$ แล้ว $20a + 14b$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/34]

ลอการิทึม

สัญลักษณ์ “$\log_a x$” อ่านว่า “ล็อก x ฐาน a” หมายถึง จำนวนที่ เมื่อใช้ a มายกกำลัง จะได้ x

เช่น $\log_3 81 = 4$ เพราะ $3^4 = 81$ $\quad$ $\log_2 8 = 3$ เพราะ $2^3 = 8$

$\log_6 216 = 3$ เพราะ $6^3 = 216$ $\quad$ $\log_5 5 = 1$ เพราะ $5^1 = 5$

$\log_4 1 = 0$ เพราะ $4^0 = 1$ $\quad$ $\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{4}\right) = 2$ เพราะ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

$\log_4 2 = \frac{1}{2}$ เพราะ $4^{\frac{1}{2}} = 2$ $\quad$ $\log_{\sqrt{3}} 9 = 4$ เพราะ $\left(\sqrt{3}\right)^4 = 3^2 = 9$

ในกรณีที่ ฐาน $= 10$ เรานิยมละเลข 10 ไว้ในฐานที่เข้าใจ นั่นคือ ถ้าเห็น log แบบไม่มีฐาน ให้ถือว่าเป็น log ฐาน 10

เช่น $\log 100 = 2$ เพราะ $10^2 = 100$ $\quad$ $\log 1000 = 3$ เพราะ $10^3 = 1000$

$\log 1 = 0$ เพราะ $10^0 = 1$ $\quad$ $\log 0.1 = -1$ เพราะ $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0.1$

เรามีชื่อพิเศษสำหรับ log ฐาน 10 ว่า “ลอการิทึมสามัญ”

สัญลักษณ์อีกตัวที่อาจเห็นได้ในเรื่องลอการิทึม คือ “ln”

ถ้าเห็น ln ที่ไหน ให้เข้าใจว่า มันคือสัญลักษณ์แทน “log ฐาน 2.71828...”

เช่น $\ln 7 = \log_{2.71828\ldots} 7 =$ ประมาณเกือบๆ 2 เพราะ $(2.71828\ldots)^2$ มีค่าประมาณ 7

เรามีชื่อพิเศษสำหรับ log ฐาน 2.71828... ว่า “ลอการิทึมธรรมชาติ”

หมายเหตุ: อีกหน่อย ถ้าเรียนสูงขึ้นไป เราจะเจอตัวเลข 2.71828... บ่อยขึ้น
ในวิชาคณิตศาสตร์ ตัวเลขนี้จะค่อนข้างสำคัญ และจะแทนตัวเลขนี้ด้วยตัวอักษร e

ในเรื่องลอการิทึม มีกฎที่ต้องใช้บ่อย และต้องท่องให้ขึ้นใจ ดังนี้

- สามารถยุบ log ฐานเดียวกันที่บวกลบกันอยู่ ให้เป็นก้อนเดียวได้ โดยเปลี่ยน จากบวกเป็นคูณ และ จากลบเป็นหาร

  เช่น $\log_5 4 + \log_5 x = \log_5 4x$ $\quad$ $\log_2 x - \log_2 3 = \log_2\left(\frac{x}{3}\right)$

  $\log_7 a + \log_7 b + \log_7 c - \log_7 d - \log_7 e = \log_7\left(\frac{abc}{de}\right)$

- เลขชี้กำลังหลัง log โยนไปไว้หน้า log ได้ ถ้ามาจากข้างบน จะโยนมาเป็นตัวเศษหน้า log
  ถ้ามาจากข้างล่าง จะโยนมาเป็นตัวส่วนหน้า log

  เช่น $\log_2 x^3 = 3\log_2 x$ $\quad$ $\log_{2^3} 10 = \frac{1}{3}\log_2 10$

  $\log_{\sqrt{3}} 8 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} 2^3 = \frac{3}{\frac{1}{2}}\log_3 2 = 6\log_3 2$

  เลขชี้กำลังที่จะโยนมาได้ ต้องเป็นเลขชี้กำลังของตัวหลัง log “ทั้งก้อน” เท่านั้น ห้ามโยนเลขชี้กำลังของตัวย่อยๆมา

  เช่น $\log_2 5^3 11^2$ ห้ามโยน 3 หรือ 2 ไปไว้หน้า log เพราะ 3 กับ 2 เป็นเลขชี้กำลังของตัวย่อยๆ ไม่ใช่ทั้งก้อน

  หมายเหตุ: $(\log_2 x)^3$ เป็นคนละตัวกับ $\log_2 x^3$ นะ
  ใน $(\log_2 x)^3$ ทั้งก้อน $\log_2 x$ ถูกยกกำลัง 3 แต่ใน $\log_2 x^3$ ตัวที่โดนยกกำลัง 3 มีแค่ x
  ดังนั้น ใช้สูตรโยนกำลัง $(\log_2 x)^3$ เป็น $3\log_2 x$ <u>ไม่ได้</u>นะ

  หมายเหตุ: หนังสือบางเล่ม ใช้สัญลักษณ์ $\log_2^3 x$ แทน $(\log_2 x)^3$

- $\log_a a = 1$ และ $\log_a 1 = 0$

  เช่น $\log_2 2 = \log_3 3 = \log_4 4 = 1$ $\qquad \log_2 1 = \log_3 1 = \log_4 1 = 0$

  เพราะ $a^1 = a$ และ $a^0 = 1$ (เมื่อ $a \neq 0$) เสมอ

นอกจากนี้ ยังมีสูตรที่ใช้ไม่ค่อยบ่อย (แต่ก็ยังต้องท่อง) ดังนี้

- $\log_N M = \frac{1}{\log_M N}$

  เช่น $\log_3 9 = \frac{1}{\log_9 3}$ $\qquad \log 5 = \frac{1}{\log_5 10}$

  $$\frac{1}{\log_3 6} + \frac{1}{\log_2 6} = \log_6 3 + \log_6 2$$
  $$= \log_6 2 \times 3 = \log_6 6 = 1$$

- สามารถ แยก $\log_N M$ เป็น $\frac{\log_a M}{\log_a N}$ ได้ โดยจะเลือก ฐาน a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

  เช่น $\log_7 18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 7} = \frac{\log_4 18}{\log_4 7} = \frac{\log_{85} 18}{\log_{85} 7} = \frac{\log_{\sqrt{2}} 18}{\log_{\sqrt{2}} 7}$

  $$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 = \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \cdot \frac{\log_{10} 4}{\log_{10} 3} \cdot \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 4} = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \log_2 5$$

- $a^{\log_a M} = M$ และ $M^{\log_a N} = N^{\log_a M}$

  เช่น $2^{\log_2 5} = 5$ $\qquad \sqrt{3}^{\log_{\sqrt{3}} 8} = 8$

  $$\sqrt{3}^{\log_3 4} = 3^{\frac{1}{2}\log_3 4} = 3^{\log_3 4^{\frac{1}{2}}} = 4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

  $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$ $\qquad 2^{\log x} = x^{\log 2}$ เป็นต้น

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\log_{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{32}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้จะเปลี่ยนทั้งฐาน และตัวหลัง log ให้เป็นฐาน 2 ดังนี้

$$\begin{aligned}
\log_{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{32}\right) &= \log_{2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{1}{2^5}\right) \\
&= \log_{2^{1+\frac{1}{2}}} 2^{-5} \\
&= \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{-5} \\
&= -\frac{5}{\frac{3}{2}}\log_2 2 \\
&= \left(-5 \times \frac{2}{3}\right)\log_2 2 = -\frac{10}{3}
\end{aligned}$$
#

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\log \sqrt[3]{100} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ต้องรู้ว่า log แบบไม่มีฐาน คือ log ฐาน 10 และ ln คือ log ฐาน e

ดังนั้น $\log \sqrt[3]{100} = \log_{10} \sqrt[3]{100} = \log_{10} 10^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$

$\ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \log_e e^{-\frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}$

นั่นคือ $\log \sqrt[3]{100} - \ln\left(\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right) = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\log_2 12 - \log_2 36 + \log_2 6$

<u>วิธีทำ</u> log ฐาน 2 ที่บวกลบกัน สามารถยุบรวมเป็นก้อนเดียวได้ ดังนี้

$$\log_2 12 - \log_2 36 + \log_2 6 = \log_2 \frac{12\times 6}{36}$$
$$= \log_2 2 = 1$$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าของลอการิทึมต่อไปนี้

1. $\log_2 32$
2. $\log_3 243$
3. $\log_4 8$
4. $\log_{3\sqrt{3}} 9$
5. $\log_{0.1} 10$
6. $\log_{125} 0.2$
7. $\log 1$
8. $7^{\log_7 15}$
9. $5^{2\log_5 10}$
10. $3^{\log_9 16}$
11. $8^{\log_2 3}$
12. $\log_3 18 - \log_3 2$
13. $\log_5 2 - \log_5 6 + \log_5 75$
14. $\log_2 24 + \log_2 3 - \log_2 9$
15. $\log_3 2 - \frac{1}{\log_6 3}$
16. $(\log_5 7)(\log_7 25)$

17. $\frac{\log_2 3}{\log_4 9}$

18. $\frac{1}{\log_2 10}+\frac{1}{\log_5 10}$

2. จงหาค่าของ $(\log_3 2)(\log_4 3)(\log_5 4)\ldots(\log_{16} 15)$

3. กำหนดให้ $\log_b a = 2$ และ $\log_a d = 3$ จงหาค่าของ $\log_a bd$

4. จงหาค่าของ $\left(\log_2 \log_{\sqrt{2}} 4\right)+\left(\log_2\left(\sqrt{5}\right)^{\log_5 256}\right)-\left(\log_2 3^{2\log_9 32}\right)$

5. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $3^{5x}\cdot 9^{x^2}=27$ และ $y=\frac{(\log_2 3)(\log_4 5)(\log_6 7)}{(\log_4 3)(\log_6 5)(\log_8 7)}$
ค่าของ x^y เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/14]

6. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกและ $y \neq 1$
ถ้า $\log_y 2x = a$ และ $2^y = b$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/10]
1. $\frac{1}{2}(\log_2 b)^a$ 2. $2(\log_2 b)^a$ 3. $\frac{a}{2}(\log_2 b)$ 4. $2a(\log_2 b)$

7. กำหนดให้ $a, b, c > 1$ ถ้า $\log_a d = 30$, $\log_b d = 50$ และ $\log_{abc} d = 15$
แล้วค่าของ $\log_c d$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/20]

8. ถ้า a , b และ c เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
แล้ว $\log_{27}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/10]

9. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 ถ้า $(\log_b a)(\log_d c) = 1$ แล้ว ค่าของ $a^{(\log_b c-1)}b^{(\log_c d-1)}c^{(\log_d a-1)}d^{(\log_a b-1)}$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/35]

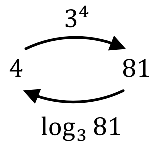
10. กำหนดให้ $x > 1$, $a > 1$, $b > 1$ และ $c > 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 55)/10]
   1. ถ้า $b^2 = ac$ แล้ว $(\log_a x)(\log_b x - \log_c x) = (\log_c x)(\log_a x - \log_b x)$
   2. ถ้า $c > b + 1$ และ $a^2 + b^2 = c^2$ แล้ว $\log_{(c+b)} a + \log_{(c-b)} a = 2\big(\log_{(c+b)} a\big)\big(\log_{(c-b)} a\big)$

ฟังก์ชันลอการิทึม

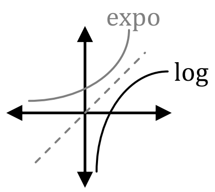
ฟังก์ชันลอการิทึม คือ ฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $y = \log_a x$ โดยที่ a เป็นตัวเลขอะไรก็ได้ ที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$
จากสมบัติของ $\log$ ในหัวข้อที่แล้ว ประโยค "$y = \log_a x$" จะมีความหมายว่า $x = a^y$
จะเห็นว่า ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล กับฟังก์ชันลอการิทึม มีความคล้ายกันอยู่ เอกซ์โพเนนเชียล: $y = a^x$
ลอการิทึม: $x = a^y$

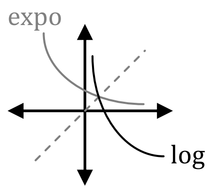
จะเห็นว่า ถ้าเอาเอกซ์โพเนนเชียล มาสลับ $x \leftrightarrow y$ จะได้หน้าตาเหมือนลอการิทึมเป๊ะ

ถ้ายังจำความสัมพันธ์และฟังก์ชันได้ เราจะสลับ $x \leftrightarrow y$ ตอน "หาอินเวอร์ส"
ดังนั้น ลอการิทึม ก็คือ อินเวอร์สของ เอกซ์โพเนนเชียล นั่นเอง



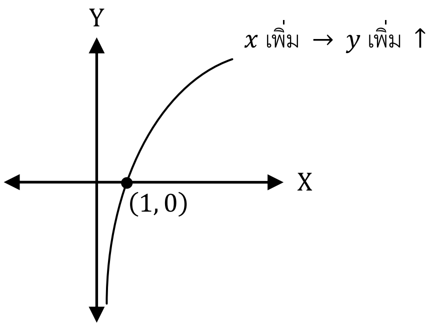
และด้วยความเป็นอินเวอร์สนี้เอง จะได้ว่า กราฟของลอการิทึม กับ เอกซ์โพเนนเชียล จะสมมาตรกัน เทียบกันเส้น 45°



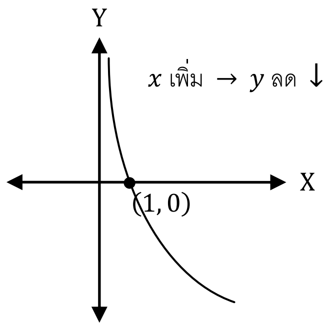


รูปกราฟของเอกซ์โพเนนเชียล จะมี 2 แบบ คือแบบ $a > 1$ กับแบบ $0 < a < 1$

<u>กรณี</u> $a > 1$: เช่น $y = \log_2 x$



<u>กรณี</u> $0 < a < 1$: เช่น $y = \log_{0.5} x$



สิ่งที่ควรสังเกตคือ

- ทั้งสองกรณี กราฟจะผ่านจุด $(1, 0)$ เสมอ → เพราะ $\log_a 1 = 0$
- <u>กรณี</u> $a > 1$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งเส้น <u>กรณี</u> $0 < a < 1$ เป็นฟังก์ชันลดตลอดทั้งเส้น
  ดังนั้น ถ้า x เปลี่ยนไป แล้ว ค่า y จะไม่มีทางกลับมาเหมือนเดิมได้อีก
  พูดง่ายๆคือ ถ้า $m \neq n$ แล้ว ไม่มีทางเลยที่ $\log_a m = \log_a n$ ได้
- ค่า x หลัง $\log$ เป็น บวก ได้อย่างเดียว ห้ามเป็น ลบ หรือ ศูนย์ → โดเมน $= \mathrm{R}^+$
  แต่ผล $\log$ เป็น บวก ลบ ศูนย์ ได้หมด → เรนจ์ $= \mathrm{R}$

หลัง $\log$ ห้ามเป็นศูนย์ หรือลบ เป็นอันขาด

โจทย์อีกประเภทหนึ่งในเรื่องนี้ คือ การเปรียบเทียบ $\log$ ว่าตัวไหนมาก ตัวไหนน้อย

หลักคือ เราจะพยายามทำฐานให้เท่ากัน แล้วใช้กฎว่า เลขหลัง $\log$ มาก จะยิ่งทำให้ผล $\log$ มีค่ามาก

ยกเว้น $0 <$ ฐาน < 1 $\rightarrow$ เลขหลัง $\log$ ยิ่งมาก กลับจะได้ผล $\log$ น้อยลง

เช่น $\log_2 10 > \log_2 5$ $\qquad$ $\log_3 0.5 < \log_3 0.7$

$\log_{0.8} 10 < \log_{0.8} 5$ $\qquad$ $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{5}\right) > \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{4}\right)$

ในกรณีที่ทำฐานให้เท่ากันไม่ได้ เราจะใช้วิธีประมาณค่าใกล้เคียง

ถ้าจะประมาณค่าของ $\log_a x$ เราจะพยายามหา k ที่ a^k ใกล้ x ที่สุด ทั้งทางฝั่งน้อยกว่า และฝั่งมากกว่า

ตัวอย่าง จงเรียงลำดับ $\log_2 3$, $\log_{\frac{1}{3}} 2$, $\log_5\left(\frac{2}{15}\right)$ จากน้อยไปหามาก

วิธีทำ ข้อนี้ มีฐานหลายค่า และจะเห็นว่าไม่สามารถแปลงให้เท่ากันได้

ดังนั้น เราจะลองทำข้อนี้ โดยวิธีหาค่าประมาณของแต่ละตัวดู

$\log_2 3$: เราต้องหาว่า 2 ยกกำลังอะไร ได้ใกล้ 3 ที่สุด จะได้ $2^1 = 2$

$2^2 = 4$ (เลย 3 แล้ว)

ดังนั้น ค่าของ $\log_2 3$ จะอยู่ระหว่าง 1 กับ 2

$\log_{\frac{1}{3}} 2$: แปลงรูปให้เป็นอย่างง่ายก่อน จะได้ $\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{(3^{-1})} 2 = \frac{1}{-1}\cdot\log_3 2 = -\log_3 2$

เราต้องหาว่า 3 ยกกำลังอะไร ได้ใกล้ 2 ที่สุด จะได้ $3^0 = 1$

$3^1 = 3$ (เลย 2 แล้ว)

ดังนั้น ค่าของ $\log_3 2$ จะอยู่ระหว่าง 0 กับ 1

ดังนั้น ค่าของ $\log_{\frac{1}{3}} 2$ จะอยู่ระหว่าง 0 กับ -1

$\log_5\left(\frac{2}{15}\right)$: เราต้องหาว่า 5 ยกกำลังอะไร ได้ใกล้ $\frac{2}{15}$ ที่สุด จะได้ $5^0 = 1 \quad > \frac{2}{15}$

$5^{-1} = \frac{1}{5} \quad > \frac{2}{15}$ อยู่

$5^{-2} = \frac{1}{25} \quad < \frac{2}{15}$ แล้ว

ดังนั้น ค่าของ $\log_5\left(\frac{2}{15}\right)$ จะอยู่ระหว่าง -1 กับ -2

จากค่าประมาณของทั้งสามตัว จะได้ว่า $\log_5\left(\frac{2}{15}\right) < \log_{\frac{1}{3}} 2 < \log_2 3$ #

แบบฝึกหัด

1. ข้อใดเป็นฟังก์ชันเพิ่ม

1. $y = \log_2 x$
2. $f(x) = \log_{0.2} x$
3. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
4. $y = \log_{(1+\cos 20°)} x$
5. $y = \log_{\sqrt{0.5}} x$
6. $f(x) = -\log_3 x$
7. $f(x) = \log_5\left(\frac{1}{x}\right)$
8. $y = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}\right)$

9. $y = -\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{x}\right)$

10. $f(x) = -\log_{0.5} x^{-1}$

2. จงระบุว่าค่าต่อไปนี้ อยู่ระหว่างจำนวนเต็มใด

1. $\log_5 3$
2. $\log_2 5$
3. $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)$
4. $\log_3\left(\frac{1}{2}\right)$
5. $\log_5\left(\frac{3}{11}\right)$
6. $\log_2\left(\frac{5}{9}\right)$
7. $\log_{\frac{1}{2}} 3$
8. $\log_{\frac{1}{3}} 16$
9. $\log_{0.2} 20$
10. $\log_{0.5}\left(\frac{1}{9}\right)$

3. จงเติมเครื่องหมาย มากกว่า หรือ น้อยกว่า ให้ถูกต้อง

1. $\log_5 3$ .... $\log_5 4$
2. $\log_{\frac{1}{2}} 3$ .... $\log_{\frac{1}{2}} 7$
3. $\log_3\left(\frac{1}{2}\right)$ .... $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$
4. $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{5}\right)$ .... $\log_{\frac{1}{7}}\left(\frac{1}{3}\right)$
5. 1 .... $\log_5 6$
6. -1 .... $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)$
7. $\log_2 5$ .... $\log_3 8$
8. $\log_2\left(\frac{3}{8}\right)$ .... $\log_3\left(\frac{2}{5}\right)$
9. $\log_5\left(\frac{2}{25}\right)$ .... $\log_2\left(\frac{3}{15}\right)$
10. $\log_{0.5} 20$ .... $\log_3\left(\frac{1}{30}\right)$

4. ข้อใดต่อไปนี้ถูก [A-NET 49/1-11]
   1. $\log_7 3 < \log_5 3 < \log_7 10$
   2. $\log_5 3 < \log_7 3 < \log_7 10$
   3. $\log_7 3 < \log_7 10 < \log_5 3$
   4. $\log_7 10 < \log_5 3 < \log_7 3$

5. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ก.ค. 53)/10]
   1. $2^{\frac{3}{2}} < 3^{\frac{4}{3}}$
   2. $\log_2\left(\frac{3}{8}\right) < \log_3\left(\frac{1}{2}\right)$

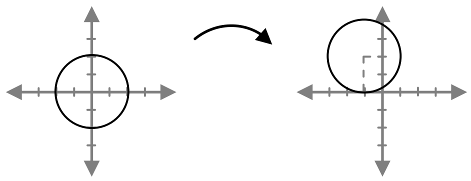
6. จงหาค่าความจริงของ $\exists x[3^x = \log_3 x]$

การแปลงรูปกราฟ

โดยการดัดแปลงกราฟ จะมีรูปแบบพื้นฐาน ดังนี้

1. การเลื่อนกราฟ
   - ถ้าเปลี่ยน x เป็น $x-h$ กราฟจะเลื่อนไปทางขวา h หน่วย (ถ้า h เป็นลบก็จะเลื่อนไปทางซ้าย)
   - ถ้าเปลี่ยน y เป็น $y-k$ กราฟจะเลื่อน ขึ้น k หน่วย (ถ้า k เป็นลบก็จะเลื่อน ลง)

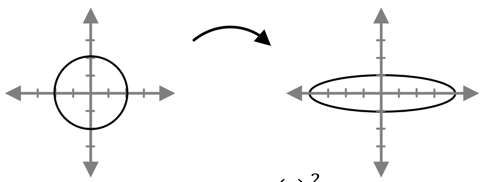
เช่น



$x^2+y^2 = 4$ $\quad$ $(x+1)^2+(y-2)^2 = 4$

2. การ ย่อ – ขยาย กราฟ
   - ถ้าเปลี่ยน x เป็น ax (เมื่อ $a>0$) กราฟจะย่อลง a เท่า ตามแนวแกน X (ถ้า $a<1$ กราฟจะขยาย)
   - ถ้าเปลี่ยน y เป็น by (เมื่อ $b>0$) กราฟจะย่อลง b เท่า ตามแนวแกน Y (ถ้า $b<1$ กราฟจะขยาย)

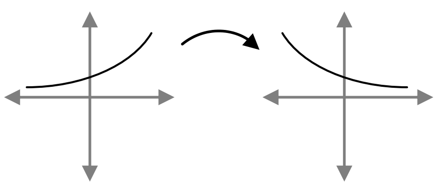
เช่น

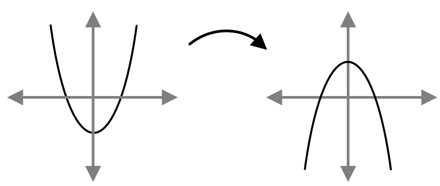


$x^2+y^2 = 4$ $\quad$ $\left(\frac{x}{2}\right)^2+(2y)^2 = 4$

3. การพลิกกราฟ
   - ถ้าเปลี่ยน x เป็น $-x$ กราฟจะ "พลิก" รอบแกน Y
   - ถ้าเปลี่ยน y เป็น $-y$ กราฟจะ "พลิก" รอบแกน X

เช่น





$y = 2^x$ $\quad$ $y = 2^{-x}$ $\quad$ $x^2 = y+2$ $\quad$ $x^2 = -y+2$

หมายเหตุ : การเปลี่ยน $y=f(x)$ เป็น $y=-f(x)$ จะได้ผลเหมือนกับการเปลี่ยน y เป็น $-y$

4. การสะท้อนกราฟ

- ถ้าเปลี่ยน x เป็น $|x|$ กราฟฝั่งซ้ายแกน Y จะหายไป และถูกแทนด้วยภาพสะท้อนของกราฟฝั่งขวาแกน Y
- ถ้าเปลี่ยน y เป็น $|y|$ กราฟใต้แกน X จะหายไป และถูกแทนด้วยภาพสะท้อนของกราฟเหนือแกน X

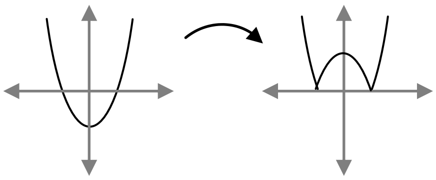
เช่น

$y = 2^x$ $\quad$ $y = 2^{|x|}$ $\quad$ $y = x^2 - 2$ $\quad$ $|y| = x^2 - 2$

5. การพับกราฟ

- ถ้าเปลี่ยน $y = f(x)$ เป็น $y = |f(x)|$ กราฟใต้แกน X จะ "พับขึ้นมาซ้อน" กับกราฟเหนือแกน X

เช่น



$y = x^2 - 2$ $\quad$ $y = |x^2 - 2|$

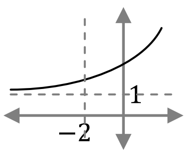
<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $y = 2^{x+2} + 1$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปใหม่ได้เป็น $y - 1 = 2^{x+2}$

เราจะวาดกราฟ $y = 2^x$ ออกมาก่อน แล้วเลื่อนกราฟ โดยเปลี่ยน x เป็น $x + 2$ และเปลี่ยน y เป็น $y - 1$

- เปลี่ยน x เป็น $x + 2$ จะได้ $h = -2$ ต้องเลื่อนกราฟไปทางซ้าย 2 หน่วย
- เปลี่ยน y เป็น $y - 1$ จะได้ $k = 1$ ต้องเลื่อนกราฟขึ้น 1 หน่วย

จะได้กราฟ $y = 2^{x+2} + 1$ คือ



#

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟของ $y = -\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+1}\right)$

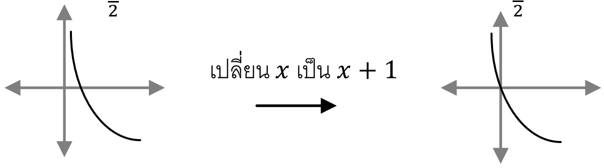
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก

$$\begin{aligned} -\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x+1}\right) &= -\log_{\frac{1}{2}}(x+1)^{-1} \\ &= -(-1)\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \\ &= \log_{\frac{1}{2}}(x+1) \end{aligned}$$

ดังนั้น กราฟของข้อนี้ จะเหมือนกับกราฟของ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$

โดยเราจะวาดกราฟของ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ ก่อน แล้วค่อยใช้ความรู้เรื่องการเลื่อนกราฟ เปลี่ยน x เป็น $x + 1$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$ $\quad$ $y = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$



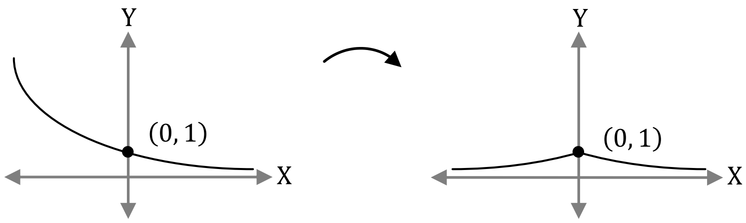
#

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $y = 3^{-|x|}$

<u>วิธีทำ</u> จัดรูปสมการใหม่ก่อน เนื่องจาก $3^{-|x|} = (3^{-1})^{|x|} = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ ดังนั้น จะวาดกราฟ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$ แทน

ขั้นแรก วาดกราฟ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$ ก่อน แล้วค่อยเปลี่ยน x เป็น $|x|$

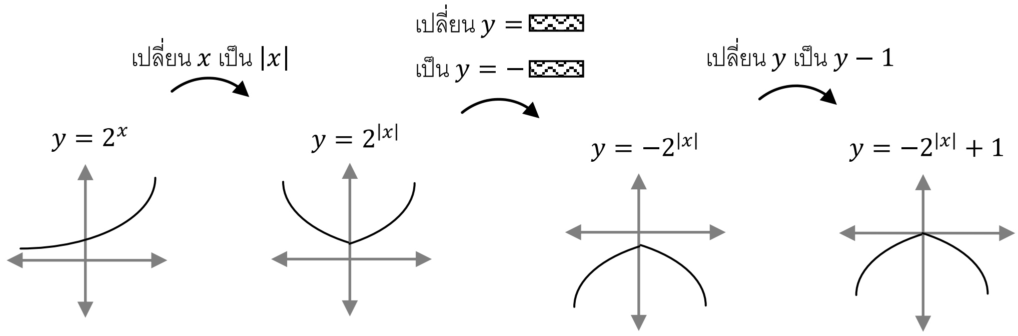
เมื่อเปลี่ยน x เป็น $|x|$ กราฟฝั่งซ้ายแกน Y จะหายไป และถูกแทนด้วยภาพสะท้อนของกราฟฝั่งขวาแกน Y



#

<u>ตัวอย่าง</u> จงวาดกราฟ $y = -2^{|x|} + 1$

<u>วิธีทำ</u> ค่อยๆวาดทีละขั้น ดังนี้



#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงวาดกราฟของสมการต่อไปนี้

   1. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x} + 1$
   2. $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$
   3. $y = \log_2(x-1)$
   4. $y = -\left(\log_{\frac{1}{2}}(x+1) - 1\right)$

ตารางลอการิทึม

จากหัวข้อที่แล้ว เราได้ทราบแล้ว ว่า "ลอการิทึมสามัญ" คือ $\log$ ฐาน 10 ที่อนุญาตให้ไม่ต้องเขียน ฐาน 10 ได้ เช่น $\log 1000 = 3$ เพราะ $10^3 = 1000$ เป็นต้น

ในหัวข้อนี้ เราจะเรียนวิธีเปิดตาราง เพื่อหาค่า $\log$ ของจำนวนอะไรก็ได้ โดยจะใช้ความรู้เรื่อง ลอการิทึมสามัญ มาช่วยการหา $\log$ ของจำนวนใดๆ จะมีขั้นตอนดังนี้

1. เขียนจำนวนที่ต้องการหาค่า $\log$ ให้อยู่ในรูป $A \times 10^n$ โดยที่ $1 \le A < 10$

   เช่น $2540 = 2.54 \times 10^3$ $\qquad 156.2 = 1.562 \times 10^2$

   $0.00053 = 5.3 \times 10^{-4}$ $\qquad 6.225 = 6.225 \times 10^0$ เป็นต้น

2. เอาค่าที่แปลงได้ในข้อ 1. ไปหาค่า $\log$ จะได้ $\log(A \times 10^n) = \log A + \log 10^n = \log A + n$

   เช่น
   $$\log 2540 = \log(2.54 \times 10^3) = \log 2.54 + \log 10^3 = \log 2.54 + 3$$
   $$\log 0.00053 = \log(5.3 \times 10^{-4}) = \log 5.3 + \log 10^{-4} = \log 5.3 + (-4)$$ เป็นต้น

3. เปิดตาราง หาค่า $\log A$ นำไปแทนค่าแล้วตอบ

   เช่น $\log 2.54$ $\rightarrow$ ดูตรงที่ช่องหน้าเป็น 2.5 และช่องบนเป็น 4 จะได้ค่า 0.4048

   $\log 5.3$ $\rightarrow$ ดูตรงที่ช่องหน้าเป็น 5.3 และช่องบนเป็น 0 จะได้ค่า 0.7243

   จะเห็นว่า ในตารางจะมีค่าให้เปิดได้ในช่วง $[1, 10)$ เท่านั้น เพราะ $1 \le A < 10$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996

เช่น

$$\begin{aligned} \log 4130 &= \log(4.13 \times 10^3) \\ &= \log 4.13 + \log 10^3 \\ &= \log 4.13 + 3 \\ &= 0.6160 + 3 \ = \ 3.6160 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 0.000732 &= \log(7.32 \times 10^{-4}) \\ &= \log 7.32 + \log 10^{-4} \\ &= \log 7.32 + (-4) \\ &= 0.8645 + (-4) \ = \ -3.1355 \end{aligned}$$

ข้อจำกัดอย่างหนึ่งของตาราง ก็คือ จะมีค่า A ให้เปิดได้ถึงแค่ทศนิยมตำแหน่งที่ 2
แต่ในบางกรณี เราอาจต้องหาถึงตำแหน่งที่ 3 เช่น $\log 732.4 = \log(7.324 \times 10^2)$

$$= \log 7.324 + 2$$

แต่จะเห็นว่า $\log 7.324$ เปิดตารางไม่เจอ จะเจอก็แต่ $\log 7.32 = 0.8645$ กับ $\log 7.33 = 0.8651$

ในกรณีนี้ เราจะ “ประมาณ” ค่า $\log 7.324$ จาก $\log 7.32$ และ $\log 7.33$ โดยการเทียบสัดส่วนการเพิ่ม ดังนี้

	$\log 7.32$		$= 0.8645$		
เพิ่ม 0.004		เพิ่ม 0.01		เพิ่ม x	เพิ่ม 0.0006
	$\log 7.324$		$= 0.86\_\_$		
	$\log 7.33$		$= 0.8651$		

แล้วเอา “การเพิ่ม” ของทั้งสองฝั่ง มาเข้าสัดส่วน

$$\frac{0.004}{0.01} = \frac{x}{0.0006}$$

$$\frac{0.004}{0.01} \times 0.0006 = x$$

$$0.00024 = x$$

นั่นคือ ค่าของ $\log 7.324$ จะต้องเพิ่มจาก 0.8645 ไปอีก 0.00024 ได้เป็น $0.8645 + 0.00024 = 0.86474$
และ จะได้ $\log 732.4 = 0.86474 + 2 = 2.86474$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า $\log 0.0011125$

<u>วิธีทำ</u> $\log 0.0011125 = \log(1.1125 \times 10^{-3}) = \log 1.1125 + (-3)$

จากนั้น หา $\log 1.1125$ โดยประมาณจาก $\log 1.11$ กับ $\log 1.12$

	$\log 1.11$		$= 0.0453$		
เพิ่ม 0.0025		เพิ่ม 0.01		เพิ่ม x	เพิ่ม 0.0039
	$\log 1.1125$		$= 0.04\_\_$		
	$\log 1.12$		$= 0.0492$		

$$\frac{0.0025}{0.01} = \frac{x}{0.0039}$$

$$\frac{0.0025}{0.01} \times 0.0039 = x$$

$$0.000975 = x$$

ดังนั้น $\log 1.1125 = 0.0453 + 0.000975 = 0.046275$

จะได้ $\log 0.0011125 = 0.046275 + (-3) = -2.953725$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงใช้ตาราง log เพื่อหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $\log 2 =$
   2. $\log 8.51 =$

3. $\log 35 =$

4. $\log 418 =$

5. $\log 0.11 =$

6. $\log 95800 =$

7. $\log 0.0251 =$

8. $\log 0.000552 =$

9. $\log 5.342 =$

10. $\log 0.09218 =$

2. จงหา ค่า x ที่ทำให้ประโยคต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\log x = 0.7143$

2. $\log x = 0.9991$

3. $\log x = 0.3263$

4. $\log x = 0.2455$

แมนทิสซา - คาแรคเทอริสติก

ในหัวข้อที่แล้ว เวลาที่เราหาค่า $\log$ โดยใช้ตาราง จะเห็นว่าคำตอบ จะประกอบด้วย 2 ส่วน คือส่วนที่ได้จากการเปิดตาราง กับส่วนที่เป็นเลขชี้กำลังของ 10

$$\begin{aligned} \log 1210 &= \log(1.21 \times 10^3) \\ &= \log 1.21 + \log 10^3 \\ &= \underbrace{0.0828}_{\text{เปิดตาราง}} + \underbrace{3}_{\text{เลขชี้กำลังของ } 10} \end{aligned}$$

เราจะเรียกตัวที่ได้จากการเปิดตาราง ว่า "แมนทิสซา"
และเรียกส่วนที่เป็นเลขชี้กำลังของ 10 ว่า "คาแรคเทอริสติก"
เช่น $\log 1210$ มีแมนทิสซา $= 0.0828$ และมีคาแรคเทอริสติก $= 3$ เป็นต้น

จะเห็นว่าค่าที่ได้จากการเปิดตาราง จะมีแต่ตัวเลขในรูป 0.XXXX ทั้งนั้น ดังนั้น $0 \leq$ แมนทิสซา < 1 เสมอ
และ คาแรคเทอริสติก จะมาจากเลขชี้กำลังของ 10 จะใช้คำนวณ "จำนวนหลัก" หรือ "จำนวนศูนย์หลังจุดทศนิยม" ได้
เช่น ถ้า คาแรคเทอริสติก $= 5$ แสดงว่าตัวเลขที่นำมาหา $\log$ ต้องอยู่ในรูป $A \times 10^5$ $\rightarrow$ เป็นตัวเลข 6 หลัก
ถ้า คาแรคเทอริสติก $= -4$ แสดงว่าตัวเลขที่นำมาหา $\log$ ต้องอยู่ในรูป $A \times 10^{-4}$ $\rightarrow$ 0.000XXX
จะเห็นว่า ถ้า คาแรคเทอริสติก ≥ 0 $\rightarrow$ จำนวนหลัก $=$ คาแรคเทอริสติก $+ 1$
ถ้า คาแรคเทอริสติก < 0 $\rightarrow$ จำนวนศูนย์หลังจุดทศนิยม $=$ |คาแรคเทอริสติก| $- 1$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหา แมนทิสซา และ คาแรคเทอริสติก ของ $\log 0.000732$
<u>วิธีทำ</u> $\log 0.000732 = \log(7.32 \times 10^{-4}) = \log 7.32 + \log 10^{-4} = 0.8645 + (-4)$
ดังนั้น แมนทิสซา คือ 0.8645 และ คาแรคเทอริสติก คือ -4 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่า 3^{20} มีกี่หลัก
<u>วิธีทำ</u> จำนวนหลักของของ 3^{20} จะหาได้จาก คาแรคเทอริสติก ของ $\log 3^{20}$

$$\begin{aligned} \log 3^{20} &= 20 \log 3 \\ &= 20 \times 0.4771 \\ &= 9.542 \\ &= 0.542 + 9 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า คาแรคเทอริสติก ของ $\log 3^{20} = 9$ ดังนั้น 3^{20} จะมี $9 + 1 = 10$ หลัก #

ตัวอย่าง จงหาว่า 0.2^{50} มี 0 กี่ตัว หลังจุดทศนิยมถึงหลักแรกที่ไม่เป็น 0

วิธีทำ จำนวน 0 หลังจุดทศนิยมถึงหลักแรกที่ไม่เป็น 0 ของ 0.2^{50} จะหาได้จาก คาแรคเทอริสติก ของ $\log 0.2^{50}$

$$\begin{aligned} \log 0.2^{50} &= 50 \log 0.2 \\ &= 50 \log (2 \times 10^{-1}) \\ &= 50 (\log 2 + \log 10^{-1}) \\ &= 50 (0.3010 + (-1)) \\ &= 50 \times (-0.6990) \\ &= -34.95 \\ &= 0.05 + (-35) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า คาแรคเทอริสติก ของ $\log 0.2^{50} = -35$

ดังนั้น จำนวน 0 หลังจุดทศนิยมถึงหลักแรกที่ไม่เป็น 0 ของ 0.2^{50} คือ $|-35| - 1 = 34$ ตัว #

ตัวอย่าง จงหาค่า N ที่ทำให้ $\log N = 2.9258$

วิธีทำ ข้อนี้ ต้องทำย้อนกลับ จะเห็นว่า 2.9258 ต้องมาจาก แมนทิสซา $= 0.9258$ และ คาแรคเทอริสติก $= 2$

เปิดตารางย้อนกลับค่าแมนทิสซา เพื่อหาว่า 0.9258 มาจาก log อะไร จะได้ $0.9258 = \log 8.43$

$$\begin{aligned} 2.9258 &= 0.9258 + 2 \\ &= \log 8.43 + \log 10^2 \\ &= \log (8.43 \times 10^2) \\ &= \log 843 \end{aligned}$$

ดังนั้น $N = 843$ #

ตัวอย่าง จงหาค่า N ที่ทำให้ $\log N = -2.3401$

วิธีทำ ในกรณีที่เป็นเลขติดลบ ต้องระวังดีๆ

จะบอกว่า แมนทิสซา $= 0.3401$ ไม่ได้ เพราะ $0.3401 + (-2) \neq -2.3401$

คาแรคเทอริสติก $= -2$

หรือ จะบอกว่า แมนทิสซา $= -0.3401$ ก็ไม่ได้อีก เพราะ แมนทิสซาเป็นเลขลบไม่ได้

คาแรคเทอริสติก $= -2$

ถ้าเป็นเลขติดลบ ต้องปัด -2.3401 เป็น -3 แล้วค่อยหาว่า -2.3401 กับ -3 ห่างกันเท่าไหร่

จะได้ว่า -2.3401 จะต้องมาจาก คาแรคเทอริสติก $= -3$ และ แมนทิสซา $= 0.6599$

เปิดตารางย้อนกลับค่าแมนทิสซา จะได้ $0.6599 = \log 4.57$

$$\begin{aligned} -2.3401 &= 0.6599 + (-3) \\ &= \log 4.57 + \log 10^{-3} \\ &= \log (4.57 \times 10^{-3}) \\ &= \log 0.00457 \end{aligned}$$

ดังนั้น $N = 0.00457$ #

จะเห็นว่า เวลาที่คาแรคเทอริสติกเป็นลบ เราต้องคิดเลขมากขึ้นนิดหน่อย เช่น $0.9258 + 2 = 2.9258$

แต่ $0.9258 + (-3) = -2.0742$

เพื่อความสะดวก จึงมีสัญลักษณ์ "บาร์" ขึ้นมา โดยให้ใส่ บาร์ บนคาแรคทอริสติก ที่เป็นลบได้เลย

เช่น $0.9258 + (-3) = \bar{3}.9258$ $\quad$ $0.6599 + (-1) = \bar{1}.6599$

$0.5748 + (-2) = \bar{2}.5748$ $\quad$ $0.0251 + (-15) = \overline{15}.0251$ เป็นต้น

ตัวอย่าง จงหาค่า N ที่ทำให้ $\log N = \bar{1}.7966$

วิธีทำ สังเกตดีๆ จะพบว่ามีบาร์อยู่บน 1 นั่นคือ $\bar{1}.7966 = 0.7966 + (-1)$

ดังนั้น แมนทิสซา $= 0.7966$ และ คาแรคเทอริสติก $= -1$

เปิดตารางย้อนกลับค่าแมนทิสซา เพื่อหาว่า log อะไร ได้ 0.7966 จะพบว่า $\log 6.26 = 0.7966$

$$\begin{aligned}\bar{1}.7966 &= 0.7966 + (-1)\\ &= \log 6.26 + \log 10^{-1}\\ &= \log (6.26 \times 10^{-1})\\ &= \log 0.626\end{aligned}$$

ดังนั้น $N = 0.626$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาแมนทิสซา และ คาแรคเทอริสติก ของจำนวนต่อไปนี้
   1. $\log 12500$
   2. $\log 0.0651$
   3. $\log 153$
   4. $\log 0.000253$
   5. $\log 3$
   6. $\log 0.9$
   7. $\log 5^{100}$
   8. $\log (2^{20} \cdot 3^{10})$

9. $\log \frac{1}{2^{50}}$

10. $\log \frac{7^{20}}{2^{10}}$

2. จงหาค่า N ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\log N = 1.0043$

2. $\log N = 2.5955$

3. $\log N = 5.2227$

4. $\log N = -0.8794$

5. $\log N = 3.6484$

6. $\log N = -0.8928$

7. $\log N = -2.4089$

8 $\log N = -5.1314$

9. $\log N = \bar{3}.7259$

10. $\log N = \bar{4}.2253$

3. จงหาว่าจำนวนในแต่ละข้อต่อไปนี้ มีกี่หลัก

1. 7^{30}

2. 2^{500}

3. $3^{10} \cdot 5^{20}$

4. 16^{10}

5. 12^{20}

6. 42^{30}

แอนติลอก

เนื่องจาก "ลอการิทึมฐาน 10" ค่อนข้างเป็นที่นิยม จึงมีการตั้ง "เอกซ์โพเนนเชียลฐาน 10" ขึ้นมาบ้าง
เราจะเรียก เอกซ์โพเนนเชียลฐาน 10 ว่า antilog โดย $\text{antilog}\, x = 10^x$ นั่นเอง

เช่น $\text{antilog}\, 2 = 10^2 = 100$ $\qquad$ $\text{antilog}\, (-1) = 10^{-1} = \frac{1}{10}$

$\text{antilog}\, 0.5 = 10^{0.5} = 10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$ เป็นต้น

สิ่งที่ต้องรู้ คือ log ฐาน 10 กับ antilog เป็นอินเวอร์ส ของกันและกัน
นั่นคือ $\text{antilog}(\log N) = N$ และ $\log(\text{antilog}\, x) = x$
และถ้ามี $\log N = x$ จะได้ว่า $N = \text{antilog}\, x$ (เหมือนกับย้ายข้าง log ไปเป็น antilog เลย)

<u>ตัวอย่าง</u> จงค่าของ $\text{antilog}(1 + \log 2)$

<u>วิธีทำ</u> $\text{antilog}(1 + \log 2) = 10^{1+\log 2}$

$= 10^1 \times 10^{\log 2}$

$= 10 \times 2 = 20$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $\text{antilog}\, 1.0124 = 10.29$ และ $\log x = -2.9876$ จงหาค่า x

<u>วิธีทำ</u> โจทย์บอกว่า $\log x = -2.9876$ จะได้ $x = 10^{-2.9876} = 10^{-3+0.0124} = \frac{10^{0.0124}}{10^3}$ $(*)$

จะเห็นว่า จะหาค่า x ได้ เราต้องรู้ค่าของ $10^{0.0124}$

โจทย์บอกอีกว่า $\text{antilog}\, 1.0124 = 10.29$ แปลว่า

$$\begin{aligned} 10^{1.0124} &= 10.29 \\ 10^{1+0.0124} &= 10.29 \\ 10 \times 10^{0.0124} &= 10.29 \\ 10^{0.0124} &= 1.029 \end{aligned}$$

เอา $10^{0.0124}$ ไปแทนใน $(*)$ จะได้ $x = \frac{1.029}{10^3} = 0.001029$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $\text{antilog}\, (3)$
   2. $\text{antilog}\, 1$
   3. $\text{antilog}\, (-2)$
   4. $\text{antilog}\, 1.5$
   5. $\text{antilog}\, (\log 1)$
   6. $\text{antilog}\, (\log 12)$

7. $\log(\text{antilog } 0)$

8. $\text{antilog}(2 + \log 3)$

9. $\text{antilog}(\log 3 + \log 5)$

10. $\log(\,(\text{antilog } 2.5)(\text{antilog } 1.5)\,)$

2. กำหนดให้ $\text{antilog } 0.5527 = 3.57$ จงหาค่าของ $\log 3570$

3. กำหนดให้ $\text{antilog } 0.3284 = 2.13$ จงหาค่าของ $\log 0.0213$

4. กำหนดให้ $\text{antilog } 2.6454 = 442$ จงหาค่าของ $\log 44.2$

5. กำหนดให้ $\text{antilog } (-1.3298) = 0.0468$ จงหาค่าของ $\log 468$

6. กำหนดให้ $\operatorname{antilog} 0.8865 = 7.7$ จงหาค่าของ $\operatorname{antilog} 2.8865$

7. กำหนดให้ $\operatorname{antilog} 2.05 = 112.2$ และ $\log x = -1.95$ จงหาค่า x

สมการลอการิทึม

เรื่องนี้ เป็นการใช้สมบัติของ $\log$ มาแก้สมการ

ในกรณีที่สมการอยู่ในรูป $\log_a(A) = \log_a(B)$ เราสามารถ "ตัด $\log$ ฐาน a" ทั้งสองข้างเป็น $(A) = (B)$ ได้

สิ่งที่ต้องระวัง คือ ก่อนตอบ ให้ตรวจคำตอบด้วยเสมอ คำตอบที่ทำให้ตัวเลขหลัง $\log$ เป็นลบ หรือศูนย์ จะใช้ไม่ได้

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\log_3 x = \log_9(3x+4)$

<u>วิธีทำ</u> ฝั่งซ้ายเป็น $\log$ ฐาน 3 แต่ฝั่งขวาเป็น $\log$ ฐาน 9

เราจะแปลง 9 เป็น 3^2 เพื่อทำฐานของทั้งสองฝั่งให้เป็น 3 เหมือนกัน ดังนี้

$$\begin{aligned}
\log_3 x &= \log_{3^2}(3x+4) \\
\log_3 x &= \tfrac{1}{2}\log_3(3x+4) \\
2\log_3 x &= \log_3(3x+4) \\
\log_3 x^2 &= \log_3(3x+4) \quad \text{ตัด } \log \text{ ฐาน 3 ทั้งสองข้าง} \\
x^2 &= 3x+4 \\
x^2-3x-4 &= 0 \\
(x-4)(x+1) &= 0 \\
x &= 4 \ , \ -1
\end{aligned}$$

แต่จะเห็นว่า -1 ใช้ไม่ได้ เพราะ ทำให้ $\log_3 x$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ 4 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $\log_2(x^2+2x) = 3$

<u>วิธีทำ</u> ใช้สมบัติของ $\log$ มาช่วย ถ้า $\log_2(x^2+2x) = 3$ แสดงว่า

$$\begin{aligned}
2^3 &= x^2+2x \\
8 &= x^2+2x \\
0 &= x^2+2x-8 \\
0 &= (x+4)(x-2) \\
x &= -4 \ , \ 2
\end{aligned}$$

ก่อนตอบ ลองแทนดูว่ามีตัวไหนที่ทำให้หลัง $\log$ เป็นศูนย์หรือลบหรือเปล่า

แทน $x=-4$: $(-4)^2+2(-4) = 16+(-8) = 8 > 0$ ใช้ได้

แทน $x=2$: $(2)^2+2(2) = 4+4 = 8 > 0$ ใช้ได้เหมือนกัน

ดังนั้น คำตอบของสมการคือ -4 และ 2 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $(\log_5 x) - 2 = 3\log_x 5$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ต้องสังเกตว่า $\log_5 x$ กับ $\log_x 5$ เป็นส่วนกลับของกันและกัน

ดังนั้น เราจะสมมติให้ $\log_5 x = A$ และให้ $\log_x 5 = \frac{1}{A}$ ดังนี้

$$\begin{aligned}
A-2 &= (3)\left(\tfrac{1}{A}\right) \\
A^2-2A &= 3 \\
A^2-2A-3 &= 0 \\
(A+1)(A-3) &= 0
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
A &= -1 \ , \ 3 \\
\log_5 x &= -1 \ , \ 3 \\
x &= 5^{-1} \ , \ 5^3 \\
x &= \tfrac{1}{5} \ , \ 125
\end{aligned}$$

#

นอกจากนี้ เรายังสามารถใช้ความรู้เรื่อง $\log$ มาแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลได้ด้วย
ในสมการเอกซ์โพเนนเชียล เราต้องเอา x ที่เป็นเลขชี้กำลัง ลงมาข้างล่าง โดยจัดรูป ให้ฐานเท่ากัน แล้วตัดฐานทิ้ง
แต่ถ้าเราจัดฐานของทั้งสองฝั่งให้เท่ากันไม่สำเร็จ (เช่น สมการ $3^x = 5^{2x}$) ก็จะดึง x ลงมาข้างล่างไม่ได้

ในเรื่อง $\log$ จะมีวิธีง่ายๆ ในการเอา x ที่เป็นเลขชี้กำลังลงมาข้างล่าง โดยการ ใส่ $\log$ ทั้งสองข้างของสมการ
แล้วอาศัยสมบัติ $\log_a(k^x) = x \cdot \log_a k$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $3^{x+1} = 5^{2x}$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่าฝั่งซ้ายเป็นฐาน 3 แต่ฝั่งขวาเป็นฐาน 5 ทำให้เท่ากันลำบาก
ดังนั้น เราจะใส่ $\log$ (ฐาน 3 หรือ ฐาน 5 ก็ได้) ทั้งสองข้าง เพื่อให้ x ตกลงมาอยู่ข้างล่าง ดังนี้

$$\begin{aligned}
\log_3 3^{x+1} &= \log_3 5^{2x} \\
(x+1)\log_3 3 &= (2x)\log_3 5 \\
x+1 &= 2x\log_3 5 \\
1 &= 2x\log_3 5 - x \\
1 &= (2\log_3 5 - 1)(x) \\
\frac{1}{2\log_3 5 - 1} &= x
\end{aligned}$$

ข้อนี้ x เป็นเลขชี้กำลัง จึงไม่ต้องเช็คว่าห้ามเป็นลบ ดังนั้น จะได้คำตอบ คือ $\frac{1}{2\log_3 5-1}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $x^{\log_2 x} = 2$

<u>วิธีทำ</u> ฝั่งซ้ายเป็นฐาน x แต่ฝั่งขวาเป็นฐาน 2 ทำให้เท่ากันลำบาก
จะใส่ $\log$ ฐาน 2 ทั้งสองข้าง ให้เลขชี้กำลังตกลงมาอยู่ข้างล่าง ดังนี้

$$\begin{aligned}
\log_2 x^{\log_2 x} &= \log_2 2 \\
\log_2 x \cdot \log_2 x &= 1 \\
(\log_2 x)^2 &= 1 \\
\log_2 x &= 1\ ,\ -1 \\
x &= 2^1\ ,\ 2^{-1} \\
x &= 2\ ,\ \tfrac{1}{2}
\end{aligned}$$

จะเห็นว่า 2 และ $\frac{1}{2}$ ไม่ทำให้หลัง $\log$ เป็นลบหรือศูนย์
ดังนั้น คำตอบของสมการคือ 2 และ $\frac{1}{2}$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการต่อไปนี้
   1. $\log_5 x = 3$
   2. $\log_4 x = -\frac{1}{2}$

3. $\log_3\left(x-\frac{2}{3}\right) = -1$

4. $\log_2(x^2+x+2) = 3$

5. $\log_x 8 = 3$

6. $\log_x 9\sqrt{3} = \frac{5}{2}$

7. $\log_3\left(\frac{2}{x+1}\right) = \log_3(x+2)$

8. $\log_4(3-x) = \log_2(2x)$

9. $\log_3(x^2+8) = \log_3 x + \log_3 6$

10. $\log_4 \log_3 x = 1$

11. $\log_2 \log_3 \log_4(x+1) = 0$

12. $\log_2(x+1) - \log_2(x-1) = 1$

13 $(\log_2 x)^2 + \log_2(x^3) = 4$

14. $\log_2\left(x^{\log_2 x}\right) = 1$

15. $x^{\log_3 x} = 81$

16. $\log_3 x + \log_x 3 = \frac{10}{3}$

2. จงหาคำตอบของสมการ $\log_2(-3x) = 1 + 2\log_2\sqrt{1-x^2}$

3. คำตอบของสมการ $\log_{\sqrt{2}}(4-x) = \log_2(9-4x) + 1$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 52)/18]
   1. $[-10,-6)$
   2. $[-6,-2)$
   3. $[-2,2)$
   4. $[2,6)$

4. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in \mathrm{R} \mid \log_{\sqrt{3}}(x-1) - \log_{\sqrt[3]{3}}(x-1) = 1\}$ และ
$$B = \{x \in \mathrm{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$
แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต $A \cup B$ ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/29]

5. ถ้า $\log_2 3 = 1.59$ แล้ว ค่าของ x ซึ่งสอดคล้องสมการ $2^{2x+1} \cdot 3^{2x+2} = 12^{2x}$ เท่ากับเท่าใด
[A-NET 50/2-3]

6. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_3 x = 1 + \log_x 9$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/19]
1. $[0, 4)$
2. $[4, 8)$
3. $[8, 12)$
4. $[12, 16)$

7. ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\log_3\left(3^{1/x} + 27\right) = \log_3 4 + 1 + \frac{1}{2x}$ เท่ากับเท่าใด [A-NET 51/1-13]

8. รากที่มีค่าน้อยที่สุดของสมการ $2^{\log(x-2)} \cdot 2^{\log(x-3)} = 2^{\log 2}$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-10]

9. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $x^2 \log_4(x^2+2x-1) + x\log_{\frac{1}{2}}(x^2+2x-1) = 2x - x^2$ และให้ $B = \{x^2 \mid x \in A\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/30]

10. กำหนดให้ $A = \left\{z \in \mathrm{R} \,\middle|\, z = \frac{x}{y} \text{ และ } 6\log(x-2y) = \log x^3 + \log y^3\right\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-9]

11. เซตคำตอบของอสมการ $72^{x} + 72 < 2^{3x+3} + 3^{2x+2}$ เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/11]

1. $(\log_8 7\ ,\ \log_9 8)$
2. $(\log_9 8\ ,\ \log_8 9)$
3. $(\log_8 9\ ,\ \log_7 8)$
4. $(\log_9 10\ ,\ \log_8 9)$

12. กำหนด $\log_y x + 4\log_x y = 4$ แล้ว $\log_y x^3$ มีค่าเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-9]

13. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $3^{2x+2} - 28(3^{x}) + 3 = 0$ และ
B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log x + \log(x-1) = \log(x+3)$
แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/11]

14. เซตคำตอบของสมการ $\log_3^2 x - \log_{27} x^3 = 6$ ตรงกับเซตคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้

[PAT 1 (ต.ค. 53)/11]

1. $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{3}} \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{9x^2-244x+29}} = 0$
2. $2\log_2(x+1) - \log_2(x^2-14x+41) = 1$
3. $3^{\left(1+\sqrt{x^2-8x-5}\right)} + 3^{\left(2-\sqrt{x^2-8x-5}\right)} = 28$
4. $\log_{3x} 3 + \log_{27} 3x + \frac{4}{3} = 0$

15. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/23]

1. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x - 2\log_{64} x = 7$
   แล้ว x สอดคล้องกับสมการ $x - 3\sqrt{x} = 4$
2. ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ
   $$\begin{aligned}(1-a)\log_3 2 &= 2 - \log_3 5\\ (3+b)\log_5 2 &= 2 - \log_5 3 \quad \text{และ}\\ (3+c)\log_7 2 &= 4\log_7 3 - \log_7 5\end{aligned}$$
   แล้ว $2a + b - c = 2 + 5\log_2 5 - 9\log_2 3$

16. ให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log\left(\sqrt{x+1} + 5\right) = \log x$
และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_2(3x) + \log_4(9x) + \log_8(27x) = 3 + 2\log_{64}(x)$
ผลคูณของสมาชิกทั้งหมดในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/11]

17. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ

$$\log_2(x+7)^2 + 4\log_4(x-3) = 3\log_8(64x^2 - 256x + 256)$$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/31]

18. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_m \sqrt{4x^2+4x+1} + \log_n(6x^2+11x+4) = 4$
เมื่อ $m = \sqrt{3x+4}$ และ $n = 2x+1$ และให้ $B = \{\, 8x^2 \mid x \in A \,\}$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/33]

19. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกและสอดคล้องกับสมการ $2\log_2(x-2y) + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = 0$
แล้ว $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/14]

20. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_3\left(3^{(2x^2+2x)}+9\right) = x^2+x+\frac{1}{\log 3}$ และให้ $B = \{ x^2 \mid x \in A \}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/34]

21. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และ ถ้า $A = \{x \in R \mid 3^{2x} - 34(15^{x-1}) + 5^{2x} = 0\}$ และ $B = \left\{x \in R \,\middle|\, \log_5\left(5^{\frac{1}{x}}+125\right) = \log_5 6 + 1 + \frac{1}{2x}\right\}$ แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/29]

22. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$
และให้ B แทนเซตคำตอบของสมการ $x + \sqrt{1 - x^2} = 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$
จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (เม.ย. 57)/34]

23. ให้ A แทนเซตของ (x, y) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับระบบสมการ $2^{2x} \log_{\frac{1}{4}} y = 1 + 2^{4x-1}$
$$9(2^{2x})\log_{\frac{1}{8}} y = 9 + \log_{\frac{1}{2}}^2 y$$
และให้ $B = \left\{ \frac{x}{y} \,\middle|\, (x, y) \in A \right\}$ ค่าน้อยที่สุดของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/37]

24. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่มากกว่า 1 และสอดคล้องกับ $\log_a 4 + \log_b 4 = 9\log_{ab} 2$ ค่ามากสุดของ $\log_a(ab^5) + \log_b\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (พ.ย. 57)/5]

อสมการลอการิทึม

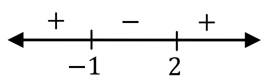
คราวนี้เป็น “อ” สมการ นั่นคือ ในสมการจะมี $>\ ,\ <\ ,\ \geq\ ,\ \leq\ ,\ \neq$

วิธีทำ จะทำเหมือน อสมการเอกซ์โพเนนเชียลเลย คือ จัดรูปให้ฐานทั้งสองข้างเท่ากัน เป็น $\log_a(1) > \log_a(2)$
แล้วตัดฐานทิ้งทั้งสองข้าง โดย ถ้า $a < 1$ ต้องสลับ มากกว่า $\leftrightarrow$ น้อยกว่า

สิ่งที่ลำบากในเรื่องอสมการ คือ การตรวจสอบ เงื่อนไข “ตัวหลัง $\log > 0$” จะทำเหมือนเดิมไม่ได้แล้ว
เพราะคำตอบของอสมการจะมาเป็นช่วง ไม่ได้มาเป็นตัวๆเหมือนเรื่องสมการ ทำให้ไล่แทนทีละตัวเหมือนก่อนไม่ได้
ในเรื่องนี้ เราจะต้องแก้อสมการ “ตัวหลัง $\log > 0$” เพิ่มอีก แล้วเอาคำตอบที่ได้ ไปกรองกับคำตอบจริงๆ อีกที

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\log_3 x^2 \geq \log_3(x+2)$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้เป็นฐาน 3 ซึ่งมากกว่า 1 ดังนั้น ตัด log ทั้งสองข้างออกได้ โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมาย

$$\begin{aligned} x^2 &\geq x+2 \\ x^2-x-2 &\geq 0 \\ (x-2)(x+1) &\geq 0 \end{aligned}$$



แต่ยังตอบไม่ได้ ต้องแก้สมการ “ตัวหลัง $\log > 0$” มากรองก่อน

ตัวหลัง log จะมี 2 ตัว คือ $x+2$ และ x^2

$$\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ x &> -2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x^2 &> 0 \\ &\text{ได้หมด ยกเว้น } 0 \end{aligned}$$

กรองเอาเฉพาะที่ > -2 และ $\neq 0$ จะเหลือคำตอบ คือ $(-2\ ,\ -1] \cup [2\ ,\ \infty)$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $\log_{0.5}(x+2) > 2$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ เราจะทำทางขวาให้เป็น log ฐาน 0.5 เหมือนกับทางซ้ายก่อน

เนื่องจาก $\begin{aligned} 2 &= 2\log_{0.5} 0.5 \\ &= \log_{0.5} 0.5^2 \\ &= \log_{0.5} 0.25 \end{aligned}$ ดังนั้น $\begin{aligned} \log_{0.5}(x+2) &> \log_{0.5} 0.25 \\ x+2 &< 0.25 \\ x &< -1.75 \end{aligned}$ ฐาน < 1 ต้องกลับเครื่องหมาย

แต่ยังตอบไม่ได้ เนื่องจาก ตัวหลัง log ต้องมากกว่าศูนย์ นั่นคือ $\begin{aligned} x+2 &> 0 \\ x &> -2 \end{aligned}$

กรองเอาเฉพาะที่ > -2 จะได้คำตอบ คือ $(-2\ , -1.75)$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้อสมการต่อไปนี้

   1. $\log_4(2x+1) > 1$
   2. $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1) \leq -1$
   3. $\log_2 \log_3 \log_4 x > 0$
   4. $\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x > 0$
   5. $\log_2(2x-1) \leq \log_2 x$
   6. $\log_{0.5}(2-x) \geq \log_{0.5} x$

7. $\log_2(x^2 + x - 12) > 3$

8. $\log_5(x^2 + 3x) < \frac{1}{\log 5}$

9. $\log_2(2x - 3) + \log_2(x + 1) \geq \log_2 3$

10. $\log_{0.5}(3x - 1) - \log_{0.5}(x + 1) > -1$

11. $(1+\log_2 x)^2 - 3(1+\log_2 x) + 2 < 0$

12. $\log_2 x + \sqrt{1+\log_2 x} - 1 > 0$

2. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_x\left(\frac{2}{x-1}\right) \geq 1$ แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 56)/12]
   1. $\{ x \in \mathrm{R} \mid |x^2+2x-3| = 3-2x-x^2 \}$
   2. $\{ x \in \mathrm{R} \mid |2x+5| > 9 \}$
   3. $\{ x \in \mathrm{R} \mid 0 \leq |x+3| \leq 5 \}$
   4. $\{ x \in \mathrm{R} \mid x^3 > 3x^2 \}$

3. ถ้า $A = \{x \mid a < x < b\}$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_2(2x-1) - \log_4\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-5]

4. จำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_{\frac{1}{2}}[\log_3(x+1)] > -1$ มีจำนวนเท่าใด [A-NET 49/1-12]

5. ถ้า A แทนเซตคำตอบของ $2(\log_3 x - 1)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 54)/10]

1. $(0, 3)$
2. $(1, 4)$
3. $(2, 5)$
4. $(2, 9)$

สมการติดรูท

1. 1. 4 2. $0\,,1$ 3. 7 4. $3\,,5$
   5. 3
2. 1. 25 2. 9 3. 4 4. $-2\,,1$
   5. $-4\,,3$
3. 5 4. 2 5. 4 6. 13
7. 2 8. 11 9. 2 10. 11
11. 112

รูทไม่รู้จบ

1. 1. 5 2. 3 3. 2 4. 3
   5. 2 6. 3
2. 4

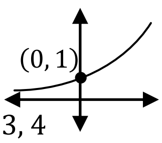
เลขยกกำลัง

1. 1. 1 2. 3^8 3. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ 4. $\frac{1}{x^3}$
   5. a 6. x^2y^7 7. x 8. x
2. 1. $<$ 2. $<$ 3. $<$ 4. $>$
   5. $>$ 6. $>$ 7. $>$ 8. $>$
   9. $>$ 10. $>$ 11. $<$ 12. $<$
3. 3 4. 5 5. 4 6. 3
7. 2 8. 3 9. 2

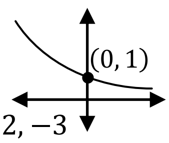
ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

1. $2, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20$ 2. $1, 3, 4, 5, 10$
3. ทุกข้อ มี โดเมน $=$ R และ เรนจ์ $= (0\,,\infty)$

   ข้อ 1 กับ ข้อ 4

   ข้อ 2, 3, 5 และ 6

4. 1. $3, 4$ 2. $-3, -4$ 3. $-2, -3$ 4. $2, 3$
   5. $2, 3$ 6. $4, 5$ 7. $-2, -3$ 8. 1
5. 3

สมการ อสมการ เอกซ์โพเนนเชียล

1. 1. 8 2. 3 3. $-\frac{3}{2}$ 4. 4
   5. $x > -5$ 6. $x \geq 6$ 7. 6 8. $\frac{3}{4}$
   9. -10 10. $x < -5$ 11. $\frac{20}{7}$ 12. -2
   13. $x > -2$ 14. 2 15. -2 16. $x \leq -4$
   17. -1 , 3 18. 0 , 1 19. -2 , 1 20. 2 , -1
2. $-1, 3$ 3. $(-\infty, -\frac{5}{2}) \cup (3, \infty)$ 4. 2
5. -1 6. 108 7. 1 8. 2
9. 2 10. 2 11. 2 12. 3
13. 4 14. 3.5 15. 66

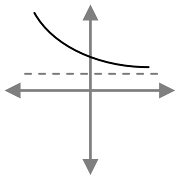
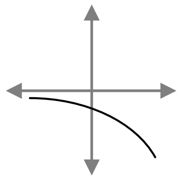
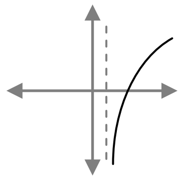
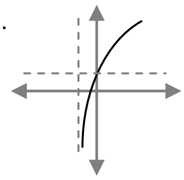
ลอการิทึม

1. 1. 5 2. 5 3. $\frac{3}{2}$ 4. $\frac{4}{3}$
   5. -1 6. $-\frac{1}{3}$ 7. 0 8. 15
   9. 100 10. 4 11. 27 12. 2
   13. 2 14. 3 15. -1 16. 2
   17. 1 18. 1
2. $\frac{1}{4}$ 3. 3.5 4. 1 5. $\frac{1}{8}$
6. 1 7. 75 8. $\frac{2}{3}$ 9. 1
10. $1, 2$

ฟังก์ชันลอการิทึม

1. $1, 4, 8$
2. 1. 0 กับ 1 2. 2 กับ 3 3. -2 กับ -1 4. -1 กับ 0
   5. -1 กับ 0 6. -1 กับ 0 7. -2 กับ -1 8. -3 กับ -2
   9. -2 กับ -1 10. 3 กับ 4
3. 1. $<$ 2. $>$ 3. $>$ 4. $>$
   5. $<$ 6. $>$ 7. $>$ 8. $<$
   9. $>$ 10. $<$
4. 1 5. $1, 2$ 6. F

การแปลงรูปกราฟ

1\. 1.  2.  3.  4. 

ตารางลอการิทึม

1\. 1. 0.3010 2. 0.9299 3. 1.5441 4. 2.6212
5\. -0.9586 6. 4.9814 7. -1.6003 8. -3.2581
9\. 0.72768 10. -1.03538

2\. 1. 5.18 2. 9.98 3. 2.12 4. 1.76

แมนทิสซา - คาแรคเทอริสติก

1\. 1. 0.0969 , 4 2. 0.8136 , -2 3. 0.1847 , 2 4. 0.4031 , -4
5\. 0.4771 , 0 6. 0.9542 , -1 7. 0.9 , 69 8. 0.792 , 10
9\. 0.95 , -16 10. 0.892 , 13

2\. 1. 10.1 2. 394 3. 167000 4. 0.132
5\. 4450 6. 0.128 7. 0.0039 8. 0.00000739
9\. 0.00532 10. 0.000168

3\. 1. 26 2. 151 3. 19 4. 13
5\. 22 6. 49

แอนติลอก

1\. 1. 1000 2. 10 3. 0.01 4. $10\sqrt{10}$
5\. 1 6. 12 7. 0 8. 300
9\. 15 10. 4

2\. 3.5527 3. -1.6716 4. 1.6454 5. 2.6702
6\. 770 7. 0.01122

สมการลอการิทึม

1\. 1. 125 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. -3 , 2
5\. 2 6. 3 7. 0 8. $\frac{3}{4}$
9\. 2 , 4 10. 81 11. 63 12. 3

13. $\frac{1}{16}, 2$ 14. $\frac{1}{2}, 2$ 15. $\frac{1}{9}, 9$ 16. $\sqrt[3]{3}, 27$

2. $-\frac{1}{2}$	3. 3	4. 5	5. 2.09
6. 3	7. $\frac{3}{4}$	8. 4	9. 10.5
10. 4	11. 2	12. 6	13. 2
14. 1	15. $1, 2$	16. $\frac{32}{9}$	17. 5
18. 4.5	19. 17	20. 5	21. 4
22. 3	23. 4	24. 11.5	

อสมการลอการิทึม

1. 1. $x > \frac{3}{2}$ 2. $x \geq 2$ 3. $x > 64$

4. $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

แก้อสมการโจทย์

$$\log_{\frac{1}{4}} \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x > 0$$
$$\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x < 1$$
$$\log_{\frac{1}{3}} x > \frac{1}{2}$$
$$x < \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ...(1)$$

หลัง log ทุกตัว ต้องมากกว่า 0

- หลัง $\log_{\frac{1}{4}}$: $\log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} x > 0$
  $\log_{\frac{1}{3}} x < 1$
  $x > \frac{1}{3} \quad ...(2)$
- หลัง $\log_{\frac{1}{2}}$: $\log_{\frac{1}{3}} x > 0$
  $x < 1 \quad ...(3)$
- หลัง $\log_{\frac{1}{3}}$: $x > 0 \quad ...(4)$

หาส่วนร่วม (1), (2), (3), (4) จะได้คำตอบคือ $\left(\frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

5. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ 6. $x \in [1, 2)$ 7. $x \in (-\infty, -5) \cup (4, \infty)$

8. $x \in (-5, -3) \cup (0, 2)$ 9. $x \geq 2$ 10. $x \in \left(\frac{1}{3}, 3\right)$

11. $x \in (1, 2)$ 12. $x > 1$

2. 3	3. 2.5	4. 7	5. 4

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ Guy Krit Viriyasittharod

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร