จำนวน
เชิงซ้อน

math center
27 Nov 2018

สารบัญ

หน่วยจินตภาพ

ตอน ม.4 เราได้เรียนเรื่องจำนวนจริงมาแล้ว โดยจำนวนจริง ก็คือ จำนวนที่มีอยู่จริง บนเส้นจำนวน
ในเรื่องนี้ เราจะรู้จักจำนวนอีกประเภท เรียกว่า “จำนวนจินตภาพ” ซึ่งเป็นจำนวนที่ “ไม่มีอยู่จริง” แต่เรา “สมมติให้มี”
โดยเรื่องนี้ จะสมมติว่ามีจำนวนที่เรียกว่า i ซึ่งมีสมบัติว่า $\mathrm{i}^2 = -1$ (หนังสือบางเล่ม อาจกล่าวว่า $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ ก็ได้)
เราเรียกชื่อของ i แบบเป็นทางการว่า “หน่วยจินตภาพ”

โจทย์ยอดฮิตในเรื่องนี้ คือ การคำนวณค่า i^n เมื่อ n เป็นจำนวนนับ ซึ่งจะมีวิธีคำนวณดังนี้

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{i}^1 & = \mathrm{i} & & \\
\mathrm{i}^2 & = -1 & & \\
\mathrm{i}^3 & = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i} & = (-1)(\mathrm{i}) & = -\mathrm{i} \\
\mathrm{i}^4 & = \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^2 & = (-1)(-1) & = 1
\end{array}$$

เนื่องจาก $\mathrm{i}^4 = 1$ ดังนั้น i^5 เป็นต้นไป จะวนกลับการที่รูปแบบเดิม

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{i}^5 & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} & = (1)(\mathrm{i}) & = \mathrm{i} \\
\mathrm{i}^6 & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^2 & = (1)(-1) & = -1 \\
\mathrm{i}^7 & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^3 & = (1)(-\mathrm{i}) & = -\mathrm{i} \\
\mathrm{i}^8 & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 & = (1)(1) & = 1 \\
\mathrm{i}^9 & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} & = (1)(1)(\mathrm{i}) & = \mathrm{i} \\
\mathrm{i}^{10} & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^2 & = (1)(1)(-1) & = -1 \\
\mathrm{i}^{11} & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^3 & = (1)(1)(-\mathrm{i}) & = -\mathrm{i} \\
\mathrm{i}^{12} & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 & = (1)(1)(1) & = 1 \\
\mathrm{i}^{13} & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i} & = (1)(1)(1)(\mathrm{i}) & = \mathrm{i} \\
\mathrm{i}^{14} & = \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^4 \cdot \mathrm{i}^2 & = (1)(1)(1)(-1) & = -1 \\
\ldots & & &
\end{array}$$

จะเห็นว่าผลการยกกำลัง i^n จะวนซ้ำเดิมทุกๆ 4 ตัว คือ i , -1 , $-\mathrm{i}$ และ 1
โดยผลลัพธ์จะเป็นเท่าไรนั้น ขึ้นกับว่า n หารด้วย 4 เหลือเศษเท่าไร ดังนี้

$$\mathrm{i}^n = \begin{cases} \mathrm{i} & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 2} \\ -\mathrm{i} & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ เหลือเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ 4 หาร } n \text{ ลงตัว} \end{cases}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ i^{2555}

วิธีทำ 2555 หารด้วย 4 เหลือเศษ 3
ดังนั้น $\mathrm{i}^{2555} = \mathrm{i}^3 = -\mathrm{i}$ #

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \ldots + \mathrm{i}^{2555}$

วิธีทำ เนื่องจาก i^n จะวนซ้ำเดิมทุกๆ 4 ตัว คือ $\mathrm{i}, -1, -\mathrm{i},$ และ 1
และบังเอิญ 4 ตัวนี้ บวกกันได้ $(\mathrm{i}) + (-1) + (-\mathrm{i}) + (1) = 0$ หักกันหมด
นั่นคือ $\mathrm{i}^1 + \mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^3 + \mathrm{i}^4 = 0$ และ $\mathrm{i}^5 + \mathrm{i}^6 + \mathrm{i}^7 + \mathrm{i}^8 = 0$ และ $\mathrm{i}^9 + \mathrm{i}^{10} + \mathrm{i}^{11} + \mathrm{i}^{12} = 0$ ไปเรื่อยๆ

ดังนั้น ถ้าจะหา $i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2555}$ แค่คิดรอบสุดท้าย ก่อนถึง 2555 ก็พอ

เนื่องจาก 2552 เป็นตัวสุดท้ายที่หารด้วย 4 ลงตัว

ดังนั้น $i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2555} = (0) + (0) + (0) + \ldots + (0) + i^{2553} + i^{2554} + i^{2555}$

$= (i) + (-1) + (-i) = -1$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. i^{11}
2. i^{29}
3. i^{82}
4. i^{2072}
5. $i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{52}$
6. $i^1 + i^2 + i^3 + \ldots + i^{2955}$
7. $i^{68} + i^{69} + i^{70} + \ldots + i^{321}$
8. $i^1 \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot \ldots \cdot i^{20}$
9. $i^1 + i^3 + i^5 + \ldots + i^{21}$
10. $i^1 - i^2 + i^3 - i^4 + \ldots - i^{40}$

จำนวนเชิงซ้อน

"จำนวนเชิงซ้อน" คือ จำนวนที่ประกอบด้วยทั้งจำนวนจริง และจำนวนจินตภาพ

โดยเราจะสามารถเขียน จำนวนเชิงซ้อน ในรูป $\underbrace{a}_{\text{ส่วนจริง}} + \underbrace{b\mathrm{i}}_{\text{ส่วนจินตภาพ}}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริง ได้เสมอ

- เรียก a ว่า "ส่วนจริง" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Re}(a + b\mathrm{i})$
- เรียก b ว่า "ส่วนจินตภาพ" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\mathrm{Im}(a + b\mathrm{i})$

เช่น $\mathrm{Re}(1 + 3\mathrm{i}) = 1$ $\quad$ $\mathrm{Re}(4\mathrm{i} - 3) = -3$

$\mathrm{Im}(5 - 2\mathrm{i}) = -2$ $\quad$ $\mathrm{Im}(3) = 0$

ถ้าส่วนจริงเท่ากับ 0 เราจะเรียกว่า "จำนวนจินตภาพแท้"

ถ้าส่วนจินตภาพเป็น 0 เราจะเรียกว่า "จำนวนจริง"

หมายเหตุ: ในเรื่องนี้ เรานิยมใช้ z เป็นตัวแปร แทนจำนวนเชิงซ้อน

และเราสามารถใช้สัญลักษณ์ (a, b) แทน $a + b\mathrm{i}$ ได้

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $z = (-2, 1)$ จงหา $\mathrm{Re}(z)$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนเชิงซ้อน $(-2, 1)$ ก็คือ $-2 + \mathrm{i}$ นั่นเอง

ดังนั้น $\mathrm{Re}(z) = -2$ #

จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน จะ "เท่ากัน" ได้ ต้องมีทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพเหมือนกัน

นั่นคือ $a + b\mathrm{i} = c + d\mathrm{i}$ ก็เมื่อ $a = c$ และ $b = d$ เท่านั้น

อย่างไรก็ตาม จำนวนเชิงซ้อน<u>ไม่มี</u>สมบัติการเทียบมากกว่าน้อยกว่า

นั่นคือ เราจะไม่สามารถบอกได้ว่า $2 - \mathrm{i}$ กับ $1 + \mathrm{i}$ อันไหนมากกว่ากัน

จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน บวก/ลบกัน ให้เอาส่วนจริง บวก/ลบ ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ บวก/ลบ ส่วนจินตภาพ เช่น

$$(3 + 2\mathrm{i}) + (1 - 4\mathrm{i}) = 4 - 2\mathrm{i}$$
$$(1 + \mathrm{i}) - (3\mathrm{i} - 2) = 1 + \mathrm{i} - 3\mathrm{i} + 2 = 3 - 2\mathrm{i}$$
$$2(\mathrm{i} - 1) - 3(-\mathrm{i} + 2) = 2\mathrm{i} - 2 + 3\mathrm{i} - 6 = -8 + 5\mathrm{i}$$

จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวน คูณกัน ให้กระจายเหมือนกระจายพหุนาม เช่น

$$\begin{aligned}(3 + 2\mathrm{i})(1 - 4\mathrm{i}) &= 3 - 12\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 8\mathrm{i}^2 \\ &= 3 - 12\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + 8 \\ &= 11 - 10\mathrm{i}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2 + \mathrm{i})^3 &= (2 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \\ &= (4 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} + \mathrm{i}^2)(2 + \mathrm{i}) \\ &= (4 + 2\mathrm{i} + 2\mathrm{i} - 1)(2 + \mathrm{i}) \\ &= (3 + 4\mathrm{i})(2 + \mathrm{i}) \\ &= 6 + 3\mathrm{i} + 8\mathrm{i} + 4\mathrm{i}^2 \\ &= 6 + 3\mathrm{i} + 8\mathrm{i} - 4 \\ &= 2 + 11\mathrm{i}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริง และ $(x+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})-(3-\mathrm{i}) = 3+y\mathrm{i}-x\mathrm{i}$ แล้วจงหาค่าของ x และ y

วิธีทำ ข้อนี้ ต้องจัดให้อยู่ในรูปอย่างง่าย แล้วสรุปว่าส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพ

$$\begin{aligned}
(x+2\mathrm{i})(1+\mathrm{i})-(3-\mathrm{i}) &= 3+y\mathrm{i}-x\mathrm{i} \\
x+x\mathrm{i}+2\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2-(3-\mathrm{i}) &= 3+y\mathrm{i}-x\mathrm{i} \\
x+x\mathrm{i}+2\mathrm{i}-2-3+\mathrm{i} &= 3+y\mathrm{i}-x\mathrm{i} \\
x-5+x\mathrm{i}+3\mathrm{i} &= 3+y\mathrm{i}-x\mathrm{i} \\
(x-5)+(x+3)\mathrm{i} &= 3+(y-x)\mathrm{i}
\end{aligned}$$

ส่วนจริงต้องเท่ากัน จะได้ $x-5 = 3$ ดังนั้น $x=8$

ส่วนจินตภาพต้องเท่ากัน จะได้

$$\begin{aligned}
x+3 &= y-x \\
8+3 &= y-8 \\
19 &= y
\end{aligned}$$

ดังนั้น จะได้คำตอบคือ $x=8$ และ $y=19$ #

แบบฝึกหัด

1. จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1. $(1+2\mathrm{i})+(2-3\mathrm{i})$
   2. $(\mathrm{i}-2)-(3-2\mathrm{i})$
   3. $\mathrm{i}(\mathrm{i}+1)(\mathrm{i}+2)$
   4. $(2\mathrm{i}-1)^3$
   5. $(1+\mathrm{i})^4$
   6. $(1-\mathrm{i})^{10}$

2. จงหาค่า $a, b \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นจริง
   1. $a+2\mathrm{i} = 2+b\mathrm{i}$
   2. $a+b\mathrm{i}-2a\mathrm{i} = b+1+\mathrm{i}+a\mathrm{i}$

3. $a - \mathrm{i} = b\mathrm{i}$

4. $a\mathrm{i} + b = a^2 + b^2$

5. $(a + \mathrm{i})^2 = 8 + b\mathrm{i}$

3. ถ้า $(1 + bi)^3 = -107 + ki$ เมื่อ b, k เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ แล้วค่าของ $|k|$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/48]

สังยุค และการหาร

"สังยุคของ z" แทนด้วยสัญลักษณ์ $\bar{z}$ หมายถึง การเปลี่ยนเครื่องหมายส่วนจินตภาพ เป็นตรงข้าม

เช่น สังยุคของ $2+3\mathrm{i}$ $= \overline{2+3\mathrm{i}}$ $= 2-3\mathrm{i}$

สังยุคของ $3-5\mathrm{i}$ $= \overline{3-5\mathrm{i}}$ $= 3+5\mathrm{i}$

สังยุคของ $\mathrm{i}-3$ $= \overline{\mathrm{i}-3}$ $= -\mathrm{i}-3$

สังยุคของ $-\frac{3}{2}\mathrm{i}+5$ $= \overline{-\frac{3}{2}\mathrm{i}+5}$ $= \frac{3}{2}\mathrm{i}+5$

สังยุคของ $2\mathrm{i}$ $= \overline{2\mathrm{i}}$ $= -2\mathrm{i}$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $z = 2+\mathrm{i}$ จงหาค่าของ $z+\bar{z}$ และ $z\cdot\bar{z}$

<u>วิธีทำ</u> จะได้ $\bar{z} = 2-\mathrm{i}$

ดังนั้น $z+\bar{z} = (2+\mathrm{i})+(2-\mathrm{i}) = 4$

และ $z\cdot\bar{z} = (2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = 4-\mathrm{i}^2 = 5$ #

$(\text{น}+\text{ล})(\text{น}-\text{ล}) = \text{น}^2-\text{ล}^2$

จากตัวอย่างที่ผ่านมา จะเห็นว่า ถ้านำ z กับ $\bar{z}$ มาบวกหรือคูณกัน ส่วนจินตภาพจะตัดกันหายไปหมดเสมอ

กล่าวคือ $(a+b\mathrm{i})+(a-b\mathrm{i}) = 2a$

และ $(a+b\mathrm{i})\cdot(a-b\mathrm{i}) = a^2-b^2\mathrm{i}^2 = a^2+b^2$

ซึ่งเราจะใช้สมบัตินี้ในการคำนวณ "ผลหาร" ของจำนวนเชิงซ้อน

ในการหาผลหาร $z_1 \div z_2$ เราจะเปลี่ยนรูปการหาร ให้เป็นเศษส่วน $\frac{z_1}{z_2}$

แล้วคูณทั้งเศษและส่วน ด้วย สังยุคของ z_2

เช่น $(2+\mathrm{i})\div(1-\mathrm{i}) = \frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$

$$= \frac{2+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}\times\frac{1+\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

$$= \frac{2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}+\mathrm{i}^2}{1^2-\mathrm{i}^2} = \frac{2+2\mathrm{i}+\mathrm{i}-1}{1+1} = \frac{1+3\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$$

ปกติแล้ว นักคณิตศาสตร์จะ "ไม่ชอบให้ตัวส่วนติด i" ด้วย (คล้ายๆกับที่ไม่ชอบให้ตัวส่วนติดรูท)

ดังนั้น ถ้าคำตอบเป็นเศษส่วน ต้องกำจัด i ในตัวส่วนด้วยการคูณเศษและส่วนด้วยสังยุค ก่อนตอบเสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาอินเวอร์สการคูณ ของ $2-\mathrm{i}$

<u>วิธีทำ</u> อินเวร์สการคูณ คือ ตัวที่มาคูณแล้วหักกันเป็นเอกลักษณ์การคูณ $(=1)$

จะได้คำตอบ คือ $\frac{1}{2-\mathrm{i}}$ นั่นเอง แต่ก่อนตอบ ต้องทำส่วนให้ไม่ติด i ก่อน

จะได้ $\frac{1}{2-\mathrm{i}} = \frac{1}{2-\mathrm{i}}\times\frac{2+\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} = \frac{2+\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}^2} = \frac{2+\mathrm{i}}{5}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่าของ $\frac{1+i}{i-1}-\frac{i}{i+2}$

<u>วิธีทำ</u> $\frac{1+i}{i-1}-\frac{i}{i+2} = \frac{(1+i)(i+2)-(i)(i-1)}{(i-1)(i+2)}$

$= \frac{(i+2+i^2+2i)-(i^2-i)}{i^2+2i-i-2} = \frac{(i+2-1+2i)-(-1-i)}{-1+2i-i-2} = \frac{i+2-1+2i+1+i}{-1+2i-i-2} = \frac{2+4i}{-3+i}$

จะเห็นว่าตัวส่วน มี i อยู่ ต้องกำจัด i โดยคูณทั้งเศษและส่วนด้วยสังยุค

จะได้ $\frac{2+4i}{-3+i}\times\frac{-3-i}{-3-i}=\frac{-6-2i-12i-4i^2}{9+3i-3i-i^2}=\frac{-6-2i-12i+4}{9+3i-3i+1}=\frac{-2-14i}{10}=-\frac{2}{10}-\frac{14}{10}i=-\frac{1}{5}-\frac{7}{5}i$ #

สมบัติที่สำคัญของ $\bar{z}$ มีดังนี้

- สังยุคซ้อน 2 ครั้ง จะกลับไปได้เท่าเดิม ($\bar{\bar{z}} = z$)
- สังยุค สามารถกระจายใน บวก ลบ คูณ หาร ยกกำลัง ได้

$\overline{z+w} = \bar{z}+\bar{w}$ $\quad$ $\overline{z\cdot w} = \bar{z}\cdot\bar{w}$ $\quad$ $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$

$\overline{z-w} = \bar{z}-\bar{w}$ $\quad$ $\overline{(z\div w)} = \bar{z}\div\bar{w}$ $\quad$ $\overline{(z^{-1})} = (\bar{z})^{-1}$

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $z_1 = 2-3i$ และ $z_2 = 4+5i$ จงหาค่าของ $\overline{z_1+\overline{z_2}}$

<u>วิธีทำ</u> ลุยแจกสังยุคเข้าไปก่อน จะได้ไม่ต้องคิดสังยุคหลายรอบ

$\overline{z_1+\overline{z_2}} = \overline{z_1}+z_2 = 2+3i+4+5i = 6+8i$ #

<u>ตัวอย่าง</u> ให้ $z_1\overline{z_2} = 3+i$ จงหาค่าของ $\overline{z_1}z_2$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ ต้องสังเกตว่า $z_1\overline{z_2}$ กับ $\overline{z_1}z_2$ มีบาร์ตรงข้ามกัน ดังนั้น ถ้าลุยแจกสังยุคเข้าไปใน $z_1\overline{z_2}$ จะได้ $\overline{z_1}z_2$

กล่าวคือ $\overline{z_1\overline{z_2}} = \overline{z_1}z_2$ นั่นคือ จะได้ $z_1\overline{z_2}$ กับ $\overline{z_1}z_2$ เป็นคู่สังยุคกันนั่นเอง

ดังนั้น $\overline{z_1}z_2 = \overline{3+i} = 3-i$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลลัพธ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

 1. $\frac{1}{1-3i}$
 2. $\frac{2+3i}{i}$
 3. $\frac{i-4}{2i}$
 4. $\frac{1+i}{2-i}$

5. $\frac{3+2i}{2i-1}$

6. $i-\frac{i}{i-1}$

7. $\frac{1}{i-1}-\frac{i}{2+i}$

8. $\frac{i}{2i-1}+\frac{2-i}{2i}$

2. จงหาอินเวอร์สการคูณ ของ $2+i$

3. กำหนดให้ $z^{-1}=3-2i$ จงหาค่าของ $\bar{z}$

4. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z_1^{-1} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i$ เมื่อ $i^2 = -1$ และ $5z_1 + 2z_2 = 5$ แล้ว $\overline{z_2}$ เท่ากับเท่าใด (เมื่อ $\overline{z_2}$ แทน สังยุค (conjugate) ของ z_2) [PAT 1 (ก.ค. 53)/15]

5. กำหนดให้ $z = x + y\mathrm{i}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $x(3 + 5\mathrm{i}) + y(1 - \mathrm{i})^3 = 3 + 7\mathrm{i}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 57)/14]

1. $\mathrm{Im}\ \overline{(\mathrm{i}z)} = -\mathrm{Re}(\mathrm{i}z)$
2. $\frac{1}{z} = \frac{8-6\mathrm{i}}{7}$

ค่าสัมบูรณ์

"ค่าสัมบูรณ์" ของจำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $|a+bi|$ หาได้จากสูตร $\sqrt{a^2+b^2}$

เช่น $|2+3i|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$ $\quad |1-i|=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$

$|-4-3i|=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$

$|2i|=\sqrt{0^2+(2)^2}=\sqrt{4}=2$ $\quad |-3|=\sqrt{(-3)^2+(0)^2}=\sqrt{9}=3$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $|z-4| = 2|z-1|$ จงหา $|z|$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $z=a+bi$ จะได้ $z-4=(a-4)+bi$ ดังนั้น $|z-4|=\sqrt{(a-4)^2+b^2}$

จะได้ $z-1=(a-1)+bi$ ดังนั้น $|z-1|=\sqrt{(a-1)^2+b^2}$

แทนในโจทย์ จะได้

$$\begin{aligned}\sqrt{(a-4)^2+b^2} &= 2\sqrt{(a-1)^2+b^2}\\ (a-4)^2+b^2 &= 4((a-1)^2+b^2)\\ a^2-8a+16+b^2 &= 4a^2-8a+4+4b^2\\ 12 &= 3a^2+3b^2\\ 4 &= a^2+b^2\end{aligned}$$

ดังนั้น $|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{4} = 2$ #

สมบัติที่สำคัญของค่าสัมบูรณ์ มีดังนี้

- $|z|=|-z|=|\bar{z}|=|-\bar{z}|$

  เช่น $|2+3i|=|-2-3i|=|2-3i|=|-2+3i|$

  เพราะตอนคิดค่าสัมบูรณ์ เราต้องยกกำลังสองทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

  ดังนั้น บวก หรือ ลบ หรือ สังยุค ก็ได้ค่าสัมบูรณ์เท่ากัน

- ค่าสัมบูรณ์ กระจายในการคูณ หาร ยกกำลัง ได้หมด แต่กระจายในบวกลบ<u>ไม่ได้</u>

  สมบัตินี้ มีประโยชน์มาก เพราะจะช่วยให้เราหาค่าสัมบูรณ์ได้โดยไม่ต้องคูณจำนวนเชิงซ้อน

  เช่น
$$\begin{aligned}\left|\frac{(3+i)(2-i)^{21}}{(2i-1)^{18}(i+1)^{-5}}\right| &= \frac{|3+i||2-i|^{21}}{|2i-1|^{18}|i+1|^{-5}}\\ &= \frac{\left(\sqrt{3^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^{21}}{\left(\sqrt{2^2+(-1)^2}\right)^{18}\left(\sqrt{1^2+1^2}\right)^{-5}}\\ &= \frac{(\sqrt{10})(\sqrt{5})^{21}}{(\sqrt{5})^{18}(\sqrt{2})^{-5}}\\ &= (\sqrt{10})(\sqrt{5})^3(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2\times 5})(\sqrt{5})^3(\sqrt{2})^5 = 2^3\times 5^2 = 200\end{aligned}$$

  อย่างไรก็ตาม ค่าสัมบูรณ์กระจายในการบวกลบไม่ได้

  กล่าวคือ $|(3+i)-(2-i)| \neq |3+i|-|2-i|$

  ถ้าเจอการบวกลบ เราจะพยายามจัดรูปให้อยู่ในรูปการคูณหารก่อน

  เช่น
$$\begin{aligned}|(2-3i)^2-(1-i)^2| &= |\text{น}^2-\text{ล}^2| = |(\text{น}-\text{ล})(\text{น}+\text{ล})|\\ &= \big|\big((2-3i)-(1-i)\big)\big((2-3i)+(1-i)\big)\big|\\ &= |(1-2i)(3-4i)| = \sqrt{5}\cdot 5 = 5\sqrt{5}\end{aligned}$$

  อย่างไรก็ตาม สำหรับการบวกลบ เราจะมีสมบัติว่า $|z+w|\le|z|+|w|$ (เหมือนตอนเรียนเรื่องจำนวนจริง)

- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ เพราะต่างก็เท่ากับ $a^2 + b^2$ ทั้งคู่

  สูตรนี้จะใช้กำจัดค่าสัมบูรณ์ของการบวกลบจำนวนเชิงซ้อน ที่เป็นจุดอ่อนของสูตรที่แล้วได้

  เช่น

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) \\ &= (z+w)(\bar{z}+\bar{w}) \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + \bar{z}w + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + z\bar{w} + \bar{z}w + |w|^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} |z+w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + (z\bar{w} + \bar{z}w) \\ |z-w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 - (z\bar{w} + \bar{z}w) \end{aligned}}$$

  สังเกตว่า $z\bar{w}$ กับ $\bar{z}w$ เป็นสังยุคกันด้วย ($z\bar{w} = \overline{\bar{z}w}$)

  ดังนั้น ถ้ารู้ตัวหนึ่ง ก็จะหาอีกตัวหนึ่งได้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $|w| = 3$, $|z| = 4$, และ $\bar{w}z = 3 + \mathrm{i}$ จงหาค่าของ $|w+z|^2$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} \bar{w}z &= 3 + \mathrm{i} \\ \overline{\bar{w}z} &= \overline{3 + \mathrm{i}} \\ w\bar{z} &= 3 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |w+z|^2 &= |w|^2 + \bar{w}z + w\bar{z} + |z|^2 \\ &= 3^2 + 3 + \mathrm{i} + 3 - \mathrm{i} + 4^2 \\ &= 31 \end{aligned}$$

#

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาค่าสัมบูรณ์ของจำนวนต่อไปนี้

   1. $5 + 12\mathrm{i}$
   2. $-3 + 4\mathrm{i}$
   3. $1 - \mathrm{i}$
   4. $2\mathrm{i}$
   5. $-\sqrt{3} - \mathrm{i}$
   6. -20
   7. $(1 + 3\mathrm{i}) - (2 + \mathrm{i})$
   8. $(1 + 3\mathrm{i})(2 + \mathrm{i})$

9. $(1+\mathrm{i})^5$

10. $\frac{1}{8\mathrm{i}-6}$

11. $\frac{(1-\mathrm{i})^{15}}{(1+i)^9}$

12. $(3-2\mathrm{i})^2-(2-3\mathrm{i})^2$

2. จงหา $|z|$ เมื่อกำหนด z ดังต่อไปนี้

1. $z(2-\mathrm{i})^2 = (1+\mathrm{i})^3$

2. $\frac{2\sqrt{2}+\mathrm{i}}{z} = 1+\sqrt{2}\mathrm{i}$

3. $z^2 = \sqrt{3}+\mathrm{i}$

4. $\frac{2+2\sqrt{3}\mathrm{i}}{z^3(1-\mathrm{i})} = 1$

3. กำหนดให้ $|z+2| = \sqrt{2}|z+1|$ แล้ว จงหา $|z|$

4. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ และ $\overline{z_2}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z_2
ถ้า $5z_1 + 2z_2 = 5$ และ $\overline{z_2} = 1 + 2i$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว ค่าของ $\left|5z_1^{-1}\right|$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 53)/34]

5. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $\bar{z} - 1 - 4\mathrm{i} = 3\mathrm{i}(z - \mathrm{i})$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง
[PAT 1 (เม.ย. 57)/21]
   1. $z + \bar{z} = \mathrm{i}(z - \bar{z})$
   2. $|z + 2| = 2$
   3. $\bar{z}^2 - 8\mathrm{i} = 0$
   4. $z(1 - \mathrm{i})^3 - 8\mathrm{i} = 0$

6. กำหนดให้ $z = \left(\mathrm{i} - \frac{1}{\mathrm{i}+2}\right)^{-1}$ จงหาค่าของ $|\,16z^2 - 8z + 3 - 8\mathrm{i}\,|$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/34]

7. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 53)/13]

   1. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z^2 = \frac{2+i}{2-i} + \frac{3+4i}{1+2i} + \frac{5+15i}{3-i}$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ แล้วค่าสัมบูรณ์ของ z เท่ากับ $\sqrt{37}$
   2. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{-5+2i}{x+yi} = \frac{10}{i(i+1)(i+2)(i+3)(i+4)}$ แล้ว ค่าของ $x + y = 15$

8. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z|z| + 2z + \mathrm{i} = 0$ แล้ว ส่วนจินตภาพของ z มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 51/1-5]

9. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $z_1 = a + b\mathrm{i}$ และ $z_2 = c + d\mathrm{i}$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $a, b, c, d \in R - \{0\}$ และ $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
   สมมติว่า มีจำนวนจริง t และ s ที่ว่า $z_1^2 + z_2^2 = t$ และ $z_1 - z_2 = s$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 58)/13]

   1. $|z_1| = |z_2|$
   2. $\mathrm{Im}(z_1 z_2) = 0$

10. ให้ A เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ $2|z| - 3z = 9\mathrm{i} - 2$
และ $B = \left\{ |w|^2 \;\middle|\; w = \frac{(1+\mathrm{i})z}{2+\mathrm{i}} \text{ เมื่อ } z \in A \right\}$ เมื่อ $\mathrm{i}^2 = -1$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/33]

11. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ที่สอดคล้องกับสมการ $|z| + 2\bar{z} - 3z = 3 - 45\mathrm{i}$ เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ z และ $\bar{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z ค่าของ $|\bar{z}|^2$ เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (พ.ย. 57)/9]

12. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $3|z|^2 - (28 - \mathrm{i})z + 4z^2 = 0$
และให้ $B = \{\, |z + \mathrm{i}| \mid z \in A \,\}$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 57)/32]

13. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1 + z_2| = 3$ และ $z_1 \cdot \overline{z_2} = 3 + 4\mathrm{i}$
ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/27]

14. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน
โดยที่ $|z_1 + z_2| = 3$ และ $|z_1 - z_2| = 1$ (เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน z)
ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/32]

15. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{3}$ และ $|z_1 - z_2| = 1$
แล้วค่าของ $|z_1 + z_2|$ เท่ากับเท่าใด เมื่อ $|z|$ เทนค่าสัมบูรณ์ของ z [PAT 1 (พ.ย. 57)/33]

16. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1 + z_2|^2 = 5$ และ $|z_1 - z_2|^2 = 1$
ค่าของ $|z_1|^2 + |z_2|^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/27]

17. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ และ $|z_1 - z_2| = 3\sqrt{3}$
ค่าของ $\frac{|11\bar{z}_1| - |5z_2|}{|z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2|}$ เท่ากับเท่าใด ($\bar{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z) [PAT 1 (มี.ค. 54)/35]

18. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $2|z + 1| = |z + 4|$
ค่าของ $|\bar{z}|$ เท่ากับเท่าใด (เมื่อ $\bar{z}$ แทนสังยุต (conjugate) ของ z) [PAT 1 (ต.ค. 55)/35]

19. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z^4 + 1 = 0$
    ค่าของ $\left|z + \frac{1}{z}\right|^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/26]

20. ให้ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่
    $z_1 = 0$
    $z_{n+1} = z_n^2 + i$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เมื่อ $i = \sqrt{-1}$
    ค่าสัมบูรณ์ของ z_{111} เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 53)/16]

21. กำหนดให้ a, b และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|a| \neq |b|$, $|a| \neq 1$ และ $|b| \neq 1$
    ถ้า $|az + b| = |\bar{b}z + \bar{a}|$ แล้ว $|z|$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/13]

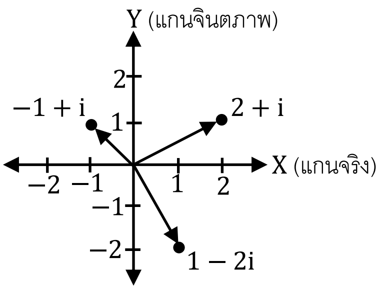
กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

ตอนเรียนเรื่องจำนวนจริง เราจะใช้เส้นจำนวนเพื่อบอกตำแหน่งของจำนวนต่างๆ
ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน จะใช้เส้นจำนวนไม่ได้แล้ว เพราะจำนวนจินตภาพไม่ได้มีอยู่จริงบนเส้นจำนวน

ในการบอกตำแหน่งของจำนวนเชิงซ้อน เราจะใช้ระนาบ X-Y เพื่อบอกตำแหน่งแทน
โดยตำแหน่งของ $a+b\mathrm{i}$ จะอยู่ที่พิกัด (a,b) บนระนาบ X-Y
เราเรียกภาพแสดงพิกัด (a,b) บนระนาบ X-Y ว่า "กราฟของจำนวนเชิงซ้อน"
และบางที เราจะลากลูกศรจากจุด $(0,0)$ ไปยังพิกัดที่พล็อตด้วย (ถ้าจุดที่พล็อตไม่เยอะเกินไป)
ซึ่งจะเห็นว่า ความยาวลูกศรนี้ จะเท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2}$ ซึ่งเท่ากับค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

เนื่องจากส่วนจริง (a) จะกลายเป็นพิกัดทางแกน X ดังนั้น เรานิยมเรียกแกน X ว่า "แกนจริง"
ทำนองเดียวกันส่วนจินตภาพ (b) จะกลายเป็นพิกัดทางแกน Y ดังนั้น เรานิยมเรียกแกน Y ว่า "แกนจินตภาพ"
อย่างไรก็ตาม ในเรื่องนี้ เรามักจะใช้ตัวแปร x, y แทน a, b
นั่นคือ นิยมใช้ $x+y\mathrm{i}$ แทนที่จะเป็น $a+b\mathrm{i}$ เพื่อให้ตัวอักษรตรงกับแกนที่จะเอาไปพล็อต

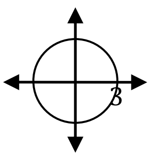
<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนจุดแสดงจำนวนเชิงซ้อน $2+\mathrm{i}$, $\mathrm{i}-1$, $1-2\mathrm{i}$ บนระนาบ X-Y เดียวกัน
<u>วิธีทำ</u> เปลี่ยนจำนวนเชิงซ้อนให้อยู่ในรูป $x+y\mathrm{i}$ ก่อน



$2+\mathrm{i}=(2,1)$
$\mathrm{i}-1=-1+\mathrm{i}=(-1,1)$
$1-2\mathrm{i}=(1,-2)$

นำจุดทั้งสาม ไปพล็อตบนแกน X-Y จะได้ดังรูป #

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|z|=3$
<u>วิธีทำ</u> ให้ $z=x+y\mathrm{i}$ จะได้ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$
ดังนั้น เราจะต้องเขียนพิกัด (x,y) ทั้งหมด ที่ทำให้ $\sqrt{x^2+y^2}=3$
หรือก็คือ $x^2+y^2=3^2$
จากความรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย พิกัด (x,y) ที่สอดคล้องกับ $x^2+y^2=3^2$ จะเรียงเป็นกราฟวงกลมรัศมี 3

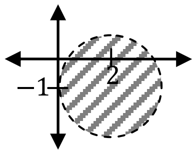


ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับ สมการ $|z|=3$ จะเรียงเป็นวงกลมดังรูป #

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|z-2+\mathrm{i}|<2$

วิธีทำ ให้ $z=x+y\mathrm{i}$ นำไปแทนในอสมการ

$$
\begin{aligned}
|z-2+\mathrm{i}| &< 2 \\
|x+y\mathrm{i}\ -2+\mathrm{i}| &< 2 \\
|(x-2)+(y+1)\mathrm{i}| &< 2 \\
\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2} &< 2 \\
(x-2)^2+(y+1)^2 &< 2^2
\end{aligned}
$$



ซึ่งจะได้เป็นพื้นที่ภายในวงกลมรัศมี 2 ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-1)$ ดังรูป #

แบบฝึกหัด

1. จงเขียนกราฟของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมด ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

   1. $z=1+\mathrm{i}$
   2. $z=2\mathrm{i}-1$
   3. $|z|=1$
   4. $|z-\mathrm{i}|=2$
   5. $|z-1+2\mathrm{i}|=1$
   6. $z\cdot\bar{z}=2$

7. $z + \bar{z} = 6$

8. $z - \bar{z} + 2\mathrm{i} = 0$

9. $\mathrm{Im}(z) < 2$

10. $|z + \mathrm{i}| - 1 \leq 1$

11. $|z| < |z + 4|$

12. $|z - \mathrm{i}| \geq |z + 1|$

2. กราฟของจุด z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(z + \mathrm{i})(\bar{z} - \mathrm{i}) = 1$ เป็นรูปใดต่อไปนี้ [A-NET 49/1-15]
   1. เส้นตรง
   2. วงกลม
   3. วงรี
   4. ไฮเพอร์โบลา

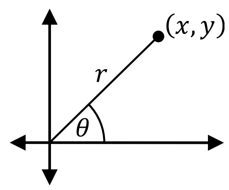
3. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในควอดรันต์ (quadrant) ที่หนึ่งบนระนาบเชิงซ้อน
โดยที่ $\left|\frac{(z+1)(1+\mathrm{i})}{z(1+\mathrm{i})+5+\mathrm{i}}\right| = 1$ และ $|z| = \sqrt{65}$ แล้วผลบวกของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (มี.ค. 56)/35]

รูปเชิงขั้ว

ในหัวข้อที่แล้ว เราได้รู้ว่าจำนวนเชิงซ้อน สามารถแสดงเป็นจุดบนระนาบ X - Y ได้
ซึ่งปกติ เราจะบอกตำแหน่งของ $z = x + y\mathrm{i}$ ด้วยคู่อันดับ (x, y)
อย่างไรก็ตาม แทนที่จะใช้คู่อันดับ (x, y) เราสามารถบอกด้วยอีกวิธี ที่เรียกว่า "รูปเชิงขั้ว" ได้

ในรูปเชิงขั้ว จะมี 2 สิ่งที่เราจะสนใจ คือ

1. ระยะห่าง r จากจุด $(0, 0)$ ถึง z
2. มุม θ ที่ z ทำกับแกน X บวก
   (เรียก θ นี้ว่า "อาร์กิวเมนต์" ของ z)



การวัดมุมอาร์กิวเมนต์ของ z จะวัดแบบเดียวกับเรื่องตรีโกณมิติ
กล่าวคือ เริ่มจากแกน X บวก วัดไปทางทวนเข็มนาฬิกา (จะวัดตามเข็มนาฬิกาก็ได้ แต่มุมจะติดลบ)
และถ้าเกิน $360°$ จะวนกลับมาเป็น $0°$ ใหม่

สูตรสำหรับหาค่า r คือ $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
สูตรสำหรับหาค่า θ คือ $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (ผสมกับการดูรูปว่า θ อยู่ในจตุภาคไหน)
เมื่อได้ค่า r และ θ เราจะเขียน z ใน "รูปเชิงขั้ว" ได้ในรูป $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$
หรือ $r\operatorname{cis}\theta$ หรือ $r\angle\theta$

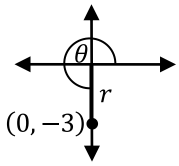
<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i}$ ในรูปเชิงขั้ว
<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่น ต้องหา r กับ θ ก่อน

จะได้ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$
และหา θ จากสูตร $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$ จะได้ $\theta = 60°, 240°$
แต่ $z = 1 + \sqrt{3}\mathrm{i} = (1, \sqrt{3})$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น $\theta = 60°$
ดังนั้น z เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°)$ หรือ $2\operatorname{cis} 60°$ หรือ $2\angle 60°$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงเขียน $z = 1 - \mathrm{i}$ ในรูปเชิงขั้ว
<u>วิธีทำ</u> จะได้ $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
และหา θ จากสูตร $\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1$ จะได้ $\theta = 135°, 315°$
แต่ $z = 1 - \mathrm{i} = (1, -1)$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 ดังนั้น $\theta = 315°$
ดังนั้น z เขียนในรูปเชิงขั้วได้เป็น $\sqrt{2}(\cos 315° + \mathrm{i}\sin 315°)$ หรือ $\sqrt{2}\operatorname{cis} 315°$ หรือ $\sqrt{2}\angle 315°$ #

ตัวอย่าง จงเขียน $-3\mathrm{i}$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ข้อนี้จะทำแบบข้อที่แล้วก็ได้ แต่ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่า $-3\mathrm{i} = 0 - 3\mathrm{i} = (0, -3)$



ซึ่งจากรูป จะเห็นชัดอยู่แล้ว ว่า $r = 3$ และ $\theta = 270°$

ดังนั้น $-3\mathrm{i} = 3(\cos 270° + \mathrm{i}\sin 270°)$ หรือ $3\operatorname{cis} 270°$ หรือ $3\angle 270°$ #

ตัวอย่าง จงเขียน $2(\cos 60° - \mathrm{i}\sin 60°)$ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ ข้อนี้ ดูเผินๆ เหมือนอยู่ในรูปเชิงขั้วแล้ว แต่จริงๆไม่ใช่

รูปเชิงขั้ว จะต้องเป็น $r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ สังเกตว่า เครื่องหมายระหว่าง $\cos\theta$ กับ $\mathrm{i}\sin\theta$ ต้องเป็น $+$

เราจะทำให้เครื่องหมายตรงกลางเป็น $+$ โดยใช้สูตร $-\sin\theta = \sin(-\theta)$ เพื่อหด $-$ ไปไว้ใน θ

จากนั้น เราจะใช้สูตร $\cos\theta = \cos(-\theta)$ เพื่อแปลงมุมหลัง $\cos$ ให้เท่ากับมุมที่เปลี่ยนไปของ $\sin$

$$\begin{aligned} 2(\cos 60° - \mathrm{i}\sin 60°) &= 2(\cos 60° + \mathrm{i}\sin(-60°)) \\ &= 2(\cos(-60°) + \mathrm{i}\sin(-60°)) \end{aligned}$$

นั่นคือ จะแปลงเป็นเชิงขั้วได้เป็น $2(\cos(-60°) + \mathrm{i}\sin(-60°))$ หรือ $2\operatorname{cis}(-60°)$ หรือ $2\angle -60°$ #

ในทางกลับกัน ถ้าเรามีจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว เราสามารถแปลงกลับไปเป็นรูปพิกัดฉากปกติได้ โดยคำนวณค่า $\cos\theta$ กับ $\sin\theta$ แล้วกระจาย r เข้าไป

ตัวอย่าง จงแปลงรูปเชิงขั้ว $z = 2\operatorname{cis} 300°$ กลับเป็นรูปพิกัดฉาก

วิธีทำ

$$\begin{aligned} z &= 2\operatorname{cis} 300° \\ &= 2(\cos 300° + \mathrm{i}\sin 300°) \\ &= 2\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}\mathrm{i} \end{aligned}$$ #

แบบฝึกหัด

1. จงแปลงจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

   1. $1 + \mathrm{i}$
   2. $\sqrt{3} - \mathrm{i}$
   3. $\sqrt{2}\mathrm{i} - \sqrt{2}$
   4. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

5. $3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$

6. $-2\mathrm{i}$

7. 1

8. -5

9. $\cos 60° + \mathrm{i} \sin 60°$

10. $\cos 60° - \mathrm{i} \sin 60°$

11. $-\cos 60° + \mathrm{i} \sin 60°$

12. $-\cos 60° - \mathrm{i} \sin 60°$

2. จงแปลงจำนวนต่อไปนี้ ให้อยู่ในรูป $a + b\mathrm{i}$

1. $2 \angle 30°$

2. $\sqrt{2} \angle 270°$

3. $1 \text{ cis } 135°$

4. $3 \text{ cis } 0°$

รูปเชิงขั้ว จะมีข้อดีคือ “สังยุค คูณ หาร ยกกำลัง” ได้ง่าย ดังนี้

- สังยุค ให้เปลี่ยน θ เป็นลบของของเดิม เช่น

$$\overline{2\angle 60°} = 2\angle -60°$$
$$\overline{1\angle 20°} = 1\angle -20°$$
$$\overline{5\angle -50°} = 5\angle 50°$$

- คูณ ให้เอา r มาคูณกัน และเอา θ มาบวกกัน เช่น

$$(2\angle 60°)\times(3\angle 10°) = 6\angle 70°$$
$$(5\angle -20°)\times(2\angle 10°) = 10\angle -10°$$
$$(2\angle 260°)\times(12\angle 310°) = 24\angle 570° = 24\angle 210°$$

- หาร ให้เอา r มาหารกัน และเอา θ มาลบกัน เช่น

$$\frac{12\angle 60°}{3\angle 10°} = 4\angle 50°$$
$$\frac{5\angle -20°}{-2\angle 10°} = -\frac{5}{2}\angle -30°$$

- ยกกำลัง n ให้เอา r มายกกำลัง n และเอา θ มาคูณ n เช่น

$$(2\angle 60°)^3 = 2^3\angle 180° = 8\angle 180°$$
$$(-1\angle 45°)^{10} = (-1)^{10}\angle 450° = 1\angle 90°$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{20}$

วิธีทำ ข้อนี้จะยกกำลังตรงๆก็ได้ แต่เหนื่อยหน่อย

เนื่องจากรูปเชิงขั้วเป็นรูปที่ยกกำลังง่าย เราจะแปลง $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ เป็นเชิงขั้วก่อน ค่อยยกกำลัง

จะได้ $r = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{1} = 1$

และ $\tan\theta = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ดังนั้น $\theta = 150°, 330°$ แต่ $-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$ อยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังนั้น $\theta = 150°$

ดังนั้น $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{20} = (1\angle 150°)^{20} = 1^{20}\angle 3000° = 1\angle 120°$

$= 1(\cos 120° + i\sin 120°) = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ #

ตัวอย่าง กำหนดให้ $z = 1 + \mathrm{i}$ จงหาค่าของ $\frac{z^4}{\bar{z}^2}$

วิธีทำ เปลี่ยน $1 + \mathrm{i}$ เป็นรูปเชิงขั้ว จะได้ $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$

จะได้ $\tan\theta = \frac{1}{1} = 1$ และเนื่องจาก $1 + \mathrm{i}$ อยู่ใน Q_1 ดังนั้น $\theta = 45°$

ดังนั้น $z = \sqrt{2}\angle 45°$ และจะได้ $\bar{z} = \sqrt{2}\angle -45°$

ดังนั้น $\frac{z^4}{\bar{z}^2} = \frac{(\sqrt{2}\angle 45°)^4}{(\sqrt{2}\angle -45°)^2} = \frac{4\angle 180°}{2\angle -90°} = 2\angle 270° = -2\mathrm{i}$ #

และถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่า จำนวนเชิงซ้อน มีหลายอย่างที่คล้ายกับเวกเตอร์
เพราะ จำนวนเชิงซ้อน มีวิธีการ บวก ลบ หาค่าสัมบูรณ์ และมีการใช้มุม θ เหมือนกันกับเรื่องเวกเตอร์
ดังนั้น เราสามารถใช้ความรู้ในเรื่องเวกเตอร์ มาช่วยในการทำโจทย์เรื่องจำนวนเชิงซ้อนได้ด้วย

แบบฝึกหัด

3. จงหาผลลัพธ์ในรูป $a + b\mathrm{i}$

1. $(2\angle 20°)(3\angle 25°)$

2. $\frac{(3\angle 120°)(4\angle -40°)}{6\angle -10°}$

3. $(2\angle 78°)^5$

4. $(1 - \mathrm{i})^{10}$

5. $\frac{\overline{2\angle 50°}}{2\angle 40°}$

6. $(2\angle 25°)^3 \cdot \overline{(1\angle 5°)^9}$

4. กำหนดให้ w, z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $\overline{w} = z - 2\mathrm{i}$ และ $|w|^2 = z + 6$
ถ้าอาร์กิวเมนต์ของ w อยู่ในช่วง $[0, \frac{\pi}{2}]$ และ $w = a + b\mathrm{i}$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด
[PAT 1 (ต.ค. 52)/2-13]

5. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{i\sqrt{2}}{2}\right)^n = 1$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด
[PAT 1 (ก.ค. 53)/33]

6. ให้ $z_1,\ z_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_1 z_2 = 2\mathrm{i}$ และ $z_1^{-1} = \cos\frac{\pi}{6} - \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}$ แล้ว
$\left|z_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} z_2\right|^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 50/1-16]

7. กำหนดให้ จำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2, z_3 เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่ง
ถ้า $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง
   1. $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = \cos\frac{\pi}{3} + \mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}$
   2. $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$

8. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3, z_4 และ z_5 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ต่างกันทั้งหมด โดยที่ค่าสัมบูรณ์ของแต่ละจำนวนมีค่าเท่ากับหนึ่ง และ $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5 = 0$ จงหาส่วนจริงของ $\frac{z_1+z_2}{z_3} + \frac{z_2+z_3}{z_4} + \frac{z_3+z_4}{z_5} + \frac{z_4+z_5}{z_1} + \frac{z_5+z_1}{z_2}$

รากที่ n

รากที่ n ของ z คือ จำนวนที่ยกกำลัง n แล้วได้ z

เช่น รากที่ 2 ของ 9 คือ 3 กับ -3 เพราะ $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$

ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน รากที่ n ของ z จะ "มี n คำตอบ" เสมอ (ยกเว้น กรณี $z = 0$)

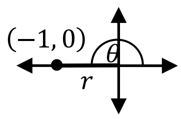
การหา รากที่ n ของ z จะมีขั้นตอนการหาดังนี้

1. แปลง z เป็นรูปเชิงขั้ว ให้อยู่ในรูป $r \angle \theta$
2. รากตัวที่ 1 จะได้จากการนำ r มาถอดรากที่ n และ เอา θ มาหาร n
   นั่นคือ จะได้รากตัวที่ 1 เท่ากับ $\sqrt[n]{r} \angle \frac{\theta}{n}$
3. รากตัวที่ 2 หาได้โดย เพิ่มมุมของรากตัวที่ 1 ไปอีก $\frac{360°}{n}$
   รากตัวที่ 3 หาได้โดย เพิ่มมุมของรากตัวที่ 2 ไปอีก $\frac{360°}{n}$
   รากตัวที่ 4 หาได้โดย เพิ่มมุมของรากตัวที่ 3 ไปอีก $\frac{360°}{n}$
   ... (ไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ครบ n ราก)
4. ในข้อ 3 เราจะได้คำตอบเป็นรูปเชิงขั้ว ซึ่งบางทีคุณครูจะไม่ชอบ
   ในบางครั้ง เราอาจต้องแปลงคำตอบ (ถ้าแปลงได้) ในรูปเชิงขั้วเหล่านี้ กลับไปเป็นรูปปกติอีกด้วย

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากที่ 4 ของ -1

<u>วิธีทำ</u> ขั้นแรก แปลง -1 เป็นเชิงขั้วก่อน

จะเห็นว่า $-1 = -1 + 0\mathrm{i} = (-1, 0)$



ได้ $r = 1$ และ $\theta = 180°$ ได้เลย ไม่ต้องใช้สูตร

ดังนั้น แปลง -1 เป็นเชิงขั้วได้ $1 \angle 180°$

ดังนั้น รากตัวแรก คือ $\sqrt[4]{1} \angle \frac{180°}{4} = 1 \angle 45°$

รากตัวถัดไป ได้จากการเพิ่มมุม ไปทีละ $\frac{360°}{n}$

ข้อนี้ให้หารากที่ 4 ซึ่งจะได้ $n = 4$ ดังนั้น $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{4} = 90°$

จะได้รากตัวที่ 2 คือ $1 \angle (45° + 90°) = 1 \angle 135°$

จะได้รากตัวที่ 3 คือ $1 \angle (135° + 90°) = 1 \angle 225°$

จะได้รากตัวที่ 4 คือ $1 \angle (225° + 90°) = 1 \angle 315°$

ครบ 4 ตัว ก็หยุด (รากที่ 4 จะมี 4 คำตอบ)

ดังนั้น รากที่ 4 ของ -1 คือ $1 \angle 45°$, $1 \angle 135°$, $1 \angle 225°$, และ $1 \angle 315°$

ขั้นสุดท้าย แปลงรากทั้ง 4 กลับเป็นรูปปกติ

$$1 \angle 45° = 1(\cos 45° + \mathrm{i} \sin 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$1 \angle 135° = 1(\cos 135° + \mathrm{i} \sin 135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$1 \angle 225° = 1(\cos 225° + \mathrm{i} \sin 225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

$$1 \angle 315° = 1(\cos 315° + \mathrm{i} \sin 315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$$

#

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาค่า z ที่ทำให้ $z^3 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้โจทย์ให้หาว่าอะไร ยกกำลัง 3 แล้วได้ $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ นั่นคือ เราต้องหารากที่ 3 ของ $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ นั่นเอง

แปลง $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ เป็นเชิงขั้ว จะได้ $r = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

และ $\tan\theta = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ จะได้ $\theta = 150°, 330°$ แต่ $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ อยู่ในจตุภาคที่ 4 ดังนั้น $\theta = 330°$

นั่นคือ แปลง $\sqrt{3} - \mathrm{i}$ เป็นเชิงขั้ว ได้ $2 \angle 330°$

ดังนั้น จะได้รากตัวแรก คือ $\sqrt[3]{2} \angle \frac{330°}{3} = \sqrt[3]{2} \angle 110° = \sqrt[3]{2}(\cos 110° + \mathrm{i}\sin 110°)$

รากตัวถัดไป ให้เพิ่มมุมไปอีก $\frac{360°}{n} = \frac{360°}{3} = 120°$

ดังนั้น รากตัวที่สอง คือ $\sqrt[3]{2} \angle (110° + 120°) = \sqrt[3]{2} \angle 230° = \sqrt[3]{2}(\cos 230° + \mathrm{i}\sin 230°)$

และรากตัวที่สาม คือ $\sqrt[3]{2} \angle (230° + 120°) = \sqrt[3]{2} \angle 350° = \sqrt[3]{2}(\cos 350° + \mathrm{i}\sin 350°)$

ครบ 3 ราก ก็หยุด #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหารากที่ 2 ของ $3 + 4\mathrm{i}$

<u>วิธีทำ</u> จะเห็นว่า $3 + 4\mathrm{i}$ แปลงเป็นเชิงขั้วไม่ได้ จะติดตรงที่ $\tan\theta = \frac{4}{3}$ จะได้ค่า θ แบบสวยๆ

ดังนั้น ข้อนี้ ใช้รูปเชิงขั้วทำไม่ได้ ต้องกลับไปใช้วิธีเก่า

สมมุติให้รากที่ 2 ของ $3 + 4\mathrm{i}$ คือ $a + b\mathrm{i}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} 3 + 4\mathrm{i} &= (a + b\mathrm{i})^2 \\ &= a^2 - b^2 + 2ab\mathrm{i} \end{aligned}$$

จะได้ $3 = a^2 - b^2$ และ $4 = 2ab$ แก้สองสมการนี้ ก็จะได้ a กับ b

$$\begin{array}{lrcll}
 & a^2 - b^2 & = & 3 & (1) \\
 & 2ab & = & 4 & (2) \\
(2) \div 2 : & ab & = & 2 & \\
 & a & = & \frac{2}{b} & (3) \\
\text{แทน } (3) \text{ ใน } (1) : & \left(\frac{2}{b}\right)^2 - b^2 & = & 3 & \\
 & \frac{4}{b^2} - b^2 & = & 3 & \\
 & 4 - b^4 & = & 3b^2 & \\
 & 0 & = & b^4 + 3b^2 - 4 & \\
 & 0 & = & (b^2 - 1)(b^2 + 4) & \\
 & b & = & 1, -1 & \\
\text{แทน } b \text{ ใน } (3) : & a & = & 2, -2 &
\end{array}$$

จะได้คำตอบ คือ $2 + \mathrm{i}$ และ $-2 - \mathrm{i}$ #

อย่างไรก็ตาม ข้อนี้มีอีกวิธี ที่ง่ายกว่านิดหน่อย คือ ใช้ค่าสัมบูรณ์ มาช่วย

เนื่องจาก $(a + b\mathrm{i})^2 = 3 + 4\mathrm{i}$ ดังนั้น

$$\begin{array}{lrcll}
 & |a + b\mathrm{i}|^2 & = & |3 + 4\mathrm{i}| & \\
 & a^2 + b^2 & = & 5 & (4) \\
(1) + (4) : & 2a^2 & = & 8 & \\
 & a & = & 2, -2 & \\
\text{แทน } a \text{ ใน } (2) : & b & = & 1, -1 &
\end{array}$$

จะได้คำตอบ คือ $2 + \mathrm{i}$ และ $2 - \mathrm{i}$ เหมือนกัน #

แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. รากที่ 2 ของ -1

2. รากที่ 2 ของ $4i$

3. รากที่ 2 ของ $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

4. รากที่ 2 ของ $5-12i$

5. รากที่ 3 ของ 1

6. รากที่ 3 ของ $-27i$

7. รากที่ 4 ของ -1

8. รากที่ 4 ของ $-8+8\sqrt{3}\mathrm{i}$

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

1. $z^2 = \mathrm{i}$

2. $z^3 - 8i = 0$

3. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(z+2\mathrm{i})^3 = 8\mathrm{i}$ จงหาค่าของ $|z_1| + |z_2| + |z_3|$
[PAT 1 (ธ.ค. 54)/14]

4. กำหนดให้ $z = a + b\mathrm{i}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab > 0$ และ $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$
ถ้า $z^3 = \mathrm{i}$ แล้วค่าของ $\left|\mathrm{i}z^5 + 2\right|^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 58)/29]

สมการพหุนาม

สมการพหุนาม คือ สมการที่อยู่ในรูป "พหุนาม $= 0$" เช่น $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4 = 0$
ในเรื่องจำนวนจริง เราได้เรียนวิธีแก้สมการพวกนี้ไปแล้ว โดยจะต้องแยกตัวประกอบ แล้วหาคำตอบจากแต่ละตัวประกอบ
ถ้าพจน์ในพหุนามมีเลขชี้กำลังมากกว่า 2 เรามักต้องใช้ "ทฤษฎีเศษ" และการ "หารสังเคราะห์" เพื่อแยกตัวประกอบ

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4 = 0$

<u>วิธีทำ</u> แยกตัวประกอบ $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4$ โดยใช้ทฤษฎีเศษก่อน

$$2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4 = 0$$

$1, 2$ $\qquad$ $1, 2, 4$

ดังนั้น "ตัวน่าสงสัย" คือ ± 1 , ± 2 , ± 4 และ $\pm \frac{1}{2}$ เราต้องเอาพวกนี้ไปแทนในพหุนาม ว่าอันไหนได้ 0

1: $2(1)^4 + (1)^3 - 7(1)^2 - 4(1) - 4 = -8$ ใช้ไม่ได้

-1: $2(-1)^4 + (-1)^3 - 7(-1)^2 - 4(-1) - 4 = -6$ ใช้ไม่ได้

2: $2(2)^4 + (2)^3 - 7(2)^2 - 4(2) - 4 = 0$ ได้แล้ว

จากนั้น เอา 2 ไปหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & 1 & -7 & -4 & -4 \\ & & 4 & 10 & 6 & 4 \\ \hline & 2 & 5 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4 = (x-2)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$

ต่อไปแยกตัวประกอบของ $2x^3 + 5x^2 + 3x + 2$ ด้วยวิธีเดิม

$1, 2$ $\qquad$ $1, 2$

จะได้ "ตัวน่าสงสัย" คือ ± 1 , ± 2 และ $\pm \frac{1}{2}$

ตัวที่ใช้ไม่ได้ในรอบที่แล้ว (คือ 1 กับ -1) ตัดออกไปได้เลย ดังนั้น รอบนี้เราจะเริ่มจาก 2

2: $2(2)^3 + 5(2)^2 + 3(2) + 2 = 44$ ใช้ไม่ได้

-2: $2(-2)^3 + 5(-2)^2 + 3(-2) + 2 = 0$ ได้แล้ว

จากนั้น เอา -2 ไปหารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 5 & 3 & 2 \\ & & -4 & -2 & -2 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น $2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4 = (x-2)(2x^3 + 5x^2 + 3x + 2)$

$$= (x-2)(x+2)(2x^2 + x + 1)$$

พอเลขชี้กำลังจะลดเหลือ 2 ก็หยุดทฤษฎีเศษได้ จากนั้น จะได้คำตอบของสมการดังนี้

$$(x-2)(x+2)(2x^2 + x + 1) = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$
$\rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = 2$ $\qquad$ $x = -2$ $\qquad$ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} = \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$

(เป็นคำตอบไม่ได้ เพราะในรูทติดลบ)

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้จึงมีแค่ 2 กับ -2 #

โจทย์ที่แสดงให้ดู เป็นโจทย์ในเรื่อง “จำนวนจริง”

ดังจะเห็นได้ว่าเราไม่ยอมให้ $\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}$ เป็นคำตอบ เพราะจำนวนจริงไม่ยอมให้ในรูทติดลบ

แต่ถ้าเราเจอโจทย์นี้ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน เราจะยอมให้ในรูทติดลบได้

โดยถ้าในรูทติดลบ เราจะใช้ i มาเขียนแทน นั่นคือ $\frac{-1\pm\sqrt{-7}}{4}$ เขียนใหม่ได้เป็น $\frac{-1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{4}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้สมการ $2z^4+z^3-7z^2-4z-4=0$

<u>วิธีทำ</u> ทำเหมือนกับข้อที่แล้ว ยกเว้นว่าคราวนี้ ในรูทติดลบได้ แต่ต้องเขียนตอบในรูป i

ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ คือ 2 , -2 , $\frac{-1+\sqrt{7}\mathrm{i}}{4}$ และ $\frac{-1-\sqrt{7}\mathrm{i}}{4}$ #

ในเรื่องนี้ เรามักจะเจอแต่พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง

เช่น $2z^4+z^3-7z^2-4z-4$ มีสัมประสิทธิ์คือ $2, 1, -7, -4$ และ -4 ซึ่งล้วนแต่เป็นจำนวนจริง

ในกรณีนี้ คำตอบที่ติด i จะ “มาเป็นคู่ๆ” กล่าวคือ ถ้า $a+b\mathrm{i}$ เป็นคำตอบ จะได้ $a-b\mathrm{i}$ เป็นคำตอบด้วยเสมอ

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ 2 และ $1-\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ซึ่ง $f(3)=10$ แล้ว จงหาค่าของ $f(0)$

<u>วิธีทำ</u> ก่อนอื่น ต้องรู้ก่อน ว่า “ดีกรี” ของพหุนาม คือ “เลขชี้กำลังมากสุด” ของพจน์ในพหุนาม

ข้อนี้ $f(x)$ มีดีกรี 3 นั่นคือ $f(x)$ ต้องอยู่ในรูป $ax^3+bx^2+cx+d=0$

จากการที่โจทย์บอกว่า $1-\mathrm{i}$ เป็นคำตอบ เราจะสรุปได้ทันที ว่า $1+\mathrm{i}$ ก็ต้องเป็นคำตอบด้วย

ดังนั้น คำตอบของสมการ จะมี 2 , $1-\mathrm{i}$ และ $1+\mathrm{i}$ เราจะใช้คำตอบเหล่านี้ ย้อนกลับไปหา $f(x)$

ก่อนที่จะได้สามตัวนี้เป็นคำตอบ สมการควรมีหน้าตาคล้ายๆแบบนี้

$$k(x-2)(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i})=0$$

$x=2$ $\quad x=1-\mathrm{i}$ $\quad x=1+\mathrm{i}$

เมื่อ k เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

ที่ k ต้องเป็นตัวเลข เพราะจะมีตัวแปร x มากกว่านี้ไม่ได้แล้ว ไม่งั้นคูณออกมา ดีกรีจะเกิน 3

ดังนั้น $f(x)$ ก็คือ $k(x-2)(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i})$

แต่โจทย์บอกว่า $f(3)=10$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(x) &= k(x-2)(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i})\\
f(3) &= k(3-2)(3-1+\mathrm{i})(3-1-\mathrm{i})\\
10 &= k(1)(2+\mathrm{i})(2-\mathrm{i})\\
10 &= k(4-\mathrm{i}^2)\\
10 &= 5k\\
k &= \frac{10}{5}=2
\end{aligned}$$

ใช้สูตร $(\text{น}+\text{ล})(\text{น}-\text{ล})=\text{น}^2-\text{ล}^2$

จะได้ $f(x)=2(x-2)(x-1+\mathrm{i})(x-1-\mathrm{i})$ และจะหาค่า $f(0)$ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
f(0) &= 2(0-2)(0-1+\mathrm{i})(0-1-\mathrm{i})\\
&= 2(-2)(-1+\mathrm{i})(-1-\mathrm{i})\\
&= 2(-2)((-1)^2-\mathrm{i}^2)\\
&= 2(-2)(1+1)\\
&= 2(-2)(2)=-8
\end{aligned}$$

#

ความรู้เกี่ยวกับ ผลบวกราก ผลคูณราก ที่เรียนมาในเรื่องจำนวนจริง ก็ยังคงใช้ได้ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน
สมการดีกรี n จะมีคำตอบได้ไม่เกิน n ตัว และถ้าสมการพหุนามดีกรี n มีคำตอบ n ตัวแล้ว

ผลบวกของคำตอบทั้งหมด $= -\frac{\text{สปส ตัวที่ 2}}{\text{สปส ตัวแรก}}$

ผลบวกของสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{\text{สปส ตัวที่ 3}}{\text{สปส ตัวแรก}}$

ผลบวกของสามคำตอบคูณกัน $= -\frac{\text{สปส ตัวที่ 4}}{\text{สปส ตัวแรก}}$

$\vdots$

ผลคูณของคำตอบทั้งหมด $= (-1)^n \cdot \frac{\text{สปส ตัวสุดท้าย}}{\text{สปส ตัวแรก}}$

เช่น $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$

$(x-1)(x-2)(x-4)$

คำตอบ คือ 1, 2, 4

ผลบวกคำตอบ $= -\frac{-7}{1} = 7 \quad (= 1+2+4)$

ผลบวกสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{14}{1} = 14 \quad (= 1\times2 + 1\times4 + 2\times4)$

ผลคูณคำตอบ $= (-1)^3\left(\frac{-8}{1}\right) = 8 \quad (= 1\times2\times4)$

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$

$\downarrow$

$4x^4 - 0x^3 - 5x^2 + 0x + 1$

$\downarrow$

$(x+1)(x-1)(2x+1)(2x-1)$

คำตอบ คือ $-1,\ 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$

ผลบวกคำตอบ $= -\frac{0}{4} = 0 \quad (= -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$

ผลบวกสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$

$(= -1\cdot1 + -1\cdot -\frac{1}{2} + -1\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot -\frac{1}{2} + 1\cdot\frac{1}{2} + -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$

ผลบวกสามคำตอบคูณกัน $= -\frac{0}{4} = 0$

$(= -1\cdot1\cdot-\frac{1}{2} + -1\cdot1\cdot\frac{1}{2} + -1\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + 1\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$

ผลคูณคำตอบ $= (-1)^4\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \quad (= -1\cdot1\cdot-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2})$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า z_1, z_2, z_3 และ z_4 เป็นคำตอบที่แตกต่างกันของสมการ $2z^4 + z^3 - 7z^2 - 4z - 4 = 0$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4}$

<u>วิธีทำ</u> จากสูตร ผลบวก ผลคูณ คำตอบ จะได้

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{1}{2}$$

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 = +\frac{-7}{2} = -\frac{7}{2}$$

$$z_1z_2z_3 + z_1z_2z_4 + z_1z_3z_4 + z_2z_3z_4 = -\frac{-4}{2} = 2$$

$$z_1z_2z_3z_4 = +\frac{-4}{2} = -2$$

ดังนั้น $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_4} = \frac{z_2z_3z_4 + z_1z_3z_4 + z_1z_2z_4 + z_1z_2z_3}{z_1z_2z_3z_4} = \frac{2}{-2} = -1$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาคำตอบของสมการต่อไปนี้

   1. $x^2 + 3x + 6 = 0$
   2. $x^2 - 2x + 2 = 0$

3. $3x^3 - 2x^2 + x = 0$

4. $x^2 = -2$

5. $x^3 = 1$

6. $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$

7. $x^3 + 3x^2 + 5x + 3 = 0$

8. $x^3 - x^2 - 4 = 0$

2. ถ้า z_1 , z_2 , z_3 เป็นรากของสมการ $2z^3 - 3z^2 - 5z + 1 = 0$ แล้ว จงหาค่าของ

   1. $z_1 + z_2 + z_3$

   2. $z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

   3. $z_1z_2z_3$

   4. $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$

3. ถ้า $1 - \mathrm{i}$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^3 - 3x^2 + ax - 2 = 0$ แล้ว จงหาค่า a

4. ถ้า $2 - \mathrm{i}$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^3 + ax^2 + bx + 5 = 0$ เมื่อ $a, b \in \mathrm{R}$ แล้ว จงหาอีก 2 คำตอบที่เหลือ

5. ถ้า $\mathrm{i} + 1$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ $x^3 + ax^2 + 4x + b = 0$ เมื่อ $a, b \in \mathrm{R}$ แล้ว จงหาอีก 2 คำตอบที่เหลือ

6. ถ้า 3 และ $2\mathrm{i} + 1$ เป็นคำตอบของสมการ $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + 6 = 0$ เมื่อ $a, b, c \in \mathrm{R}$ แล้ว จงหาอีก 2 คำตอบที่เหลือ

7. ถ้า $\mathrm{i}-2$ และ $1-2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^5+5x^4+ax^3+bx^2+cx+d = 0$ เมื่อ $a , b , c , d \in \mathrm{R}$ แล้ว จงหาอีก 3 คำตอบที่เหลือ

8. จงหาสมการดีกรีต่ำสุด ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง และมี i และ $1+\mathrm{i}$ เป็นคำตอบ

9. กำหนดให้ -1 และ $2-\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $f(1)=20$ แล้ว จงหาค่าของ $f(0)$

10. ถ้า $f(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x-2$ และ $x+1+\mathrm{i}$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ และ $f(0)=-12$ แล้ว จงหาว่า $f(x)$ หารด้วย $x-1$ เหลือเศษเท่าไร

11. จำนวนเชิงซ้อน $z = 1 + \mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการในข้อใดต่อไปนี้ [A-NET 49/1-14]

1. $z^4 - 2z^2 + 4z = 0$
2. $z^4 - 2z^2 - 4z = 0$
3. $z^4 + 2z^2 - 4z = 0$
4. $z^4 + 2z^2 + 4z = 0$

12. กำหนดให้ S เป็นเซตคำตอบของสมการ $z^2 + z + 1 = 0$ เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต S [PAT 1 (มี.ค. 52)/26]

1. $\{-\cos 120° - \mathrm{i}\sin 60°, \cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°\}$
2. $\{\cos 120° + \mathrm{i}\sin 60°, -\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°\}$
3. $\{-\cos 120° - \mathrm{i}\sin 120°, -\cos 60° + \mathrm{i}\sin 60°\}$
4. $\{\cos 120° + \mathrm{i}\sin 120°, -\cos 60° - \mathrm{i}\sin 60°\}$

13. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับ $z^3 - 2z^2 + 2z = 0$ และ $z \neq 0$ ถ้า อาร์กิวเมนต์ของ z อยู่ในช่วง $(0, \frac{\pi}{2})$ แล้ว $\frac{z^4}{(\bar{z})^2}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-15]

14. ให้ $(x-1+\mathrm{i})$ และ $(x+2)$ เป็นตัวประกอบของฟังก์ชัน $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ แล้ว $(x-3)$ หาร $f(x)$ เหลือเศษเท่าไร [A-NET 50/2-8]

15. ถ้า $x-1+i$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)=x^3+ax^2+4x+b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ a^2+b^2 เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 54)/14]

16. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง โดยที่มี $x+1$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$ $5+2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x)=0$ และ $f(0)=58$ จงหา $f(x)$ ในรูป ax^3+bx^2+cx+d [PAT 1 (มี.ค. 56)/40*]

17. ให้ $z_1,\ z_2,\ z_3$ เป็นคำตอบของสมการ $1+\left(1+\frac{1}{z}\right)^3=0$ แล้ว $\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
[A-NET 50/1-15]

18. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z^2-3z+4=0$
ค่าของ $(|z_1|^2+|z_2|^2)\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/17]

19. ถ้า z_1, z_2 เป็นคำตอบที่ไม่ใช่จำนวนจริงของสมการ $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 8$ แล้ว $z_1 z_2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด
[A-NET 51/1-6]

20. จงหาค่าของ $\cos 15° + \cos 87° + \cos 159° + \cos 231° + \cos 303°$ [PAT 1 (พ.ย. 57)/32*]

หน่วยจินตภาพ

1. 1. $-\mathrm{i}$ 2. i 3. -1 4. 1
5. 0 6. -1 7. $1+\mathrm{i}$ 8. -1
9. i 10. 0

จำนวนเชิงซ้อน

1. 1. $3-\mathrm{i}$ 2. $-5+3\mathrm{i}$ 3. $-3+\mathrm{i}$ 4. $11-2\mathrm{i}$
5. -4 6. $-32\mathrm{i}$

2. 1. $a=2\,,\ b=2$ 2. $a=-1\,,\ b=-2$ 3. $a=0\,,\ b=-1$ 4. $a=0\,,\ b=0,1$
5. $a=\pm 3\,,\ b=\pm 6$

3. 198

สังยุค และการหาร

1. 1. $\frac{1}{10}+\frac{3}{10}\mathrm{i}$ 2. $3-2\mathrm{i}$ 3. $\frac{1}{2}+2\mathrm{i}$ 4. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\mathrm{i}$
5. $\frac{1}{5}-\frac{8}{5}\mathrm{i}$ 6. $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\mathrm{i}$ 7. $-\frac{7}{10}-\frac{9}{10}\mathrm{i}$ 8. $-\frac{1}{10}-\frac{6}{5}\mathrm{i}$

2. $\frac{2}{5}-\frac{\mathrm{i}}{5}$ 3. $\frac{3}{13}-\frac{2}{13}\mathrm{i}$ 4. $1+2\mathrm{i}$ 5. -

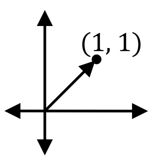
ค่าสัมบูรณ์

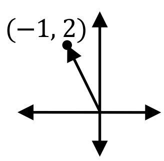
1. 1. 13 2. 5 3. $\sqrt{2}$ 4. 2
5. 2 6. 20 7. $\sqrt{5}$ 8. $5\sqrt{2}$
9. $4\sqrt{2}$ 10. $\frac{1}{10}$ 11. 8 12. 10

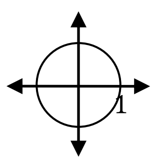
2. 1. $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ 2. $\sqrt{3}$ 3. $\sqrt{2}$ 4. $\sqrt{2}$

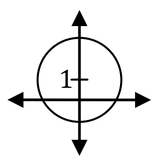
3. $\sqrt{2}$ 4. 5 5. 4 6. 5
7. - 8. $1-\sqrt{2}$ 9. $1, 2$ 10. 10
11. 225 12. 5 13. 3 14. 5
15. 3 16. 3 17. 2 18. 2
19. 2 20. $\sqrt{2}$ 21. 1

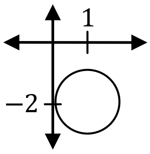
กราฟของจำนวนเชิงซ้อน

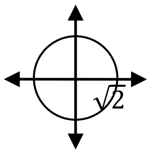
1. 1.


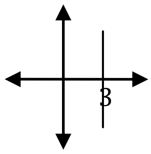
2.


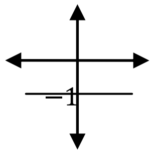
3.


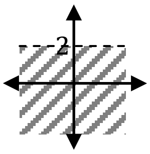
4.


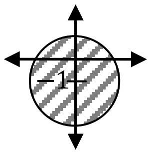
5. 

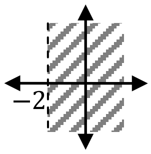
6. 

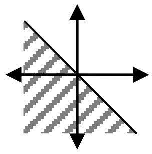
7. 

8. 

9. 

10. 

11. 

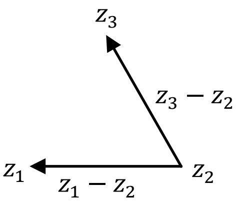
12. 

2. 2   3. 11

รูปเชิงขั้ว

1.
   1. $\sqrt{2}\angle 45°$ 2. $2\angle 330°$ 3. $2\angle 135°$ 4. $1\angle 240°$
   5. $6\angle -30°$ 6. $2\angle -90°$ 7. $1\angle 0°$ 8. $5\angle 180°$
   9. $1\angle 60°$ 10. $1\angle -60°$ 11. $1\angle 120°$ 12. $1\angle 240°$
2.
   1. $\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 2. $-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 4. 3
3.
   1. $3\sqrt{2}+3\sqrt{2}\mathrm{i}$ 2. $2\mathrm{i}$ 3. $16\sqrt{3}+16\mathrm{i}$ 4. $-32\mathrm{i}$
   5. $-\mathrm{i}$ 6. $4\sqrt{3}+4\mathrm{i}$
4. 4   5. 8   6. 7

7. 2



จากรูป จะได้ $z_3 - z_2$ มีขนาดเท่ากับ $z_1 - z_2$ แต่มุมน้อยกว่าอยู่ $\frac{\pi}{3}$

ดังนั้น $\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = \operatorname{cis} -\frac{\pi}{3}$ → 1 ผิด

และจะได้ $\frac{z_1-z_2}{z_3-z_2} = \operatorname{cis}\frac{\pi}{3} = \frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$

คูณไขว้ได้ $z_1z_2 - z_1^2 - z_2^2 + z_1z_2 = z_3^2 - z_1z_3 - z_2z_3 + z_1z_2$ → 2 ถูก

8. −2.5

$$\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_4}+\frac{z_3+z_4}{z_5}+\frac{z_4+z_5}{z_1}+\frac{z_5+z_1}{z_2}=\frac{-z_3-z_4-z_5}{z_3}+\frac{-z_1-z_4-z_5}{z_4}+\frac{-z_1-z_2-z_5}{z_5}+\frac{-z_1-z_2-z_3}{z_1}+\frac{-z_2-z_3-z_4}{z_2}$$

$$\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_4}+\frac{z_3+z_4}{z_5}+\frac{z_4+z_5}{z_1}+\frac{z_5+z_1}{z_2}= -5-\left(\frac{z_4+z_5}{z_3}+\frac{z_1+z_5}{z_4}+\frac{z_1+z_2}{z_5}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_3+z_4}{z_2}\right)$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_4}+\frac{z_3+z_4}{z_5}+\frac{z_4+z_5}{z_1}+\frac{z_5+z_1}{z_2}\right) = -5-\operatorname{Re}\left(\frac{z_4+z_5}{z_3}+\frac{z_1+z_5}{z_4}+\frac{z_1+z_2}{z_5}+\frac{z_2+z_3}{z_1}+\frac{z_3+z_4}{z_2}\right) \quad \ldots(*)$$

$$\begin{aligned}\text{Re ฝั่งซ้าย} &= \operatorname{Re}\left(\frac{z_1}{z_3}+\frac{z_2}{z_3}+\frac{z_2}{z_4}+\frac{z_3}{z_4}+\frac{z_3}{z_5}+\frac{z_4}{z_5}+\frac{z_4}{z_1}+\frac{z_5}{z_1}+\frac{z_5}{z_2}+\frac{z_1}{z_2}\right)\\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{1\operatorname{cis}\theta_1}{1\operatorname{cis}\theta_3}+\frac{1\operatorname{cis}\theta_2}{1\operatorname{cis}\theta_3}+\frac{1\operatorname{cis}\theta_2}{1\operatorname{cis}\theta_4}+\ \ldots\ +\frac{1\operatorname{cis}\theta_1}{1\operatorname{cis}\theta_2}\right)\\ &= \operatorname{Re}(\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_3)+\operatorname{cis}(\theta_2-\theta_3)+\operatorname{cis}(\theta_2-\theta_4)+\ \ldots\ +\operatorname{cis}(\theta_1-\theta_2))\\ &= \cos(\theta_1-\theta_3)+\cos(\theta_2-\theta_3)+\cos(\theta_2-\theta_4)+\ \ldots\ +\cos(\theta_1-\theta_2)\end{aligned}$$

ทำแบบเดียวกัน กับ Re(ฝั่งขวา) จะได้

Re ฝั่งขวา $= \cos(\theta_4-\theta_3)+\cos(\theta_5-\theta_3)+\cos(\theta_1-\theta_4)+\ \ldots\ +\cos(\theta_4-\theta_2)$

แต่ $\cos(\theta_1-\theta_2)=\cos(\theta_2-\theta_1)$ ซึ่งจะเห็นว่า Re ฝั่งซ้ายกับฝั่งขวา จับคู่กันได้พอดี ($\frac{z_1}{z_3}$ ฝั่งซ้าย คู่กับ $\frac{z_3}{z_1}$ ฝั่งขวา)

ดังนั้น Re ฝั่งซ้าย = Re ฝั่งขวา → แทนใน (*) จะได้ $\mathrm{Re}\left(\frac{z_1+z_2}{z_3}+\frac{z_2+z_3}{z_4}+\frac{z_3+z_4}{z_5}+\frac{z_4+z_5}{z_1}+\frac{z_5+z_1}{z_2}\right)=-\frac{5}{2}$

รากที่ n

1. 1. $\mathrm{i}\,,-\mathrm{i}$
   2. $\sqrt{2}+\sqrt{2}\mathrm{i}\ ,\ -\sqrt{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$
   3. $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\mathrm{i}}{2}\ ,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\mathrm{i}}{2}$
   4. $3-2\mathrm{i}\ ,\ -3+2\mathrm{i}$
   5. $1\ ,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\ ,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
   6. $3\mathrm{i}\ ,\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}\ ,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$
   7. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\ ,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
   8. $\sqrt{3}+\mathrm{i}\ ,\ -1+\sqrt{3}\mathrm{i}\ ,\ -\sqrt{3}-\mathrm{i}\ ,\ 1-\sqrt{3}\mathrm{i}$
2. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\,,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$
   2. $\sqrt{3}+\mathrm{i}\,,\ -\sqrt{3}+\mathrm{i}\,,\ -2\mathrm{i}$
3. 8
4. 3

สมการพหุนาม

1. 1. $\frac{-3\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{2}$
   2. $1\pm\mathrm{i}$
   3. $0\,,\ \frac{1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}}{3}$
   4. $\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$
   5. $1,\frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$
   6. $-1\,,\ \mathrm{i}\,,\ -\mathrm{i}$
   7. $-1\,,\ -1\pm\sqrt{2}\mathrm{i}$
   8. $2\,,\ \frac{-1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$
2. 1. $\frac{3}{2}$
   2. $-\frac{5}{2}$
   3. $-\frac{1}{2}$
   4. 5
3. 4
4. $2+\mathrm{i}\,,\ -1$
5. $-\mathrm{i}+1\,,\ 1$
6. $-2\mathrm{i}+1\,,\ \frac{2}{5}$
7. $-\mathrm{i}-2\,,\ 1+2\mathrm{i}\,,\ -3$
8. $k(x^4-2x^3+3x^2-2x+2)\ =\ 0$
9. 25
10. -15
11. 1
12. 4
13. $-2\mathrm{i}$
14. 25
15. 13
16. $2x^3-18x^2+38x+58$
17. $-\frac{3}{2}$
18. 6
19. $\frac{3}{7}$
20. 0

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ Piyawan Lueanprapai

และ คุณ Pawarit Karusuporn

และ คุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ