

PAT 1 (มี.ค. 60)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 11 มีนาคม 2560 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A - B = \emptyset$ แล้ว $A = B$

(ข) ถ้า $C - (A \cap B) = C - B$ แล้ว $A \subset B$

(ค) $A \cap B \cap C = [(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cap B) \cup C]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

2. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 80 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของชมรม 3 ชมรม คือ ชมรมคณิตศาสตร์ ชมรมการแสดง และชมรมกีฬา ปรากฏว่ามี 30 คน เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์โดยในจำนวนนี้มีนักเรียน 20 คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์เพียงชมรมเดียว มี 5 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงและชมรมกีฬา แต่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ และมี 10 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมใดเลย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) มี 15 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมอย่างน้อย 2 ชมรม

(ข) มี 55 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมใดชมรมหนึ่งเพียง 1 ชมรมเท่านั้น

(ค) มี 50 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงหรือชมรมกีฬา

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

3. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ โดยที่ $[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น จริง
 ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น เท็จ

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ | 2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$ | 3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)$ |
| 4. $q \rightarrow (\sim p \wedge r)$ | 5. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$ | |

4. ค่าของ $2\left(\arctan \frac{1}{8} - \arctan \frac{2}{3}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\arcsin \frac{4}{5}$ | 2. $-\arcsin \frac{4}{5}$ | 3. $\pi - \arcsin \frac{4}{5}$ |
| 4. $-\arctan \frac{3}{4}$ | 5. $\pi - \arctan \frac{3}{4}$ | |

5. กำหนดให้ $a = \cos 50^\circ + \cos 20^\circ$ และ $b = \sin 50^\circ - \sin 20^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | | |
|--|--|---------------------------|
| 1. $\sin 20^\circ = \frac{a^2+b^2}{2}$ | 2. $\sin^2 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4}$ | 3. $\cos^2 35^\circ = ab$ |
| 4. $\tan^2 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4ab}$ | 5. $\cos 70^\circ = (a+b)^2 - 1$ | |

6. ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์อยู่บนระนาบเดียวกัน โดยที่ $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = \sqrt{2}|\vec{w}|$ และ $|\vec{v}| = \sqrt{3}|\vec{w}|$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\sin \theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 5. $\frac{1}{3}$

7. กำหนดให้ $0 < \theta < 90^\circ$ ถ้า $m = \frac{1}{4}(1 + \sin \theta) \cot \theta$ และ $n = \frac{1}{4}(1 - \sin \theta) \cot \theta$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(m^2 - n^2)^2 = mn$

(ข) $\sin \theta = \frac{m-n}{m+n}$

(ค) $m^2 + n^2 = \frac{1}{8} \cot^2 \theta \cos^2 \theta$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด 2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

8. ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นข้อมูลที่เรียงค่าจากน้อยไปหามาก โดยมีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 15 และให้ $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, 9$ ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_9$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{55}{3}$ แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3, \dots, x_{10} + 10$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 23.5 2. 28 3. 29 4. $\frac{88}{3}$ 5. $\frac{100}{3}$

9. ให้ L เป็นจำนวนจริงบวก และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ และ $\sum_{n=1}^3 a_n = \frac{L}{3}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. $a_4 = \frac{2}{3}a_1$
2. $a_{14} = \frac{16}{81}a_2$
3. $3(a_7 + a_8 + a_9) = 2(a_4 + a_5 + a_6)$
4. $\sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16}{81}L$
5. $\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8}{27}L$

10. ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ เมื่อ $k > 0$ ให้ T เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $A(-5, 4)$ และสัมผัสวงกลมที่จุด B โดยระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ 1 หน่วย ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C แกนสังยุคยาว $2k$ หน่วย และขนานกับแกน x และเส้นกำกับเส้นหนึ่งผ่านจุด A และจุด C แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 - 25y^2 + 250y - 600 = 0$
2. $x^2 - 25y^2 - 250y + 624 = 0$
3. $x^2 - 25y^2 - 250y + 650 = 0$
4. $25x^2 - y^2 + 10y + 50 = 0$
5. $25x^2 - y^2 + 10y - 50 = 0$

11. ให้ $x > 0$ และให้ S แทนอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\log x)^n$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $x < 10$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ข) ถ้า $x = 100$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่ออก

(ค) ถ้า $x = \frac{1}{10}$ แล้วผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรม S เท่ากับ -100

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

12. กล้องใบหนึ่งมีบัตร 7 ใบ แต่ละใบเขียนจำนวน $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ กำกับบนบัตรใบละ 1 จำนวน สุ่มหยิบบัตร 2 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตร 2 ใบ มีผลรวมของจำนวนบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{7}$ 2. $\frac{3}{7}$ 3. $\frac{4}{7}$ 4. $\frac{5}{7}$ 5. $\frac{6}{7}$

13. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี A, B และ C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -21$ และ $\vec{c} \cdot \vec{a} = -10$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7\sqrt{2}$ ตารางหน่วย 2. $8\sqrt{2}$ ตารางหน่วย 3. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ตารางหน่วย
4. $5\sqrt{3}$ ตารางหน่วย 5. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

14. กำหนดให้ข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ และข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{10}$ โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $y_i = 2x_i + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 10$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก) ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่ามากกว่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 1
(ข) สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าน้อยกว่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 1
(ค) ถ้าแต่ละ x_i มีค่าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าเพิ่มขึ้น

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด 2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

15. กำหนดให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(AB - BA) = 0$

(ข) ถ้า $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) = 0$ แล้ว $\det(A + B) \neq 0$

(ค) ถ้า $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ และเมทริกซ์ $A + B$ มีอินเวอร์สการคูณ

แล้ว $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

16. ให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่ง มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4$ และสมการของแกนสมมาตรคือ $y = 3$

ถ้า P มีเส้นไดเรกตริกซ์เป็นเส้นตรงเดียวกันกับเส้นไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$

แล้วพาราโบลา P ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-7, 1)$
2. $(-4, 0)$
3. $(1, -1)$
4. $(2, -4)$
5. $(4, -5)$

17. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้ากราฟของ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ผ่านจุด $(0, 1)$, $(1, 3)$ และจุด $(2, 2)$

แล้วพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นตรง $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{2}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย
3. 3 ตารางหน่วย
4. $\frac{7}{2}$ ตารางหน่วย
5. 5 ตารางหน่วย

18. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^2 + 2|x - 3| - 9 > 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x - 3| < 2$

แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|------------------|-------------------|--------------|
| 1. $(4, \infty)$ | 2. $(-\infty, 1)$ | 3. $(-1, 3)$ |
| 4. $(3, 6)$ | 5. $(0, 4)$ | |

19. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ให้ $P(x)$ แทน $|x| \geq x$ และ $Q(x)$ แทน $|x| < |x + 1| + 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ข) ประพจน์ $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

(ค) ประพจน์ $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|--|--|
| 1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด | 2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด |
| 3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด | 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ |
| 5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ | |

20. ถ้าคะแนนสอบวิชาหนึ่งของนักเรียนจำนวน 80 คน มีการแจกแจงปกติ และมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{1}{3}$ มีนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้ 39 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 และมีนักเรียนจำนวน 60 คนที่มีคะแนนสอบมากกว่า 15 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------------|---------------|---------------|
| 1. 9.5 คะแนน | 2. 10 คะแนน | 3. 10.5 คะแนน |
| 4. 11 คะแนน | 5. 11.5 คะแนน | |

21. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $r = \{(x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{32x - 16x^2}\}$

ถ้า A และ B เป็นโดเมนและเรนจ์ของ r ตามลำดับ แล้ว $B - A$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 2)$
2. $(0, 3)$
3. $(1, 4)$
4. $(2, 6)$
5. $(3, \infty)$

22. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(x^2 - 2x - 16) \log_2(2 - \sqrt{3}) < \log_2(2 + \sqrt{3})$

แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$
3. $(-4, 3)$
4. $(-3, 6)$
5. $(-1, 9)$

23. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน มีนิยามโดย

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1| \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a + b = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a) + (f \circ g)(b)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.4
2. 1.8
3. 2.4
4. 2.8
5. 3.4

- แล้วค่าของ xy เท่ากับข้อใดต่อไปน้

1. 2

2. 3

3. 3.5

4. 5

5. 7.5

- แล้วค่าของ $f(2.4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3.2

2. 2.1

3. 2

4. 1.1

5. 1

- ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10.5

2. 14.25

3. 20.25

4. 21,25

5. 30.5

27. ให้ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5 รูป มีข้อมูล ดังนี้

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
ความกว้าง (x)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ความยาว (y)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

โดยที่ $0 < x_i \leq 10$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความกว้างของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 5 หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความยาวของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 8 หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 51.8 ตารางหน่วย และความแปรปรวนของความกว้างเท่ากับ 12

สมมติว่ากราฟแผนภาพการกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ความกว้างและความยาว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมมีความกว้าง 2 หน่วย แล้วความยาว (โดยประมาณ) ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5.05 หน่วย
2. 5.55 หน่วย
3. 5.75 หน่วย
4. 6.05 หน่วย
5. 6.55 หน่วย

28. นิยาม $a * b = 1 + ab$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a * (1 * a) = (a * 1) * a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

(ข) $a * (b * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b และ c

(ค) $((1 * 2) * 3) * 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

29. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x + y + z = 15$ และสอดคล้องกับ $(z + 1)^x = y^{2x}$

และ $(0.1)^z = (0.01)^x$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x < y < z$
2. $y < x < z$
3. $x < z < y$
4. $y < z < x$
5. $z < y < x$

30. กำหนดให้เส้นตรง L ผ่านจุด $A(2,0)$ และจุด $B(-4, 8)$ ให้เส้นตรง M ผ่านจุด B และจุด $C(-a, 0)$ เมื่อ $a > 0$ ถ้าระยะระหว่างจุด C กับเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{48}{5}$ หน่วย แล้วระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด $(0, 0)$ กับเส้นตรง M เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 7 หน่วย
 2. 8 หน่วย
 3. 10.5 หน่วย
 4. 13.5 หน่วย
 5. 15 หน่วย

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_2 x + \log_3 x \geq (\log_2 x)(\log_3 x)$ และให้ a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต $A \cap [0, 9]$ และให้ b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $A \cap [0, 9]$ ค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

32. มีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกแก้วสีแดง 2 ลูก ลูกแก้วสีเขียว 2 ลูก และลูกแก้วสีขาว 3 ลูก ต้องการจัดเรียงลูกแก้วทั้ง 7 ลูกเป็นแถวตรง โดยที่ลูกแก้วสองลูกใดๆ ที่เรียงติดกัน มีสีแตกต่างกัน จำนวนวิธีจัดเรียงลูกแก้วดังกล่าว เท่ากับเท่าใด

33. กำหนดให้ $f(x) = 2x + 5$ และ $g(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $(f^{-1} \circ g)(0) = 2$, $\int_0^1 f^{-1}(g(x)) dx = 1$ และ $(f^{-1} \circ g)(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$
แล้วค่าของ $g(1)$ เท่ากับเท่าใด

34. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ ดังนี้
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก
ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของคะแนนสอบนี้เท่ากับ 80.5 คะแนน
และส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 7.5 แล้วจำนวนนักเรียนที่สอบได้
คะแนนมากกว่า 80 คะแนนเท่ากับเท่าใด

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
66 – 70	2
71 – 75	3
76 – 80	a
81 – 85	5
86 – 90	7
91 – 95	b
96 – 100	8

35. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 74 คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 97.73 และนักเรียนที่สอบได้คะแนน 53 คะแนน จะตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 6.68 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด
กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3413	0.4332	0.4773	0.4938

36. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม ให้ $f: I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(n) = \begin{cases} (f \circ f)(n-4) & , n > 60 \\ n+3 & , n \leq 60 \end{cases}$
ค่าของ $f(f(f(60)))$ เท่ากับเท่าใด

37. กำหนดให้ $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ b & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 9 \\ a \\ -10 \end{bmatrix}$
เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det A = 15$ และ $y = 1$ เป็นคำตอบของระบบสมการนี้
แล้ว $(a-b)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

38. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x - 3^{(x+1)}}{\sqrt[3]{x-2} - 1}$ เท่ากับเท่าใด

39. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(1+i)\bar{z} + (3-i)z = 6+2i$

เมื่อ $i^2 = -1$ และ $\bar{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z ค่าของ $|(z-\bar{z})(z+\bar{z})|$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_8 = 36$

ถ้า $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = 3$ แล้ว n เท่ากับเท่าใด

41. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 5} & , x \geq a \\ \frac{15}{\sqrt{x^2 + 5}} & , x < a \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(a) + f(-a)$ เท่ากับเท่าใด

42. ถ้า $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos^2 \theta + \frac{\tan \theta}{\operatorname{cosec} 2\theta}$ เท่ากับเท่าใด

43. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $4^x - 4(4^{\sqrt{x}}) = 3(2^{x+\sqrt{x}})$
ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

44. ผลการสำรวจกลุ่มคนจำนวน 120 คน เกี่ยวกับสายตาปกติและสายตาสั้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนคนที่มีสายตาปกติต่อจำนวนคนที่มีสายตาสั้นเป็น 3:2 ในกลุ่มคนที่มีสายตาปกติ มีอัตราส่วนจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายเป็น 5:1 ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนเด็กต่อจำนวนผู้ใหญ่ เป็น 1:3 ผลรวมของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาปกติและจำนวนเด็กที่มีสายตาสั้นเท่ากับเท่าใด

45. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก กำหนดให้ $P = ax - 15y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์

โดยมีข้อสมการข้อจำกัด ดังนี้ $3x + by \geq 9$

$$3x + 2by \leq 18$$

$$1 \leq x \leq 5 \text{ และ } y \geq 0$$

ถ้าค่าของ P มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ -8.25 และ ค่าของ P มีค่ามากที่สุด เท่ากับ 15

แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 5	11. 3	21. 4	31. 7	41. 10
2. 4	12. 4	22. 1	32. 38	42. 2.5
3. 2	13. 5	23. 3	33. 6	43. 4
4. 2	14. 5	24. 2	34. 24	44. 72
5. 3	15. 5	25. 5	35. 62	45. 109
6. 3	16. 5	26. 3	36. 63	
7. 1	17. 3	27. 1	37. 9	
8. 1	18. 4	28. 2	38. 81	
9. 4	19. 3	29. 2	39. 4	
10. 1	20. 4	30. 2	40. 52	

แนวคิด

1. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A - B = \emptyset$ แล้ว $A = B$

(ข) ถ้า $C - (A \cap B) = C - B$ แล้ว $A \subset B$

(ค) $A \cap B \cap C = [(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cap B) \cup C]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

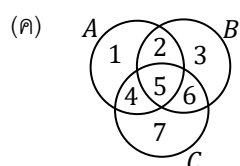
ตอบ 5

(ก) ลบ คือการกรอออก $\rightarrow$ ถ้า B มีทุกตัวใน A ก็จะทำให้ $A - B = \emptyset$ ได้

เช่น $\{1\} - \{1, 2\} = \emptyset$ แต่ $\{1\} \neq \{1, 2\} \rightarrow$ (ก) ผิด

(ข) ลองหาตัวอย่างค้านดู จะเห็นว่าถ้า $C = \emptyset$ เอาไปลบกับอะไรก็ได้ $\emptyset$ โดยที่ A กับ B จะเป็นอะไรก็ได้

เช่น ให้ $C = \emptyset, A = \{1\}, B = \{2\}$ จะได้ $C - (A \cap B) = C - B$ แต่ $\{1\} \neq \{2\} \rightarrow$ (ข) ผิด

$$\begin{aligned} \emptyset - (\{1\} \cap \{2\}) &= \emptyset - \{2\} \\ \emptyset - \emptyset &= \emptyset - \{2\} \\ \emptyset &= \emptyset \end{aligned}$$


กำหนดสมาชิกตัวแทนให้แต่ละส่วน ดังรูป

จะได้ $A \cap B \cap C = [(A \cup B) \cap C] \cap [(A \cap B) \cup C]$

$$\begin{aligned} \{5\} &= [\{1,2,3,4,5,6\} \cap \{4,5,6,7\}] \cap [\{2,5\} \cup \{4,5,6,7\}] \\ \{5\} &= \{4,5,6\} \cap \{2,4,5,6,7\} \\ \{5\} &= \{4,5,6\} \rightarrow \text{(ค) ผิด} \end{aligned}$$

2. จากการสำรวจนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 80 คน เกี่ยวกับการเป็นสมาชิกของชมรม 3 ชมรม คือ ชมรมคณิตศาสตร์ ชมรมการแสดง และชมรมกีฬา ปรากฏว่ามี 30 คน เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ โดยในจำนวนนี้มีนักเรียน 20 คน เท่านั้นที่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์เพียงชมรมเดียว มี 5 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงและชมรมกีฬา แต่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมคณิตศาสตร์ และมี 10 คน ที่ไม่เป็นสมาชิกของชมรมใดเลย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) มี 15 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมอย่างน้อย 2 ชมรม

(ข) มี 55 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมใดชมรมหนึ่งเพียง 1 ชมรมเท่านั้น

(ค) มี 50 คน ที่เป็นสมาชิกของชมรมการแสดงหรือชมรมกีฬา

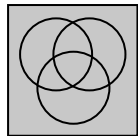
ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 4

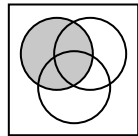
จากข้อมูลที่ได้ สามารถวาดแผนภาพได้ดังนี้ (M = คณิต , D = การแสดง , S = กีฬา)

ทั้งหมด = 80



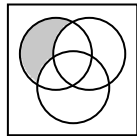
...(1)

$M = 30$



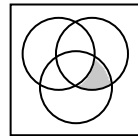
...(2)

M อย่างเดียว = 20



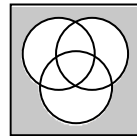
...(3)

D และ S แต่ไม่ $M = 5$



...(4)

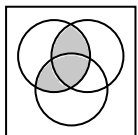
ไม่เลย = 10



...(5)

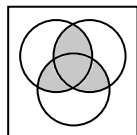
(ก)

(2) - (3)



$30 - 20 = 10$... (6)

(6) + (4)

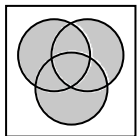


$10 + 5 = 15$... (7)

→ จากรูปที่ (7) จะได้ (ก) ถูก

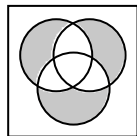
(ข)

(1) - (5)



$80 - 10 = 70$... (8)

(8) - (7)

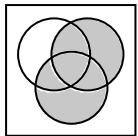


$70 - 15 = 55$... (9)

→ จากรูปที่ (9) จะได้ (ข) ถูก

(ค)

(8) - (3)



$70 - 20 = 50$... (10)

→ จากรูปที่ (10) จะได้ (ค) ถูก

3. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ โดยที่ $[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \wedge q$ มีค่าความจริงเป็น จริง
 ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น เท็จ

1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)$
4. $q \rightarrow (\sim p \wedge r)$
5. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$

ตอบ 2

$[p \rightarrow (q \rightarrow \sim r)] \wedge q$ เป็นจริง แสดงว่า $p \rightarrow (q \rightarrow \sim r) \equiv T$ และ $q \equiv T$

$$\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q \\ \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \end{array}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sim p \vee \sim q \vee \sim r \equiv T \\ \sim(p \wedge q \wedge r) \equiv T \\ p \wedge q \wedge r \equiv F \\ p \wedge T \wedge r \equiv F \\ p \wedge r \equiv F \end{array}$$

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $q \equiv T$ และ $p \wedge r \equiv F$ (อาจเป็น $T \wedge F, F \wedge T$, หรือ $F \wedge F$ ก็ได้)

1. $(p \wedge q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
 $(p \wedge T) \leftrightarrow F$
 $p \leftrightarrow F$
 เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv F$
2. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge r)$
 $(p \vee T) \leftrightarrow F$
 $T \leftrightarrow F$
 F
3. $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \vee r)$
 $(p \rightarrow T) \leftrightarrow (p \vee r)$
 $T \leftrightarrow (p \vee r)$
 เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv T$
4. $q \rightarrow (\sim p \wedge r)$
 $T \rightarrow (\sim p \wedge r)$
 เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv F, r \equiv T$
5. $\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge \sim r)$
 $\sim(p \wedge T) \rightarrow (T \wedge \sim r)$
 $\sim(p) \rightarrow (\sim r)$
 เป็น T ได้ เมื่อ $p \equiv T$

4. ค่าของ $2\left(\arctan \frac{1}{8} - \arctan \frac{2}{3}\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\arcsin \frac{4}{5}$
2. $-\arcsin \frac{4}{5}$
3. $\pi - \arcsin \frac{4}{5}$
4. $-\arctan \frac{3}{4}$
5. $\pi - \arctan \frac{3}{4}$

ตอบ 2

ให้ $A = \arctan \frac{1}{8}$ ให้ $B = \arctan \frac{2}{3}$ $\rightarrow$ จะได้ $2\left(\arctan \frac{1}{8} - \arctan \frac{2}{3}\right) = 2(A - B)$
 $\tan A = \frac{1}{8}$ $\tan B = \frac{2}{3}$

จากสูตร จะได้ $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{8} - \frac{2}{3}}{1 + \left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{-\frac{13}{24}}{\frac{26}{24}} = -\frac{1}{2}$

ดังนั้น $\tan 2(A - B) = \frac{2 \tan(A - B)}{1 - \tan^2(A - B)} = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$

ถึงจะรู้ว่า $\tan 2(A - B) = -\frac{4}{3}$ แต่ยังไม่สรุปว่า $2(A - B) = \arctan -\frac{4}{3}$ ไม่ได้

เพราะยังไม่รู้ว่า $2(A - B)$ อยู่ในเรนจ์ของ $\arctan$ หรือไม่ $\rightarrow$ ต้องหาควอดรันต์ของ $2(A - B)$ ก่อน

เนื่องจาก $0 < \frac{1}{8} < \frac{2}{3} < 1$ ดังนั้น $\arctan 0 < \arctan \frac{1}{8} < \arctan \frac{2}{3} < \arctan 1$

$$0 < A < B < 45^\circ$$

จากขอบเขตที่ได้ จะเห็นว่า $A < B$ และต่างกันไม่เกิน 45° ซึ่งจะได้ $-45^\circ < A - B < 0$
 $-90^\circ < 2(A - B) < 0$

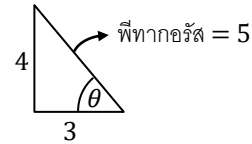
ดังนั้น $2(A - B)$ อยู่ในเรนจ์ของ $\arctan$ จึงสรุปได้ว่า $2(A - B) = \arctan -\frac{4}{3}$ ซึ่งไม่ตรงกับตัวเลือกไหนเลย

ถัดไป จะลองเปลี่ยน $\arctan -\frac{4}{3}$ เป็น $\arcsin$ ให้เหมือนตัวเลือกข้อ 1. ถึง 3. ดู

คิดค่าบวกก่อน : ให้ $\theta = \arctan \frac{4}{3}$ จะได้ $\tan \theta = \frac{4}{3} = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} \rightarrow$ วาดได้ดังรูป

$$\text{จะได้ } \sin \theta = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}} = \frac{4}{5} \text{ ดังนั้น } \theta = \arcsin \frac{4}{5}$$

$$\text{ดังนั้น } \arctan -\frac{4}{3} = -\arctan \frac{4}{3} = -\arcsin \frac{4}{5}$$



5. กำหนดให้ $a = \cos 50^\circ + \cos 20^\circ$ และ $b = \sin 50^\circ - \sin 20^\circ$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. $\sin 20^\circ = \frac{a^2+b^2}{2}$
2. $\sin^2 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4}$
3. $\cos^2 35^\circ = ab$
4. $\tan^2 35^\circ = \frac{a^2+b^2}{4ab}$
5. $\cos 70^\circ = (a+b)^2 - 1$

ตอบ 3

$$\begin{aligned} \text{จัดรูป จะได้} \quad a &= \cos 50^\circ + \cos 20^\circ & b &= \sin 50^\circ - \sin 20^\circ \\ &= 2 \cos \frac{50^\circ+20^\circ}{2} \cos \frac{50^\circ-20^\circ}{2} & &= 2 \cos \frac{50^\circ+20^\circ}{2} \sin \frac{50^\circ-20^\circ}{2} \\ &= 2 \cos 35^\circ \cos 15^\circ & &= 2 \cos 35^\circ \sin 15^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4 \cos^2 35^\circ \cos^2 15^\circ + 4 \cos^2 35^\circ \sin^2 15^\circ & ab &= 4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ \cos^2 35^\circ \\ &= 4 \cos^2 35^\circ (\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) & &= 2(2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ) \cos^2 35^\circ \\ &= 4 \cos^2 35^\circ & &= 2 \sin 30^\circ \cos^2 35^\circ \\ & & &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1. \quad \sin 20^\circ &= \frac{a^2+b^2}{2} & 2. \quad \sin^2 35^\circ &= \frac{a^2+b^2}{4} & 3. \quad \cos^2 35^\circ &= ab \\ \cos 70^\circ &= \frac{4 \cos^2 35^\circ}{2} & \sin^2 35^\circ &= \frac{4 \cos^2 35^\circ}{4} & \cos^2 35^\circ &= \cos^2 35^\circ \quad \checkmark \\ 2 \cos^2 35^\circ - 1 &= 2 \cos^2 35^\circ & \sin^2 35^\circ &= \cos^2 35^\circ \quad \times \\ -1 &= 0 \quad \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad \tan^2 35^\circ &= \frac{a^2+b^2}{4ab} & 5. \quad \cos 70^\circ &= (a+b)^2 - 1 \\ \tan^2 35^\circ &= \frac{4 \cos^2 35^\circ}{4 \cos^2 35^\circ} & 2 \cos^2 35^\circ - 1 &= a^2 + b^2 + 2ab - 1 \\ \tan^2 35^\circ &= 1 \quad \times & 2 \cos^2 35^\circ &= 4 \cos^2 35^\circ + 2 \cos^2 35^\circ \\ & & 2 \cos^2 35^\circ &= 6 \cos^2 35^\circ \quad \times \end{aligned}$$

6. ให้ $\vec{u}$, $\vec{v}$ และ $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่เท่ากับเวกเตอร์ศูนย์อยู่บนระนาบเดียวกัน โดยที่ $\vec{u} - \vec{v} - \vec{w} = \vec{0}$, $|\vec{u}| = \sqrt{2}|\vec{w}|$ และ $|\vec{v}| = \sqrt{3}|\vec{w}|$ ถ้า θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ แล้ว $\sin \theta$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$
2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{\sqrt{3}}{3}$
4. $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
5. $\frac{1}{3}$

ตอบ 3

$$\begin{aligned} \vec{u} - \vec{v} - \vec{w} &= \vec{0} \\ \vec{u} - \vec{v} &= \vec{w} \\ |\vec{u} - \vec{v}|^2 &= |\vec{w}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{w}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos \theta &= |\vec{w}|^2 \\ (\sqrt{2}|\vec{w}|)^2 + (\sqrt{3}|\vec{w}|)^2 - 2(\sqrt{2}|\vec{w}|)(\sqrt{3}|\vec{w}|)\cos \theta &= |\vec{w}|^2 \\ 2 + 3 - 2\sqrt{6}\cos \theta &= 1 \\ 4 - 2\sqrt{6}\cos \theta &= 2\sqrt{6}\cos \theta \\ \frac{2}{\sqrt{6}} &= \cos \theta \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{หารตลอดด้วย } |\vec{w}|^2$$

ถัดไป หา $\sin \theta$ จากสูตร $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

$$\sin^2 \theta + \left(\frac{2}{\sqrt{6}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 \theta = 1 - \frac{4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

แต่มุมระหว่างเวกเตอร์อยู่ในช่วง 0° ถึง 180° ซึ่งมีค่า $\sin$ เป็นบวก $\rightarrow$ จะได้ $\sin \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

7. กำหนดให้ $0 < \theta < 90^\circ$ ถ้า $m = \frac{1}{4}(1 + \sin \theta) \cot \theta$ และ $n = \frac{1}{4}(1 - \sin \theta) \cot \theta$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(m^2 - n^2)^2 = mn$

(ข) $\sin \theta = \frac{m-n}{m+n}$

(ค) $m^2 + n^2 = \frac{1}{8} \cot^2 \theta \cos^2 \theta$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 1

$$\begin{aligned} m+n &= \frac{1}{4}(1+\sin \theta) \cot \theta + \frac{1}{4}(1-\sin \theta) \cot \theta & mn &= \frac{1}{16}(1+\sin \theta)(1-\sin \theta) \cot^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} \cot \theta (1+\sin \theta + 1 - \sin \theta) & &= \frac{1}{16}(1-\sin^2 \theta) \cot^2 \theta \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (2) = \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} & &= \frac{1}{16} \cos^2 \theta \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{\cos^4 \theta}{16 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m-n &= \frac{1}{4}(1+\sin \theta) \cot \theta - \frac{1}{4}(1-\sin \theta) \cot \theta \\ &= \frac{1}{4} \cot \theta (1+\sin \theta - (1-\sin \theta)) \\ &= \frac{1}{4} \cot \theta (1+\sin \theta - 1 + \sin \theta) \\ &= \frac{1}{4} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (2 \sin \theta) = \frac{\cos \theta}{2} \end{aligned}$$

ก. $(m^2 - n^2)^2 = mn$
 $((m-n)(m+n))^2 = mn$
 $\left(\frac{\cos \theta}{2} \cdot \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta}\right)^2 = \frac{\cos^4 \theta}{16 \sin^2 \theta} \quad \checkmark$

ข. $\sin \theta = \frac{m-n}{m+n}$
 $\sin \theta (m+n) = m-n$
 $\sin \theta \frac{\cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{2} \quad \checkmark$

ค. $m^2 + n^2 = \frac{1}{8} \cot^2 \theta \cos^2 \theta$
 $m^2 + n^2 - 2mn + 2mn = \frac{1}{8} \cot^2 \theta \cos^2 \theta$
 $(m-n)^2 + 2mn = \frac{1}{8} \cot^2 \theta \cos^2 \theta$
 $\left(\frac{\cos \theta}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\cos^4 \theta}{16 \sin^2 \theta}\right) = \frac{1}{8} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2 \cos^2 \theta$
 $\frac{\cos^2 \theta}{4} + \frac{\cos^4 \theta}{8 \sin^2 \theta} = \frac{\cos^4 \theta}{8 \sin^2 \theta}$
 $\frac{\cos^4 \theta}{4} = 0 \quad \times$

8. ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นข้อมูลที่เรียงค่าจากน้อยไปหามาก โดยมีค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 15

และให้ $y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$ สำหรับ $i = 1, 2, \dots, 9$ ถ้า $y_1, y_2, \dots, y_9$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{55}{3}$ แล้ว
ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3, \dots, x_{10} + 10$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 23.5 2. 28 3. 29 4. $\frac{88}{3}$ 5. $\frac{100}{3}$

ตอบ 1

ค่ากึ่งกลางพิสัยเท่ากับ 15 จะได้ $\frac{x_1 + x_{10}}{2} = 15$

$$x_1 + x_{10} = 30 \quad \dots(1)$$

จาก $y_1, y_2, \dots, y_9$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\frac{55}{3}$ จะได้ $\frac{y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_9}{9} = \frac{55}{3}$

$$y_i = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1}) \quad y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_9 = 165$$

$$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4) + \dots + \frac{1}{2}(x_9 + x_{10}) = 165$$

$$x_1 + x_2 + x_2 + x_3 + x_3 + x_4 + \dots + x_9 + x_{10} = 330$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_9 + x_{10} = 330 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2): 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + \dots + 2x_9 + 2x_{10} = 360$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \dots + x_9 + x_{10} = 180 \quad \dots(*)$$

$$\text{ค่าเฉลี่ยของ } x_1 + 1, x_2 + 2, x_3 + 3, \dots, x_{10} + 10 = \frac{(x_1+1)+(x_2+2)+(x_3+3)+\dots+(x_{10}+10)}{10}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x_1+x_2+x_3+\dots+x_{10}) + (1+2+3+\dots+10)}{10} \\ &= \frac{180 + \frac{10(10+1)}{2}}{10} = 23.5 \end{aligned}$$

9. ให้ L เป็นจำนวนจริงบวก และ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริง

โดยที่ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ และ $\sum_{n=1}^3 a_n = \frac{L}{3}$ ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

1. $a_4 = \frac{2}{3}a_1$

2. $a_{14} = \frac{16}{81}a_2$

3. $3(a_7 + a_8 + a_9) = 2(a_4 + a_5 + a_6)$

4. $\sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16}{81}L$

5. $\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8}{27}L$

ตอบ 4

จาก $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$

$$\frac{a_1}{1-r} = L \quad \dots(1)$$

และจาก $\sum_{n=1}^3 a_n = \frac{L}{3}$

$$\frac{a_1(1-r^3)}{1-r} = \frac{L}{3}$$

$$L(1-r^3) = \frac{L}{3}$$

$$1-r^3 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{2}{3} = r^3 \quad \dots(2)$$

ลำดับ / อนุกรมเรขาคณิต

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$$

1. $a_4 = \frac{2}{3}a_1$

$$a_1 r^3 = \frac{2}{3}a_1$$

$$r^3 = \frac{2}{3} \quad \checkmark$$

(L เป็นบวก จะได้ $a_1 \neq 0$)

2. $a_{14} = \frac{16}{81}a_2$

$$a_1 r^{13} = \frac{16}{81}a_1 r^1$$

$$r^{12} = \frac{16}{81}$$

$$(r^3)^4 = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad 3(a_7 + a_8 + a_9) &= 2(a_4 + a_5 + a_6) \\
 3(a_1 r^6 + a_1 r^7 + a_1 r^8) &= 2(a_1 r^3 + a_1 r^4 + a_1 r^5) \\
 3a_1 r^6(1 + r + r^2) &= 2a_1 r^3(1 + r + r^2) \\
 3r^3 &= 2 \\
 r^3 &= \frac{2}{3} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

$$4. \quad \sum_{n=7}^{12} a_n = \frac{16}{81} L$$

$$\sum_{n=1}^{12} a_n - \sum_{n=1}^6 a_n = \frac{16}{81} L$$

$$\frac{a_1(1-r^{12})}{1-r} - \frac{a_1(1-r^6)}{1-r} = \frac{16}{81} L$$

$$L(1-r^{12}) - L(1-r^6) = \frac{16}{81} L$$

$$(1-r^{12}) - (1-r^6) = \frac{16}{81}$$

$$1 - (r^3)^4 - 1 + (r^3)^2 = \frac{16}{81}$$

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{81}$$

$$-\frac{16}{81} + \frac{4}{9} = \frac{16}{81} \quad \times$$

$$5. \quad \sum_{n=10}^{\infty} a_n = \frac{8}{27} L$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^9 a_n = \frac{8}{27} L$$

$$L - \frac{a_1(1-r^9)}{1-r} = \frac{8}{27} L$$

$$L - L(1-r^9) = \frac{8}{27} L$$

$$1 - (1-r^9) = \frac{8}{27}$$

$$1 - 1 + (r^3)^3 = \frac{8}{27}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} \quad \checkmark$$

10. ให้ C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 2ky = 0$ เมื่อ $k > 0$ ให้ T เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด A(-5, 4) และสัมผัสวงกลมที่จุด B โดยระยะทางระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับ 1 หน่วย ถ้า H เป็นไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด C แกนสังยุคยาว $2k$ หน่วย และขนานกับแกน x และเส้นกำกับเส้นหนึ่งผ่านจุด A และจุด C แล้วสมการของไฮเพอร์โบลา H ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

$$1. \quad x^2 - 25y^2 + 250y - 600 = 0$$

$$2. \quad x^2 - 25y^2 - 250y + 624 = 0$$

$$3. \quad x^2 - 25y^2 - 250y + 650 = 0$$

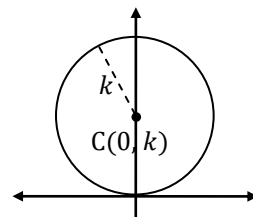
$$4. \quad 25x^2 - y^2 + 10y + 50 = 0$$

$$5. \quad 25x^2 - y^2 + 10y - 50 = 0$$

ตอบ 1

$$\begin{aligned}
 \text{จัดรูปสมการวงกลม} \quad x^2 + y^2 - 2ky &= 0 \\
 x^2 + y^2 - 2ky + k^2 &= k^2 \\
 x^2 + (y - k)^2 &= k^2
 \end{aligned}$$

จะได้จุด ศก. คือ $C(0, k)$ และ รัศมี $= k \rightarrow$ วาดได้ดังรูป

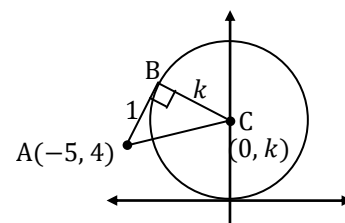


ใส่จุด A(-5, 4) และจุดสัมผัส B ตามโจทย์

จากสมบัติวงกลม จะได้ เส้นสัมผัส $\perp$ รัศมี $\rightarrow \triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก ดังรูป

พีทาโกรัส จะได้ $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$$\begin{aligned}
 1^2 + k^2 &= \sqrt{(0-5)^2 + (k-4)^2}^2 \\
 1 + k^2 &= 25 + k^2 - 8k + 16 \\
 8k &= 40 \\
 k &= 5
 \end{aligned}$$



แทนค่า k จะได้ H มี ศก. อยู่ที $C(0, 5)$ แกนสังยุคยาว $2(5) = 10$ หน่วย และแกนสังยุคขนานแกน x $\rightarrow$ แนวตั้ง

จะได้สมการของ H อยู่ในรูป $\frac{(y-5)^2}{a^2} - \frac{(x-0)^2}{b^2} = 1$ และสมการเส้นกำกับคือ $\frac{y-5}{a} = \pm \frac{x-0}{b}$

แกนตั้งยวดยาว 10 หน่วย $\rightarrow$ จะได้ $2b = 10$ ดังนั้น $b = 5$

เส้นกำกับผ่านจุด $A(-5, 4) \rightarrow$ แทน $x = -5, y = 4$ และ $b = 5$ ในสมการเส้นกำกับ จะได้ $\frac{4-5}{a} = \pm \frac{-5-0}{5}$
 $\pm 1 = a$

แต่ a ต้องเป็นบวก ดังนั้น $a = 1 \rightarrow$ จะได้สมการ H คือ $\frac{(y-5)^2}{1^2} - \frac{(x-0)^2}{5^2} = 1$
 $\frac{y^2-10y+25}{1} - \frac{x^2}{25} = 1$
 $25y^2 - 250y + 625 - x^2 = 25$
 $-x^2 + 25y^2 - 250y + 600 = 0$
 $x^2 - 25y^2 + 250y - 600 = 0$

11. ให้ $x > 0$ และให้ S แทนอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\log x)^n$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $x < 10$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่เข้า

(ข) ถ้า $x = 100$ แล้วอนุกรม S เป็นอนุกรมลู่ออก

(ค) ถ้า $x = \frac{1}{10}$ แล้วผลบวก 100 พจน์แรกของอนุกรม S เท่ากับ -100

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 3

ข้อนี้ต้องระวังว่า $(\log x)^n$ ไม่เหมือนกับ $\log x^n$

$\log x^n$ คือ เอา x มากำลั้ง n ก่อน แล้วค่อยหา $\log$ ซึ่งจะใช้สูตร $\log x^n = n \log x$ ได้

$(\log x)^n$ คือ หา $\log x$ มาก่อน แล้วค่อยยกกำลัง n ซึ่ง $(\log x)^n \neq n \log x$

กระจาย $\sum$ จะได้ $S = (-1)^2(\log x)^1 + (-1)^3(\log x)^2 + (-1)^4(\log x)^3 + (-1)^5(\log x)^4 + \dots$
 $= (\log x)^1 - (\log x)^2 + (\log x)^3 - (\log x)^4 + \dots$

เป็นอนุกรมอนันต์ มี $a_1 = \log x$ และ $r = -\log x \rightarrow$ จะลู่เข้าเมื่อ $|\log x| < 1$

ก. ถ้า $x < 10$ จะได้ $\log x < \log 10$ แต่ก็สรุปไม่ได้ว่า $|\log x| < 1$ (เช่นเมื่อ $\log x$ ติดลบมากๆ)
 $\log x < 1$

เช่น ถ้า $x = \frac{1}{100}$ จะได้ $|\log x| = |-\log 10^{-2}| = |-(-2)| = 2 > 1 \rightarrow$ ลู่ออก ก. ผิด

ข. ถ้า $x = 100$ จะได้ $|\log x| = |2| = 2 > 1 \rightarrow$ ลู่ออก ข. ถูก

ค. (จริงๆ ไม่ต้องทำ ค. แล้วก็ได้ เพราะ ก. ผิด ข. ถูก จะตอบ 3 ได้เลย)

ถ้า $x = \frac{1}{10}$ จะได้ $r = -\log \frac{1}{10} = 1 \rightarrow$ แสดงว่าทุกพจน์เท่ากันหมด (เพราะคูณเพิ่มทีละ 1)

ดังนั้น จะได้ผลบวก 100 พจน์ $= 100a_1 = 100(\log \frac{1}{10}) = -100 \rightarrow$ ค. ถูก

12. กล่องใบหนึ่งมีบัตร 7 ใบ แต่ละใบเขียนจำนวน $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ กำกับบนบัตรใบละ 1 จำนวน สุ่มหยิบบัตร 2 ใบ พร้อมกันจากกล่องใบนี้ ความน่าจะเป็นที่จะได้บัตร 2 ใบ มีผลรวมของจำนวนบนบัตรทั้งสองเป็นจำนวนคู่หรือเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{7}$ 2. $\frac{3}{7}$ 3. $\frac{4}{7}$ 4. $\frac{5}{7}$ 5. $\frac{6}{7}$

ตอบ 4

สุ่มหยิบ 2 ใบ จาก 7 ใบ $\rightarrow$ จำนวนแบบทั้งหมด $n(S) = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$ แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ จะเห็นว่า นับแบบตรงข้าม จะง่ายกว่า

ตรงข้ามกับ “ผลรวมเป็นคู่ หรือ เป็นบวก” คือ “ผลรวมเป็นคี่ และ ≤ 0 ”

ซึ่งจะมี 6 แบบ ดังตาราง

ดังนั้น $n(\text{เป็นคู่ หรือ เป็นบวก}) = \text{ทั้งหมด} - n(\text{เป็นคี่ และ } \leq 0)$

$$= 21 - 6 = 15 \text{ แบบ}$$

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$

-3	$\begin{cases} -2 \\ 0 \\ 2 \end{cases}$	$\begin{cases} \rightarrow -5 \\ \rightarrow -3 \\ \rightarrow -1 \end{cases}$
-2	$\begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$	$\begin{cases} \rightarrow -3 \\ \rightarrow -1 \end{cases}$
-1	0	$\rightarrow -1$

13. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยมี A, B และ C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ให้ $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ และ $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ ถ้า $\vec{a} \cdot \vec{b} = -15$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = -21$ และ $\vec{c} \cdot \vec{a} = -10$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $7\sqrt{2}$ ตารางหน่วย 2. $8\sqrt{2}$ ตารางหน่วย 3. $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ ตารางหน่วย
4. $5\sqrt{3}$ ตารางหน่วย 5. $\frac{15\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

ตอบ 5

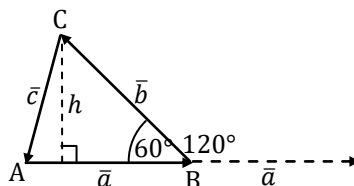
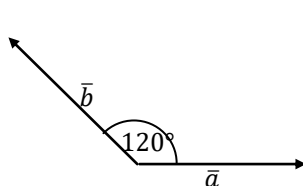
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}$ วนกลับมาที่ A ดังนั้น $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

เอา $\vec{a}$ ดอทตลอด $\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= \vec{a} \cdot \vec{0} \\ \vec{a} ^2 + (-15) + (-10) &= 0 \\ \vec{a} ^2 &= 25 \\ \vec{a} &= 5 \end{aligned}$	เอา $\vec{b}$ ดอทตลอด $\begin{aligned} \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} &= \vec{b} \cdot \vec{0} \\ (-15) + \vec{b} ^2 + (-21) &= 0 \\ \vec{b} ^2 &= 36 \\ \vec{b} &= 6 \end{aligned}$
---	---

เอา $|\vec{a}|$ และ $|\vec{b}|$ ที่ได้ไปแทนในสูตร

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \\ -15 &= (5)(6) \cos \theta \\ -\frac{1}{2} &= \cos \theta \\ 120^\circ &= \theta \end{aligned}$$

แต่ 120° จะเป็นมุมแบบหัวชนหัว ในขณะที่ $\triangle ABC$ เป็นแบบหัวชนหาง $\rightarrow$ จะได้มุมใน $\triangle$ คือ 60° ดังรูป



$$\begin{aligned} \sin 60^\circ &= \frac{h}{|\vec{b}|} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} &= \frac{h}{6} \\ 3\sqrt{3} &= h \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ พื้นที่ } \triangle ABC = \frac{1}{2} \times |\vec{a}| \times h = \frac{1}{2} \times 5 \times 3\sqrt{3} = \frac{15\sqrt{3}}{2} \text{ ตร.หน่วย}$$

14. กำหนดให้ข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ และข้อมูลชุดที่ 2 คือ $y_1, y_2, y_3, \dots, y_{10}$

โดยที่ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $y_i = 2x_i + 1$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, \dots, 10$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่ามากกว่าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของข้อมูลชุดที่ 1

(ข) สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าน้อยกว่าสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 1

(ค) ถ้าแต่ละ x_i มีค่าเพิ่มขึ้น 1 หน่วย แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าเพิ่มขึ้น

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 5

ก. การคูณ 2 จะทำให้ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (MD) เพิ่มขึ้นเป็น 2 เท่าของของเดิม แต่การบวก 1 จะไม่ทำให้ MD เปลี่ยน ดังนั้น ข้อมูล $y_i = 2x_i + 1$ จะมี MD เป็น 2 เท่าของ ข้อมูล x_i (แต่ไม่บวก 1)

แต่ “เป็น 2 เท่า” ไม่ได้แปลว่า “มากกว่า” เสมอไป เช่น 2 เท่าของ 0 ยังคงเท่ากับ 0

ซึ่งในกรณีที่ x_i ทุกตัวมีค่าเท่ากัน จะได้ $MD = 0$ ทำให้ข้อมูล y_i มี $MD = 0$ เท่ากับ MD ของข้อมูล $x_i \rightarrow$ ก. ผิด (ถ้าข้อนี้โจทย์กำหนดให้ x_i ไม่ได้เป็นค่าเดียวกันหมดทั้ง 10 ตัว ข้อนี้จะถูก)

ข. สปส การแปรผัน = $\frac{s}{\bar{x}}$

s จะคล้ายๆ MD คือ การบวกไม่ทำให้ s เปลี่ยน $\rightarrow s_y = 2s_x$

แต่การคูณ 2 บวก 1 จะทำให้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต เปลี่ยนไปแบบ คูณ 2 บวก 1 ด้วย $\rightarrow \bar{y} = 2\bar{x} + 1$

เนื่องจาก x_i เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ $\bar{x}$ และ $\bar{y}$ เป็นบวกด้วย

$$\text{ดังนั้น } \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{2s_x}{2\bar{x}+1} \leq \frac{2s_x}{2\bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}}$$

ตัวส่วนน้อยลง ค่าจะมากขึ้น
แต่ยังเท่ากันได้ ถ้าเศษ = 0

$\rightarrow$ จะเห็นว่า สปส การแปรผันของข้อมูลทั้งสอง ยังเท่ากันได้ อยู่ ในกรณีที่ $s_x = 0$ (เมื่อ x_i ทุกตัวมีค่าเท่ากัน) $\rightarrow$ ข. ผิด

(ถ้าข้อนี้โจทย์กำหนดให้ x_i ไม่ได้เป็นค่าเดียวกันหมดทั้ง 10 ตัว ข้อนี้จะถูก)

ค. การบวกด้วยค่าคงที่ จะไม่ทำให้ s เปลี่ยน $\rightarrow$ ค. ผิด

15. กำหนดให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(AB - BA) = 0$

(ข) ถ้า $\det(A) \neq 0$ และ $\det(B) = 0$ แล้ว $\det(A + B) \neq 0$

(ค) ถ้า $\det(A) \neq 0$, $\det(B) \neq 0$ และเมทริกซ์ $A + B$ มีอินเวอร์สการคูณ

แล้ว $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
- ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
- ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 5

$\det$ ไม่สามารถกระจายในการบวกได้ ดังนั้น ก. ข. ค. มีแนวโน้มที่จะผิดสูง $\rightarrow$ จะเน้นหาเมทริกซ์มาจับผิดดู

ก. ให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ จะได้ $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$
 $BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$AB - BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 9 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det \text{ ได้ } (-3)(3) - (9)(-9) \neq 0 \rightarrow \text{ก. ผิด}$

ข. ให้ $A = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det A = \det I = 1 \neq 0$

ให้ $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det B = (-1)(0) - (0)(0) = 0$

จะได้ $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det \text{ ได้ } (0)(1) - (0)(0) = 0 \rightarrow \text{ข. ผิด}$

ค. ให้ $A = B = I$ แทนใน ค. จะได้ $(A + B)^{-1} = B^{-1} + A^{-1}$
 $(I + I)^{-1} = I^{-1} + I^{-1}$
 $(2I)^{-1} = I + I$
 $\frac{1}{2}I^{-1} = 2I$
 $\frac{1}{2}I = 2I \rightarrow \text{ค. ผิด}$

16. ให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่ง มีโฟกัสอยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4$ และสมการของแกนสมมาตรคือ $y = 3$

ถ้า P มีเส้นไดเรกทริกซ์เป็นเส้นตรงเดียวกันกับเส้นไดเรกทริกซ์ของพาราโบลา $y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$

แล้วพาราโบลา P ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

- $(-7, 1)$
- $(-4, 0)$
- $(1, -1)$
- $(2, -4)$
- $(4, -5)$

ตอบ 5

จุด F อยู่บนเส้นตรง $x + 2y = 4 \rightarrow$ จุด F ต้องแทนใน $x + 2y = 4$ แล้วเป็นจริง

แต่ F จะอยู่บนแกนสมมาตร $y = 3$ ด้วย ดังนั้น F จะมีค่า y เท่ากับ 3 $\rightarrow$ แทนในเส้นตรงจะได้ $x + 2(3) = 4$
 $x = -2$

จะได้พิกัด F คือ $(-2, 3)$

ถัดมา หาไดเรกทริกซ์ $\rightarrow$ จัดรูปพาราโบลา $y^2 + 8y - 24x + 16 = 0$
 $y^2 + 8y + 16 = 24x$
 $(y + 4)^2 = 4(6)x$

ตรงกับรูป $(y - k)^2 = 4c(x - h) \rightarrow$ เป็นพาราโบลาเปิดขวา $(h, k) = (0, -4)$ และ $c = 6$

จะได้ เส้นไครเรตริกซ์คือ $x = h - c$

$$= 0 - 6 = -6 \rightarrow \text{เส้นไครเรตริกซ์ของ P คือ } x = -6$$

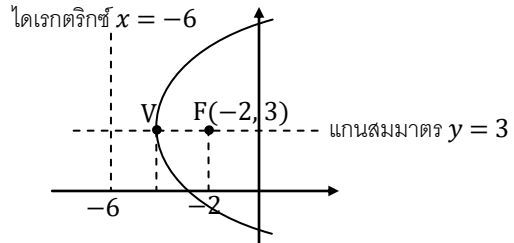
จาก $F(-2, 3)$ และ ไครเรตริกซ์ $x = -6$ จะวาด P ได้ดังรูป

จุดยอด V จะอยู่ตรงกลางระหว่าง F และ ไครเรตริกซ์

$$\rightarrow \frac{(-6) + (-2)}{2} = -4 \text{ ดังนั้น พิกัด } V(h, k) \text{ คือ } (-4, 3)$$

$$\text{และ } c = \text{ระยะระหว่าง V กับ F} = (-2) - (-4) = 2$$

$$\begin{aligned} \text{P เป็นพาราโบลาเปิดขวา} \rightarrow (y - k)^2 &= 4c(x - h) \\ (y - 3)^2 &= 4(2)(x - (-4)) \\ (y - 3)^2 &= 8(x + 4) \end{aligned}$$



ลองแทนจุดในแต่ละตัวเลือก แล้วดูว่าข้อไหนทำให้สมการ $(y - 3)^2 = 8(x + 4)$ เป็นจริง

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\frac{(1 - 3)^2}{4} = -24 \quad \times$ | 2. $\frac{(0 - 3)^2}{9} = 0 \quad \times$ | 3. $\frac{(-1 - 3)^2}{16} = 40 \quad \times$ |
| 4. $\frac{(-4 - 3)^2}{49} = 48 \quad \times$ | 5. $\frac{(-5 - 3)^2}{64} = 64 \quad \checkmark$ | |

17. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง ถ้ากราฟของ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ผ่านจุด $(0, 1)$, $(1, 3)$ และจุด $(2, 2)$

แล้วพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ และเส้นตรง $y = x$ จาก $x = 0$ ถึง $x = 2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------|
| 1. $\frac{5}{2}$ ตารางหน่วย | 2. $\frac{8}{3}$ ตารางหน่วย | 3. 3 ตารางหน่วย |
| 4. $\frac{7}{2}$ ตารางหน่วย | 5. 5 ตารางหน่วย | |

ตอบ 3

กราฟผ่าน $(0, 1), (1, 3), (2, 2) \rightarrow$ แสดงว่าแทนทั้ง 3 จุดในกราฟ $f(x) = ax^2 + bx + c$ แล้วสมการเป็นจริง

$$\begin{aligned} (0, 1) : 1 &= a(0^2) + b(0) + c \\ 1 &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1, 3) : 3 &= a(1^2) + b(1) + c \\ 3 &= a + b + 1 \\ 2 &= a + b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2, 2) : 2 &= a(2^2) + b(2) + c \\ 2 &= 4a + 2b + 1 \\ 1 &= 4a + 2b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 &= -\frac{3}{2} + b \\ \frac{7}{2} &= b \end{aligned}$$

แทนค่า a ใน (1)

$$\begin{aligned} (1) \times 2 : 4 &= 2a + 2b \quad \dots(3) \\ (2) - (3) : -3 &= 2a \\ -\frac{3}{2} &= a \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } f(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1$$

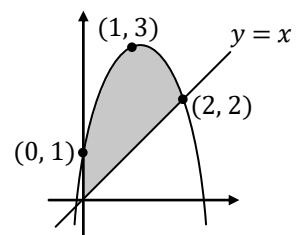
a เป็นลบ จะได้ f เป็นพาราโบลาคว่ำ $\rightarrow$ วาดส่วนที่ปิดล้อมกับเส้นตรง $y = x$ ได้ดังรูป

จะเห็นว่า $x = 0$ ถึง $x = 2$ กราฟพาราโบลาอยู่เหนือเส้นตรงตลอดทั้งช่วง

$$\text{ดังนั้นจะไม่ต้องแบ่งอินทิเกรต จะได้พื้นที่} = \int_0^2 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2}x + 1\right) - (x) \, dx$$

$$= \int_0^2 -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1 \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{5}{4}x^2 + x\right]_0^2 = (-4 + 5 + 2) - (0) = 3$$



18. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^2 + 2|x - 3| - 9 > 0$

และ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $|x - 3| < 2$

แล้ว $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

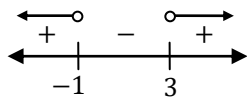
1. $(4, \infty)$
2. $(-\infty, 1)$
3. $(-1, 3)$
4. $(3, 6)$
5. $(0, 4)$

ตอบ 4

หา A จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของ $x - 3$ เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ด้วยสมบัติ $|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$

กรณี $x - 3 < 0$: จะได้ $|x - 3| = -(x - 3)$
 $x < 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2|x - 3| - 9 &> 0 \\ x^2 + 2(-(x - 3)) - 9 &> 0 \\ x^2 - 2x + 6 - 9 &> 0 \\ x^2 - 2x - 3 &> 0 \\ (x + 1)(x - 3) &> 0 \end{aligned}$$

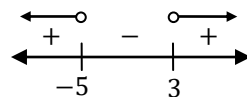


ตัดคำตอบให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขของกรณี ($x < 3$)

จะเหลือคำตอบคือ $(-\infty, -1)$

กรณี $x - 3 \geq 0$: จะได้ $|x - 3| = x - 3$
 $x \geq 3$

$$\begin{aligned} x^2 + 2|x - 3| - 9 &> 0 \\ x^2 + 2(x - 3) - 9 &> 0 \\ x^2 + 2x - 6 - 9 &> 0 \\ x^2 + 2x - 15 &> 0 \\ (x + 5)(x - 3) &> 0 \end{aligned}$$



ตัดคำตอบให้อยู่ภายใต้เงื่อนไขของกรณี ($x \geq 3$)

จะเหลือคำตอบคือ $(3, \infty)$

รวมสองกรณี จะได้ $A = (-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

หา B : จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ $|x - 3| < 2$ ก็ต่อเมื่อ $-2 < x - 3 < 2$
 $1 < x < 5$ $\xrightarrow{+3 \text{ ตลอด}}$
 จะได้ $B = (1, 5)$

ดังนั้น $A \cap B = [(-\infty, -1) \cup (3, \infty)] \cap (1, 5) = (3, 5)$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(3, 6)$ ในข้อ 4

19. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์ คือ $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

ให้ $P(x)$ แทน $|x| \geq x$ และ $Q(x)$ แทน $|x| < |x + 1| + 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ข) ประพจน์ $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

(ค) ประพจน์ $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 3

พิจารณา $P(x)$: เนื่องจาก $|x|$ คือค่าที่เป็นบวกของ x ดังนั้น การใส่ค่าสัมบูรณ์จะทำให้ได้ค่ามากขึ้น (เมื่อ x เป็นลบ) หรือเท่าเดิม (เมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์) ดังนั้น $|x| \geq x$ เสมอ ดังนั้น x ทุกค่า จะทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

พิจารณา $Q(x)$: จะไล่แทนค่าทีละตัวก็ได้ ซึ่งจะเห็นว่าเมื่อ x เป็นบวกหรือศูนย์ อสมการ $|x| < |x+1| + 1$ จะเป็นจริง (เพราะเมื่อทุกตัวเป็นบวกหรือศูนย์ ค่าสัมบูรณ์จะได้เท่าเดิม ได้เป็น $x < x+1+1$ ซึ่งเป็นจริง)

$$\text{สำหรับ } x \text{ ที่เป็นลบ ลองแทน } x = -3 \text{ จะได้ } \begin{array}{rcl} |-3| & < & |-3+1| + 1 \\ 3 & < & |-2| + 1 \\ 3 & < & 2 + 1 \quad \times \end{array}$$

ดังนั้น จะมีบางค่าที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง และมีบางค่าที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ

(ก) $\exists x[\sim Q(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ)

$\exists x[\sim P(x)]$ จะเป็นเท็จ (เพราะไม่มี x ตัวไหนทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ)

ดังนั้น $\exists x[\sim Q(x)] \rightarrow \exists x[\sim P(x)] \equiv T \rightarrow F \equiv F$ ก. ผิด

(ข) $\forall x[P(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะ x ทุกตัว ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง)

$\forall x[\sim Q(x)]$ จะเป็นเท็จ (เพราะ $Q(x)$ จริงบางตัว เท็จบางตัว)

ดังนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[\sim Q(x)] \equiv T \rightarrow F \equiv F$ ข. ถูก

(ค) $\exists x[P(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัว (จะใช้ตัวไหนก็ได้) ที่ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง)

$\exists x[Q(x)]$ จะเป็นจริง (เพราะมี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง)

ดังนั้น $\exists x[P(x)] \rightarrow \exists x[Q(x)] \equiv T \rightarrow T \equiv T$ ค. ถูก

20. ถ้าคะแนนสอบวิชาหนึ่งของนักเรียนจำนวน 80 คน มีการแจกแจงปกติ และมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ $\frac{1}{3}$ มีนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้สอบได้ 39 คะแนน คิดเป็นค่ามาตรฐานเท่ากับ 1.5 และมีนักเรียนจำนวน 60 คนที่มีคะแนนสอบมากกว่า 15 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9.5 คะแนน
2. 10 คะแนน
3. 10.5 คะแนน
4. 11 คะแนน
5. 11.5 คะแนน

ตอบ 4

60 คน จาก 80 คน คิดเป็น $\frac{60}{80} = \frac{3}{4} \rightarrow$ ดังนั้น มี 3 ใน 4 ของนักเรียนทั้งหมดได้มากกว่า 15 คะแนน

แสดงว่ามี 1 ใน 4 ของนักเรียนทั้งหมดได้น้อยกว่าหรือเท่ากับ 15 คะแนน ดังนั้น $Q_1 = 15$

$$\begin{aligned} \text{โจทย์ให้ สปส. ควอไทล์} &= \frac{1}{3} \text{ ดังนั้น } \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{1}{3} \\ \frac{Q_3 - 15}{Q_3 + 15} &= \frac{1}{3} \\ 3Q_3 - 45 &= Q_3 + 15 \\ 2Q_3 &= 60 \\ Q_3 &= 30 \end{aligned}$$

ข้อมูลที่แจกแจงปกติ จะมีความสมมาตร ดังนั้น ค่ากลางทุกตัว ($\bar{x}$, Med, Mode) จะอยู่ตรงกลางระหว่าง Q_1 กับ Q_3

$$\text{จะได้ } \bar{x} = \frac{Q_1 + Q_3}{2} = \frac{15 + 30}{2} = 22.5$$

และโจทย์กำหนดให้ 39 คะแนน เท่ากับค่ามาตรฐาน 1.5 แสดงว่า $\frac{39 - \bar{x}}{s} = 1.5$

$$\begin{aligned} \frac{39 - 22.5}{s} &= 1.5 \\ 16.5 &= 1.5s \\ 11 &= s \end{aligned}$$

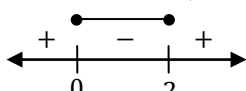
21. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{32x - 16x^2} \}$

ถ้า A และ B เป็นโดเมนและเรนจ์ของ r ตามลำดับ แล้ว $B - A$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 2)$
2. $(0, 3)$
3. $(1, 4)$
4. $(2, 6)$
5. $(3, \infty)$

ตอบ 4

หาโดเมน $\rightarrow$ ในรากต้อง $\geq 0 \rightarrow 32x - 16x^2 \geq 0$

$$\begin{aligned} 2x - x^2 &\geq 0 \\ 0 &\geq x^2 - 2x \\ 0 &\geq x(x - 2) \end{aligned}$$


$$\rightarrow A = [0, 2]$$

หาเรนจ์ $\rightarrow$ จะลดพจน์ที่มี x ให้เหลือพจน์เดียวก่อน โดยเติม 1^2 ให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{32x - 16x^2} \\ &= \sqrt{-16(x^2 - 2x)} \\ &= \sqrt{-16(x^2 - 2x + 1 - 1)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{เติม } +1-1 \text{ ให้เข้าสูตร } x^2 - 2nx + n^2 \\ \text{ได้เป็น } (x - n)^2 \end{array} \right\} \\ &= \sqrt{-16((x - 1)^2 - 1)} \\ &= \sqrt{-16(x - 1)^2 + 16} \end{aligned}$$

จากนั้น ใช้สมบัติ “กำลังสอง ≥ 0 ” พิจารณาช่วงค่าที่เป็นไปได้ย้อนกลับขึ้นมาจนกลายเป็นค่า y

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} (x - 1)^2 \geq 0 \\ -16(x - 1)^2 \leq 0 \\ -16(x - 1)^2 + 16 \leq 16 \end{array} &\quad \left. \begin{array}{l} \text{คูณเลขลบทั้งสองฝั่ง ต้องกลับน้อยกว่าเป็นมากกว่า} \\ \text{ถอดรากทั้งสองฝั่ง} \end{array} \right\} \\ \begin{array}{l} 0 \leq \sqrt{-16(x - 1)^2 + 16} \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{array} &\quad \rightarrow B = [0, 4] \end{aligned}$$

จะได้ $B - A = [0, 4] - [0, 2] = (2, 4]$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(2, 6)$ ในข้อ 4

22. ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $(x^2 - 2x - 16) \log_2(2 - \sqrt{3}) < \log_2(2 + \sqrt{3})$

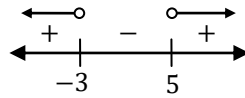
แล้ว A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$
2. $(-\infty, -4) \cup (3, \infty)$
3. $(-4, 3)$
4. $(-3, 6)$
5. $(-1, 9)$

ตอบ 1

สังเกตว่า $2 + \sqrt{3}$ กับ $2 - \sqrt{3}$ เป็นคู่คอนจูเกตกัน ซึ่ง $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 2^2 - \sqrt{3}^2 = 1$
 ดังนั้น $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \text{แทนในสมการ } (x^2 - 2x - 16) \log_2(2 - \sqrt{3}) &< \log_2(2 + \sqrt{3}) \\ (x^2 - 2x - 16) \log_2\left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right) &< \log_2(2 + \sqrt{3}) \\ (x^2 - 2x - 16) \log_2(2 + \sqrt{3})^{-1} &< \log_2(2 + \sqrt{3}) \\ (x^2 - 2x - 16)(-\log_2(2 + \sqrt{3})) &< \log_2(2 + \sqrt{3}) \\ (x^2 - 2x - 16)\left(-\frac{1}{\log_2(2 + \sqrt{3})}\right) &< 1 \\ -x^2 + 2x + 16 &< 1 \\ 0 &< x^2 - 2x - 15 \\ 0 &< (x + 3)(x - 5) \end{aligned}$$



จะได้ $A = (-\infty, -3) \cup (5, \infty)$ ซึ่งเป็นสับเซตของ $(-\infty, -3) \cup (4, \infty)$ ในข้อ 1

23. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f: R \rightarrow R$ และ $g: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย

$$f(x) = |x - 1| + |x + 1| \quad \text{และ} \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 1} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a + b = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a) + (f \circ g)(b)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1.4 2. 1.8 3. 2.4 4. 2.8 5. 3.4

ตอบ 3

จะหาเครื่องหมายของพจน์ในค่าสัมบูรณ์ แล้วใช้สมบัติ $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

จาก a, b เป็นบวก และ $a + b = 1$ จะได้ $0 < a < 1$ และ $0 < b < 1$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a) &= g(f(a)) \\ &= g(|a - 1| + |a + 1|) \\ &= g(-(a - 1) + a + 1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก } 0 < a < 1 \text{ จะได้ } a - 1 \text{ เป็นลบ} \\ \text{และ } a + 1 \text{ เป็นบวก} \end{array} \right\} \\ &= g(-a + 1 + a + 1) \\ &= g\left(\frac{2}{2^2 + 1}\right) \\ &= \frac{2}{2^2 + 1} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(b) &= f(g(b)) \\ &= f\left(\frac{b}{b^2 + 1}\right) \\ &= \left| \frac{b}{b^2 + 1} - 1 \right| + \left| \frac{b}{b^2 + 1} + 1 \right| \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก } 0 < b < 1 \text{ และ } b^2 + 1 \geq 1 \text{ จะได้ } 0 < \frac{b}{b^2 + 1} < 1 \\ \text{ดังนั้น } \frac{b}{b^2 + 1} - 1 \text{ เป็นลบ และ } \frac{b}{b^2 + 1} + 1 \text{ เป็นบวก} \end{array} \right\} \\ &= -\left(\frac{b}{b^2 + 1} - 1\right) + \frac{b}{b^2 + 1} + 1 \\ &= -\frac{b}{b^2 + 1} + 1 + \frac{b}{b^2 + 1} + 1 = 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } (g \circ f)(a) + (f \circ g)(b) = \frac{2}{5} + 2 = 2.4$$

24. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $3^{(8-2x)}4^{(x+y)} = 384(9^y)$ และ $5^{(3x-2y-3)} = 1$

แล้วค่าของ xy เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. 3 3. 3.5 4. 5 5. 7.5

ตอบ 2

แยกตัวประกอบ 384 จะได้ $384 = 2^7 \times 3$

$$\begin{aligned} \text{จัดรูปสมการแรกให้เป็นฐาน 2 และ 3: } 3^{(8-2x)}4^{(x+y)} &= 384(9^y) \\ 3^{(8-2x)}2^{2(x+y)} &= (2^7 \cdot 3)(3^{2y}) \\ \frac{2^{2x+2y}}{2^7} &= \frac{3^{2y+1}}{3^{8-2x}} \\ 2^{2x+2y-7} &= 3^{2y+2x-7} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าทั้งสองข้างของสมการ มีเลขชี้กำลังเท่ากัน แต่ฐานไม่เท่ากัน

สมการจะเป็นจริงได้ เมื่อเลขชี้กำลัง = 0 เท่านั้น $\rightarrow$ จะได้ $2x + 2y - 7 = 0 \quad \dots(1)$

และจากอีกสมการ $5^{(3x-2y-3)} = 1$ จะได้ $3x - 2y - 3 = 0 \quad \dots(2)$

$$(1) + (2) : \quad \begin{array}{rcl} 5x & -10 & = 0 \\ x & & = 2 \end{array}$$

$$\text{แทนใน (1) : } 2(2) + 2y - 7 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}$$

จะได้ $xy = (2)\left(\frac{3}{2}\right) = 3$

25. กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม และ R แทนเซตของจำนวนจริง

สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ นิยาม $[x]$ หมายถึงจำนวนที่มีค่ามากที่สุดของเซต $\{n \in I \mid n \leq x\}$

ถ้า $f: R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย $f(x) = 10\left[\frac{x+5}{10}\right] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{10}[5 - 6x]$ เมื่อ $x \in R$
แล้วค่าของ $f(2.4)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3.2 2. 2.1 3. 2 4. 1.1 5. 1

ตอบ 5

จะได้ $[x]$ คือจำนวนเต็มมากที่สุดที่ $\leq x \rightarrow$ คือการปัดเศษลงนั่นเอง

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f(2.4) &= 10\left[\frac{2.4+5}{10}\right] + \left[2.4 + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{10}[5 - 6(2.4)] \\ &= 10[0.74] + [2.9] + \frac{1}{10}[-9.4] \\ &= 10(0) + 2 + \frac{1}{10}(-10) \end{aligned}$$

เลขลบ เวลาปัดลง จะเป็นลบมากขึ้น
(ลบมาก = คำน้อย)

$$= 1$$

26. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{6x-2} - \sqrt{2x+7} = 1$

ผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 10.5 2. 14.25 3. 20.25 4. 21.25 5. 30.5

ตอบ 3

จะยกกำลังสอง เพื่อกำจัดรูทไปเรื่อยๆ (การยกกำลังสอง อาจทำให้มีคำตอบปลอมหลุดออกมาได้ $\rightarrow$ ต้องตรวจคำตอบ)

$$\begin{aligned} \sqrt{6x-2} - \sqrt{2x+7} &= 1 \\ \sqrt{6x-2} &= \sqrt{2x+7} + 1 \\ 6x-2 &= (\sqrt{2x+7} + 1)^2 \\ 6x-2 &= 2x+7 + 2\sqrt{2x+7} + 1 \\ 4x-10 &= 2\sqrt{2x+7} \\ 2x-5 &= \sqrt{2x+7} \\ (2x-5)^2 &= 2x+7 \\ 4x^2 - 20x + 25 &= 2x+7 \\ 4x^2 - 22x + 18 &= 0 \\ 2x^2 - 11x + 9 &= 0 \\ (2x-9)(x-1) &= 0 \\ x &= \frac{9}{2}, 1 \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

$$x = \frac{9}{2}: \quad \sqrt{6\left(\frac{9}{2}\right)-2} - \sqrt{2\left(\frac{9}{2}\right)+7} = 1$$

$$\frac{5}{5} - \frac{4}{4} = 1 \quad \checkmark$$

$$x = 1: \quad \sqrt{6(1)-2} - \sqrt{2(1)+7} = 1$$

$$\frac{2}{2} - \frac{3}{3} = 1 \quad \times$$

จะได้คำตอบเดียวคือ $\frac{9}{2} \rightarrow$ กำลังสองได้ $\frac{81}{4} = 20.25$

27. ให้ R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก 5 รูป มีข้อมูล ดังนี้

	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
ความกว้าง (x)	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ความยาว (y)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5

โดยที่ $0 < x_i \leq 10$ สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความกว้างของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 5 หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความยาวของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 8 หน่วย ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม 5 รูป เท่ากับ 51.8 ตารางหน่วย และความแปรปรวนของความกว้างเท่ากับ 12

สมมติว่ากราฟแผนภาพการกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ความกว้างและความยาว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมมีความกว้าง 2 หน่วย แล้วความยาว (โดยประมาณ) ของรูปสี่เหลี่ยมนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5.05 หน่วย
2. 5.55 หน่วย
3. 5.75 หน่วย
4. 6.05 หน่วย
5. 6.55 หน่วย

ตอบ 1

กว้างเฉลี่ย = 5	ยาวเฉลี่ย = 8	พื้นที่เฉลี่ย = 51.8	ความแปรปรวนความกว้าง = 12
$\frac{\sum x_i}{5} = 5$	$\frac{\sum y_i}{5} = 8$	$\frac{\sum x_i y_i}{5} = 51.8$	$\frac{\sum x_i^2}{5} - \bar{x}^2 = 12$
$\sum x_i = 25$	$\sum y_i = 40$	$\sum x_i y_i = 259$	$\frac{\sum x_i^2}{5} - 5^2 = 12$
			$\sum x_i^2 = 185$

โจทย์ให้ทำนายความยาว (y) จากความกว้าง (x) = 2 ด้วยรูปแบบเส้นตรง $\rightarrow$ ใช้สมการ $\hat{y} = a + bx$

เมื่อ a, b หาได้จากสูตร $\begin{matrix} \sum y_i = aN + b \sum x_i \\ \sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} 40 = 5a + 25b & \dots(1) \\ 259 = 25a + 185b & \dots(2) \end{matrix}$

$$(1) \times 5 : 200 = 25a + 125b \quad \dots(3)$$

$$(2) - (3) : 59 = 60b$$

$$\frac{59}{60} = b$$

$$\text{แทนใน (1) : } 40 = 5a + 25 \cdot \frac{59}{60}$$

$$8 = a + \frac{59}{12}$$

$$\frac{37}{12} = a$$

จะได้สมการทำนายคือ $\hat{y} = \frac{37}{12} + \frac{59}{60}x \rightarrow$ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $\hat{y} = \frac{37}{12} + \frac{59}{60}(2)$

$$= \frac{185 + 118}{60} = \frac{303}{60} = 5.05$$

28. นิยาม $a * b = 1 + ab$ สำหรับ a และ b เป็นจำนวนเต็มใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a * (1 * a) = (a * 1) * a$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a

(ข) $a * (b * c) = (a * b) * c$ สำหรับทุกจำนวนเต็ม a, b และ c

(ค) $((1 * 2) * 3) * 4$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอบ 2

(ก) จะเห็นว่า $a * b = 1 + ab$
 $b * a = 1 + ba$ } เท่ากัน ดังนั้น * มีสมบัติการสลับที่

ดังนั้น $a * (1 * a) = (1 * a) * a = (a * 1) * a \rightarrow$ (ก) ถูก

(ข) $a * (b * c) = (a * b) * c$
 $a * (1 + bc) = (1 + ab) * c$
 $1 + a(1 + bc) = 1 + (1 + ab)c$
 $1 + a + abc = 1 + c + abc \quad \times$

(ค) $((1 * 2) * 3) * 4 = ((1 + (1)(2)) * 3) * 4$
 $= (3 * 3) * 4$
 $= (1 + (3)(3)) * 4$
 $= 10 * 4$
 $= 1 + (10)(4)$
 $= 41$

เป็นจำนวนเฉพาะ $\rightarrow$ (ค) ถูก

29. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x + y + z = 15$ และสอดคล้องกับ $(z + 1)^x = y^{2x}$

และ $(0.1)^z = (0.01)^x$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

- $x < y < z$
- $y < x < z$
- $x < z < y$
- $y < z < x$
- $z < y < x$

ตอบ 2

เนื่องจาก x, y และ z เป็นจำนวนเต็มบวก จึงไม่ต้องระวังเรื่องเลขติดลบ

จาก $(z + 1)^x = y^{2x}$
 $z + 1 = y^2 \quad \dots(1)$

จาก $(0.1)^z = (0.01)^x$
 $(0.1)^z = ((0.1)^2)^x$
 $(0.1)^z = (0.1)^{2x}$
 $z = 2x \quad \dots(2)$

ข้อนี้จะแก้ระบบสมการ 3 ตัวแปรตรงๆก็ได้ แต่แทนค่าเอาจะง่ายกว่า (เพราะจากเงื่อนไขเรื่องจำนวนเต็มบวก จะเหลือตัวเลือกให้ลองแทนได้ไม่มาก)

จาก $x + y + z = 15$ จะได้ $z \leq 13$ และจาก (2) จะได้ z เป็นเลขคู่ ดังนั้น z เป็นได้แค่ 2, 4, 6, 8, 10, 12

$z + 1$ เป็นได้แค่ 3, 5, 7, 9, 11, 13

แต่จาก (1) $z + 1$ ต้องเป็นผลยกกำลังสอง $\rightarrow$ มี 9 เท่านั้นที่เป็นผลยกกำลังสอง

ดังนั้น $z + 1 = 9 = 3^2$ จะได้ $y = 3$ และ $z = 9 - 1 = 8$ และจาก (2) จะได้ $x = \frac{8}{2} = 4$

ซึ่งจะเห็นว่า $x + y + z = 4 + 3 + 8 = 15$ ตามเงื่อนไขที่กำหนด

เนื่องจาก $3 < 4 < 8$ ดังนั้น $y < x < z$

30. กำหนดให้เส้นตรง L ผ่านจุด A(2,0) และจุด B(-4, 8) ให้เส้นตรง M ผ่านจุด B และจุด C(-a, 0) เมื่อ $a > 0$ ถ้าระยะระหว่างจุด C กับเส้นตรง L เท่ากับ $\frac{48}{5}$ หน่วย แล้วระยะห่างระหว่างจุดกำเนิด (0, 0) กับเส้นตรง M เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 หน่วย
2. 8 หน่วย
3. 10.5 หน่วย
4. 13.5 หน่วย
5. 15 หน่วย

ตอบ 2

เส้นตรง L ผ่าน A(2,0) และ B(-4, 8)

ดังนั้น จะได้สมการของ L คือ $\frac{y-0}{x-2} = \frac{8-0}{-4-2} = -\frac{4}{3}$

$$3y = -4x + 8$$

$$4x + 3y - 8 = 0$$

เส้นตรงที่ผ่าน (a, b) และ (c, d)

คือ $\frac{y-b}{x-a} = \frac{d-b}{c-a}$

จะได้ระยะระหว่าง C(-a, 0) กับ L คือ $= \frac{|4(-a)+3(0)-8|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

a เป็นบวก $\rightarrow -4a - 8$ จะเป็นลบ $\left(\begin{array}{l} = \frac{|-4a-8|}{5} \\ \text{ค่าสัมบูรณ์จะเปลี่ยนให้เป็น } 4a+8 \end{array} \right. = \frac{4a+8}{5}$

ระยะระหว่างจุด (a, b) กับเส้นตรง

$Ax + By + C = 0$ คือ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ซึ่งโจทย์ให้ระยะนี้คือ $\frac{48}{5}$ ดังนั้น $\frac{4a+8}{5} = \frac{48}{5}$ แก้สมการจะได้ $a = 10$

แทนค่า a จะได้เส้นตรง M ผ่านจุด B(-4, 8) และ C(-10, 0)

ดังนั้น จะได้สมการของ M คือ $\frac{y-0}{x-(-10)} = \frac{8-0}{-4-(-10)} = \frac{4}{3}$

$$3y = 4x + 40$$

$$0 = 4x - 3y + 40$$

จะได้ระยะระหว่าง (0, 0) กับ M คือ $\frac{|4(0)-3(0)+40|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{40}{5} = 8$

31. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $\log_2 x + \log_3 x \geq (\log_2 x)(\log_3 x)$

และให้ a เป็นขอบเขตล่างมากที่สุดของเซต $A \cap [0, 9]$ และให้ b เป็นขอบเขตบนน้อยที่สุดของเซต $A \cap [0, 9]$

ค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 7

เนื่องจากการย้ายข้างแบบคูณหารในอสมการ จะทำไม่ได้จนกว่าจะรู้เครื่องหมายของตัวที่ย้าย

ดังนั้น ข้อนี้จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของค่า log ก่อน

และเนื่องจาก หลัง log ต้องเป็นบวก ดังนั้น $x > 0$

กรณี $0 < x < 1$: จะได้ $\log_2 x$ และ $\log_3 x$ เป็นลบทั้งคู่ $\rightarrow \log_2 x + \log_3 x \geq (\log_2 x)(\log_3 x)$

$$\begin{array}{ccc} \text{ลบ} & + & \text{ลบ} \\ \text{ลบ} & & \geq & (\text{ลบ})(\text{ลบ}) \end{array}$$

×

ดังนั้น กรณีนี้ไม่มีคำตอบ

กรณี $x = 1$: แทนค่าเช็คเลย จะได้ $\log_2 1 + \log_3 1 \geq (\log_2 1)(\log_3 1)$

$$0 + 0 \geq (0)(0) \quad \checkmark$$

ดังนั้น $x = 1$ เป็นคำตอบได้

กรณี $x > 1$: จะได้ $\log_2 x$ และ $\log_3 x$ เป็นบวกทั้งคู่ $\rightarrow$ หาค่าโดย $(\log_2 x)(\log_3 x)$ ได้

$$\begin{aligned} \frac{\log_2 x + \log_3 x}{(\log_2 x)(\log_3 x)} &\geq \frac{(\log_2 x)(\log_3 x)}{(\log_2 x)(\log_3 x)} \\ \frac{1}{\log_3 x} + \frac{1}{\log_2 x} &\geq 1 \\ \log_x 3 + \log_x 2 &\geq 1 \\ \log_x 6 &\geq 1 \\ 6 &\geq x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \text{ทำแบบนี้ได้ เพราะ } x > 1$$

กรองด้วยเงื่อนไขของกรณี $x > 1$ จะได้คำตอบในกรณีนี้คือ $(1, 6]$

รวมคำตอบสามกรณี จะได้ $A = [1, 6]$ ดังนั้น $A \cap [0, 9] = [1, 6] \rightarrow$ ขอบเขตล่างมากที่สุด $a = 1$

$\rightarrow$ ขอบเขตบนน้อยสุด $b = 6$

$$\text{จะได้ } a + b = 1 + 6 = 7$$

32. มีลูกแก้วขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกแก้วสีแดง 2 ลูก ลูกแก้วสีเขียว 2 ลูก และลูกแก้วสีขาว 3 ลูก ต้องการจัดเรียงลูกแก้วทั้ง 7 ลูกเป็นแถวตรง โดยที่ลูกแก้วสองลูกใดๆ ที่เรียงติดกัน มีสีแตกต่างกัน จำนวนวิธีจัดเรียงลูกแก้วดังกล่าวเท่ากับเท่าใด

ตอบ 38

ให้สีแดงคือ R สีเขียวคือ G และสีขาวคือ W

จะเอา R กับ G (รวม 4 ลูก) มาเรียงกันก่อน แล้วค่อยเสียบ W ทั้งสามลูกลงไป

จะเห็นว่าตอนเรียง R กับ G ทั้ง 4 ลูก ลูกสีเดียวกันจะยังติดกันได้อยู่ เพราะยังเอา W มาแทรกให้มันแยกกันตอนหลังได้ ดังนั้น การเสียบ W ตอนสุดท้าย จะขึ้นกับว่าตอนแรกมี R ติดกัน หรือ G ติดกัน ในรูปแบบไหน

$\rightarrow$ จะแบ่งกรณี ตามการติดกันของ R และการติดกันของ G

กรณีติดกัน 2 คู่ : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ RR GG กับ GG RR

จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ W สองลูกลงไปแทรก ระหว่างคู่ที่ติดกันทั้ง 2 คู่ (เช่น RWR GWG)

W อีกลูกที่เหลือ ต้องไม่ติดกับ W สองลูกแรก จะเหลือช่อง _ RWR _ GWG _ ให้เสียบได้ 3 ช่อง

เลือก 1 ช่อง ให้ W ลูกที่เหลือ ได้ 3 แบบ $\rightarrow$ รวมจำนวนแบบกรณีนี้ จะได้ $2 \times 3 = 6$ แบบ

กรณีติดกัน 1 คู่ : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ GRRG กับ RGGG

จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ W หนึ่งลูกลงไปแทรก ระหว่างคู่ที่ติดกัน (เช่น G RWR G)

W อีกสองลูกที่เหลือ ต้องไม่ติดกับ W ลูกแรก จะเหลือช่อง _ G _ RWR _ G _ ให้เสียบได้ 4 ช่อง

เลือก 2 ช่องจาก 4 ช่อง ให้ W สองลูกที่เหลือได้ $\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ แบบ $\rightarrow$ รวมจำนวนแบบ $2 \times 6 = 12$ แบบ

กรณีไม่ติดกันเลย : กรณีนี้ จะมี 2 แบบ คือ RGRG และ GRGR

จะมีช่อง _ R _ G _ R _ G _ ให้เสียบ W ได้ 5 ช่อง

เลือก 3 ช่องจาก 5 ช่อง ให้ W ทั้งสามลูกได้ $\binom{5}{3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10$ แบบ $\rightarrow$ รวมจำนวนแบบ $2 \times 10 = 20$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 6 + 12 + 20 = 38$ แบบ

33. กำหนดให้ $f(x) = 2x + 5$ และ $g(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $(f^{-1} \circ g)(0) = 2$, $\int_0^1 f^{-1}(g(x)) dx = 1$ และ $(f^{-1} \circ g)(x)$ มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

แล้วค่าของ $g(1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 6

$$\begin{aligned} \text{จาก } (f^{-1} \circ g)(0) &= 2 \\ f^{-1}(g(0)) &= 2 \\ g(0) &= f(2) \\ a(0^2) + b(0) + c &= 2(2) + 5 \\ c &= 9 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } g(x) = ax^2 + bx + 9$$

$$\text{หา } f^{-1}: f(x) = 2x + 5$$

$$y = 2x + 5$$

$$\frac{y-5}{2} = x$$

$$\frac{x-5}{2} = y$$

$$\text{ดังนั้น } f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$$

$$\text{จะได้ } (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x))$$

$$= f^{-1}(ax^2 + bx + 9)$$

$$= \frac{ax^2 + bx + 9 - 5}{2}$$

$$= \frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + 2$$

ดิฟ ↓

$$ax + \frac{b}{2}$$

มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 1$

แสดงว่า ดิฟ = 0 เมื่อ $x = 1$

$$a(1) + \frac{b}{2} = 0$$

$$2a + b = 0 \quad \dots(1)$$

$$(2) - (1): 2b = -12$$

$$b = -6$$

$$(1): 2a - 6 = 0$$

$$a = 3$$

$$\int_0^1 f^{-1}(g(x)) dx = 1$$

$$\int_0^1 \left(\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{2}x + 2 \right) dx = 1$$

$$\left. \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{4}x^2 + 2x \right|_0^1 = 1$$

$$\left(\frac{a}{6} + \frac{b}{4} + 2 \right) - 0 = 1$$

$$\frac{a}{6} + \frac{b}{4} + 2 = 1$$

$$2a + 3b = -12 \quad \dots(2)$$

แทนค่า a, b จะได้ $g(x) = 3x^2 - 6x + 9$ ดังนั้น $g(1) = 3(1^2) - 6(1) + 9 = 6$

34. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ ดังนี้

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 25 ของคะแนนสอบนี้เท่ากับ 80.5 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 7.5 แล้วจำนวนนักเรียนที่สอบได้

คะแนนมากกว่า 80 คะแนนเท่ากับเท่าใด

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
66 - 70	2
71 - 75	3
76 - 80	a
81 - 85	5
86 - 90	7
91 - 95	b
96 - 100	8

ตอบ 24

เนื่องจาก $\frac{25}{100} = \frac{1}{4}$ จะได้ $P_{25} = Q_1$ ดังนั้น $Q_1 = 80.5$ ด้วย

จากส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ = 7.5 จะได้ $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = 7.5 \rightarrow$ แทนค่า Q_1 จะได้ $\frac{Q_3 - 80.5}{2} = 7.5$

$$Q_3 = 95.5$$

จะเห็นว่า $Q_1 = 80.5$ และ $Q_3 = 95.5$ เป็นขอบชั้นพอดี $\rightarrow$ ใช้สูตร “คนสุดท้ายของชั้น มีค่าเท่ากับขอบบน” ได้

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน
66 - 70	2
71 - 75	3
76 - 80	a
81 - 85	5
86 - 90	7
91 - 95	b
96 - 100	8

$Q_1 = 80.5 \rightarrow$
 $Q_3 = 95.5 \rightarrow$

จะใช้ $2 + 3 + a + 5 + 7 + b$ ก็ได้
 แต่เหลืออีกแค่ชั้นเดียวที่มี 8 คน $\rightarrow$ ใช้ $N - 8$ ง่ายกว่า
 $N - 8$ คน

จะได้ คนที่ $5 + a$ ได้ 80.5 คะแนน และ คนที่ $N - 8$ ได้ 95.5 คะแนน

นั่นคือ Q_1 อยู่ตำแหน่งที่ $5 + a$

และ Q_3 อยู่ตำแหน่งที่ $N - 8$

ดังนั้น $\frac{1}{4}N = 5 + a$

และ $\frac{3}{4}N = N - 8$

$$\frac{32}{4} = 5 + a$$

$$\frac{32}{3} = a$$

$$3N = 4N - 32$$

$$32 = N$$

ข้อนี้ ถ้าไม่คิดอะไรมาก จะมองว่านักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 80 คะแนน คือนักเรียนตั้งแต่ชั้นที่ 4 ลงไปก็ได้
 เนื่องจาก 3 ชั้นแรก มีนักเรียน $5 + a = 5 + 3 = 8$ คน ดังนั้น ชั้นที่เหลือ = $32 - 8 = 24$ คน

แต่ถ้าจะคิดข้อนี้ให้ถูกต้องจริงๆ ต้องหาตำแหน่งของ 80 คะแนน โดยสมมติให้ 80 คะแนน อยู่ตำแหน่งที่ k

แทนในสูตร จะได้ $x = L + \left(\frac{k - F_L}{f_x}\right)I$

$$80 = 75.5 + \left(\frac{k - (2+3)}{a}\right)5$$

$$4.5 = \left(\frac{k - 5}{3}\right)5$$

$$7.7 = k$$

ดังนั้น จะมีคนได้มากกว่า 80 คะแนนอยู่ $N - k = 32 - 7.7 = 24.3$ คน

ถ้าอยู่ในห้องสอบ ผมคงเสี่ยงเดาใจคนออกข้อสอบว่าอยากให้เราคิดแบบง่ายๆ จึงน่าจะตอบ 24 คน

35. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 74

คะแนน มีจำนวนคิดเป็นร้อยละ 97.73 และนักเรียนที่สอบได้คะแนน 53 คะแนน จะตรงกับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 6.68

แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐานระหว่าง 0 ถึง Z ดังนี้

Z	0.5	1	1.5	2	2.5
A	0.1915	0.3413	0.4332	0.4773	0.4938

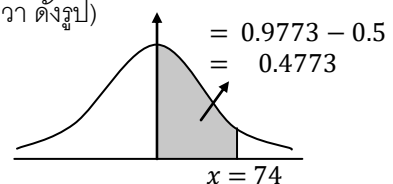
ตอบ 62

น้อยกว่า 74 คะแนน คิดเป็น 97.73% = พื้นที่ 0.9773 (เกิน 0.5 $\rightarrow$ อยู่ฝั่งขวา ดังรูป)

หักครึ่งซ้าย 0.5 $\rightarrow$ จะได้พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = 0.4773 ดังรูป

เปิดตาราง $A = 0.4773$ จะได้ $z = 2$

ใช้สูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $2 = \frac{74 - \bar{x}}{s} \dots (1)$



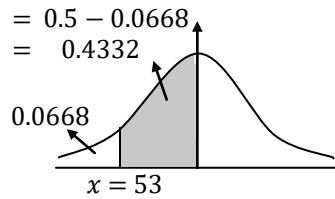
$P_{6.68} = 53$ คะแนน $\rightarrow$ น้อยกว่า 53 มี 6.68% = พื้นที่ 0.0668 (น้อยกว่า 0.5 $\rightarrow$ อยู่ฝั่งซ้าย ดังรูป)

คิดเป็นพื้นที่ใต้เส้นเปิดตาราง = $0.5 - 0.0668 = 0.4332$

เปิดตาราง $A = 0.4332$ จะได้ $z = 1.5$

เป็นพื้นที่ฝั่งซ้าย $\rightarrow z$ เป็นลบ จะได้ $z = -1.5$

ใช้สูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $-1.5 = \frac{53 - \bar{x}}{s} \dots (2)$



$$\begin{aligned} (1) \div (2) : \quad \frac{2}{-1.5} &= \frac{74 - \bar{x}}{s} \div \frac{53 - \bar{x}}{s} \\ -\frac{4}{3} &= \frac{74 - \bar{x}}{s} \cdot \frac{s}{53 - \bar{x}} \\ -212 + 4\bar{x} &= 222 - 3\bar{x} \\ 7\bar{x} &= 434 \\ \bar{x} &= 62 \end{aligned}$$

36. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม ให้ $f: I \rightarrow I$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(n) = \begin{cases} (f \circ f)(n-4) & , n > 60 \\ n+3 & , n \leq 60 \end{cases}$

ค่าของ $f(f(f(60)))$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 63

ทำข้างในก่อน จะได้ $f(60)$ ใช้สูตรล่าง ได้ $f(60) = 60 + 3 = 63$

$$\begin{aligned} \text{หา } f \text{ รอบที่สอง} \rightarrow \text{ใส่ } f \text{ ทั้งสองข้างจะได้ } f(f(60)) &= f(63) \\ &= (f \circ f)(63 - 4) \\ &= (f \circ f)(59) \\ &= f(f(59)) \\ &= f(59 + 3) \\ &= f(62) \\ &= (f \circ f)(62 - 4) \\ &= (f \circ f)(58) \\ &= f(f(58)) \\ &\vdots \\ &= f(60) \\ &= 60 + 3 \\ &= 63 \end{aligned}$$

$63 > 60 \rightarrow$ ใช้สูตรแรก
 $62 > 60 \rightarrow$ ใช้สูตรแรก
 จะวนแบบนี้ไปเรื่อยๆ จนถึง 60
 จึงเปลี่ยนเป็นใช้สูตรที่สอง
 $60 \leq 60 \rightarrow$ ใช้สูตรสอง

$$\text{ดังนั้น } f(f(60)) = f(63) = 63$$

$$\text{หา } f \text{ รอบที่สาม} \rightarrow \text{ใส่ } f \text{ ทั้งสองข้างจะได้ } f(f(f(60))) = \begin{matrix} f(63) \\ 63 \end{matrix} \quad \left. \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\} \text{จากที่เคยทำยาวๆ ในรอบที่สอง}$$

37. กำหนดให้ $AX = B$ เป็นสมการเมทริกซ์ โดยที่ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ b & -a & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 9 \\ a \\ -10 \end{bmatrix}$

เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det A = 15$ และ $y = 1$ เป็นคำตอบของระบบสมการนี้

แล้ว $(a - b)^2$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 9

$$\begin{aligned} \text{โจทย์กำหนดให้ } \det A = 15 \rightarrow \text{ใช้สูตร det แบบ } 3 \times 3 \text{ จะได้ } \det A &= (a + 0 - 2b) - (-6a + 0 + 2b) \\ &= 7a - 4b \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 7a - 4b = 15 \dots (1)$$

โจทย์ให้ $y = 1$ เป็นคำตอบ $\rightarrow$ ถ้าใช้กฎของครอมอร์ในการหาค่า y ต้องได้ $y = 1$

เนื่องจาก y เป็นตัวแปรในแถวที่ 2 $\rightarrow$ ต้องเอา $B = \begin{bmatrix} 9 \\ a \\ -10 \end{bmatrix}$ ไปสลับแทนที่หลักที่ 2

$$\text{จะได้ } y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 9 & 2 \\ b & a & 0 \\ 3 & -10 & -1 \end{vmatrix}}{\det A} = \frac{(-a+0-20b)-(6a+0-9b)}{15} = \frac{-7a-11b}{15} \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{-7a-11b}{15} = 1$$

$$-7a - 11b = 15 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2): \quad -15b = 30$$

$$b = -2$$

$$(1): \quad 7a - 4(-2) = 15$$

$$a = 1$$

$$\text{จะได้ } (a - b)^2 = (1 - (-2))^2 = 9$$

38. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3^x x - 3^{(x+1)}}{\sqrt[3]{x-2} - 1}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 81

ถ้าแทน $x = 3$ จะได้ $\frac{3^3(3) - 3^{(3+1)}}{\sqrt[3]{3-2} - 1} = \frac{81-81}{1-1} = \frac{0}{0}$ ดังนั้น ต้องจัดรูป ให้ $x - 3$ โผล่ออกมาตัดกันก่อน

โดย ตัวเศษ จะใช้การแยกตัวประกอบ และ ตัวส่วน จะทำให้เป็นผลต่างกำลังสามเพื่อกำจัดรูทสาม ดังนี้

$$\frac{3^x x - 3^{(x+1)}}{\sqrt[3]{x-2} - 1} = \frac{3^x x - 3^x 3^1}{\sqrt[3]{x-2} - 1} = \frac{3^x \sqrt[3]{x-2}^2 + \sqrt[3]{x-2} + 1}{\sqrt[3]{x-2}^2 + \sqrt[3]{x-2} + 1} = \frac{3^x(x-3) (\sqrt[3]{x-2}^2 + \sqrt[3]{x-2} + 1)}{\sqrt[3]{x-2}^3 - 1^3} = \frac{3^x(x-3) (\sqrt[3]{x-2}^2 + \sqrt[3]{x-2} + 1)}{x-3}$$

คูณ $n^2 + n + 1$ ทั้งเศษและส่วนเพื่อเข้าสูตร

$$(n-1)(n^2 + n + 1) = n^3 - 1^3$$

เมื่อตัด $x - 3$ ได้แล้ว ลองแทน $x = 3$ ใหม่

$$\text{จะได้ } 3^3 (\sqrt[3]{3-2}^2 + \sqrt[3]{3-2} + 1) = 81$$

39. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $(1+i)\bar{z} + (3-i)z = 6+2i$

เมื่อ $i^2 = -1$ และ $\bar{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z ค่าของ $|(z - \bar{z})(z + \bar{z})|$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4

ให้ $z = a + bi$ จะได้ $\bar{z} = a - bi \rightarrow$ แทนในสมการ จะได้

$$\begin{aligned} (1+i)(a-bi) + (3-i)(a+bi) &= 6+2i \\ a-bi+ai+b+3a+3bi-ai+b &= 6+2i \\ 4a+2b+2bi &= 6+2i \end{aligned}$$

เทียบ ส่วนจริง = ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ = ส่วนจินตภาพ

$$\begin{aligned} 4a+2b &= 6 & 2b &= 2 \\ 4a+2(1) &= 6 & b &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } z = 1 + i \text{ และ } \bar{z} = 1 - i \text{ จะได้ } z - \bar{z} = 1 + i - (1 - i) = 2i \quad \text{และ } z + \bar{z} = 1 + i + 1 - i = 2$$

$$\text{ดังนั้น } |(z - \bar{z})(z + \bar{z})| = |(2i)(2)| = 4$$

40. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a_1 = 1$ และ $a_8 = 36$

ถ้า $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = 3$ แล้ว n เท่ากับเท่าใด

ตอบ 52

จากสูตรลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n-1)d$ แทน $n = 8$ จะได้ $a_8 = a_1 + (8-1)d$

$$\begin{aligned} 36 &= 1 + 7d \\ 5 &= d \end{aligned}$$

จัดรูปสิ่งที่น่าสนใจ โดยคูณคอนจูเกตทั้งเศษและส่วนที่แต่ละพจน์ ให้เข้าสูตรผลต่างกำลังสองเพื่อกำจัดรูป

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} \cdot \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_1}^2-\sqrt{a_2}^2} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{a_1-a_2} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-(a_2-a_1)} = \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-d}$$

ลำดับเลขคณิต พจน์คู่ที่ติดกันลบกัน = d

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} \cdot \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}} &= \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{\sqrt{a_2}^2-\sqrt{a_3}^2} = \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{a_2-a_3} = \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-(a_3-a_2)} = \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-d} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้สมการคือ } & \frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = 3 \\ & \frac{\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2}}{-d} + \frac{\sqrt{a_2}-\sqrt{a_3}}{-d} + \frac{\sqrt{a_3}-\sqrt{a_4}}{-d} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n}}{-d} = 3 \\ & \sqrt{a_1}-\sqrt{a_2} + \sqrt{a_2}-\sqrt{a_3} + \sqrt{a_3}-\sqrt{a_4} + \dots + \sqrt{a_{n-1}}-\sqrt{a_n} = -3d \\ & \sqrt{a_1} - \cancel{\sqrt{a_2}} + \cancel{\sqrt{a_2}} - \cancel{\sqrt{a_3}} + \cancel{\sqrt{a_3}} - \cancel{\sqrt{a_4}} + \dots + \sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{a_n} = -3d \\ & \sqrt{a_1} - \sqrt{a_1 + (n-1)d} = -3d \\ & \sqrt{1} - \sqrt{1 + (n-1)5} = -3(5) \\ & 16 = \sqrt{5n-4} \\ & 256 = 5n-4 \\ & 52 = n \end{aligned}$$

41. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2+5} & , x \geq a \\ \frac{15}{\sqrt{x^2+5}} & , x < a \end{cases}$

ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องทุกจำนวนจริง x แล้วค่าของ $f(a) + f(-a)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 10

f ต่อเนื่อง แสดงว่าค่า f ของแต่ละสูตร ต้องมีค่าเท่ากันตรงรอยต่อของสูตร

$$\begin{aligned} \text{รอยต่อของสูตร อยู่ที่ } x = a \text{ ดังนั้น } & a + \sqrt{a^2+5} = \frac{15}{\sqrt{a^2+5}} \quad \text{คูณ } \sqrt{a^2+5} \text{ ตลอด} \\ & a\sqrt{a^2+5} + a^2 + 5 = 15 \\ & a\sqrt{a^2+5} = 10 - a^2 \quad \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง} \\ & a^2(a^2+5) = (10-a^2)^2 \\ & a^4 + 5a^2 = 100 - 20a^2 + a^4 \\ & 25a^2 = 100 \\ & a^2 = 4 \\ & a = \pm 2 \end{aligned}$$

เนื่องจากการยกกำลังสองทั้งสองข้าง $\rightarrow$ ต้องตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned} a = 2: & \quad 2 + \sqrt{2^2+5} = \frac{15}{\sqrt{2^2+5}} \quad \vdots \quad a = -2: & \quad -2 + \sqrt{(-2)^2+5} = \frac{15}{\sqrt{(-2)^2+5}} \\ 2 + 3 &= \frac{15}{3} \quad \checkmark \quad & -2 + 3 &= \frac{15}{3} \quad \times \end{aligned}$$

จะได้ $a = 2$ แทนในสูตรของ f จะได้ $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 + 5} & , x \geq 2 \\ \frac{15}{\sqrt{x^2 + 5}} & , x < 2 \end{cases}$

ดังนั้น $f(a) + f(-a) = f(2) + f(-2)$
 $= 2 + \sqrt{2^2 + 5} + \frac{15}{\sqrt{(-2)^2 + 5}} = 10$

42. ถ้า $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ แล้วค่าของ $\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos^2 \theta + \frac{\tan \theta}{\operatorname{cosec} 2\theta}$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 2.5

แก้สมการ $2 \sin^2 \theta = 3 \cos \theta$
 $2(1 - \cos^2 \theta) = 3 \cos \theta$
 $2 - 2 \cos^2 \theta = 3 \cos \theta$
 $0 = 2 \cos^2 \theta + 3 \cos \theta - 2$
 $0 = (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 2)$
 $\cos \theta = \frac{1}{2}$, ~~$\cos \theta = -2$~~ ค่า $\cos$ เป็นได้ตั้งแต่ -1 ถึง 1 เท่านั้น
 $\theta = 60^\circ$

ดังนั้น $\operatorname{cosec}^2(\frac{\pi}{2} - \theta) \cos^2 \theta + \frac{\tan \theta}{\operatorname{cosec} 2\theta} = \operatorname{cosec}^2(90^\circ - 60^\circ) \cos^2 60^\circ + \frac{\tan 60^\circ}{\operatorname{cosec} 120^\circ}$
 $= 2^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2/\sqrt{3}}$
 $= 1 + 1.5 = 2.5$

43. ให้ A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $4^x - 4(4^{\sqrt{x}}) = 3(2^{x+\sqrt{x}})$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

ตอบ 4

$4^x - 4(4^{\sqrt{x}}) = 3(2^{x+\sqrt{x}})$
 $2^{2x} - 4(2^{2\sqrt{x}}) = 3(2^x \cdot 2^{\sqrt{x}})$ $\rightarrow$ เปลี่ยนตัวแปร ให้ $2^x = a$, $2^{\sqrt{x}} = b$
 $a^2 - 4b^2 = 3ab$
 $a^2 - 3ab - 4b^2 = 0$
 $(a - 4b)(a + b) = 0$
 $a = 4b$ $a = -b$
 $2^x = 2^2 \cdot 2^{\sqrt{x}}$ $2^x = -2^{\sqrt{x}}$
 $2^x = 2^{2+\sqrt{x}}$ ไม่มีคำตอบ (ฝั่งซ้ายเป็นบวก
 $x = 2 + \sqrt{x}$ เสมอ ฝั่งขวาเป็นลบเสมอ)
 $x - \sqrt{x} - 2 = 0$
 $(\sqrt{x} - 2)(\sqrt{x} + 1) = 0$
 $\sqrt{x} = 2$ $\sqrt{x} = -1$
 $x = 4$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง

4 ไม่ติดลบ จึงเป็นค่า x ในรูปได้ จะได้ $A = \{4\} \rightarrow$ ผลบวกสมาชิกใน $A = 4$

44. ผลการสำรวจกลุ่มคนจำนวน 120 คน เกี่ยวกับสายตาสั้นและสายตาสั้น พบว่าอัตราส่วนของจำนวนคนที่มีสายตาสั้นต่อจำนวนคนที่มีสายตาสั้นเป็น 3:2 ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายเป็น 5:1 ในกลุ่มคนที่มีสายตาสั้น มีอัตราส่วนของจำนวนเด็กต่อจำนวนผู้ใหญ่ เป็น 1:3 ผลรวมของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสั้นและจำนวนเด็กที่มีสายตาสั้นเท่ากับเท่าใด

ตอบ 72

$$\begin{aligned} \text{ใน 120 คน มี ตาสั้น : ตาสั้น} &= 3 : 2 \rightarrow \text{ตาสั้น} = \frac{3}{3+2} \cdot 120 = 72 \text{ คน} \\ &\rightarrow \text{ตาสั้น} = 120 - 72 = 48 \text{ คน} \end{aligned}$$

$$\text{ในตาสั้น 72 คน มี หญิง : ชาย} = 5 : 1 \rightarrow \text{หญิงตาสั้น} = \frac{5}{5+1} \cdot 72 = 60 \text{ คน}$$

$$\text{ในตาสั้น 48 คน มี เด็ก : ผู้ใหญ่} = 1 : 3 \rightarrow \text{เด็กตาสั้น} = \frac{1}{1+3} \cdot 48 = 12 \text{ คน}$$

$$\text{ดังนั้น หญิงตาสั้น} + \text{เด็กตาสั้น} = 60 + 12 = 72 \text{ คน}$$

45. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก กำหนดให้ $P = ax - 15y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์

$$\text{โดยมีสมการข้อจำกัด ดังนี้ } 3x + by \geq 9$$

$$3x + 2by \leq 18$$

$$1 \leq x \leq 5 \text{ และ } y \geq 0$$

ถ้าค่าของ P มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับ -8.25 และ ค่าของ P มีค่ามากที่สุด เท่ากับ 15

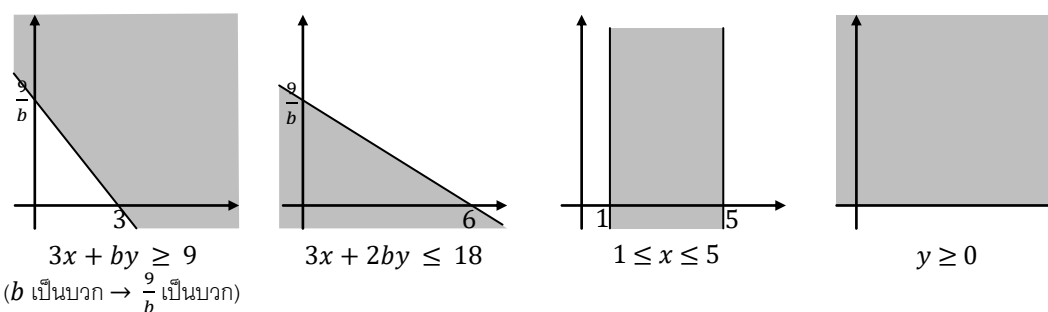
แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 109

หาจุดตัดแกนของแต่ละสมการ (โดยการแทน $x = 0$ กับแทน $y = 0$) เพื่อวาดกราฟและหาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน

$$\begin{aligned} 3x + by = 9 : \text{ตัดแกน } x \text{ ที่ } 3x + b(0) &= 9 & \text{ตัดแกน } y \text{ ที่ } 3(0) + by &= 9 \\ x &= 3 & y &= \frac{9}{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x + 2by = 18 : \text{ตัดแกน } x \text{ ที่ } 3x + 2b(0) &= 18 & \text{ตัดแกน } y \text{ ที่ } 3(0) + 2by &= 18 \\ x &= 6 & y &= \frac{9}{b} \end{aligned}$$

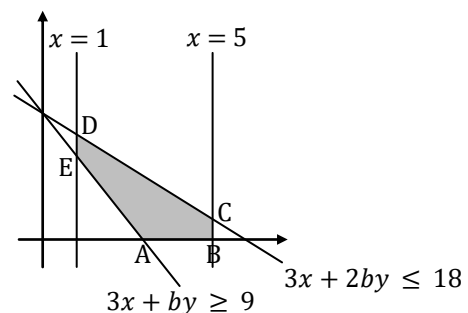


หาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะได้จุดมุม A, B, C, D, E ดังรูป

จากจุดตัดแกนที่เคหา จะได้พิกัด A(3, 0) และ B(5, 0)

$$\begin{aligned} \text{จุด C แทน } x = 5 \text{ ใน } 3x + 2by &= 18 \\ 3(5) + 2by &= 18 \\ y &= \frac{3}{2b} \rightarrow C(5, \frac{3}{2b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จุด D แทน } x = 1 \text{ ใน } 3x + 2by &= 18 \\ 3(1) + 2by &= 18 \\ y &= \frac{15}{2b} \rightarrow D(1, \frac{15}{2b}) \end{aligned}$$



จุด E แทน $x = 1$ ใน $3x + by = 9$
 $3(1) + by = 9$
 $y = \frac{6}{b} \rightarrow E(1, \frac{6}{b})$

	$P = ax - 15y$
A(3, 0)	$3a$
B(5, 0)	$5a$
C($5, \frac{3}{2b}$)	$5a - \frac{45}{2b}$
D($1, \frac{15}{2b}$)	$a - \frac{225}{2b}$
E($1, \frac{6}{b}$)	$a - \frac{90}{b}$

เราจุดมูไปแทนในสมการของ P แล้วหาค่ามากที่สุด น้อยสุด

เนื่องจาก a เป็นบวก $\rightarrow 5a > 3a > a$

$$b \text{ เป็นบวก} \rightarrow \frac{225}{2b} > \frac{90}{b} > \frac{45}{2b}$$

ดังนั้น P มากสุด = $5a$

$$P \text{ น้อยสุด} = a - \frac{225}{2b}$$

โจทย์ให้ P มากสุด = 15 ดังนั้น $5a = 15$ จะได้ $a = 3$

โจทย์ให้ P น้อยสุด = -8.25 ดังนั้น $a - \frac{225}{2b} = -8.25$

$$3 - \frac{225}{2b} = -8.25$$

$$11.25 = \frac{225}{2b}$$

$$b = \frac{225}{22.5} = 10$$

$$\text{จะได้ } a^2 + b^2 = 3^2 + 10^2 = 109$$

เครดิต

ขอบคุณ อ. ศิลา สุขรัศมี และ อ. บุญช่วย ฤทธิเทพ สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นาย) ผู้เขียน Math E-book สำหรับเฉลยละเอียด

ขอบคุณ คุณ Athassawat Kammanee ที่ช่วยปรับปรุงวิธีคิดในเฉลยให้ดีขึ้น

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี

และ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นาย) ผู้เขียน Math E-book

และ คุณ Hassatorn Thamkijjanon

และ คุณ Wichakpol Krasapkan ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร