
ภาคตัดกรวย

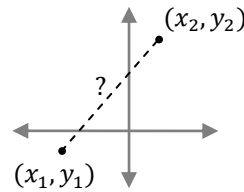
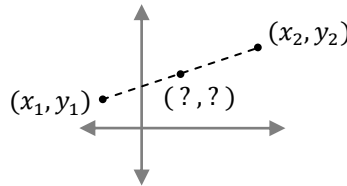
สารบัญ

ทบทวนเรขาคณิตวิเคราะห์.....	1
วงกลม.....	2
พาราโบลา.....	9
วงรี.....	19
ไฮเพอร์โบลา.....	31
ไฮเพอร์โบลาแบบเอียง.....	43
รูปทั่วไปของภาคตัดกรวย.....	45

บททวนเรขาคณิตวิเคราะห์

ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) หาได้จากสูตร $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

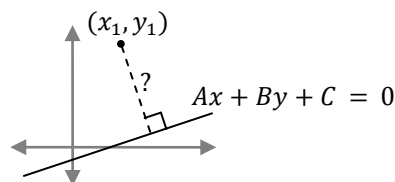
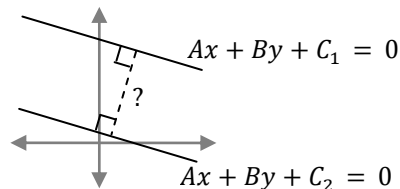
(เอาจุดไหนเป็นตัวตั้ง จุดไหนเป็นตัวลบก็ได้ ได้คำตอบเท่ากัน)

จุดกึ่งกลางระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) หาได้จากสูตร $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ $(x_2, y_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (หรือ $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ก็ได้)

- เส้นตรงที่ขนานกัน จะมีความชันเท่ากัน
- เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

สมการกราฟเส้นตรง

- ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน $= m \rightarrow \frac{y - y_1}{x - x_1} = m$
- มีความชัน $= m$ และมีระยะตัดแกน Y คือ $c \rightarrow y = mx + c$

ระยะตั้งฉาก จากจุด (x_1, y_1) ไปยัง เส้นตรง $Ax + By + C = 0$ หาได้จากสูตร $\frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$ กับเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$ หาได้จากสูตร $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ 

วงกลม

ที่ผ่านมา เราจะเจอแต่สมการกราฟ $Ax + By + C = 0$ ที่ x กับ y เป็นกำลังหนึ่ง

เรื่องถัดจากนี้ไป จะเริ่มมีกำลังสอง ซึ่งกราฟที่ได้ ก็จะไม่เป็นเส้นตรงอีกต่อไป

กราฟที่ต้องเรียน จะมีทั้งหมด 4 รูป คือ วงกลม วงรี พาราโบลา และ ไฮเพอร์โบลา

กราฟทั้ง 4 รูปนี้ จะเหมือนกับหน้าตัดของกรวย ตอนถูกเฉือนบางส่วนออกไป เราจึงนิยมเรียกเรื่องนี้ว่า “ภาคตัดกรวย”

หัวข้อแรกจะพูดถึง “กราฟวงกลม”

สมบัติที่สำคัญของวงกลม คือ “ทุกจุดบนวงกลม จะอยู่ห่างจุดศูนย์กลางเท่ากับความยาวรัศมีเสมอ”

สมการกราฟวงกลม จะมีรูปแบบ คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \quad \text{เมื่อ } h, k, r \text{ เป็นตัวเลข}$$

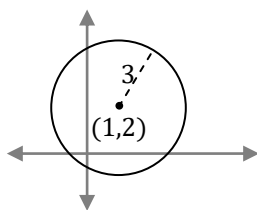
สูตร: จุดศูนย์กลาง = (h, k) และ รัศมี = r

เช่น

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

จุดศูนย์กลาง = $(1, 2)$

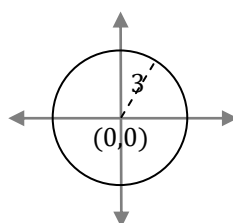
รัศมี = 3



$$x^2 + y^2 = 9$$

จุดศูนย์กลาง = $(0, 0)$

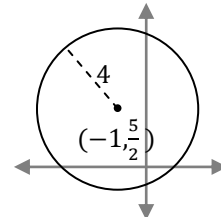
รัศมี = 3



$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = 16$$

จุดศูนย์กลาง = $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

รัศมี = 4



อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะไม่ใจดีบอกสมการในรูป $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ มาให้

แต่มักจะกระจายจนและไม่เหลือเค้าเดิม เป็น $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ก่อน ค่อยเอามาให้เรา

หน้าที่ของเราคือ ต้องจัดรูป $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ กลับไปเป็นรูปง่าย ๆ ก่อน ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. ถ้าจัด A กับ B ที่คูณอยู่กับ x^2 และ y^2 ด้วยการหารตลอด

ถ้าทำไม่ได้ แปลว่าสมการนี้ไม่ใช่กราฟวงกลม (จะทำได้เมื่อ $A \neq B$)

เช่น ถ้าโจทย์ให้สมการกราฟมาในรูป $3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 18 = 0$

เราจะเอา 3 หารตลอด เหลือ $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

แต่ $3x^2 + 2y^2 - 6x + 12y - 4 = 0 \rightarrow$ ไม่ใช่วงกลม เพราะ $3 \neq 2$

$2x^2 - 2y^2 - 18x + 6y - 2 = 0 \rightarrow$ ไม่ใช่วงกลม เพราะ $2 \neq -2$

2. จับกลุ่ม x ไว้ด้วยกัน จับกลุ่ม y ไว้ด้วยกัน กลุ่มที่เป็นตัวเลขแบบไม่มี x หรือ y ให้ย้ายไปอีกฝั่ง

เช่น ตัวอย่างจากข้อที่แล้ว $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$

จะได้เป็น $(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = -6$

3. เอากลุ่ม x และกลุ่ม y เข้าสูตร $n^2 \pm 2nl + l^2 = (n \pm l)^2$

โดยเติม l^2 ที่ขาดไปให้กับแต่ละกลุ่ม ทั้งสองข้างของสมการ

เช่น $x^2 - 6x$ จัดให้เข้าสูตร $n^2 - 2nl + l^2$ ได้เป็น $x^2 - 2(x)(3) + 3^2$ เติมเอง เพื่อให้เข้าสูตรได้

$y^2 + 2y$ จัดให้เข้าสูตร $n^2 + 2nl + l^2$ ได้เป็น $y^2 + 2(y)(1) + 1^2$ โดยเติมทั้งสองข้างของสมการ

จะได้

$$\begin{array}{rcl} (x^2 - 6x) & \xrightarrow{\text{เติม}} & (y^2 + 2y) \\ (x^2 - 2(x)(3) + 3^2) & + & (y^2 + 2(y)(1) + 1^2) = -6 \\ (x-3)^2 & + & (y+1)^2 = -6 + 3^2 + 1^2 \end{array}$$

นั่นคือ $3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 18 = 0$ จัดรูปได้เป็น $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$

ดังนั้น $3x^2 + 3y^2 - 18x + 6y + 18 = 0$ เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง คือ $(3, -1)$ และ รัศมี $= 2$

ตัวอย่าง จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 8 = 0$

วิธีทำ จัดรูปจะได้

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 8 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 &= 0 \\ (x^2 + 2x) + (y^2 - 4y) &= -4 \\ (x^2 + 2x + 1^2) + (y^2 - 4y + 2^2) &= -4 + 1^2 + 2^2 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้จุดศูนย์กลาง คือ $(-1, 2)$ และ รัศมี $= 1$

#

ตัวอย่าง จงหาจุดศูนย์กลางและรัศมีของวงกลม $4x^2 + 4y^2 + 4x - 15 = 0$

วิธีทำ จัดรูปจะได้

$$\begin{aligned} 4x^2 + 4y^2 + 4x - 15 &= 0 \\ \text{ข้อนี้กลุ่ม } y \text{ มีแค่ } y^2 \text{ ตัวเดียว} & \quad x^2 + y^2 + x - \frac{15}{4} = 0 \\ \text{แบบนี้ไม่ต้องเอา } y \text{ เข้าสูตร } n^2 + 2nl + l^2 & \quad (x^2 + x) + y^2 = \frac{15}{4} \quad \text{ถึงเป็นเศษส่วน ก็ยังทำเหมือนเดิม} \\ \left(x^2 + 2(x)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) + y^2 &= \frac{15}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= \frac{15}{4} + \frac{1}{4} \\ \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 4 \end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้จุดศูนย์กลาง คือ $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ และ รัศมี $= 2$

#

ตัวอย่าง วงกลมวงหนึ่ง มีสมการคือ $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ ถ้าวงกลมนี้มีจุดศูนย์กลางคือ $(-3, 2)$ และมีรัศมี 5 หน่วย แล้ว จงหาค่าของ C, D และ E

วิธีทำ วงกลมที่มี จุดศูนย์กลาง $(-3, 2)$ และมีรัศมี 5 หน่วย คือ $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 5^2$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 &= 25 \\ x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 &= 0 \end{aligned}$$

เทียบกับ $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$ จะได้ $C = 6, D = -4$ และ $E = -12$

#

แบบฝึกหัด

1. จงบอกจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมต่อไปนี้

1. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$

2. $(x + 2)^2 + y^2 = 2$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 5 = 0$

4. $x^2 + y^2 = 2y + 3$

5. $x^2 + y^2 + 2x + y - 1 = 0$

6. $4x^2 + 4y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

2. จงหาสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลาง $(1, -1)$ และมีรัศมียาว 3

3. จงหาสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลาง $(0, 2)$ และผ่านจุด $(1, 1)$

4. จงหาสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลาง $(0, 2)$ และมีเส้นตรง $x + y = 6$ เป็นเส้นสัมผัส

5. จงหาสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน X ซึ่งมีรัศมียาว 1 และมีเส้นตรง $3x + 4y = 4$ เป็นเส้นสัมผัส

6. จงหาสมการวงกลม ที่มีจุดศูนย์กลาง $(1, -1)$ และสัมผัสกับเส้นตรง l ซึ่งมีความชัน $= -\frac{1}{2}$ ที่ $x = 2$

7. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้าวงกลม $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $(2, 1)$ และมีเส้นตรง $x - y + 2 = 0$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลม แล้ว $|a + b + c|$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-7]

8. กำหนดให้วงกลมรูปหนึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(2, 1)$ ถ้าเส้นสัมผัสวงกลมที่จุด $x = 1$ เส้นหนึ่งมีความชันเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงกลมที่กำหนด [PAT 1 (มี.ค. 52)/16]
1. $(0, 1)$
 2. $(0, 2)$
 3. $(1, 0)$
 4. $(3, 0)$

9. กำหนดให้เส้นตรง ℓ_1 และ ℓ_2 สัมผัสวงกลม $(x - 5)^2 + y^2 = 20$ ที่จุด P และ Q ตามลำดับ และจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่บนเส้นตรงที่ผ่านจุด P และ Q ถ้า ℓ_1 มีสมการเป็น $x - 2y + 5 = 0$ แล้วจุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนเส้นตรง ℓ_2 [PAT 1 (ก.ค. 52)/14]
1. $(0, \frac{5}{2})$
 2. $(8, -1)$
 3. $(1, -8)$
 4. $(15, 0)$

10. ถ้าจุด (a, b) เป็นจุดบนเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 1)$ มากที่สุด

วงกลมที่มีจุด (a, b) เป็นจุดศูนย์กลางและสัมผัสแกน x ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 58)/11]

1. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$

2. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 16 = 0$

4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

11. กำหนดให้ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ และ

$$B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 10x - 10y + 49 = 0\}$$

ถ้า $p \in A$ และ $q \in B$ แล้ว ระยะทางมากที่สุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

[PAT 1 (ต.ค. 52)/1-9]

1. $5\sqrt{2}$ หน่วย

2. $2 + 5\sqrt{2}$ หน่วย

3. $2\sqrt{5}$ หน่วย

4. $5 + 2\sqrt{5}$ หน่วย

12. ให้ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $A(1, 3)$ มากที่สุด
จงหาระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง $3y - 4x = 15$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/6]

13. กำหนดให้ L เป็นเส้นตรงมีสมการเป็น $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ เมื่อ $a, b > 0$ และให้ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมสองวงที่ต่างกัน โดยที่มิตรัศมีเท่ากันและวงกลมทั้งสองวงต่างสัมผัสกับเส้นตรง L ที่จุดเดียวกัน ถ้าวงกลม C_1 มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ แล้วสมการของวงกลม C_2 คือข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 57)/8]

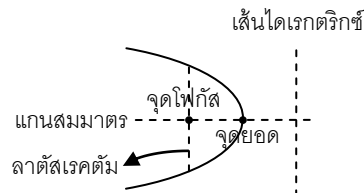
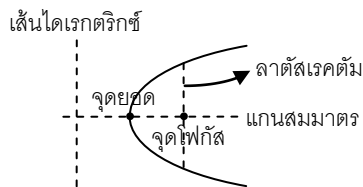
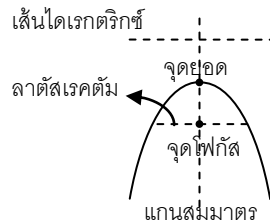
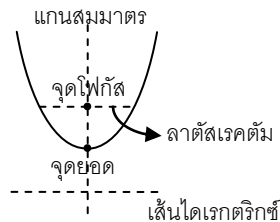
1. $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
2. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 3a^2b^2 = 0$
3. $(a^2 + b^2)^2(x^2 + y^2) - 4ab(a^2 + b^2)(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$
4. $(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - 4ab(bx + ay) + 5a^2b^2 = 0$

พาราโบลา

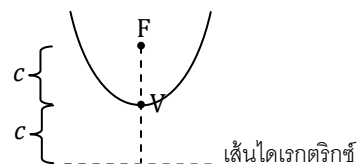
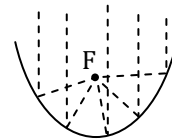
พาราโบลา จะมีรูปกราฟเป็นจานดาวเทียม

โดยเราจะได้เรียนพาราโบลา 4 แบบ คือ หางย คว้า ตะแคงขวา และ ตะแคงซ้าย

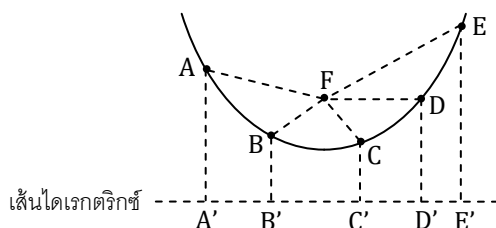
โดยคำศัพท์ สำหรับเรียกส่วนต่างๆของพาราโบลา จะมีดังนี้



- จุดยอด (V) คือ จุดที่พาราโบลากลับ
- แกนสมมาตร คือ แนวเส้นตรงที่ผ่าพาราโบลาเป็น 2 ส่วน เท่าๆกัน
- จุดโฟกัส (F) คือ จุดรวมลำแสงของจานดาวเทียม
กล่าวคือ ถ้ามีลำแสงพุ่งใส่พาราโบลาแบบตรงๆ มันจะสะท้อนไปที่จุดโฟกัสเสมอ
ด้วยเหตุนี้ ตัวรับสัญญาณของจานดาวเทียม จะวางไว้ที่จุดโฟกัสเสมอ
- ลาตัสเรคตัม คือ แกนที่ลากผ่านจุดโฟกัส ในแนวตั้งฉากกับแกนสมมาตร
- เส้นไดเรกทริกซ์ คือ แนวเส้นตรงที่เป็นฐานรองพาราโบลา
โดย “ระยะจากเส้นไดเรกทริกซ์ ถึง จุดยอด”
จะเท่ากับ “ระยะจากจุดยอด ถึง จุดโฟกัส” = c



สมบัติที่สำคัญอีกอันของพาราโบลา คือ “ทุกจุดบนพาราโบลา จะห่างจากจุดโฟกัส เท่ากับที่มันห่างจากเส้นไดเรกทริกซ์”
กล่าวคือ



$$\begin{aligned} AF &= AA' \\ BF &= BB' \\ CF &= CC' \\ DF &= DD' \\ EF &= EE' \end{aligned}$$

สมการกราฟของพาราโบลา จะมี 4 รูป ได้แก่

$$\left. \begin{array}{ll} \text{หงาย} & \rightarrow (x-h)^2 = 4c(y-k) \\ \text{คว่ำ} & \rightarrow (x-h)^2 = -4c(y-k) \end{array} \right\} \text{กำลังสองอยู่ที่ } x$$

$$\left. \begin{array}{ll} \text{ตะแคงขวา} & \rightarrow (y-k)^2 = 4c(x-h) \\ \text{ตะแคงซ้าย} & \rightarrow (y-k)^2 = -4c(x-h) \end{array} \right\} \text{กำลังสองอยู่ที่ } y$$

สังเกตว่า พาราโบลา จะมีกำลังสองที่ x หรือ y ตัวใดตัวหนึ่งเพียงตัวเดียวเท่านั้น
สูตรที่ต้องท่อง จะน้อยกว่ากราฟรูปอื่น

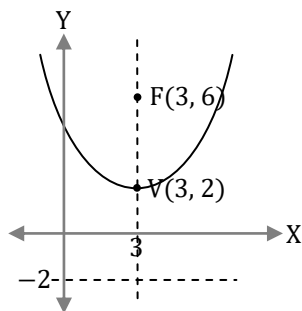
จุดยอด อยู่ที่ (h, k)

ระยะจากจุดโฟกัสถึงจุดยอด $= c =$ ระยะจากจุดยอดถึงเส้นไดเรกทริกซ์

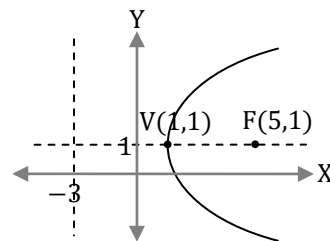
ความยาวลาตัสเรคตัม $= 4c$

เวลาตอบแกนสมมาตร กับเส้นไดเรกทริกซ์ เราจะตอบเป็นสมการเส้นตรง ในรูป $x = ?$ $\rightarrow$ เส้นแนวตั้ง
หรือ $y = ?$ $\rightarrow$ เส้นแนวนอน

เช่น



แกนสมมาตร: $x = 3$
เส้นไดเรกทริกซ์: $y = -2$



แกนสมมาตร: $y = 1$
เส้นไดเรกทริกซ์: $x = -3$

ตัวอย่าง จงหาจุดยอด จุดโฟกัส แกนสมมาตร เส้นไดเรกทริกซ์ ความยาวลาตัสเรคตัม พร้อมทั้งวาดรูปพาราโบลาซึ่งมีสมการกราฟ คือ $(y-1)^2 = -12(x+2)$

วิธีทำ สมการกราฟ อยู่ในรูปแบบ $(y-k)^2 = -4c(x-h)$ ดังนั้น เป็นพาราโบลาแบบตะแคงซ้าย

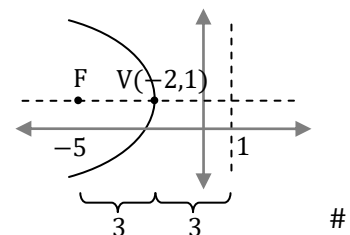
จะได้ $k = 1$, $c = 3$, และ $h = -2$ ดังนั้น จุดยอด คือ $V(-2, 1)$

ระยะจาก V ถึง F คือ $c = 3$ ดังนั้น จุดโฟกัส คือ $F(-5, 1)$

ระยะจาก V ถึง ไดเรกทริกซ์ คือ 3 ด้วย ดังนั้น ไดเรกทริกซ์ คือ $x = 1$

แกนสมมาตร คือ เส้นแนวนอนที่ผ่าน V ดังนั้น แกนสมมาตร คือ $y = 1$

และสุดท้าย ความยาวลาตัสเรคตัม $= 4c = 12$ หน่วย



ตัวอย่าง จงหาสมการของพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 2)$ และจุดโฟกัสอยู่ที่ $(0, -3)$

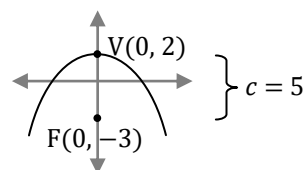
วิธีทำ จะเห็นว่าจุดโฟกัส อยู่ใต้จุดยอด ดังนั้น เป็นพาราโบลาคว่ำ ใช้รูปสมการ $(x-h)^2 = -4c(y-k)$

จุดยอด $= (h, k) = (0, 2)$ ดังนั้น $h = 0$ และ $k = 2$

จุดยอด ห่างจากจุดโฟกัส $= 2 - (-3) = 5$ ดังนั้น $c = 5$

ดังนั้น สมการคือ $(x-0)^2 = -4(5)(y-2)$

$$x^2 = -20(y-2)$$



แบบฝึกหัด

1. จงบอกลักษณะกราฟ (คำว่า หาย ตะแคงซ้าย ขวา) จุดยอด จุดโฟกัส แกนสมมาตร เส้นไดเรกตริกซ์ และความยาวลาตัสเรคตัม ของพาราโบลาต่อไปนี้

1. $y^2 = 12x$

2. $(x - 1)^2 = -4y$

3. $(y + 2)^2 = -8x - 8$

ในกรณีที่โจทย์ให้สมการกราฟใดๆ แบบ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ มา เราจะต้องจัดรูปให้สวยงามก่อน

อย่างไรก็ตาม ต้องรู้ก่อนว่ากราฟพาราโบลา จะมีแค่ตัวเดียวในระหว่าง x กับ y ที่มีสิทธิ์ถูกยกกำลังสอง

ตัวอย่างสมการกราฟพาราโบลา เช่น $x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$ (กำลังสองอยู่ที่ x)

หรือ $2y^2 - 3x + 12y + 24 = 0$ (กำลังสองอยู่ที่ y)

การจัดสมการให้อยู่ในรูปสวยงามๆ จะมีขั้นตอนดังนี้

1. จับกลุ่มตัวแปรที่มีกำลังสองไว้ฝั่งซ้าย ที่เหลือย้ายฝั่งขวาให้หมด

จากนั้น ดึงตัวตัวเลขที่คูณกับตัวกำลังสอง (ถ้ามี) ออกมานอกวงเล็บ

กำลังสองอยู่ที่ x

$$x^2 - 4x + 8y + 12 = 0$$

$$x^2 - 4x = -8y - 12$$

กำลังสองอยู่ที่ y

$$2y^2 - 3x + 12y + 24 = 0$$

$$2y^2 + 12y = 3x - 24$$

$$2(y^2 + 6y) = 3x - 24$$

2. เอาจุ่มตัวแปรกำลังสองทางฝั่งซ้าย เข้าสู่สูตร $n^2 \pm 2นล + ล^2 = (น \pm ล)^2$

โดยเติม $ล^2$ ที่ขาดไป ทั้งสองข้างของสมการ

$$\begin{array}{rcl} x^2 - 4x & = & -8y - 12 \\ x^2 - 2(x)(2) + 2^2 & = & -8y - 12 + 2^2 \\ (x - 2)^2 & = & -8y - 8 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{rcl} 2(y^2 + 6y) & = & 3x - 24 \\ 2(y^2 + 2(y)(3) + 3^2) & = & 3x - 24 + 2(3^2) \\ 2(y + 3)^2 & = & 3x - 6 \end{array} \right.$$

3. ดึงตัวเลขที่คูณตัวแปรทางขวาออก ย้ายข้างและจัดรูปให้เป็นแบบที่ต้องการ

$$\begin{array}{rcl} (x - 2)^2 & = & -8y - 8 \\ (x - 2)^2 & = & -8(y + 1) \\ (x - 2)^2 & = & -4(2)(y + 1) \end{array}$$

กราฟคือ, $V(2, -1), c = 2$

$$\begin{array}{rcl} 2(y + 3)^2 & = & 3x - 6 \\ 2(y + 3)^2 & = & 3(x - 2) \\ (y + 3)^2 & = & \frac{3}{2}(x - 2) \\ (y + 3)^2 & = & 4\left(\frac{3}{8}\right)(x - 2) \end{array}$$

กราฟตะแคงขวา, $V(2, -3), c = \frac{3}{8}$

ตัวอย่าง จงหาจุดยอด จุดโฟกัส แกนสมมาตร เส้นไคเรตริกซ์ ความยาวลาตัสเรคตัม พร้อมทั้งวาดรูปพาราโบลาซึ่งมี

สมการกราฟ คือ $x^2 + 2x - 4y - 7 = 0$

วิธีทำ จัดรูปก่อน จะได้

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 2x - 4y - 7 & = & 0 \\ x^2 + 2x & = & 4y + 7 \\ x^2 + 2(x) + 1 & = & 4y + 7 + 1 \\ (x + 1)^2 & = & 4y + 8 \\ (x + 1)^2 & = & 4(y + 2) \\ (x + 1)^2 & = & 4(1)(y + 2) \end{array}$$

สมการอยู่ในรูป $(x - h)^2 = 4c(y - k)$ ดังนั้น เป็นกราฟหงาย

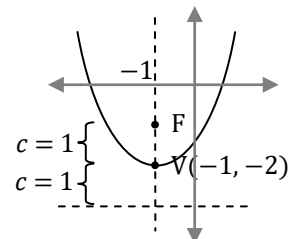
จะได้ $h = -1, c = 1, k = -2$ ดังนั้น จุดยอด คือ $V(-1, -2)$

ระยะจาก V ถึง F คือ $c = 1$ ดังนั้น จุดโฟกัส คือ $F(-1, -1)$

ระยะจาก V ถึง ไคเรตริกซ์ คือ 1 ด้วย ดังนั้น ไคเรตริกซ์ คือ $y = -3$

แกนสมมาตร คือ เส้นแนวตั้งที่ผ่าน V ดังนั้น แกนสมมาตร คือ $x = -1$

และสุดท้าย ความยาวลาตัสเรคตัม $= 4c = 4$ หน่วย



#

แบบฝึกหัด

2. จงบอกลักษณะกราฟ (คือ หาย ตะแคงซ้าย ขวา) จุดยอด จุดโฟกัส แกนสมมาตร เส้นไคเรตริกซ์ และความยาวลาตัสเรคตัม ของพาราโบลาต่อไปนี้

1. $x^2 + 4x + 8y - 4 = 0$

2. $2y^2 - x - 4y + 3 = 0$

3. $y = x^2 + 1$

3. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -2)$ และมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(3, -2)$

4. จงหาสมการพาราโบลาว่า ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 1)$ และมีลatus rectum ยาว 4 หน่วย

5. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(-4, -1)$ และมีเส้นไดเรกทริกซ์คือ $x = 2$

6. จงหาสมการพาราโบลา ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(2, 3)$ แกนสมมาตรขนานกับแกน Y และผ่านจุด $(4, 4)$
7. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ต.ค. 53)/8]
1. $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 23$ เป็นสมการวงกลมที่สัมผัสกับเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $21x + 20y + 168 = 0$
 2. $y^2 + 16x - 6y = 71$ เป็นสมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-5, 3)$ และจุดโฟกัสที่ $(-1, 3)$
8. ระยะทางจากโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -8x$ ไปยังเส้นตรง $2x + y = 6$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ก.ค. 52)/16]
9. ถ้าเส้นตรงหนึ่งผ่านจุดกำเนิดและจุดยอดของพาราโบลา $y^2 - 4y + 4x = 0$ และตัดเส้นโคเรกตริกซ์ที่จุด (a, b) แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (มี.ค. 52)/15]

10. พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-1, 0)$ และมีจุดกำเนิดเป็นโฟกัส ถ้าเส้นตรง $y = x$ ตัดพาราโบลาที่จุด P และจุด Q แล้วระยะทางระหว่างจุด P กับจุด Q เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-8]

11. วงกลม C มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีสมการเป็น $(x - 2)^2 = 8y$ โดยเส้นไทรแอกติริกซ์ของพาราโบลาคัดวงกลม C ที่จุด P และจุด Q ถ้าจุด R อยู่บนพาราโบลาและอยู่ห่างจากจุดโฟกัสเป็นระยะทาง 4 หน่วย แล้ว สามเหลี่ยม PQR มีพื้นที่เท่ากับเท่าไร [A-NET 50/1-8]

12. ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$ ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 2y - 6 = 0$ ณ จุด $(4, 3)$ แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (มี.ค. 56)/8]

1. $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$

2. $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$

3. $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$

4. $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

13. พาราโบลาที่มีจุดโฟกัส F อยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$ และมีจุดยอด V อยู่ที่จุดตัดของวงกลมกับแกน y ถ้า A และ B เป็นจุดบนพาราโบลาซึ่งส่วนของเส้นตรง $\overline{AB}$ ผ่านจุดโฟกัส F และตั้งฉากกับแกนของพาราโบลา แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม VAB เท่ากับกี่ตารางหน่วย [PAT 1 (มี.ค. 55)/8]

14. ให้วงกลม C มีสมการเป็น $x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 = 0$ เมื่อ $a > 0$ โดยระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม C ไปยังเส้นตรง $4x + 3y = 71$ เท่ากับ 14 หน่วย ถ้าพาราโบลารูปหนึ่ง มีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม C และมี $y = 7$ เป็นไดเรกตริกซ์ แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
[PAT 1 (ต.ค. 58)/10]

- | | |
|-----------------------------|-----------------------------|
| 1. $x^2 - 4x + 4y - 16 = 0$ | 2. $x^2 + 4x + 4y - 16 = 0$ |
| 3. $x^2 + 4x - 4y + 20 = 0$ | 4. $x^2 + 4x + 8y + 44 = 0$ |
| 5. $x^2 + 4x + 8y - 36 = 0$ | |

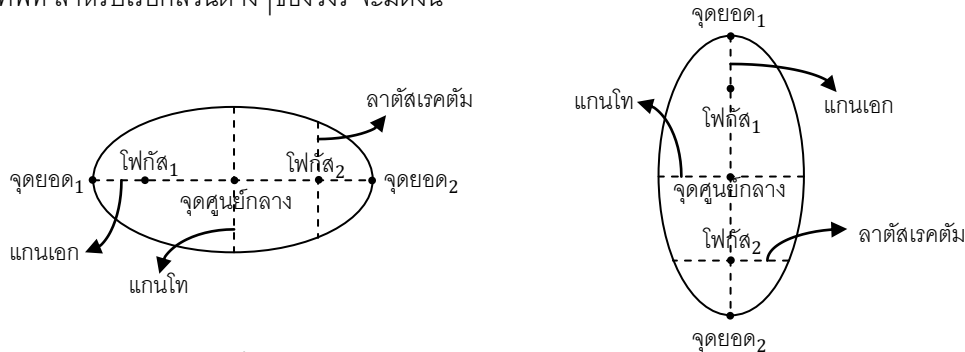
15. พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $A(-3, 2)$ มีแกนสมมาตรขนานแกน x และโฟกัส F อยู่บนเส้นตรง L ซึ่งมีสมการเป็น $4x - 3y + 14 = 0$ ถ้าพาราโบลานี้ตัดกับเส้นตรง L ที่จุด $B(a, b)$ โดยที่ $a > 0$ แล้ว จงหาพิกัดของจุด B [PAT 1 (ต.ค. 55)/32*]

16. ให้เส้นตรง $x - y + 2 = 0$ ตัดกับวงกลม $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 4 = 0$ ที่จุด A และจุด B ถ้า (a, b) เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลาซึ่งมีเส้นตรง $y = 2$ เป็นแกนของพาราโบลาและพาราโบลานี้ผ่านจุด A และจุด B แล้ว จงหาค่าของ $a + b$ [PAT 1 (มี.ค. 54)/8]

17. ให้ C เป็นวงกลมมีสมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ในควอดรนต์ (quadrant) ที่ 1 และวงกลม C สัมผัสแกน y ให้ P เป็นพาราโบลาที่มีสมการ $Dx = y^2 + Ey + F$ ผ่านจุด $(-4, -1)$ และระยะระหว่างจุดยอดกับโฟกัสเท่ากับ 1 หน่วย ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/11]
1. $D^2 + E^2 + F^2 = 133$
 2. เส้นตรง $4x + 3y - 7 = 0$ สัมผัสกับวงกลม C

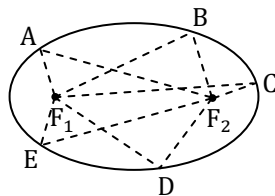
วงรี

กราฟวงรี จะมี 2 แบบ คือ รีแนวนอน กับรีแนวดิ่ง
โดยคำศัพท์ สำหรับเรียกส่วนต่างๆของวงรี จะมีดังนี้

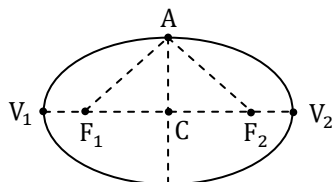


- จุดศูนย์กลาง คือ จุดที่อยู่ตรงกลางของวงรี
- แกนเอก คือ แกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง ตามแนวยาวของวงรี
- แกนโท คือ แกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง ในแนวตั้งฉากกับแกนเอก
- จุดยอด คือ จุดปลายแกนเอกทั้งสองจุด นิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ V_1 และ V_2
- จุดโฟกัส คือ จุดพิเศษ 2 จุด บนแกนเอก ที่มีสมบัติว่า ระยะจาก โฟกัส₁ ไป จุดไหนก็ได้บนวงรี ซึ่งกลับไปโฟกัส₂ จะมีความยาวเท่ากับแกนเอก เสมอ โดยเรานิยมแทนจุดโฟกัส ด้วยสัญลักษณ์ F_1 และ F_2

เช่น



$$\text{จะได้ } F_1A F_2 = F_1B F_2 = F_1C F_2 = F_1D F_2 = F_1E F_2 \\ = \text{ความยาวแกนเอก}$$



ในกรณีที่จุดบนวงรีคือจุดปลายแกนโท จะได้ $F_1A = AF_2$
ดังนั้น จะได้ $F_1A =$ ครึ่งความยาวแกนเอก
ซึ่งคนส่วนใหญ่มักจำว่า $F_1A = V_1C$

- ลาดัสเรคตัม คือ แกนที่ลากผ่านจุดโฟกัส ในแนวตั้งฉากกับแกนเอก

สมการกราฟของวงรี จะอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะรีแนวนอนหรือรีแนวดิ่ง ขึ้นกับ ตัวหาร x และ ตัวหาร y ว่าตัวไหนมีค่ามากกว่ากัน

ถ้าตัวหาร x มากกว่า จะรีแนวนอน แต่ถ้าตัวหาร y มากกว่า จะรีแนวดิ่ง

เช่น $\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} = 1 \quad \rightarrow \text{รีแนวนอน } \text{○}$

$\frac{(x+1)^2}{1^2} + \frac{(y-1)^2}{\sqrt{2}^2} = 1 \quad \rightarrow \text{รีแนวดิ่ง } \text{○}$

ปกติเราจะให้ “ a แทนตัวมาก” และ “ b แทนตัวน้อย” ดังนั้น

$$\text{รีแนวนอน} \rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{รีแนวดิ่ง} \rightarrow \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

สูตรที่ต้องท่อง คือ จุดศูนย์กลาง = (h, k)

ความยาวแกนเอก = $2a$ ความยาวแกนโท = $2b$ ความยาวลาตัสเรคตัม = $\frac{2b^2}{a}$

ระยะจากจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

ค่าความเยื้องศูนย์กลาง = $\frac{c}{a}$

ถ้าจะหาพิกัดของจุดอื่นๆ ก็ให้เริ่มจากจุดศูนย์กลาง แล้วดูว่าต้องขยับไปทางไหนเท่าไร

หมายเหตุ : ค่าความเยื้องศูนย์กลาง จะมีค่าในช่วง $(0, 1)$ เป็นค่าที่บอก “ระดับความรี”

ถ้า $\frac{c}{a}$ มีค่าใกล้ๆ 1 วงรีจะรีมาก $\rightarrow$ 

ถ้า $\frac{c}{a}$ มีค่าใกล้ๆ 0 วงรีจะไม่ค่อยรี $\rightarrow$ 

ตัวอย่าง จงวาดรูป พร้อมทั้งหาจุดยอด จุดโฟกัส จุดศูนย์กลาง ความยาวแกนเอกและแกนโท ความยาวลาตัสเรคตัม

และค่าความเยื้องศูนย์กลางของวงรี ซึ่งมีสมการกราฟ คือ $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$

วิธีทำ ตัวหาร x (คือ 3^2) มากกว่า ตัวหาร y (คือ 2^2) ดังนั้น เป็นวงรีแนวนอน ใช้สมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a = 3, b = 2, h = 2, k = -3$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง = $(h, k) = (2, -3)$

ความยาวแกนเอก = $2a = 2(3) = 6$

ความยาวแกนโท = $2b = 2(2) = 4$

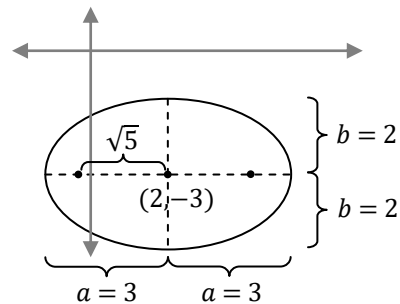
ความยาวลาตัสเรคตัม = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(2)^2}{3} = \frac{8}{3}$

ระยะจากศูนย์กลางถึงโฟกัส $c = \sqrt{a^2 - b^2}$
 $= \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

ความเยื้องศูนย์กลาง = $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

จุดยอด $\rightarrow$ เขยิบ $(2, -3)$ ไปซ้ายขวา 3 หน่วย = $(-1, -3)$ และ $(5, -3)$

จุดโฟกัส $\rightarrow$ เขยิบ $(2, -3)$ ไปซ้ายขวา $\sqrt{5}$ หน่วย = $(2 - \sqrt{5}, -3)$ และ $(2 + \sqrt{5}, -3)$ #



ตัวอย่าง วงรีวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางคือ $(-1, 0)$ แกนเอกซึ่งขนานกับแกน Y ยาว 10 หน่วย และแกนโทยาว 6 หน่วย

จงหาสมการวงรี พร้อมทั้งหาพิกัดของจุดยอดและจุดโฟกัส และวาดรูปกราฟ

วิธีทำ ข้อนี้ไม่ได้ให้สมการวงรีมา แต่ให้ส่วนประกอบต่างๆ มา แล้วให้เราหาสมการวงรี

จากสูตร ความยาวแกนเอก = $2a = 10$ ดังนั้น $a = 5$

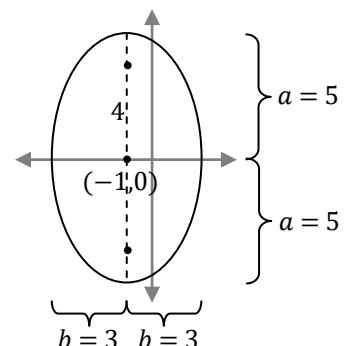
ความยาวแกนโท = $2b = 6$ ดังนั้น $b = 3$

ระยะจากศูนย์กลางถึงโฟกัส = $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$

จุดศูนย์กลาง = $(h, k) = (-1, 0)$ ดังนั้น $h = -1$ และ $k = 0$

แกนเอกขนานกับแกน Y แปลว่า รีแนวดิ่ง ดังนั้น a เป็นตัวหาร y

b เป็นตัวหาร x



ดังนั้น จะได้สมการกราฟ คือ $\frac{(x+1)^2}{3^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$

จุดยอด $\rightarrow$ เหยียบ $(-1, 0)$ ขึ้นลง 5 หน่วย $= (-1, 5)$ และ $(-1, -5)$

จุดโฟกัส $\rightarrow$ เหยียบ $(-1, 0)$ ขึ้นลง 4 หน่วย $= (-1, 4)$ และ $(-1, -4)$

#

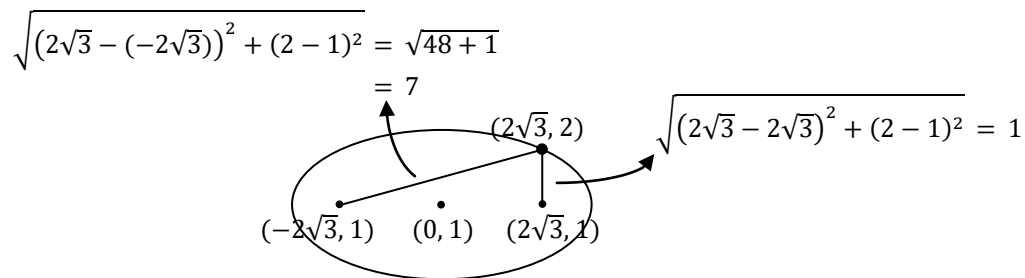
ตัวอย่าง วงรีวงหนึ่ง มีจุดโฟกัสคือ $(2\sqrt{3}, 1)$ และ $(-2\sqrt{3}, 1)$ ถ้าวงรีนี้ ผ่านจุด $(2\sqrt{3}, 2)$ จงหาสมการวงรี

วิธีทำ จุดโฟกัสทั้งสอง วางเรียงในแนวนอน ดังนั้น สรุปได้ว่าเป็นวงรีแนวนอน

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางวงรี จะต้องอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัส $(2\sqrt{3}, 1)$ และ $(-2\sqrt{3}, 1)$

ดังนั้น จุดศูนย์กลาง $= \left(\frac{2\sqrt{3} + (-2\sqrt{3})}{2}, \frac{1+1}{2} \right) = (0, 1)$ จะได้ $h = 0$ และ $k = 1$

และ จากสมบัติของวงรี ระยะจาก โฟกัส₁ ไปยังจุดบนวงรี แล้วซึ่งกลับมา โฟกัส₂ จะเท่ากับ ความยาวแกนเอก



ดังนั้น ความยาวแกนเอก $= 7 + 1 = 8 = 2a$ ดังนั้นจะได้ $a = 4$

และ จากรูปจะเห็นว่า จุดศูนย์กลาง $(0, 1)$ อยู่ห่างจากโฟกัสทั้งสอง $= 2\sqrt{3} = \sqrt{a^2 - b^2}$

แทนค่า $a = 4$ แล้วแก้สมการหา b จะได้ $2\sqrt{3} = \sqrt{4^2 - b^2}$
 $12 = 16 - b^2$
 $b^2 = 4$
 $b = 2, \cancel{2}$ $\rightarrow$ เป็น -2 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ความยาวแกนโทติดลบ

แทนค่า $a = 4$, $b = 2$, $h = 0$, $k = 1$ ในสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{4^2} + \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1$

#

แบบฝึกหัด

- จงบอกลักษณะกราฟ (แนวนอน แนวตั้ง) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ความยาวลาตัสเรคตัม และค่าความเยื้องศูนย์กลาง ของวงรีต่อไปนี้

- $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

$$2. \quad \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$3. \quad \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+2)^2}{5} = 1$$

$$4. \quad \frac{y^2}{2} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1$$

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะไม่ใช่ดีบอกสมการในรูป $\frac{(x-h)^2}{r^2} + \frac{(y-k)^2}{r^2} = 1$ มาให้

แต่โจทย์มักจะกระจายให้และจนไม่เหลือเค้าเดิม เป็น $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ก่อน ค่อยเอามาให้เรา
หน้าที่ของเราคือ ต้องจัดรูป $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ กลับไปเป็นรูป $\frac{(x-h)^2}{r^2} + \frac{(y-k)^2}{r^2} = 1$ ก่อน
ซึ่งมีขั้นตอนดังนี้

1. จับกลุ่ม x ไว้ด้วยกัน จับกลุ่ม y ไว้ด้วยกัน กลุ่มที่เป็นตัวเลขแบบไม่มี x หรือ y ให้ย้ายไปอีกฝั่ง
จากนั้น ดึงตัวตัวเลขที่คูณกับ x^2 กับ y^2 ออกมานอกวงเล็บ

เช่น ถ้าโจทย์ให้สมการกราฟมาในรูป $5x^2 + 4y^2 - 10x + 16y + 1 = 0$

เราจะจับกลุ่มใหม่ได้เป็น $(5x^2 - 10x) + (4y^2 + 16y) = -1$

ดึงตัวเลขที่คูณ x^2 กับ y^2 ออก $5(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) = -1$

- โดยเติม l^2 ที่ขาดไปให้กับแต่ละกลุ่ม ทั้งสองข้างของสมการ

สิ่งที่ต้องระวัง คือ คราวนี้ตัวที่เติมเข้าไปมี “ตัวคุณ” อยู่หน้าวงเล็บ

$$\begin{array}{lcl}
 \begin{array}{l}
 \uparrow 1^2 \text{ ที่เดิม มี 5 คูณอยู่} \\
 5(x^2 - 2x) \\
 5(x^2 - 2(x)(1) + 1^2) \\
 5(x-1)^2
 \end{array}
 & + &
 \begin{array}{l}
 \downarrow \text{เดิม} \\
 4(y^2 + 4y) \\
 4(y^2 + 2(y)(2) + 2^2) \\
 4(y+2)^2
 \end{array}
 \end{array}
 = -1$$

เดิม 1^2 ที่มี 5 คูณอยู่
กับ 2^2 ที่มี 4 คูณอยู่

$$\begin{array}{lcl}
 & & \swarrow \searrow \\
 & & -1 + 5(1^2) + 4(2^2) \\
 & & = 20
 \end{array}$$

- โดยเอาตัวเลขผังขวา หารตลอด เพื่อให้ผังขวากลายเป็น 1

$$\begin{aligned}
 5(x-1)^2 + 4(y+2)^2 &= 20 \\
 \frac{5(x-1)^2}{20} + \frac{4(y+2)^2}{20} &= 1 \\
 \frac{(x-1)^2}{\frac{20}{5}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{20}{4}} &= 1 \\
 \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{5} &= 1 \\
 \frac{(x-1)^2}{2^2} + \frac{(y+2)^2}{\sqrt{5}^2} &= 1
 \end{aligned}$$

หารตลอดด้วย 20
 เอา 5 กับ 4 ที่คูณอยู่ มุ่ดลงไปเป็นตัวหารของส่วน
 จัดให้เป็นรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

แกนเอกยาว $2\sqrt{5}$ และ แกนโทยาว 4 เป็นต้น

เติม l^2 แล้วเข้าสูตร $n^2 - 2nl + l^2$ จะได้

จากนั้น หารตลอดด้วย 84 แล้ว จัดรูปให้เป็น $\frac{(x-h)^2}{r^2} + \frac{(y-k)^2}{r^2} = 1$

$$\begin{array}{l|l} \frac{28\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{84} + \frac{12(y-3)^2}{84} = \frac{84}{84} & \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{3} + \frac{(y-3)^2}{7} = 1 \\ \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{84}{28}} + \frac{(y-3)^2}{\frac{84}{12}} = 1 & \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{(y-3)^2}{\sqrt{7}^2} = 1 \end{array}$$

ดังนั้น จะได้สมการที่จัดรูปแล้ว คือ $\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{(y-3)^2}{\sqrt{7}^2} = 1$

จะได้จุดศูนย์กลางวงรี คือ $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$

เนื่องจาก $\sqrt{7} > \sqrt{3}$ ดังนั้น เป็นวงรีแนวนอน โดย $a = \sqrt{7}$ และ $b = \sqrt{3}$

และจะได้ระยะจากจุดศูนย์กลาง ถึงโฟกัส $= \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{7 - 3} = \sqrt{4} = 2$

ดังนั้น จุดโฟกัส จะได้จากการเขยิบจุดศูนย์กลางขึ้นลง 2 หน่วย $= \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ กับ $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ #

แบบฝึกหัด

- จงบอกลักษณะกราฟ (แนวนอน แนวตั้ง) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ความยาวลาตัสเรคตัม และค่าความเยื้องศูนย์กลาง ของวงรีต่อไปนี้

- $9x^2 + 25y^2 + 36x - 150y + 36 = 0$

- $9x^2 + 4y^2 - 8y - 32 = 0$

3. $4x^2 + y^2 - 8 = 0$

3. จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$ มีแกนเอกซึ่งขนานกับแกน Y ยาว 6 และมีแกนโทยาว 4

4. จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 2)$ และผ่านจุด $(1, -1)$

5. จงหาสมการวงรี ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 1)$ มีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(3, 1)$ และผ่านจุด $(-4, 1)$

6. วงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลาง อยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรีที่มีสมการเป็น

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 24y + 36 = 0$$

ถ้าวงกลมนี้สัมผัสกับเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 3)$ และ $(5, 0)$ แล้ว รัศมีของวงกลมวงนี้เท่ากับเท่าไร

[A-NET 49/1-5]

7. กำหนดให้ วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(\pm 3, 0)$ และผ่านจุด $(2, \frac{\sqrt{21}}{2})$ จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนวงรีที่กำหนด

[PAT 1 (มี.ค. 52)/17]

1. $(-4, 0)$ 2. $(0, \frac{5\sqrt{2}}{2})$ 3. $(6, 0)$ 4. $(0, -3\sqrt{2})$

8. ให้พาราโบลารูปหนึ่ง มีสมการเป็น $y^2 - 4y + 40x - 236 = 0$ โดยมี V และ F เป็นจุดยอด และโฟกัสของพาราโบลาตามลำดับ ถ้าวงรีรูปหนึ่ง ผ่านจุด $(4, 6)$ และมีโฟกัสอยู่ที่ V และ F แล้วสมการของวงรีรูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 58)/11]

1. $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 140 = 0$ 2. $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y - 140 = 0$
 3. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$ 4. $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y - 180 = 0$
 5. $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 180 = 0$

9. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่ง ผ่านจุด $(8, 0)$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, -1)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, -1)$
ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดปลายของแกนโทของวงรีในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 1 และมีเส้นไดเรกทริกซ์
ทับกับแกนเอกของวงรี แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี [PAT 1 (มี.ค. 58)/19]
1. $x^2 - 8x + 4y + 13 = 0$
 2. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
 3. $x^2 - 8x + 6y - 12 = 0$
 4. $x^2 - 8x - 6y + 19 = 0$
10. ให้ $P(x, y)$ เป็นจุดใดๆ ในระนาบ ถ้าผลบวกของระยะทางจากจุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(0, -2)$ และระยะทางจาก
จุด $P(x, y)$ ไปยังจุด $(2, -2)$ เท่ากับ $2\sqrt{5}$ แล้ว จงหาสมการความสัมพันธ์ของ x และ y ใน $P(x, y)$
[PAT 1 (มี.ค. 57)/10*]
11. กำหนดให้วงรี E มีโฟกัสทั้งสองอยู่บนวงกลม C ซึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 1$ ถ้า E สัมผัสกับ C ที่จุด $(1, 0)$ และ
 $(-1, 0)$ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน E [PAT 1 (ก.ค. 52)/17*]
1. $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$
 2. $(\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$
 3. $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
 4. $(\frac{1}{3}, \frac{4}{3})$

12. วงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน x แกนโทอยู่บนแกน y ระยะระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 12 หน่วย ถ้าความยาวของคอร์ดที่ผ่านจุดโฟกัสหนึ่งและตั้งฉากกับแกนเอกของวงรี เท่ากับ 10 หน่วย แล้วสมการของวงรี คือข้อใดต่อไปนี้

[PAT 1 (มี.ค. 55)/7]

- | | |
|------------------------|-----------------------|
| 1. $5x^2 + 9y^2 = 405$ | 2. $9x^2 + 5y^2 = 81$ |
| 3. $5x^2 + 9y^2 = 225$ | 4. $9x^2 + 5y^2 = 20$ |

13. ถ้า k, l และ m เป็นจำนวนจริงที่ทำให้วงรี $kx^2 + ly^2 - 72x - 24y + m = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, 3)$ และสัมผัสแกน Y แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ผิด [A-NET 50/1-7]

1. ความยาวแกนเอกเท่ากับ 12 หน่วย
2. ความยาวแกนโทเท่ากับ 8 หน่วย
3. ระยะห่างระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ $4\sqrt{5}$ หน่วย
4. จุด $(2, 6)$ อยู่บนวงรี

14. แกนเอกของวงรีเป็นส่วนหนึ่งของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ กับวงกลม

$$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0 \text{ และโฟกัสจุดหนึ่งของวงรีอยู่บนเส้นตรง } x + 2\sqrt{3} = 0$$

สมการของวงรีตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 55)/11]

1. $x^2 + 4y^2 - 8x = 0$

2. $x^2 + 4y^2 + 24y + 20 = 0$

3. $4x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$

4. $4x^2 + y^2 - 32x + 48 = 0$

15. ให้ E เป็นวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน X, มีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, 1)$, สัมผัสเส้นตรง $x = 1$ และ $y = 3$ โดยมี

F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของ E ให้ C เป็นวงกลมที่มี $\overline{F_1F_2}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง

ถ้าวงรี E ตัดวงกลม C ที่จุด P, Q, R และ S แล้ว พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม PQRS มีค่าเท่ากับเท่าไร [A-NET 51/1-12]

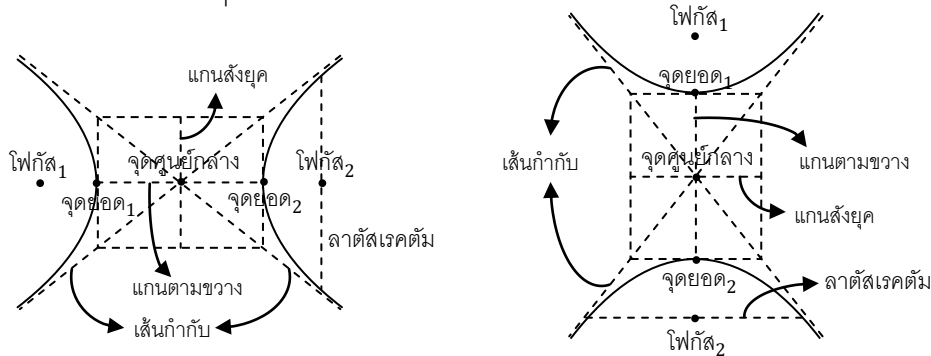
16. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$ เมื่อ $A > 1$ โดยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 1)$ และแกนเอกยาวเป็น 2 เท่าของแกนโท ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง [PAT 1 (เม.ย. 57)/9*]
1. $A + B + C = 0$
 2. ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
 3. วงรีมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ และแกนเอกยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม
 4. ผลบวกของระยะทางจากจุด $(2, 6)$ ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย
17. กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และมีโฟกัส F_1 และ F_2 อยู่บนแกน x จุด $A(4, 1)$ เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด $A(4, 1)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ $6\sqrt{2}$ ให้เส้นตรง L ตัดแกน x ที่จุด $(4.5, 0)$ และสัมผัสกับวงรีที่จุด $A(4, 1)$ ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด $(0, 0)$ กับเส้นตรง L แล้ว ค่าของ $d^2 |AF_1| |AF_2|$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/31]

ไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลา เป็นกราฟที่ประหลาดกว่ากราฟอื่นตรงที่มี 2 เส้น ใน 1 กราฟ

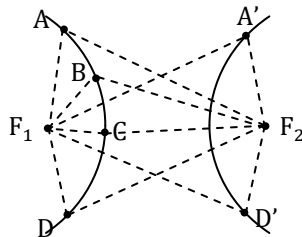
โดยเราจะได้เรียนไฮเพอร์โบลา 2 แบบ คือ แบบแนวนอน $\rightarrow$ $\left(\right)$ และ แบบแนวตั้ง $\left(\right)$

โดยคำศัพท์ สำหรับเรียกส่วนต่างๆของไฮเพอร์โบลา จะมีดังนี้



- จุดศูนย์กลาง คือ จุดที่อยู่ตรงกลางของไฮเพอร์โบลา
- เส้นกำกับ คือ แนวกากบาทที่กำกับเส้นกราฟไฮเพอร์โบลา
กล่าวคือ เส้นกราฟจะ “เฉียด” เข้าใกล้เส้นกำกับมากขึ้นเรื่อยๆ (แต่จะไม่แตะโดนเส้นกำกับ)
- จุดยอด คือ จุดที่ไฮเพอร์โบลาวกกลับ นิยมแทนด้วยสัญลักษณ์ V_1 และ V_2
- แกนตามขวาง คือ แกนที่ลากเชื่อมจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา
- แกนสลับยุค คือ แกนที่ลากผ่านจุดศูนย์กลาง ในแนวตั้งฉากกับแกนตามขวาง
- จุดโฟกัส คือ จุดพิเศษ 2 จุด ที่มีสมบัติว่า “ทุกจุดบนไฮเพอร์โบลา ถ้าเอาระยะทางไปจุดโฟกัสทั้งสองมาลบกัน จะได้ผลลบเท่ากับความยาวแกนตามขวางเสมอ” โดยเรานิยมแทนจุดโฟกัส ด้วยสัญลักษณ์ F_1 และ F_2

เช่น



$$\begin{aligned}
 AF_2 - AF_1 &= BF_2 - BF_1 \\
 &= CF_2 - CF_1 \\
 &= DF_2 - DF_1 \\
 &= A'F_1 - A'F_2 \\
 &= D'F_1 - DF_2 \\
 &= \text{ความยาวแกนตามขวาง}
 \end{aligned}$$

- ลาตัสเรคตัม คือ แกนที่ลากผ่านจุดโฟกัส ในแนวตั้งฉากกับแนวไฮเพอร์โบลา

สมการกราฟของไฮเพอร์โบลา จะคล้ายกับสมการกราฟของวงรี แต่เครื่องหมายตรงกลางจะเป็น “ลบ”

โดยจะเป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน หรือแนวตั้ง จะขึ้นกับว่าเป็นสมการแบบ “x ลบ y” หรือแบบ “y ลบ x”

ถ้าเป็น x ลบ y จะเป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน แต่ถ้าเป็น “y ลบ x” จะเป็นไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง

$$\begin{aligned}
 \text{เช่น } \frac{(x+1)^2}{3^2} - \frac{(y-2)^2}{4^2} &= 1 \quad \rightarrow \text{แนวนอน } \left(\right) \\
 \frac{(y-1)^2}{5^2} - \frac{(x-3)^2}{2^2} &= 1 \quad \rightarrow \text{แนวตั้ง } \left(\right)
 \end{aligned}$$

ปกติเราจะให้ “ a แทนตัวตั้ง” และ “ b แทนตัวลบ” ดังนั้น

$$\text{แนวนอน} \rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\text{แนวตั้ง} \rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

สูตรที่ต้องท่องคือ จุดศูนย์กลาง อยู่ที่ (h, k)

ความยาวแกนตามขวาง = $2a$ ความยาวแกนสังยุค = $2b$ ความยาวลาตัสเรคตัม = $\frac{2b^2}{a}$

ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางถึงจุดโฟกัส $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

ถ้าจะหาพิกัดของจุดอื่นๆ ก็ให้เริ่มจากจุดศูนย์กลาง แล้วดูว่าต้องขยับไปทางไหนเท่าไร

จะเห็นว่าสมการและสูตรของไฮเพอร์โบลา คล้ายๆ กับวงรี

ถ้าจะเทียบความคล้ายระหว่าง วงรี กับไฮเพอร์โบลา จะสรุปได้ดังนี้

วงรี	แกนเอก	แกนโท	a = ตัวมาก	b = ตัวน้อย	$c = \sqrt{a^2 - b^2}$
ไฮเพอร์โบลา	แกนตามขวาง	แกนสังยุค	a = ตัวตั้ง	b = ตัวลบ	$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

หมายเหตุ: ในวงรี แกนเอกจะยาวกว่าแกนโทเสมอ

แต่ในไฮเพอร์โบลา แกนตามขวาง จะยาวหรือจะสั้นกว่า แกนสังยุคก็ได้

“เส้นกำกับ” จะเป็นเส้นตรง 2 เส้น ไขว้กันเป็นกากบาท

วิธีตอบเส้นกำกับ ให้ตอบเป็นสมการเส้นตรง 2 สมการ

- $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะมีเส้นกำกับคือ $\frac{x-h}{a} = \frac{y-k}{b}$ และ $\frac{x-h}{a} = -\frac{y-k}{b}$
- $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$ จะมีเส้นกำกับคือ $\frac{y-k}{a} = \frac{x-h}{b}$ และ $\frac{y-k}{a} = -\frac{x-h}{b}$

หรือจะรวมเป็นสมการเดียวโดยใช้เครื่องหมาย $\pm$ ก็ได้ (เช่น $\frac{x-h}{a} = \pm \frac{y-k}{b}$)

หรือถ้าไม่ชอบเครื่องหมาย $\pm$ จะยกกำลังสองทั้งสองข้างเพื่อกำจัด $\pm$ เป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{(y-k)^2}{b^2}$ ก็ได้

สังเกตว่า ถ้าย้ายข้าง จะกลายเป็น $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$ เหมือนกับสมการไฮเพอร์โบลา ที่เปลี่ยน 1 เป็น 0 เลย

บางคนจึงนิยมจำว่า สมการเส้นกำกับ ได้จากการ “นำสมการไฮเพอร์โบลามาเปลี่ยน 1 ทางขวา เป็น 0”

ไฮเพอร์โบลาที่มีเส้นกำกับทั้งสองตั้งฉากกัน จะมีชื่อเรียกพิเศษว่า “ไฮเพอร์โบลามุมฉาก”

โดยเส้นกำกับทั้งสองจะตั้งฉากกันเมื่อ แกนตามขวางกับแกนสังยุคยาวเท่ากัน (นั่นคือ เมื่อ $a = b$)

ตัวอย่าง จงวาดรูป และหาส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการกราฟ คือ $\frac{(x+4)^2}{4} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

วิธีทำ สมการกราฟเป็นแบบ x ตั้ง ลบด้วย y ดังนั้น เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน

ใช้รูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้ $a = 2, b = 3, h = -4, k = 1$

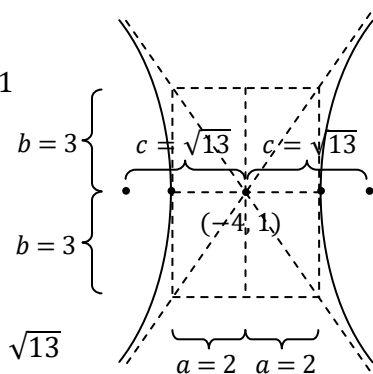
ดังนั้น จุดศูนย์กลาง = $(h, k) = (-4, 1)$

ความยาวแกนตามขวาง = $2a = 2(2) = 4$

ความยาวแกนสังยุค = $2b = 2(3) = 6$

ความยาวลาตัสเรคตัม = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(3)^2}{2} = 9$

ระยะจากศูนย์กลางถึงโฟกัส $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$



จุดยอด $\rightarrow$ เหยิบ $(-4, 1)$ ไปซ้ายขวา $a = 2$ หน่วย ได้ $(-6, 1)$ กับ $(-2, 1)$

จุดโฟกัส $\rightarrow$ เหยิบ $(-4, 1)$ ไปซ้ายขวา $c = \sqrt{13}$ หน่วย ได้ $(-4 - \sqrt{13}, 1)$ กับ $(-4 + \sqrt{13}, 1)$

สมการเส้นกำกับ คือ $\frac{x+4}{2} = \pm \frac{y-1}{3}$

ไฮเพอร์โบลานี้ไม่ใช่ไฮเพอร์โบลามุมฉาก เพราะ เส้นกำกับไม่ตั้งฉากกัน เนื่องจาก $a \neq b$

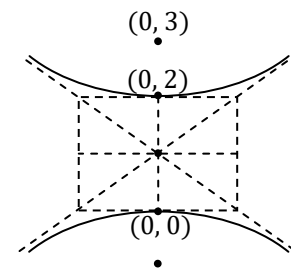
#

ตัวอย่าง จงหาสมการกราฟไฮเพอร์โบล่า ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, 2)$ และ $(0, 0)$ และมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(0, 3)$ พร้อมทั้งหาส่วนประกอบต่างๆ ของกราฟนี้

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดเรียงตัวในแนวตั้ง ดังนั้น ข้อนี้เป็นไฮเพอร์โบล่าแนวตั้ง ใช้รูปสมการ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

เราต้องใช้สิ่งที่โจทย์ให้ มาสืบหา h, k, a, b ให้ได้

- จุดยอดอยู่ที่ $(0, 2)$ กับ $(0, 0)$ ดังนั้น จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 1)$
ดังนั้น $h = 0, k = 1$
- จุดยอดอยู่ที่ $(0, 2)$ กับ $(0, 0)$ ดังนั้น แกนตามขวางยาว 2 หน่วย
แต่จากสูตร แกนตามขวางยาว $= 2a$ ดังนั้น $a = 1$
- จุดโฟกัส $(0, 3)$ อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลาง $(0, 1)$ อยู่ 2 หน่วย
ดังนั้น $c = 2$ แต่จากสูตร $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ จะได้ $2 = \sqrt{1^2 + b^2}$
 $4 = 1 + b^2$
 $3 = b^2$
 $b = \sqrt{3}$



ดังนั้น จะได้สมการไฮเพอร์โบล่า คือ $\frac{(y-1)^2}{1^2} - \frac{(x-0)^2}{\sqrt{3}^2} = 1$ หรือก็คือ $(y-1)^2 - \frac{x^2}{3} = 1$

จุดศูนย์กลาง $= (h, k) = (0, 1)$

ความยาวแกนตามขวาง $= 2a = 2(1) = 2$

ความยาวแกนสังยุค $= 2b = 2(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

ความยาวลาตัสเรคตัม $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2(\sqrt{3})^2}{1} = 6$

จุดยอด $\rightarrow$ เหยิบ $(0, 1)$ ขึ้นลง $a = 1$ หน่วย ได้เป็น $(0, 2)$ และ $(0, 0)$

จุดโฟกัส $\rightarrow$ เหยิบ $(0, 1)$ ขึ้นลง $c = 2$ หน่วย ได้เป็น $(0, 3)$ และ $(0, -1)$

สมการเส้นกำกับ คือ $y - 1 = \pm \frac{x}{\sqrt{3}}$

ไฮเพอร์โบลานี้ไม่ใช่ไฮเพอร์โบลามุมฉาก เพราะ เส้นกำกับไม่ตั้งฉากกัน เนื่องจาก $a \neq b$

#

แบบฝึกหัด

- จงบอกลักษณะกราฟ (แนวนอน แนวตั้ง) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรคตัม และสมการเส้นกำกับ ของไฮเพอร์โบล่า ต่อไปนี้

- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$2. \frac{(y+2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{5} = 1$$

$$3. y^2 - x^2 = 1$$

ในกรณีที่โจทย์ให้สมการในรูปแบบ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ มาให้ เราจะใช้วิธีจัดรูปแบบเดียวกับวงรี แต่คราวนี้ ระหว่าง A กับ B จะมีตัวหนึ่งเป็นลบ และตัวหนึ่งเป็นบวก

1. จับกลุ่ม x ไว้ด้วยกัน จับกลุ่ม y ไว้ด้วยกัน กลุ่มที่เป็นตัวเลขแบบไม่มี x หรือ y ให้ย้ายไปอีกฝั่ง จากนั้น ดึงตัวตัวเลขที่คูณกับ x^2 กับ y^2 ออกมานอกวงเล็บ

เช่น ถ้าโจทย์ให้สมการกราฟมาในรูปแบบ $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$

เราจะจับกลุ่มใหม่ได้เป็น $(3x^2 - 12x) + (-4y^2 - 8y) = -20$

ดึงตัวเลขที่คูณ x^2 กับ y^2 ออก $3(x^2 - 4x) - 4(y^2 + 2y) = -20$

2. เอากลุ่ม x และกลุ่ม y เข้าสูตร $n^2 \pm 2นล + ล^2 = (น \pm ล)^2$

โดยเติม $ล^2$ ที่ขาดไปให้กับแต่ละกลุ่ม ทั้งสองข้างของสมการ

สิ่งที่ต้องระวังเพิ่มขึ้นจากตอนทำวงรี คือ คราวนี้ตัวที่เติมเข้าไป อาจจะมี “เลขติดลบ” คุณอยู่นั่นวงเล็บด้วย ดังนั้น ต้องเติม เครื่องหมาย บวก หรือ ลบ ที่คุณอยู่นั่นวงเล็บ เข้าไปให้เหมือนกันทางฝั่งขวาด้วย ดังนี้

$$\begin{array}{rcl}
 3(x^2 - 4x) & \xrightarrow{\text{เติม}} & -4(y^2 + 2y) \\
 3(x^2 - 2(x)(2) + 2^2) & \xrightarrow{\text{เติม}} & -4(y^2 + 2(y)(1) + 1^2) \\
 3(x-2)^2 & & -4(y+1)^2
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{เติม } 2^2 \text{ ที่มี } 3 \text{ คูณอยู่} \\
 \text{กับ } 1^2 \text{ ที่มี } -4 \text{ คูณอยู่}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 = -20 \\
 = -20 + 3(2^2) - 4(1^2) \\
 = -12
 \end{array}$$

3. สุดท้าย เอาตัวเลขฝั่งขวา หารตลอด เพื่อให้ฝั่งขวากลายเป็น 1 แล้วจัดสมการให้เข้ารูปไฮเพอร์โบลา ดังนี้

$$\begin{array}{l}
 \text{หารตลอดด้วย } -12 \quad \left\{ \begin{array}{l} 3(x-2)^2 - 4(y+1)^2 = -12 \\ \frac{3(x-2)^2}{-12} - \frac{4(y+1)^2}{-12} = 1 \\ -\frac{3(x-2)^2}{12} + \frac{4(y+1)^2}{12} = 1 \end{array} \right. \\
 \text{กลับตัวลบไว้ข้างหลัง} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{3(x-2)^2}{12} - \frac{4(y+1)^2}{12} = 1 \end{array} \right.
 \end{array}
 \quad
 \left|
 \quad
 \begin{array}{l}
 \frac{(y+1)^2}{\frac{12}{4}} - \frac{(x-2)^2}{\frac{12}{3}} = 1 \\
 \frac{(y+1)^2}{3} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \\
 \frac{(y+1)^2}{\sqrt{3}^2} - \frac{(x-2)^2}{2^2} = 1
 \end{array}
 \right.$$

ดังนั้น $3x^2 - 4y^2 - 12x - 8y + 20 = 0$ เป็นไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง ที่มีจุดศูนย์กลาง $= (2, -1)$

แกนตามขวางยาว $2\sqrt{3}$ และ แกนสังยุคยาว 4 เป็นต้น

ตัวอย่าง จงวาดรูป และหาส่วนประกอบต่างๆของไฮเพอร์โบลา ซึ่งมีสมการกราฟ คือ $x^2 - y^2 - 4y - 8 = 0$

วิธีทำ จัดรูปก่อน จะได้

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 - 4y - 8 &= 0 \\ (x^2) + (-y^2 - 4y) &= 8 \\ (x^2) - (y^2 + 4y) &= 8 \\ (x^2) - (y^2 + 2(y)(2) + 2^2) &= 8 + -(2^2) \\ (x)^2 - (y + 2)^2 &= 4 \\ \frac{(x)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{4} &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน ที่ $h = 0, k = -2, a = 2, b = 2$

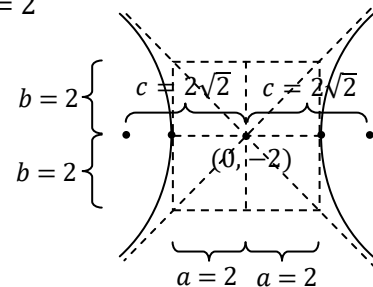
จะได้ จุดศูนย์กลางคือ $= (h, k) = (0, -2)$

ความยาวแกนตามขวาง $= 2a = 2(2) = 4$

ความยาวแกนสังยุค $= 2b = 2(2) = 4$

ความยาวลาตัสเรคตัม $= \frac{2(2)^2}{2} = 4$

ระยะจากศูนย์กลางถึงโฟกัส $c = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$



จุดยอด $\rightarrow$ เขยิบ $(0, -2)$ ไปซ้ายขวา $a = 2$ หน่วย ได้ $(2, -2)$ กับ $(-2, -2)$

จุดโฟกัส $\rightarrow$ เขยิบ $(0, -2)$ ไปซ้ายขวา $c = 2\sqrt{2}$ หน่วย ได้ $(2\sqrt{2}, -2)$ กับ $(-2\sqrt{2}, -2)$

สมการเส้นกำกับ คือ $\frac{x^2}{4} = \pm \frac{(y+2)^2}{4}$ จัดให้เป็นรูปอย่างง่าย ได้ $x^2 = \pm(y+2)^2$

ไฮเพอร์โบลานี้ เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก เพราะ เส้นกำกับตั้งฉากกัน เนื่องจาก $a = b$

#

แบบฝึกหัด

2. จงบอกลักษณะกราฟ (แนวนอน แนวตั้ง) จุดศูนย์กลาง จุดยอด จุดโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค ความยาวลาตัสเรคตัม และสมการเส้นกำกับ ของไฮเพอร์โบลา ต่อไปนี้

1. $x^2 - y^2 + 2y - 3 = 0$

2. $4x^2 - y^2 - 16x - 2y + 11 = 0$

3. $9x^2 - 16y^2 + 18x - 64y + 89 = 0$

3. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(2, 0)$ และ $(-2, 0)$ และมีแกนสังยุคยาว 6

4. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 5)$ และ $(1, -1)$ และมีจุดโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, -3)$

5. จงหาสมการของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่ $(1, 1)$ และ $(1, -3)$ และผ่านจุด $(4, 3)$

6. วงรี และ ไฮเพอร์โบลามี จุดศูนย์กลางร่วมกันที่จุด $(0,0)$ และมีจุดยอดจุดเดียวกัน ถ้าวงรีมีโฟกัสจุดหนึ่งเป็น $(0, 2\sqrt{15})$ ตัดแกน x ที่จุด $(-2, 0)$ ถ้าไฮเพอร์โบลามีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรี แล้วจงหาสมการของไฮเพอร์โบล่า

7. กำหนดให้ $16y^2 - 9x^2 + 36x + 32y + 124 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบล่า
ให้ L เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(0, 0)$ และจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้
ผลบวกของระยะจากโฟกัสทั้งสองไปยังเส้นตรง L เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/10]

8. กำหนดให้ E เป็นวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุดยอดของไฮเพอร์โบล่า $x^2 - y^2 = 1$
ถ้า E ผ่านจุด $(0, 1)$ แล้ว จงในข้อต่อไปนี้อยู่บน E [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-10]

1. $(1, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ 2. $(1, \sqrt{2})$ 3. $(1, -\frac{1}{2})$ 4. $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$

9. กำหนดวงกลมรูปหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่บนจุดศูนย์กลางและจุดโฟกัสด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $9x^2 - 16y^2 - 90x + 64y + 17 = 0$ แล้ววงกลมดังกล่าวมีพื้นที่เท่ากับเท่าไร
[PAT 1 (ก.ค. 53)/8]

10. ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 54)/9]

1. ไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 25y^2 + 24x - 100y - 164 = 0$ มีจุดยอดอยู่ที่จุดยอดของวงรี $4x^2 + 25y^2 + 24x + 100y + 36 = 0$ และมีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรี
2. วงรี $4x^2 + 25y^2 + 24x + 100y + 36 = 0$ มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนพาราโบลา $y^2 + 4y - 4x + 12 = 0$

1. $(2, \frac{1}{8})$ 2. $(-1, \frac{1}{2})$ 3. $(3, \frac{1}{2})$ 4. $(4, \frac{1}{4})$

1. $4y + 15 = 0$ 2. $4y + 9 = 0$ 3. $4x + 9 = 0$ 4. $4x + 15 = 0$

1. $(x - 3)^2 = 4(y - 2)$
2. $(x - 3)^2 = 8(y - 1)$
3. $(x - 2)^2 = 4(y - 2)$
4. $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$

14. กำหนดให้ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 - y^2 - 2x = 0$ ถ้าพาราโบลาที่มีโฟกัสเป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดตัดของเส้นตรง $y = 2x$ กับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา และมีเส้นไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลา แล้วจงหาสมการพาราโบลาในรูป $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$ [PAT 1 (มี.ค. 57)/9]

15. กำหนดให้ $y^2 - 2x^2 + 8x - 6 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ให้เส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่จุด A และจุด B เมื่อจุด B อยู่ทางขวามือของจุด A และเส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุด P และจุด Q เมื่อจุด Q อยู่ทางขวามือของจุด P สมการของวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด P และจุด Q โฟกัสของวงรีอยู่ที่จุด A และจุด B มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (พ.ย. 57)/10]

1. $2x^2 + y^2 - 8x + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$

2. $2x^2 + y^2 - 8x - 2\sqrt{2}y + 8 = 0$

3. $x^2 + 2y^2 - 4x - 4\sqrt{2}y + 6 = 0$

4. $x^2 + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 6 = 0$

16. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $25x^2 + 21y^2 + 100x - 42y - 404 = 0$ แล้วไฮเพอร์โบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรีและผ่านจุด $(-3, 1 + \sqrt{8})$ มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/8]
1. $5y^2 - 4x^2 - 10\sqrt{8}y - 32x - 25 = 0$
 2. $3y^2 - 2x^2 - 6\sqrt{8}y - 8x + 15 = 0$
 3. $y^2 - 4x^2 - 2y - 16x - 19 = 0$
 4. $y^2 - 7x^2 - 2y - 28x - 28 = 0$

17. ให้ F เป็นโฟกัสของพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมบัติดังนี้
- (ก) แกนตามขวางขนานแกน y
 - (ข) จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ F
 - (ค) โฟกัสหนึ่งของไฮเพอร์โบลา คือ $(3, 2 + 2\sqrt{13})$
 - (ง) แกนสังยุคยาว 12 หน่วย
- แล้ว จงหาสมการไฮเพอร์โบลาในรูป $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ [PAT 1 (เม.ย. 57)/8]

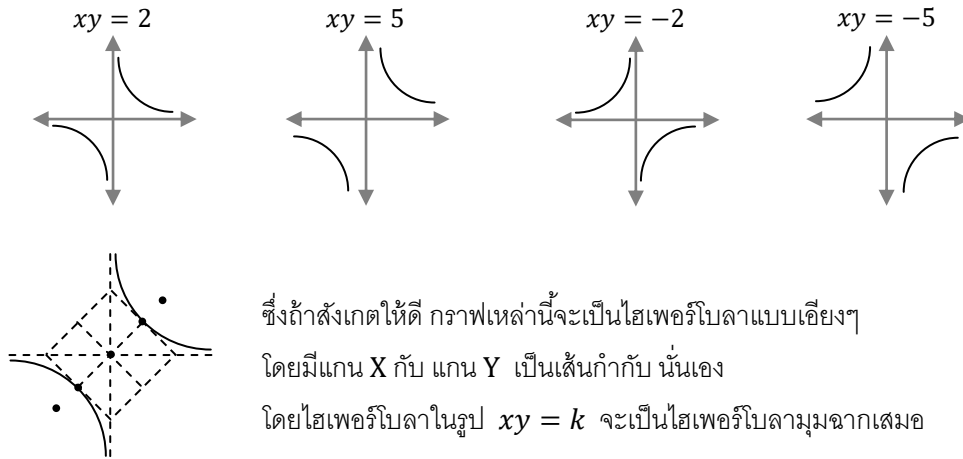
18. ถ้าเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $16x^2 - 9y^2 + 32x + 36y = 164$ ตัดแกน X ที่จุด x_1, x_2 แล้ว ระยะระหว่าง x_1, x_2 ยาวกี่หน่วย [A-NET 50/2-2]

19. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ ถ้าจุด $A(6, k)$ เมื่อ $k > 0$ เป็นจุดอยู่บนเส้นกำกับของ H และ F_1, F_2 เป็นโฟกัสของ H แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม AF_1F_2 เท่ากับเท่าไร [A-NET 49/1-6]

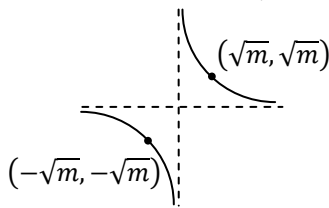
20. ถ้า $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey = 21$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีแกนตามขวางขนานแกน x มีเส้นตรง $2x - y + 1 = 0$ เป็นเส้นกำกับ (asymtote) เส้นหนึ่ง และมีจุด $(1 + 2\sqrt{5}, 3)$ เป็นโฟกัสจุดหนึ่ง แล้วค่าของ $A^2 + B^2 + D^2 + E^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 58)/40]

ไฮเพอร์โบลาแบบเอียง

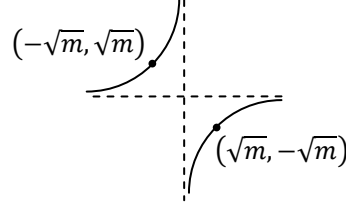
นอกจากนี้ เรายังต้องรู้ว่า สมการในรูป $xy = \pm m$ (เมื่อ m เป็นตัวเลขอะไรก็ได้) ก็เป็นไฮเพอร์โบลาด้วย ในเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน เราได้เห็นกราฟของสมการ $xy = \pm m$ ไปแล้ว ดังนี้



$xy = m$ จะมีจุดยอดอยู่ที่ $(\sqrt{m}, \sqrt{m})$ และ $(-\sqrt{m}, -\sqrt{m})$



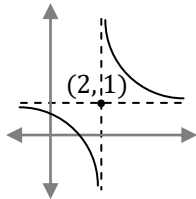
$xy = -m$ จะมีจุดยอดอยู่ที่ $(-\sqrt{m}, \sqrt{m})$ และ $(\sqrt{m}, -\sqrt{m})$



นอกจากนี้ เรายังสามารถ “เลื่อน” ไฮเพอร์โบลาได้ด้วย โดย $(x-h)(y-k) = \pm m$ จะมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และมีเส้นกำกับ คือ $x = h$ และ $y = k$ โดยทุกจุดบนกราฟ จะมี พิกัด $x =$ พิกัด x เดิม $+ h$
พิกัด $y =$ พิกัด y เดิม $+ k$

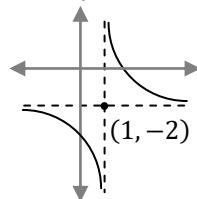
เช่น

$$(x-2)(y-1) = 1$$



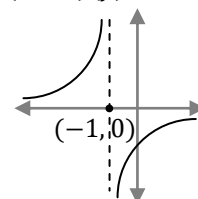
จุดศูนย์กลาง $(2, 1)$
จุดยอด $(3, 2), (1, 0)$
เส้นกำกับ $x = 2$ และ $y = 1$

$$(x-1)(y+2) = 2$$



จุดศูนย์กลาง $(1, -2)$
จุดยอด $(1 + \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2})$
 $(1 - \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2})$
เส้นกำกับ $x = 1$ และ $y = -2$

$$(x+1)(y) = -2$$



จุดศูนย์กลาง $(-1, 0)$
จุดยอด $(-1 - \sqrt{2}, \sqrt{2})$
 $(-1 + \sqrt{2}, -\sqrt{2})$
เส้นกำกับ $x = -1$ และ $y = 0$

แบบฝึกหัด

1. จงวาดกราฟของไฮเพอร์โบลต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอกจุดยอด และ สมการเส้นกำกับ

1. $xy = 4$

2. $(x - 1)(y - 2) = -1$

3. $(x + 2)(y - 1) = 2$

4. $y + 1 = -\frac{4}{x}$

รูปทั่วไปของภาคตัดกรวย

จากที่เรียนมาทั้งหมด จะเห็นว่า วงกลม วงรี พาราโบลา และไฮเพอร์โบลา ต่างก็มีสมการรูปทั่วไปแบบเดียวกัน คือ $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ ซึ่งจะมีวิธีดูในเบื้องต้น ว่าสมการดังกล่าว เป็นกราฟอะไรดังนี้

$A = 0$ และ $B = 0$	→ เส้นตรง
$A = 0$ หรือ $B = 0$ อย่างใดอย่างหนึ่ง	→ พาราโบลา
$A = 0$ แต่ $B \neq 0$ → ตะแคงซ้าย ขวา	
$A \neq 0$ แต่ $B = 0$ → ค่ำ หนาย	
$A = B \neq 0$	→ วงกลม
$A \neq B$ แต่ A กับ B มีเครื่องหมายเหมือนกัน	→ วงรี
$A \neq B$ และ A กับ B มีเครื่องหมายต่างกัน	→ ไฮเพอร์โบลา

เช่น $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 5 = 0$	→ $A = B = 1$	→ วงกลม
$x^2 - y^2 + 2 = 0$	→ $A = 1, B = -1$	→ ไฮเพอร์โบลา
$-2x^2 - 2y^2 + 4x + 8y + 2 = 0$	→ $A = B = -2$	→ วงกลม
$-2x^2 - 3y^2 + 5x + y + 2 = 0$	→ $A = -2, B = -3$	→ วงรี
$3x^2 - 4x + 4y + 2 = 0$	→ $B = 0$	→ พาราโบลา ค่ำ หนาย
$-x^2 + 2y^2 + 2 = 0$	→ $A = -1, B = 2$	→ ไฮเพอร์โบลา
$2y^2 + 2x - 5 = 0$	→ $A = 1, B = 2$	→ พาราโบลา ตะแคง
$x^2 + 2y^2 + 2 = 0$	→ $A = 1, B = 2$	→ วงรี

แบบฝึกหัด

1. จงระบุว่าสมการต่อไปนี้ เป็นกราฟอะไร

- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 = 1$ | 2. $x^2 - y^2 = 1$ |
| 3. $x^2 - y = 1$ | 4. $x^2 + y^2 = 2$ |
| 5. $3x^2 + 2y^2 = 1$ | 6. $3x^2 - 2x + 2y^2 = 1$ |
| 7. $y^2 + 2x - 1 = 0$ | 8. $(x - 2)^2 = 2y^2 + 1$ |
| 9. $x^2 - 2y + 2x + 5 = 0$ | 10. $3x^2 - x = 3y^2 + 2$ |

2. จุด $P(x, y)$ เป็นจุดที่เคลื่อนที่บนระนาบ ซึ่งเคลื่อนที่โดยทำให้ ผลคูณของความชันของเส้นตรงที่ผ่าน P และ $A(-2, 1)$ กับความชันของเส้นตรงที่ผ่าน P และ $B(4, 5)$ มีค่าเท่ากับ 3 เสมอ จงหาสมการเส้นโค้งที่เกิดจากการเคลื่อนที่ของ P พร้อมทั้งระบุว่ากราฟนี้เป็นกราฟชนิดใด

3. กำหนดให้ $S = [-2, 2]$ และ $r = \{(x, y) \in S \times S \mid x^2 + 2y^2 = 2\}$
ช่วงในข้อต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $D_r - R_r$ [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-6]

1. $(-1.4, -1.3)$ 2. $(-1.3, -1.2)$ 3. $(1.2, 1.4)$ 4. $(1.4, 1.5)$

4. กำหนดให้ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$
 $B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 < 1\}$
 $C = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 > 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบ [A-NET 51/1-10]

1. $A - B = A$ 2. $B - C = B$
3. $B \cap (A \cup C) = \emptyset$ 4. $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

5. กำหนดให้ $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 17\}$

$$A = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

$$B = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 = 1\}$$

ถ้า $p \in S \cap A$ และ $q \in S \cap B$ แล้วระยะทางน้อยสุดที่เป็นไปได้ระหว่างจุด p และ q เท่ากับเท่าไร

[PAT 1 (ก.ค. 52)/15]

6. กำหนดให้ $A = \{a \mid \text{เส้นตรง } y = ax \text{ ไม่ตัดกราฟ } y^2 = 1 + x^2\}$

และ $B = \{b \mid \text{เส้นตรง } y = x + b \text{ ตัดกราฟ } y^2 = 1 - x^2 \text{ สองจุด}\}$

เซต $\{d \mid d = c^2, c \in B - A\}$ เท่ากับช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/14]

1. $(0, 1)$

2. $(0, 2)$

3. $(1, 2)$

4. $(0, 4)$

วงกลม

1. 1. $(2, -1), 2$ 2. $(-2, 0), \sqrt{2}$ 3. $(2, -3), 2\sqrt{2}$ 4. $(0, 1), 2$
5. $(-1, -\frac{1}{2}), \frac{3}{2}$ 6. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{1}{2}$
2. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$ 3. $x^2 + (y-2)^2 = 2$
4. $x^2 + (y-2)^2 = 8$ 5. $(x-3)^2 + y^2 = 1, (x+\frac{1}{3})^2 + y^2 = 1$
6. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

ให้จุดสัมผัส คือจุด $(2, k)$

เนื่องจาก รัศมี จะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส ที่จุดสัมผัส ดังนั้น ความชันรัศมี $\times$ ความชันเส้นสัมผัส $= -1$

$$\begin{aligned} \text{รัศมี จาก } (1, -1) \text{ ไปจุดสัมผัส } (2, k) \text{ จะมีความชัน} &= \frac{k-(-1)}{2-1} = k+1 \text{ จะได้สมการ } (k+1) \times -\frac{1}{2} = -1 \\ &\quad k+1 = 2 \\ &\quad k = 1 \end{aligned}$$

จะได้จุดสัมผัสคือ $(2, 1)$ ดังนั้น รัศมียาว $\sqrt{(2-1)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5}$

แทนใน $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ จะได้สมการวงกลม คือ $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$

7. 5.5 8. 1 9. 4 10. 1
11. 2 12. 3 13. 2

พาราโบลา

1. 1. ตะแคงขวา; $V(0, 0); F(3, 0); y=0; x=-3; 12$
2. ค่ำ; $V(1, 0); F(1, -1); x=1; y=1; 4$
3. ตะแคงซ้าย; $V(-1, -2); F(-3, -2); y=-2; x=1; 8$
2. 1. ค่ำ; $V(-2, 1); F(-2, -1); x=-2; y=3; 8$
2. ตะแคงขวา; $V(1, 1); F(\frac{9}{8}, 1); y=1; x=\frac{7}{8}; \frac{1}{2}$
3. หาย; $V(0, 1); F(0, \frac{5}{4}); x=0; y=\frac{3}{4}; 1$
3. $(y+2)^2 = 8(x-1)$ 4. $x^2 = -4(y-1)$
5. $(y+1)^2 = -12(x+1)$ 6. $(x-2)^2 = 4(y-3)$
7. - 8. $2\sqrt{5}$ 9. 6 10. 8
11. 8 12. 4 13. 18 14. 5
15. $(1, 6)$ 16. $\frac{5}{4}$ 17. 1, 2

วงรี

1. 1. แนวนอน; $C(0, 0); V(\pm 3, 0); F(\pm\sqrt{5}, 0); 6; 4; \frac{8}{3}; \frac{\sqrt{5}}{3}$
2. แนวตั้ง; $C(0, 0); V(0, \pm 5); F(0, \pm 4); 10; 6; \frac{18}{5}; \frac{4}{5}$

3. แนวตั้ง; $C(1, -2)$; $V(1, -2 \pm \sqrt{5})$; $F(1, -2 \pm 2)$; $2\sqrt{5}$; 2 ; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$; $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
4. แนวนอน; $C(2, 0)$; $V(2 \pm 2, 0)$; $F(2 \pm \sqrt{2}, 0)$; 4 ; $2\sqrt{2}$; 2 ; $\frac{\sqrt{2}}{2}$
2. 1. แนวนอน; $C(-2, 3)$; $V(-2 \pm 5, 3)$; $F(-2 \pm 4, 3)$; 10 ; 6 ; $\frac{18}{5}$; $\frac{4}{5}$
2. แนวตั้ง; $C(0, 1)$; $V(0, 1 \pm 3)$; $F(0, 1 \pm \sqrt{5})$; 6 ; 4 ; $\frac{8}{3}$; $\frac{\sqrt{5}}{3}$
3. แนวตั้ง; $C(0, 0)$; $V(0, \pm 2\sqrt{2})$; $F(0, \pm \sqrt{6})$; $4\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$; $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$
4. $\frac{3x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$
5. $\frac{x^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{7} = 1$
6. $\frac{3}{5}$
7. 1
8. 3
9. 4
10. $4x^2 + 5y^2 - 8x + 20y + 4 = 0$
11. 4
12. 1
13. 4
14. 2
15. $\frac{48}{5}$
16. 4
17. 162

ไฮเพอร์โบลา

1. 1. แนวนอน; $C(0, 0)$; $V(\pm 2, 0)$; $F(\pm \sqrt{13}, 0)$; 4 ; 6 ; 9 ; $\frac{x}{2} = \pm \frac{y}{3}$
2. แนวตั้ง; $C(1, -2)$; $V(1, -2 \pm 2)$; $F(1, -2 \pm 3)$; 4 ; $2\sqrt{5}$; 5 ; $\frac{y+2}{2} = \pm \frac{x-1}{\sqrt{5}}$
3. แนวตั้ง; $C(0, 0)$; $V(0, \pm 1)$; $F(0, \pm \sqrt{2})$; 2 ; 2 ; 2 ; $y = \pm x$
2. 1. แนวนอน; $C(0, 1)$; $V(\pm \sqrt{2}, 1)$; $F(\pm 2, 1)$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $2\sqrt{2}$; $x = \pm(y-1)$
2. แนวนอน; $C(2, -1)$; $V(2 \pm 1, -1)$; $F(2 \pm \sqrt{5}, -1)$; 2 ; 4 ; 8 ; $x-2 = \pm \frac{y+1}{2}$
3. แนวตั้ง; $C(-1, -2)$; $V(-1, -2 \pm 3)$; $F(-1, -2 \pm 5)$; 6 ; 8 ; $\frac{32}{3}$; $\frac{y+2}{3} = \pm \frac{x+1}{4}$
3. $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$
4. $\frac{(y-2)^2}{3^2} - \frac{(x-1)^2}{4^2} = 1$
5. $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{3} = 1$
6. $\frac{y^2}{8^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$

จากแนวจุดศูนย์กลาง กับ จุดโฟกัส จะได้ว่าเป็นวงรีแนวตั้ง มี $c = 2\sqrt{15}$

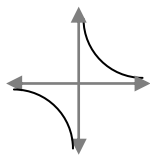
ตัดแกน x ที่จุด $(-2, 0) \rightarrow b = 2 \rightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2} = 8$

ไฮเพอร์โบลา จะมี a, b เท่าวงรี $\rightarrow$ ตอบ $\frac{y^2}{8^2} - \frac{x^2}{2^2} = 1$

7. $2\sqrt{5}$
8. 1
9. $\frac{25\pi}{4}$
10. 1, 2
11. 4
12. 4
13. 1
14. $9x^2 + 6x + 12y + 5 = 0$
15. 3
16. 3
17. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$
18. 3
19. 40
20. 117

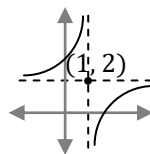
ไฮเพอร์โบลาแบบเอียง

1. 1.



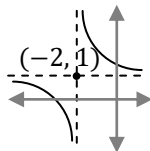
จุดศูนย์กลาง $(0, 0)$
 จุดยอด $(2, 2), (-2, -2)$
 เส้นกำกับ $x = 0$ และ $y = 0$

2.



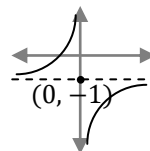
จุดศูนย์กลาง $(1, 2)$
 จุดยอด $(0, 3), (2, 1)$
 เส้นกำกับ $x = 1$ และ $y = 2$

3.



จุดศูนย์กลาง $(-2, 1)$
 จุดยอด $(-2 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$
 $(-2 - \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$
 เส้นกำกับ $x = -2$ และ $y = 1$

4.



จุดศูนย์กลาง $(0, -1)$
 จุดยอด $(-2, 1), (2, -3)$
 เส้นกำกับ $x = 0$ และ $y = -1$

รูปทั่วไปของภาคตัดกรวย

1. 1. วงกลม

2. ไฮเพอร์โบลา

3. พาราโบลาคว่ำหงาย 4. วงกลม

5. วงรี

6. วงรี

7. พาราโบลาตะแคง 8. ไฮเพอร์โบลา

9. พาราโบลาคว่ำหงาย 10. ไฮเพอร์โบลา

2. $\frac{y-1}{x+2} \cdot \frac{y-5}{x-4} = 3$; ไฮเพอร์โบลาแนวนอน

3. 4

4. 4

5. $3\sqrt{2} - 4$

6. 3

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Wasitthirawat Krailoet

และ คุณ Sirichai Wiriyajaree

และ คุณ Wabut Thongbor

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ