

PAT 1 (มี.ค. 59)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 5 มีนาคม 2559 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้(ก) $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ เป็นสัจนิรันดร์(ข) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์(ค) $(p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow \sim q)$ สมมูลกับ $p \rightarrow r$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|--|--|
| 1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด | 2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด |
| 3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด | 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ |
| 5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ | |

2. ในการสำรวจนักเรียนห้องหนึ่ง เกี่ยวกับความชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาอังกฤษ และวิชาภาษาไทย พบว่านักเรียนในห้องนี้ชอบเรียนวิชาดังกล่าวอย่างน้อย 1 วิชา และ

มี 24 คน ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์

มี 22 คน ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ

มี 21 คน ชอบเรียนวิชาภาษาไทย

มี 21 คน ชอบเรียนเพียงวิชาเดียว และ มี 4 คน ชอบเรียนทั้งสามวิชา

จำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ หรือวิชาภาษาไทย แต่ไม่ชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|----------|----------|----------|
| 1. 16 คน | 2. 17 คน | 3. 18 คน |
| 4. 19 คน | 5. 20 คน | |

3. ให้ m, n, r และ s เป็นจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันทั้งหมด โดยที่ $1 < m < r$

ให้ $a > 1$ และ $b > 1$ สอดคล้องกับ $a^m = b^n$ และ $a^r = b^s$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $m + n < r + s$

(ข) $m^n < r^s$

(ค) $\left(\frac{n}{s}\right)^m > \left(\frac{n}{s}\right)^r$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

4. ให้ $a = \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right) \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8}\right)$ และ $b = \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $b^2 - 4a = 0$
2. $4b^2 - 8a = 3$
3. $16a^2 - 8b^2 = 1$
4. $4a^2 + b^2 = 1$
5. $4a^2 + 4b^2 = 1$

5. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมแหลม ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C ตามลำดับ โดยที่ $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2 + b^2)c^2$ แล้วมุม C สอดคล้องกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $\sin 2C = \cos C$
2. $2 \tan C = \operatorname{cosec}^2 C$
3. $\sec C + 2 \cos C = 4$
4. $4 \operatorname{cosec}^2 C - \cos^2 C = 1$
5. $\tan^2 C + 2 \cos(2C) = 2$

6. กำหนดให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A \cap C \in B$ แล้ว $A \in B \cup C$

(ข) ถ้า $A \cap C \subset B$ แล้ว $B = (A \cup B) \cup (B \cap C)$

(ค) $P(A \cup B) \subset P(A) \cup P(B)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

7. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x| < 2\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $P(x)$ แทน $\frac{|x|-x}{x} \leq 0$ และ $Q(x)$ แทน $|x - \sqrt{(x-1)^2}| < 3$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\exists x[Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ข) $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ค) $\forall x[\sim P(x)] \vee \forall x[Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

8. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$2 \log_2 y = 4 + \log_{\sqrt{2}} x \quad \text{และ} \quad 4^{(x+1)} + 2 = 9(\sqrt[4]{2})^y$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $x^2 + y^2 = 17$
2. $x^3 + y^3 = 9$
3. $x^2 = y - 1$
4. $y^2 = x + 4$
5. $x + 2y = 7$

9. ค่าของ $4 \sin 40^\circ - \tan 40^\circ$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|----------------------|
| 1. $\cos 405^\circ$ | 2. $\sin 420^\circ$ | 3. $\sec(-60^\circ)$ |
| 4. $\tan(-120^\circ)$ | 5. $\cot(-135^\circ)$ | |

10. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง

และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $g(1+x) = x(2+x)$ และ $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\{x \in \mathbb{R} \mid (g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)\}$ เป็นเซตว่าง

(ข) $(g \circ f)(x) + 1 \geq 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \geq -1$

(ค) $(f + g)(x) \geq 1$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \geq -1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|--|--|
| 1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว | 2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว |
| 3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว | 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ |
| 5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ | |

11. ให้ C เป็นวงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A เส้นตรง $3x + 4y = 35$ สัมผัสวงกลมที่จุด $(5, 5)$ ถ้าไฮเพอร์โบลา
รูปหนึ่ง มีแกนตามขวางขนานกับแกน y มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด A ระยะระหว่างจุดศูนย์กลางกับโฟกัสจุดหนึ่งเป็น
สองเท่าของรัศมีของวงกลม C และเส้นตรง $3x - 4y = 2$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่ง แล้วสมการไฮเพอร์โบลารูปนี้
ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---|---|
| 1. $9x^2 - 16y^2 + 32x + 36y + 596 = 0$ | 2. $9x^2 - 16y^2 - 32x - 36y + 596 = 0$ |
| 3. $9x^2 - 16y^2 + 32x + 36y - 596 = 0$ | 4. $9x^2 - 16y^2 - 36x - 32y + 596 = 0$ |
| 5. $9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 596 = 0$ | |

12. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{x+2} < \sqrt{3-x} + \sqrt{2x-1}$ แล้ว A เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| < 1\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| < 1\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2 < 3x\}$
5. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2x\}$

13. กำหนดให้ P เป็นพาราโบลารูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + 4x + 3y - 5 = 0$ และพาราโบลา P ตัดแกน x ที่จุด A และจุด B ถ้า E เป็นวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด A และจุด B และผลบวกของระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลา P ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรี E เท่ากับ $2\sqrt{13}$ หน่วย แล้วสมการวงรี E ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + 4x + 9y^2 = 5$
2. $3x^2 + 12x + 5y^2 = 15$
3. $5x^2 + 20x + 9y^2 = 25$
4. $6x^2 + 24x + 25y^2 = 30$
5. $9x^2 + 36x + 16y^2 = 45$

14. กำหนดสมการจุดประสงค์ $P = 7x - 5y$ และข้อสมการข้อจำกัดดังนี้

$$x + 3y - 12 \geq 0, \quad 3x + y - 12 \geq 0, \quad x - 2y + 17 \geq 0 \quad \text{และ} \quad 9x + y - 56 \leq 0$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า (a, b) เป็นจุดมุมที่สอดคล้องกับข้อสมการข้อจำกัดและให้ค่า P มากที่สุด แล้ว $a^2 + b^2 = 40$

(ข) ผลต่างระหว่างค่ามากที่สุดและค่าน้อยที่สุดของ P เท่ากับ 70

(ค) ถ้า A และ B เป็นพิกัดของจุดมุมที่สอดคล้องกับข้อสมการข้อจำกัด โดยที่ P มีค่ามากที่สุดที่จุด A และ P มีค่าน้อยที่สุดที่จุด B แล้วจุด A และ B อยู่บนเส้นตรง $7x + 5y = 52$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

15. กำหนดให้ A และ B เป็นจุดสองจุดบนเส้นตรง $y = 2x + 1$ ถ้าจุด $C(-2, 2)$ เป็นจุดที่ทำให้ $|\overline{CA}| = |\overline{CB}|$ และ $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 0$ แล้วสมการของวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$
2. $x^2 + y^2 + 2y - 12 = 0$
3. $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$
4. $x^2 + y^2 - 2x - 12 = 0$
5. $x^2 + y^2 - 8 = 0$

16. ถ้าพาราโบลารูปหนึ่ง มีแกนสมมาตรทับกับแกน y และผ่านจุดปลายของส่วนของเส้นตรง $2x + 3y - 6 = 0$

เมื่อ x สอดคล้องกับสมการ $|\sqrt{x^2} - x| + |3 - x - |x - 3|| = 0$ แล้วความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\frac{9}{8}$ | 2. $\frac{9}{4}$ | 3. $\frac{9}{2}$ |
| 4. 9 | 5. 18 | |

17. ให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(x) = \begin{cases} x + b - 4 & , \quad x \leq a \\ x^2 + bx + a & , \quad a < x \leq b \\ 2bx - a & , \quad x > b \end{cases}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

และ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(f \circ f)(a - b) = a - b$

(ข) $f(a + b) = f(a) + f(b)$

(ค) $f'(f(2)) = f(f'(2))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|--|--|
| 1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด | 2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด |
| 3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด | 4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ |
| 5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ | |

18. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน

โดยที่ $f(x + 3) = x + 4$ และ $(f^{-1} \circ g)(x) = 3xf(x) - 3x - 4$ สำหรับจำนวนจริง x

ถ้า A เป็นเรนจ์ของ $g \circ f$ และ B เป็นเรนจ์ของ $f \circ g$ แล้ว $A - B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---------------|---------------|--------------|
| 1. $(0, 2)$ | 2. $(-2, 1)$ | 3. $(-3, 0)$ |
| 4. $(-4, -2)$ | 5. $(-6, -3)$ | |

19. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 3^{2x+10} - 4(3^{x+6}) + 27 \leq 0\}$

แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-9, -4)$
2. $(-5, -2)$
3. $(-3, 3)$
4. $(0, 5)$
5. $(2, 10)$

20. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง

โดยที่ $\sum_{n=1}^{25} a_n = 1900$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = 8$ ค่าของ a_{100} ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 298
2. 302
3. 400
4. 499
5. 598

21. ถ้าข้อมูล 10 จำนวน คือ $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ เมื่อ $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ เป็นจำนวนจริง โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ

ข้อมูล $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{10}^2$ เท่ากับ 70 และ $\sum_{i=1}^{10} (x_i - 3)^2 = 310$

แล้วค่าความแปรปรวนของข้อมูล $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 18
3. 45
4. 54
5. 63

22. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{20}$ เป็นข้อมูลที่เรียงค่าจากน้อยไปหามาก และเป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง ถ้าควอร์ไทล์ที่ 1 และเดซิล์ที่ 6 ของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 23.5 และ 38.2 ตามลำดับ แล้ว ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 9.75
2. 10.25
3. 10.50
4. 11.50
5. 11.75

23. นาย ก. และนางสาว ข. พร้อมด้วยเพื่อนผู้ชายอีก 3 คน และเพื่อนผู้หญิงอีก 3 คน นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม โดยที่ นาย ก. และนางสาว ข. นั่งตรงข้ามกัน และมีเพื่อนผู้หญิง 2 คนนั่งติดกันกับ นางสาว ข. จะมีจำนวนวิธีจัดที่นั่ง รอบโต๊ะกลมดังกล่าวได้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 30 วิธี
2. 72 วิธี
3. 96 วิธี
4. 120 วิธี
5. 144 วิธี

24. กำหนดให้ $a_n = \frac{2}{4n^2-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{4}$
2. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{3}{4}$
3. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{5}{6}$
4. อนุกรมลู่เข้าและมีผลบวกเท่ากับ $\frac{1}{6}$
5. อนุกรมลู่ออก

25. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ นิยาม $x * y = \begin{cases} \frac{xy}{x+y} & , x+y \neq 0 \\ 0 & , x+y = 0 \end{cases}$
 ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์ โดยที่ $a * b = 1$, $a * c = 2$ และ $b * c = 3$
 แล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. $a + b < c$
2. $a < b + c$
3. $a < b < c$
4. $b < c < a$
5. $c < a < b$

26. กำหนดให้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์
 โดยที่ $(A^t)^{-1}B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ ค่าของ $\det(2A + B)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3
2. 6
3. 9
4. 12
5. 14

27. กำหนดข้อมูล x และ y มีความสัมพันธ์ ดังนี้

x	1	3	4	5	7
y	0	3	6	7	9

โดยที่ x และ y มีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง ถ้า $y = 8$ แล้วค่าของ x เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5.94
2. 5.86
3. 7.1
4. 7.23
5. 8

28. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ทุกอันดับ และสอดคล้องกับ $g(x) = xf(x)$ และ $g'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 6

(ข) ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f เท่ากับ 2

(ค) อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $(f + g)(x)$ เทียบกับ x ขณะที่ $x = 1$ เท่ากับ 12

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อถูกต้อง

- ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
- ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
- ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
- ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

29. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกแก้วสีแดง 2 ลูก ลูกแก้วสีขาว 3 ลูก และลูกแก้วสีเขียว 3 ลูก สุ่มหยิบลูกแก้วออกมาจากกล่อง 8 ครั้ง ครั้งละลูกโดยไม่ต้องใส่คืน ความน่าจะเป็นที่สุ่มหยิบลูกแก้ว 8 ครั้ง โดยครั้งที่ 1 ได้ลูกแก้วสีขาวหรือหยิบครั้งที่ 8 ไม่ได้ลูกแก้วสีแดง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- $\frac{3}{4}$
- $\frac{5}{8}$
- $\frac{29}{56}$
- $\frac{7}{8}$
- $\frac{6}{7}$

30. กำหนดให้ $A = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} - \sqrt[4]{3}$, $B = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}}$ และ $C = \frac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)} + \frac{3}{\sqrt[4]{27}}$

ค่าของ $A - B + C$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- $-\sqrt{3}$
- $\sqrt{3}$
- -1
- 1
- 0

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $25 + 3(15)^{|x|} = 5^{|x|} + 25(3^{|x|+1})$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และให้ $B = \{3^x + 5^x \mid x \in A\}$ ค่ามากที่สุดที่ในเซต B เท่ากับเท่าใด

32. ให้ A แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $|\sqrt{x-1}-2| + |\sqrt{x-1}-3| = 1$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

33. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z| = |z - 1 + i|$ และ $\operatorname{Re}\left(\frac{(1-2i)z}{3-i}\right) = 0$ เมื่อ $i^2 = -1$ แล้วค่าของ $|2z + 1|^2$ เท่ากับเท่าใด

34. ค่าของ $\int_{-4}^{-2} \frac{x^3+x^2+x}{x|x+2|-x^2-2} dx$ เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

โดยที่ $3a_{n+1} = a_n$ และ $2^n b_n = a_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$

ถ้า $a_5 = 2$ แล้ว อนุกรม $b_1 + b_2 + b_3 + \dots$ มีผลบวกเท่ากับเท่าใด

36. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $a(a+b+3) = 0$ และ $2(b-a) = (a+b+1)(2-b)$
ค่ามากที่สุดของ $a^4 + b^4$ เท่ากับเท่าใด

37. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง จำนวน 30 คน มีการแจกแจงปกติ และมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 64 คะแนน นักเรียนชายห้องนี้มี 18 คน คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชายห้องนี้ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 64 คะแนน และความแปรปรวนเท่ากับ 10 ส่วนคะแนนสอบของนักเรียนหญิงมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 5 คะแนน ถ้านางสาว ก. เป็นนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้ สอบได้เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 22.66 ของนักเรียนทั้งห้อง แล้วคะแนนสอบของนางสาว ก. เท่ากับเท่าใด เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

z	0.5	0.6	0.75	1.0	1.25
พื้นที่	0.1915	0.2257	0.2734	0.3413	0.3944

38. กำหนด $0 < \theta < 90^\circ$ และ

$$\text{ให้ } A = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}\right), \quad B = \arctan(1 - \sin \theta) \quad \text{และ} \quad C = \arctan \sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta}$$

ถ้า $A + B = 2C$ แล้วค่าของ $3 \sin^4 \theta + \cos^4 \theta$ เท่ากับเท่าใด

39. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ a & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $AA^t = 9I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ 3×3 แล้วค่าของ $a^2 - b^2$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ $f(x)$ เทียบ

กับ x เมื่อค่าของ x เปลี่ยนจาก -1 เป็น 1 เท่ากับ -2 และ $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

แล้วค่าของ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ เท่ากับเท่าใด

41. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $r_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ และ } x^2 - y^2 - 2x + 4y \leq 3 \}$

และ $r_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \geq 0 \text{ และ } x^2 + y^2 - 2x \leq 33 \}$

ถ้าโดเมนของเซต $r_1 \cap r_2$ คือช่วงปิด $[a, b]$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a < b$

แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

42. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2 - \sqrt[3]{x^2 + 4}}$ เท่ากับเท่าใด

43. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า A เป็นเซตของข้อมูล $2n$ จำนวน คือ $1, 2, 3, \dots, n, -1, -2, -3, \dots, -n$ โดยที่ความแปรปรวนของข้อมูลในเซต A เท่ากับ 46 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3$ เท่ากับเท่าใด

44. กำหนดให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ โดยที่ $\vec{a} + \vec{b} = t\vec{c}$ โดยที่ t เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $|\vec{b}| = |\vec{a}|^2$, $|\vec{c}| = \sqrt{2}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ แล้วค่าของ t เท่ากับเท่าใด

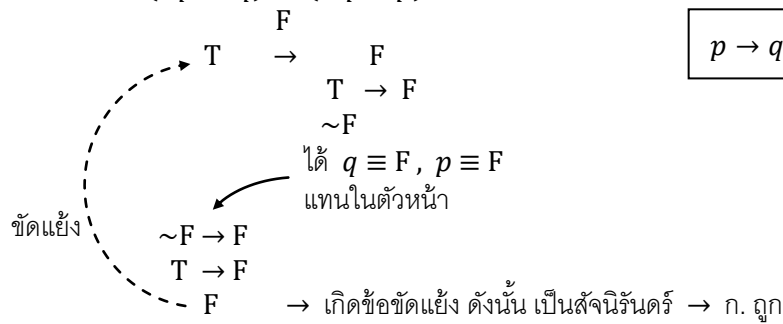
45. นิยาม $S \times S \times S = \{(a, b, c) \mid a, b, c \in S\}$ เมื่อ S เป็นเซตใดๆ กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงหาจำนวนสมาชิก (a, b, c) ในเซต $S \times S \times S$ ทั้งหมด โดยที่ $(3 + a)^{(b^c)}$ หารด้วย 4 ลงตัว

เฉลย

1. 1	11. 5	21. 4	31. 34	41. 20
2. 3	12. 3	22. 3	32. 45	42. 9
3. 4	13. 3	23. 5	33. 5	43. 396
4. 1	14. 4	24. 1	34. 3	44. 3
5. 2	15. 1	25. 5	35. 97.2	45. 70
6. 5	16. 3	26. 2	36. 641	
7. 2	17. 1	27. 2	37. 61	
8. 1	18. 4	28. 1	38. 0.75	
9. 4	19. 2	29. 5	39. 3	
10. 2	20. 5	30. 5	40. 48	

แนวคิด

1. 1

ก. ใช้วิธีสมมติให้เป็นเท็จ $(\sim p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ 

ข. ↔ ต้องดูว่า หน้า หลัง สมมูลกันหรือไม่

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\equiv \sim q \rightarrow p \\ \sim p \vee q &\equiv \sim(\sim q) \vee p \\ \sim p \vee q &\equiv q \vee p \end{aligned}$$

ไม่สมมูลกัน ดังนั้น ไม่เป็นสัจนิรันดร์ → ข. ถูก

ค. $(p \rightarrow q) \vee (\sim r \rightarrow \sim q) \equiv p \rightarrow r$

$$(\sim p \vee q) \vee (\sim(\sim r) \vee \sim q) \equiv \sim p \vee r$$

$$\sim p \vee q \vee r \vee \sim q \equiv \sim p \vee r$$

$$(q \vee \sim q) \vee \sim p \vee r \equiv \sim p \vee r$$

$$\text{T หรือ กับอะไรก็ได้ T} \quad \begin{array}{c} \text{T} \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{T} \quad \text{T} \end{array} \quad \begin{array}{c} \vee \sim p \vee r \\ \equiv \sim p \vee r \end{array}$$

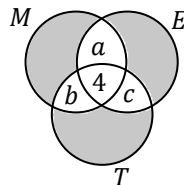
ไม่สมมูล → ค. ผิด

2. 3

นักเรียนชอบอย่างน้อย 1 วิชา → ข้างนอกสามวง = 0

ชอบวิชาเดียว = 21 คน → จะได้ส่วนที่แรเงา = 21

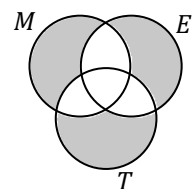
ชอบ 3 วิชา = 4 คน → จะได้ตรงกลาง = 4

กำหนด a, b, c ตามรูป

$$\begin{aligned} \text{จะได้นักเรียนทั้งหมด} &= 21 + a + b + c + 4 \\ &= 25 + a + b + c \quad \dots(1) \end{aligned}$$

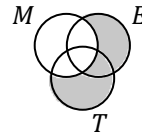
แต่จากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้นักเรียนทั้งหมด

$$\begin{aligned} &= n(M) + n(E) + n(T) - n(M \cap E) - n(E \cap T) - n(M \cap T) + n(M \cap E \cap T) \\ &= 24 + 22 + 21 - (a + 4) - (b + 4) - (c + 4) + 4 \\ &= 59 - a - b - c \quad \dots(2) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 (1) = (2) \text{ จะได้ } 25 + a + b + c &= 59 - a - b - c \\
 2a + 2b + 2c &= 34 \\
 a + b + c &= 17 \rightarrow \text{แทนใน (1) จะได้นักเรียนทั้งหมด} = 25 + 17 = 42 \text{ คน}
 \end{aligned}$$

โจทย์ถามนักเรียนที่ชอบ E หรือ T แต่ไม่ชอบ $M \rightarrow$ คือส่วนที่แรเงา ดังรูป
 ซึ่งจะหาได้จาก จำนวนนักเรียนทั้งหมด ลบด้วย จำนวนนักเรียนที่ชอบ M



$$\begin{aligned}
 &\text{ทั้งหมด 42 คน} - \text{ชอบคณิต 24 คน} = 18 \text{ คน} \rightarrow \text{ตอบ 18}
 \end{aligned}$$

3. 4

ก. จาก $m < r$
 $a^m < a^r$
 $b^n < b^s$
 $n < s$

ยกกำลังด้วยฐาน a ทั้งสองฝั่ง ไม่ต้องกลับ น้อยกว่า เป็น มากกว่า เพราะ $a > 1$
 $a^m = b^n$ และ $a^r = b^s$
 ตัดฐาน b ทั้งสองฝั่ง ไม่ต้องกลับ น้อยกว่า เป็น มากกว่า เพราะ $b > 1$

ดังนั้น $m < r$ และ $n < s$ บวกสองอสมการนี้ จะได้ว่า $m + n < r + s \rightarrow$ ก. ถูก

ข. จาก $1 < m < r$ และ $0 < n < s$ (โจทย์ให้ทุกตัวเป็นจำนวนเต็มบวก)

จะได้ $m^n < r^s \rightarrow$ ข. ถูก

ค. จาก $0 < n < s$ หารด้วย s ตลอด จะได้ $0 < \frac{n}{s} < 1$

จาก $1 < m < r$
 จะได้ $\left(\frac{n}{s}\right)^m > \left(\frac{n}{s}\right)^r$ ยกกำลังด้วยฐาน $\frac{n}{s}$ ทั้งสองฝั่ง ต้องกลับ น้อยกว่า เป็น มากกว่า เพราะ $\frac{n}{s} < 1$

$\rightarrow$ ค. ถูก

4. 1

สังเกตว่า $\frac{\pi}{8}$ กับ $\frac{3\pi}{8}$ รวมกันได้ $\frac{4\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ ใช้โคฟังก์ชัน จะได้ $\sin \frac{3\pi}{8} = \cos \frac{\pi}{8}$

$$a = \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right) \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}\right)^2$$

$$= \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8}}{2}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2}\right)^2 \quad \leftarrow \text{ใช้สูตร } \sin 2\theta$$

$$= \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2 = \frac{\frac{2}{4}}{4} = \frac{1}{8}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

$$b = \left(\sin^2 \frac{3\pi}{8}\right) - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \left(\cos^2 \frac{\pi}{8}\right) - \left(\sin^2 \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow \text{ใช้สูตร } \cos 2\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

จะได้ $a = \frac{1}{8}$ และ $b = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ แทนในตัวเลือกแต่ละข้อ

1. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{4} - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow$ ถูก

2. $4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 8\left(\frac{1}{8}\right) = 2 - 1 \neq 3 \rightarrow$ ผิด

3. $16\left(\frac{1}{8}\right)^2 - 8\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - 4 \neq 1 \rightarrow$ ผิด

4. $4\left(\frac{1}{8}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \neq 1 \rightarrow$ ผิด

$$5. \quad 4\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{16} + 2 \neq 1 \rightarrow \text{ผิด}$$

5. 2

มี $a^4 + b^4 + c^4$ จะลองใช้กฎของ $\cos$ ที่ C แล้วยกกำลังสองดู ดังนี้

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ 2ab \cos C &= a^2 + b^2 - c^2 \\ (2ab \cos C)^2 &= (a^2 + b^2 - c^2)^2 \\ 4a^2b^2 \cos^2 C &= a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 \\ 4a^2b^2 \cos^2 C &= 2(a^2 + b^2)c^2 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 \quad \text{โจทย์กำหนด} \\ 4a^2b^2 \cos^2 C &= 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2a^2c^2 \\ 4a^2b^2 \cos^2 C &= 2a^2b^2 \\ \cos^2 C &= \frac{1}{2} \\ \cos C &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

โจทย์ให้ C เป็นมุมแหลม ดังนั้น $\cos C = +\frac{1}{\sqrt{2}}$ จะได้ $C = 45^\circ$

$$1. \quad \sin 2(45^\circ) = \cos 45^\circ$$

$$1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times$$

$$2. \quad 2 \tan 45^\circ = \operatorname{cosec}^2 45^\circ$$

$$2 = (\sqrt{2})^2 \quad \checkmark$$

$$3. \quad \sec 45^\circ + 2 \cos 45^\circ = 4$$

$$\sqrt{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \quad \times$$

$$4. \quad 4 \operatorname{cosec}^2 45^\circ - \cos^2 45^\circ = 1$$

$$4(2) - \frac{2}{4} = 1 \quad \times$$

$$5. \quad \tan^2 45^\circ + 2 \cos 2(45^\circ) = 2$$

$$1 + 2(0) = 2 \quad \times$$

6. 5

(ก) $A \cap C \in B$ คือ $A \cap C$ ต้องเข้าไปอยู่ในปีกกาของ B

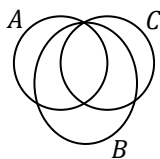
เช่น $A = \{1, 2\}$, $C = \{2, 3\}$ จะได้ $A \cap C = \{2\} \rightarrow$ ถ้าให้ $B = \{\{2\}\}$ จึงจะได้ว่า $A \cap C \in B$

แต่จะได้ $A \in B \cup C$

$$\{1, 2\} \in \{\{2\}\} \cup \{2, 3\}$$

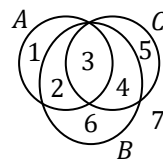
$$\{1, 2\} \in \{2, 3, \{2\}\} \quad \times$$

(ข) $A \cap C \subset B$ จะวาดได้ดังรูป



จะตรวจสอบข้อนี้โดยใช้วิธีกำหนด

“สมาชิกตัวแทน” ให้ทุกส่วน ดังรูป



จะได้ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 6\}$, และ $C = \{3, 4, 5\}$

$$\text{ดังนั้น } B = (A \cup B) \cup (B \cap C)$$

$$\{2, 3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \cup \{3, 4\}$$

$$\{2, 3, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad \times$$

(ค) ปกติแล้ว $P(A \cup B)$ จะใหญ่กว่า $P(A) \cup P(B)$ เพราะใน $P(A \cup B)$ จะมีสับเซตที่ “บางตัวมาจาก A และบางตัวมาจาก B ” ในขณะที่ $P(A) \cup P(B)$ คือ การนำ “สับเซตที่มาจาก A รวมกับ “สับเซตที่มาจาก B ” ซึ่งจะไม่ มีสับเซตที่เกิดร่วมกัน ระหว่าง A กับ B

เช่น ถ้าให้ $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ จะได้ $A \cup B = \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } P(A \cup B) &\subset P(A) \cup P(B) \\ P(\{1, 2\}) &\subset P(\{1\}) \cup P(\{2\}) \\ \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} &\subset \{\emptyset, \{1\}\} \cup \{\emptyset, \{2\}\} \\ \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\} &\subset \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\} \quad \times \end{aligned}$$

หมายเหตุ : ถ้า ข้อ ค. สลับข้างสับเซต

เป็น $P(A) \cup P(B) \subset P(A \cup B)$ จะถูก

↓
สับเซตที่มีสมาชิกมาจากทั้ง A และ B

7. 2

แก้ $0 < |x| < 2$ หาเอกภพสัมพัทธ์ $\rightarrow 0 < |x|$ และ $|x| < 2$

จริงเสมอ ยกเว้น $x = 0$ $-2 < x < 2 \rightarrow$ เอกภพสัมพัทธ์ คือ $(-2, 0) \cup (0, 2)$

จะแก้สมการ เพื่อหาว่า $P(x)$ กับ $Q(x)$ เป็นจริงเมื่อ x มีค่าเป็นอย่างไร

$P(x)$: จะแบ่งกรณีคิดที่ $x \geq 0$ และ $x < 0$ เพื่อใช้สมบัติ $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ ในการกำจัดค่าสัมบูรณ์

กรณี $x \geq 0$ จะได้ $|x| = x$

$$\frac{|x| - x}{x} \leq 0$$

$$\frac{|x - x|}{x} \leq 0$$

$$\frac{0}{x} \leq 0$$

$$0 \leq 0$$

เป็นจริงเสมอโดยไม่ขึ้นกับค่า x

กรณี $x < 0$ จะได้ $|x| = -x$

$$\frac{|x| - x}{x} \leq 0$$

$$\frac{|-x - x|}{x} \leq 0$$

$$\frac{|-2x|}{x} \leq 0$$

$$\frac{2|x|}{x} \leq 0$$

$$\frac{2(-x)}{x} \leq 0$$

$$-2 \leq 0$$

$\rightarrow |x| = -x$

$\rightarrow$ ตัดได้ เพราะ $x \neq 0$

เป็นจริงเสมอโดยไม่ขึ้นกับค่า x

จะเห็นว่า ไม่ว่าเป็นกรณีไหน จะได้ $P(x)$ เป็นจริงเสมอ ดังนั้น $\exists x[P(x)] \equiv T$ และ $\forall x[P(x)] \equiv T$

$Q(x)$: จาก $|x - \sqrt{(x-1)^2}| < 3$ จะได้ว่า $-3 < x - \sqrt{(x-1)^2} < 3$
 $-3 < x - |x-1| < 3$

จะแบ่งคิดเป็นกรณีที่ $x \geq 1$ และ $x < 1$ เพื่อกำจัดค่าสัมบูรณ์ $|x-1|$

กรณี $x \geq 1$ จะได้ $x-1 \geq 0$

ดังนั้น $|x-1| = x-1$

$$-3 < x - |x-1| < 3$$

$$-3 < x - (x-1) < 3$$

$$-3 < x - x + 1 < 3$$

$$-3 < 1 < 3$$

เป็นจริงเสมอโดยไม่ขึ้นกับค่า x

แต่กรณีนี้ $x \geq 1 \rightarrow$ จะได้ $x \in [1, \infty)$

กรณี $x < 1$ จะได้ $x-1 < 0$

ดังนั้น $|x-1| = -(x-1)$

$$-3 < x - |x-1| < 3$$

$$-3 < x - (-(x-1)) < 3$$

$$-3 < x + x - 1 < 3$$

$$-2 < 2x < 4$$

$$-1 < x < 2$$

$$\rightarrow x \in (-1, 2)$$

แต่กรณีนี้ $x < 1 \rightarrow$ เหลือ $x \in (-1, 1)$

รวมสองกรณี จะได้คำตอบคือ $[1, \infty) \cup (-1, 1) = (-1, \infty)$

จะเห็นว่า ในเอกภพสัมพัทธ์ $(-2, 0) \cup (0, 2)$ มีทั้งค่าที่อยู่ในเซตคำตอบ $(-1, \infty)$ (เช่น $x = 1$)

และค่าที่ไม่อยู่ในเซตคำตอบ $(-1, \infty)$ (เช่น $x = -1.5$)

ดังนั้น $\exists x[Q(x)] \equiv T$ แต่ $\forall x[Q(x)] \equiv F$

(ก) $\exists x[Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)] \equiv T \rightarrow T \equiv T \rightarrow$ (ก) ถูก

(ข) เนื่องจากเมื่อ $x = -1.5$ จะได้ $Q(x)$ เป็นเท็จ ทำให้ $P(x) \wedge Q(x) \equiv P(x) \wedge F \equiv F$

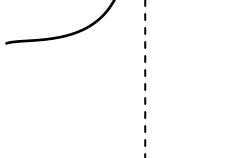
ดังนั้น $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv F \rightarrow$ (ข) ผิด

(ค) $\forall x[\sim P(x)]$ จะเป็นจริงเมื่อ x ทุกตัว ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จทั้งหมด

แต่ x ทุกค่าทำให้ $P(x)$ เป็นจริง ดังนั้น $\forall x[\sim P(x)] \equiv F$

จะได้ $\forall x[\sim P(x)] \vee \forall x[Q(x)] \equiv F \vee F \equiv F \rightarrow$ (ค) ถูก

8. 1

$$\begin{aligned}
 2 \log_2 y &= 4 + \log_{\sqrt{2}} x \\
 2 \log_2 y &= 4 + \log_{2^{\frac{1}{2}}} x \\
 2 \log_2 y &= 4 + 2 \log_2 x \\
 \log_2 y &= 2 + \log_2 x \\
 \log_2 y &= \log_2 4 + \log_2 x \\
 \log_2 y &= \log_2 4x \\
 y &= 4x
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 4^{(x+1)} + 2 &= 9\left(\sqrt[4]{2}\right)^y \\
 4^{(x+1)} + 2 &= 9\left(\sqrt[4]{2}\right)^{4x} \\
 4^x \cdot 4^1 + 2 &= 9\left(2^{\frac{1}{4}}\right)^{4x} \\
 4 \cdot 2^{2x} + 2 &= 9 \cdot 2^x \\
 4 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 2 &= 0 \\
 (4 \cdot 2^x - 1)(2^x - 2) &= 0 \\
 2^x &= \frac{1}{4}, 2 \\
 2^x &= 2^{-2}, 2^1 \\
 x &= -2, 1
 \end{aligned}$$

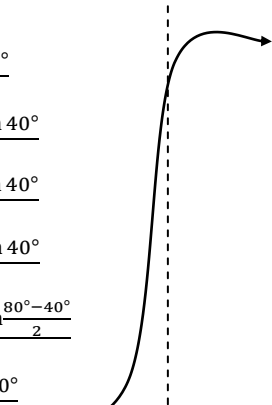
↓
โจทย์ให้ x เป็น R^+

แทน $x = 1$ จะได้ $y = 4(1) = 4 \rightarrow$ แทนในตัวเลือก

1. $1^2 + 4^2 = 17$ ✓
2. $1^3 + 4^3 = 9$ ✗
3. $1^2 = 4 - 1$ ✗
4. $4^2 = 1 + 4$ ✗
5. $1 + 2(4) = 7$ ✗

9. 4

$$4 \sin 40^\circ - \tan 40^\circ$$

$$\begin{aligned}
 &= 4 \sin 40^\circ - \frac{\sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{4 \sin 40^\circ \cos 40^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2(2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ) - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \sin 80^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 80^\circ + \sin 80^\circ - \sin 40^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 80^\circ + 2 \cos \frac{80^\circ + 40^\circ}{2} \sin \frac{80^\circ - 40^\circ}{2}}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 80^\circ + 2 \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ}
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin 80^\circ + 2\left(\frac{1}{2}\right) \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sin 80^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \sin \frac{80^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ - 20^\circ}{2}}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \sin 50^\circ \cos 30^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \sin 50^\circ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\sqrt{3} \sin 50^\circ}{\cos 40^\circ}
 \end{aligned}$$

↓
จากโคฟังก์ชัน จะได้ $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$

หาค่าตัวเลือกในแต่ละข้อ ว่าข้อไหนได้ $\sqrt{3}$

1. $\cos 405^\circ = \cos(360^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ✗
2. $\sin 420^\circ = \sin(360^\circ + 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✗
3. $\sec(-60^\circ) = \frac{1}{\cos(-60^\circ)} = \frac{1}{\cos 60^\circ} = \frac{1}{1/2} = 2$ ✗

4. $\tan(-120^\circ) = \tan(-180^\circ + 60^\circ) = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \quad \checkmark \rightarrow$ ตอบข้อ 4.

5. $\cot(-135^\circ) = \frac{1}{\tan(-135^\circ)} = \frac{1}{\tan(-180^\circ + 45^\circ)} = \frac{1}{\tan 45^\circ} = \frac{1}{1} = 1 \quad \times$

10. 2

หา $g(x)$: จาก $g(1+x) = x(2+x) \rightarrow$ ให้ $1+x = a$
 $x = a-1$

$$g(a) = (a-1)(2+a-1)$$

$$g(a) = (a-1)(a+1)$$

$$g(a) = a^2 - 1$$

$$g(x) = x^2 - 1$$

หา $f(x)$: จาก $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$

$$f(g(x)) = x^2 + 1$$

$$f(x^2 - 1) = x^2 + 1$$

ให้ $x^2 - 1 = b \rightarrow$ เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ ดังนั้น $b = x^2 - 1$
 $x^2 = b + 1$
 $\geq 0 - 1$
 ≥ -1

$$f(b) = b + 1 + 1 \quad ; \quad b \geq -1$$

$$f(b) = b + 2$$

$$f(x) = x + 2 \quad ; \quad x \geq -1$$

(ก) แก่สมการ $(g \circ f)(x) = (f \circ g)(x)$

$$g(f(x)) = x^2 + 1$$

$$g(x+2) = x^2 + 1 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$(x+2)^2 - 1 = x^2 + 1$$

$$x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 1$$

$$4x = -2$$

$$x = -\frac{1}{2} \rightarrow$$
 สอดคล้องกับเงื่อนไข $x \geq -1$

$\rightarrow$ สมการมีคำตอบ ดังนั้น ไม่เป็นเซตว่าง $\rightarrow$ ก. ผิด

(ข) จากที่เคยทำฝั่งซ้ายของข้อ ก. จะได้ $(g \circ f)(x) = (x+2)^2 - 1$ เมื่อ $x \geq -1$

แทนในข้อ ข. จะได้ $(g \circ f)(x) + 1 \geq 0$

$$(x+2)^2 - 1 + 1 \geq 0 \quad ; \quad x \geq -1$$

$$(x+2)^2 \geq 0 \rightarrow$$
 จริง (ผลยกกำลังสอง ≥ 0 เสมอ) $\rightarrow$ ข. ถูก

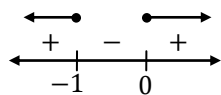
(ค) $(f+g)(x) \geq 1$

$$f(x) + g(x) \geq 1$$

$$x+2+x^2-1 \geq 1 \quad ; \quad x \geq -1$$

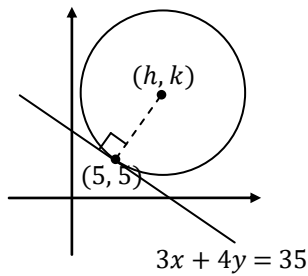
$$x^2 + x \geq 0$$

$$x(x+1) \geq 0$$



$\rightarrow$ จะเห็นว่า เมื่อ $x \geq -1$ จะมีช่วง $(-1, 0)$ ที่ไม่เป็นคำตอบของสมการ $\rightarrow$ ค. ผิด

11. 5



ให้วงกลมมีจุดศูนย์กลางที่ $A(h, k)$ จะวาดได้ดังรูป

จัดรูปเส้นตรง $3x + 4y = 35$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{35}{4} \rightarrow \text{ความชัน} = -\frac{3}{4}$$

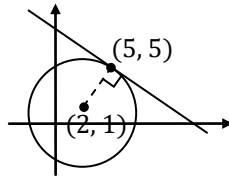
จาก รัศมี $\perp$ เส้นสัมผัส จะได้ ความชันรัศมี $\times$ ความชันเส้นสัมผัส $= -1$

$$\begin{aligned} \frac{k-5}{h-5} \times -\frac{3}{4} &= -1 \\ 3k - 15 &= 4h - 20 \\ 5 &= 4h - 3k \\ 4h - 3k &= 5 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $A(h, k)$ เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาด้วย และโจทย์ให้เส้นกำกับเส้นหนึ่งคือ $3x - 4y = 2$

เนื่องจากเส้นกำกับจะผ่านจุดศูนย์กลางเสมอ ดังนั้น $A(h, k)$ ต้องแทนใน $3x - 4y = 2$ แล้วเป็นจริง

แปลว่ารูปต้องเป็นแบบนี้
(แต่ก็ยังสามารถทำแบบเดิมได้อยู่)



$$\begin{aligned} 3h - 4k &= 2 \quad \dots(2) \\ 3(1) - 4(2) : \quad 7k &= 7 \\ k &= 1 \\ \text{แทนใน (2) : } 3h - 4(1) &= 2 \\ h &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น วงกลม มีจุดศูนย์กลาง $A(2, 1)$ และรัศมี = ระยะจาก $(2, 1)$ ไป $(5, 5)$

$$= \sqrt{(5-2)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

จะได้ไฮเพอร์โบลา มีจุดศูนย์กลาง $(h, k) = (2, 1)$ และระยะโฟกัส $c =$ สองเท่ารัศมี $= 2(5) = 10$

โจทย์ให้แกนตามขวางขนานแกน $y \rightarrow$ เป็นไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง มีรูปสมการคือ $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

เนื่องจากเส้นกำกับ $3x - 4y = 2$ มีความชัน $= \frac{3}{4} \rightarrow$ จะได้ $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$ ดังรูป

$$\frac{3}{4}x - \frac{1}{2} = y$$

$$a = \frac{3b}{4}$$

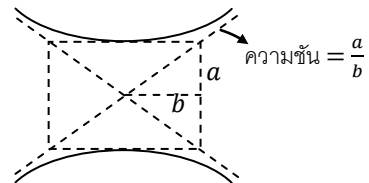
และจาก $a^2 + b^2 = c^2 = 10^2$

$$\left(\frac{3b}{4}\right)^2 + b^2 = 10^2$$

$$\frac{25b^2}{16} = 10^2$$

$$\frac{5b}{4} = 10$$

$$b = 8 \rightarrow \text{จะได้ } a = \frac{3(8)}{4} = 6$$



แทนค่า h, k, a, b จะได้สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(y-1)^2}{6^2} - \frac{(x-2)^2}{8^2} = 1$

$$\frac{y^2 - 2y + 1}{6^2} - \frac{x^2 - 4x + 4}{8^2} = 1$$

$$4^2(y^2 - 2y + 1) - 3^2(x^2 - 4x + 4) = 24^2$$

$$16y^2 - 32y + 16 - 9x^2 + 36x - 36 = 576$$

$$-9x^2 + 16y^2 + 36x - 32y - 596 = 0$$

$$9x^2 - 16y^2 - 36x + 32y + 596 = 0$$

12. 3

สังเกตว่า ตัวในรูปทางขวาสองตัว บวกกัน จะเท่ากับ ตัวในรูปฝั่งซ้าย $\rightarrow 3 - x + 2x - 1 = x + 2$

ดังนั้น ถ้าให้ $a = 3 - x$ และ $b = 2x - 1$ จะได้สมการคือ $\sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$

$$\begin{aligned} a+b &< a+2\sqrt{a}\sqrt{b}+b \\ 0 &< 2\sqrt{a}\sqrt{b} \end{aligned}$$
เนื่องจาก ในรูปต้อง ≥ 0 และ ผลรวม ≥ 0 จะเห็นว่า สมการ $0 < 2\sqrt{a}\sqrt{b}$ เป็นจริงเมื่อ $a > 0$ และ $b > 0$

นั่นคือ $3 - x > 0$ และ $2x - 1 > 0$

$$\begin{aligned} 3 &> x & x &> \frac{1}{2} \rightarrow \text{จะได้ } A = \left(\frac{1}{2}, 3\right) \end{aligned}$$

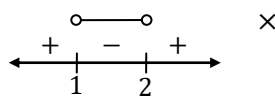
$$\begin{aligned} 1. \quad |2x-1| &< 1 \\ -1 &< 2x-1 < 1 \\ 0 &< 2x < 2 \\ 0 &< x < 1 \quad \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad |x-2| &< 1 \\ -1 &< x-2 < 1 \\ 1 &< x < 3 \quad \times \end{aligned}$$

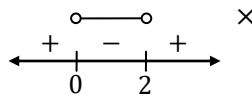
$$\begin{aligned} 3. \quad |x-1| &< 2 \\ -2 &< x-1 < 2 \\ -1 &< x < 3 \quad \checkmark \end{aligned}$$

จะได้ $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ เป็นสับเซตของข้อ 3.

$$\begin{aligned} 4. \quad x^2 + 2 &< 3x \\ x^2 - 3x + 2 &< 0 \\ (x-1)(x-2) &< 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5. \quad x^2 &< 2x \\ x^2 - 2x &< 0 \\ x(x-2) &< 0 \end{aligned}$$



13. 3

โจทย์ให้ จุดยอดของวงรี อยู่ที่ จุดตัดแกน x ของพาราโบลา

หาจุดที่พาราโบลาตัดแกน $x \rightarrow$ แทน $y = 0$ ในสมการพาราโบลา :

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 3(0) - 5 &= 0 \\ x^2 + 4x - 5 &= 0 \\ (x+5)(x-1) &= 0 \\ x &= -5, 1 \end{aligned}$$
ดังนั้น จุดยอดของวงรีคือ $(-5, 0)$ และ $(1, 0) \rightarrow$ เป็นวงรีแนวนอนจุดศูนย์กลางวงรี จะอยู่ตรงกลางระหว่างจุดยอด $\rightarrow$ ได้จุดศูนย์กลาง $(h, k) = \left(\frac{-5+1}{2}, 0\right) = (-2, 0)$ และถ้าให้ระยะโฟกัสของวงรี $= c$ จะได้จุดโฟกัสทั้งสองคือ $(-2+c, 0)$ และ $(-2-c, 0)$ โจทย์ให้ ผลบวกของระยะจากจุดยอดพาราโบลา ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรี $= 2\sqrt{13}$

หาจุดยอดพาราโบลา $\rightarrow$ จัดรูป $x^2 + 4x + 3y - 5 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 &= -3y + 5 + 4 \\ (x+2)^2 &= -3(y-3) \rightarrow \text{จะได้จุดยอด คือ } (-2, 3) \end{aligned}$$
ดังนั้น ระยะจาก $(-2, 3)$ ไปยัง $(-2+c, 0)$ บวก ระยะจาก $(-2, 3)$ ไปยัง $(-2-c, 0)$ เท่ากับ $2\sqrt{13}$

$$\begin{aligned} \sqrt{((-2) - (-2+c))^2 + (3-0)^2} + \sqrt{((-2) - (-2-c))^2 + (3-0)^2} &= 2\sqrt{13} \\ \sqrt{(-2 + 2-c)^2 + 3^2} + \sqrt{(-2 + 2+c)^2 + 3^2} &= 2\sqrt{13} \\ \sqrt{c^2 + 9} + \sqrt{c^2 + 9} &= 2\sqrt{13} \\ 2\sqrt{c^2 + 9} &= 2\sqrt{13} \\ \sqrt{c^2 + 9} &= \sqrt{13} \\ c^2 + 9 &= 13 \\ c &= 2 \end{aligned}$$

โจทย์ถามสมการวงรี $\rightarrow$ ต้องหา a, b

จากจุดยอดวงรี $(-5, 0)$ และ $(1, 0)$ จะได้แกนเอกยาว $1 - (-5) = 6$ ดังนั้น $a = \frac{6}{2} = 3$

$$\begin{aligned} \text{และจาก } a^2 - b^2 &= c^2 \\ 3^2 - b^2 &= 2^2 \\ 5 &= b^2 \end{aligned}$$

แทน $(h, k) = (-2, 0)$ และ $a = 3, b^2 = 5$ ในสมการวงรีแนวนอน

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x+2)^2}{3^2} + \frac{(y-0)^2}{5} &= 1 \\ \frac{x^2+4x+4}{9} + \frac{y^2}{5} &= 1 \\ 5x^2 + 20x + 20 + 9y^2 &= 45 \\ 5x^2 + 20x + 9y^2 &= 25 \end{aligned}$$

14. 4

หาจุดตัดแกนของเส้นตรง วาดกราฟ และแทนจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นกราฟ $(0, 0)$ เพื่อแรเงา จะได้ดังรูป

$$L_1: x + 3y - 12 \geq 0$$

จุดตัดแกน

x	0	12
y	4	0

จุด $(0, 0) \rightarrow$ อสมการเป็นเท็จ
แรเงาสวนขวานบนที่ไม่มี $(0, 0)$

$$L_2: 3x + y - 12 \geq 0$$

จุดตัดแกน

x	0	4
y	12	0

จุด $(0, 0) \rightarrow$ อสมการเป็นเท็จ
แรเงาสวนขวานบนที่ไม่มี $(0, 0)$

$$L_3: x - 2y + 17 \geq 0$$

จุดตัดแกน

x	0	-17
y	$\frac{17}{2}$	0

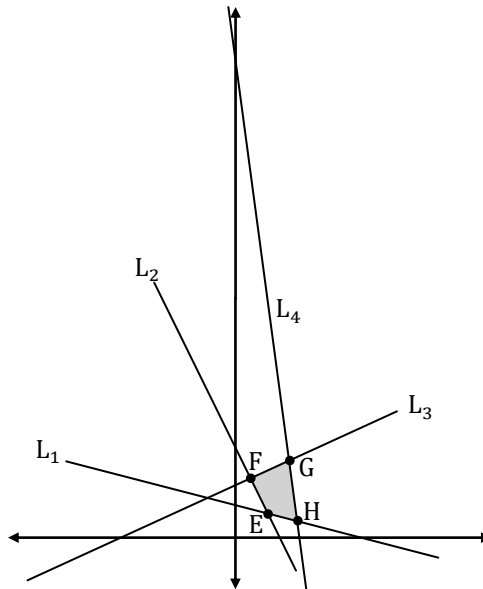
จุด $(0, 0) \rightarrow$ อสมการเป็นจริง
แรเงาสวนขวาล่างที่มี $(0, 0)$

$$L_4: 9x + y - 56 \leq 0$$

จุดตัดแกน

x	0	$\frac{56}{9}$
y	56	0

จุด $(0, 0) \rightarrow$ อสมการเป็นจริง
แรเงาสวนซ้ายล่างที่มี $(0, 0)$



หาพิกัดของจุดมุม E, F, G, H

หา E $\rightarrow$ ต้องแก้ L_1 กับ L_2

$$L_1: x + 3y = 12 \quad \dots(1)$$

$$L_2: 3x + y = 12 \quad \dots(2)$$

$$3(1) - (2): 8y = 24$$

$$y = 3$$

$$\text{แทนใน (1): } x + 9 = 12$$

$$x = 3$$

จะได้พิกัด E(3, 3)

หา F $\rightarrow$ ต้องแก้ L_2 กับ L_3

$$L_2: 3x + y = 12 \quad \dots(2)$$

$$L_3: x - 2y = -17 \quad \dots(3)$$

$$(2) - 3(3): 7y = 63$$

$$y = 9$$

$$\text{แทนใน (2): } 3x + 9 = 12$$

$$x = 1$$

จะได้พิกัด F(1, 9)

หา G $\rightarrow$ ต้องแก้ L_3 กับ L_4

$$L_3: x - 2y = -17 \quad \dots(3)$$

$$L_4: 9x + y = 56 \quad \dots(4)$$

$$(3) + 2(4): 19x = 95$$

$$x = 5$$

$$\text{แทนใน (4): } 45 + y = 56$$

$$y = 11$$

จะได้พิกัด G(5, 11)

หา H $\rightarrow$ ต้องแก้ L_1 กับ L_4

$$L_1: x + 3y = 12 \quad \dots(1)$$

$$L_4: 9x + y = 56 \quad \dots(4)$$

$$9(1) - (4): 26y = 52$$

$$y = 2$$

$$\text{แทนใน (1): } x + 6 = 12$$

$$x = 6$$

จะได้พิกัด H(6, 2)

เอาจุดมุมทั้งสี่ ไปแทนใน สมการจุดประสงค์ $P = 7x - 5y$

$$E(3, 3) \rightarrow P = 7(3) - 5(3) = 6$$

$$F(1, 9) \rightarrow P = 7(1) - 5(9) = -38 \rightarrow \min$$

$$G(5, 11) \rightarrow P = 7(5) - 5(11) = -20$$

$$H(6, 2) \rightarrow P = 7(6) - 5(2) = 32 \rightarrow \max$$

(ก) จุดที่ให้ค่ามากที่สุด คือ $(6, 2) \rightarrow a^2 + b^2 = 6^2 + 2^2 = 40 \rightarrow$ (ก) ถูก

(ข) ค่ามากที่สุด $= 32$, ค่าน้อยสุด $= -38 \rightarrow$ ผลต่าง $= 32 - (-38) = 70 \rightarrow$ (ข) ถูก

(ค) ดูว่าจุดที่ให้ค่า P มากสุด กับ น้อยสุด แทนในสมการ $7x + 5y = 52$ แล้วเป็นจริงหรือไม่

มากที่สุดที่ $(6, 2)$: $7(6) + 5(2) = 52$ จริง

น้อยสุดที่ $(1, 9)$: $7(1) + 5(9) = 52$ จริง $\rightarrow$ (ค) ถูก

15. 1

จาก $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0$ แสดงว่า $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ ดังนั้น $\triangle ABC$ เป็น $\triangle$ มุมฉาก

และจากสมบัติของครึ่งวงกลม จะได้ $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม

ให้จุดศูนย์กลางคือ $D(h, k)$ จะวาดได้ดังรูป

เนื่องจาก $D(h, k)$ อยู่บนเส้นตรง $y = 2x + 1$

ดังนั้น (h, k) ต้องสอดคล้องกับสมการเส้นตรง $\rightarrow k = 2h + 1 \dots (*)$

และจาก $CA = CB$ จะได้ $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ ด้วย

จากสมบัติความชันเส้นตั้งฉาก จะได้ ความชัน $\overline{CD} \times$ ความชัน $\overline{AB} = -1$

$$\begin{aligned} \text{จาก } (*) \quad & \left(\begin{array}{l} \frac{k-2}{h-(-2)} \times 2 = -1 \\ \frac{2h+1-2}{h+2} \times 2 = -1 \\ 4h-2 = -h-2 \\ h = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

แทน $h = 0$ ใน $(*)$ จะได้ $k = 2(0) + 1 = 1 \rightarrow$ จะได้จุดศูนย์กลางคือ $D(0, 1)$

และจะได้รัศมี $= CD = \sqrt{(-2-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

จะได้สมการวงกลมคือ $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$$(x-0)^2 + (y-1)^2 = \sqrt{5}^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 5$$

$$x^2 + y^2 - 2y - 4 = 0$$

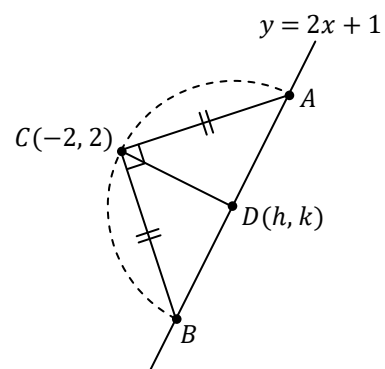
16. 3

โจทย์ให้แกนสมมาตรทับแกน y ดังนั้น จะเป็นพาราโบลาคว่ำหงาย มีรูปสมการคือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$

เนื่องจากแกนสมมาตรจะผ่านจุดยอดเสมอ ดังนั้น จุดยอดจะอยู่บนแกน y ด้วย

และเนื่องจากจุดบนแกน y จะมีพิกัด x เป็น 0 เสมอ ดังนั้น จุดยอด $V(h, k)$ จะมี $h = 0$

$\rightarrow$ แทนในสมการจะได้ $x^2 = 4c(y-k) \dots (*)$



ถัดมา แก้สมการ $|\sqrt{x^2} - x| + |3 - x - |x - 3|| = 0$

จะเห็นว่า ทั้ง $|\sqrt{x^2} - x|$ และ $|3 - x - |x - 3||$ เป็นค่าสัมบูรณ์ ซึ่งจะ ≥ 0

ดังนั้น ถ้า $|\sqrt{x^2} - x|$ กับ $|3 - x - |x - 3||$ บวกกันได้ 0 แสดงว่า ทั้งคู่ต้องเป็น 0 พร้อมๆกัน เท่านั้น

$$\begin{array}{lcl} \sqrt{x^2} - x = 0 & \text{และ} & 3 - x - |x - 3| = 0 \\ \sqrt{x^2} = x & & -|x - 3| = x - 3 \\ |x| = x & & |x - 3| = -(x - 3) \end{array}$$

เป็นจริงเมื่อ $x \geq 0$

$$\text{เป็นจริงเมื่อ } \begin{array}{l} x - 3 \leq 0 \\ x \leq 3 \end{array}$$

$\Rightarrow$ จะได้ $0 \leq x \leq 3$

ถัดมา หาจุดปลายของ $2x + 3y - 6 = 0 \rightarrow$ เนื่องจาก $0 \leq x \leq 3$ ดังนั้น จุดปลายจะเกิดที่ $x = 0$ และ $x = 3$

$$\begin{array}{l} x = 0: 2(0) + 3y - 6 = 0 \\ y = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = 3: 2(3) + 3y - 6 = 0 \\ y = 0 \end{array}$$

ดังนั้น พาราโบลาผ่านจุด $(0, 2)$ และ $(3, 0) \rightarrow$ สองจุดนี้ต้องแทนในสมการพาราโบลา (*) แล้วเป็นจริง

$$\begin{array}{l} x^2 = 4c(y - k) \\ 0^2 = 4c(2 - k) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^2 = 4c(y - k) \\ 3^2 = 4c(0 - k) \\ 9 = 4c(0 - 2) \end{array}$$

แต่ $c \neq 0$ (เพราะ c คือระยะโฟกัส)

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $k = 2$

$$-\frac{9}{8} = c \rightarrow c \text{ เป็นลบ แสดงว่าเป็นพาราโบลาคว่ำ}$$

$$\text{ดังนั้น ความยาวลาตัสเรคตัม} = |4c|$$

$$= \left| 4 \left(-\frac{9}{8} \right) \right| = \frac{9}{2}$$

17. 1

f ต่อเนื่อง แสดงว่า f ต้องมีค่าเท่ากันตรงบริเวณรอยต่อของแต่ละสมการ

ที่รอยต่อตรง $x = a$ จะได้

ที่รอยต่อตรง $x = b$ จะได้

$$\begin{array}{l} x = a \hookrightarrow \begin{array}{l} x + b - 4 = x^2 + bx + a \\ a + b - 4 = a^2 + ba + a \\ b - 4 = a^2 + ba \end{array} \\ \downarrow \\ \begin{array}{l} b - 4 = 0 + 0 \\ b = 4 \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x = b \hookrightarrow \begin{array}{l} x^2 + bx + a = 2bx - a \\ b^2 + b^2 + a = 2b^2 - a \\ 2a = 0 \\ a = 0 \end{array} \end{array}$$

จะได้ $a = 0, b = 4 \rightarrow$ แทนใน $f(x)$ จะได้ $f(x) = \begin{cases} x & , x \leq 0 \\ x^2 + 4x & , 0 < x \leq 4 \\ 8x & , x > 4 \end{cases}$

แทน a, b และ f ในตัวเลือกในแต่ละข้อ จะได้ดังนี้

(ก) $(f \circ f)(0 - 4) = 0 - 4$

(ข) $f(0 + 4) = f(0) + f(4)$

สูตรแรก $f(f(-4)) = -4$
สูตรแรก $f(-4) = -4$
สูตรแรก $-4 = -4 \checkmark$

$f(4) = 0 + f(4)$ ใช้สูตรแรกหา $f(0)$
 $f(4) = f(4) \checkmark$

(ค) ดิฟจะได้ $f'(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 0 \\ 2x + 4 & , 0 < x \leq 4 \\ 8 & , x > 4 \end{cases}$

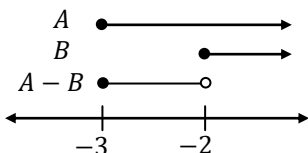
ดังนั้น $\begin{array}{l} f'(f(2)) = f'(2) \\ f'(2^2 + 4(2)) = f(2(2) + 4) \\ f'(12) = f(8) \\ 8 = 8(8) \\ 8 = 64 \times \end{array}$

18. 4

$$\begin{aligned} \text{จัดรูป } f(x) \rightarrow \text{ให้ } k = x + 3 \text{ จะได้ } f(x + 3) &= x + 4 \\ k - 3 &= x & f(k) &= k - 3 + 4 \\ & & f(k) &= k + 1 \end{aligned} \rightarrow \text{ดังนั้น } f(x) = x + 1$$

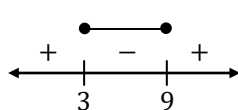
$$\begin{aligned} \text{และจาก } (f^{-1} \circ g)(x) &= 3xf(x) - 3x - 4 \\ f^{-1}(g(x)) &= 3x(x + 1) - 3x - 4 \\ f^{-1}(g(x)) &= 3x^2 + 3x - 3x - 4 \\ f^{-1}(g(x)) &= 3x^2 - 4 \\ g(x) &= f(3x^2 - 4) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ย้ายข้าง } f^{-1} \text{ ไปเป็น } f \text{ ที่อีกฝั่ง} \\ \text{จาก } f(x) = x + 1 \end{array} \right\} \\ g(x) &= 3x^2 - 4 + 1 \\ g(x) &= 3x^2 - 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x + 1) \\ &= 3(x + 1)^2 - 3 \\ &\geq -3 \\ &\quad (\text{เพราะ } (x + 1)^2 \geq 0) \\ \rightarrow \text{จะได้เรนจ์} &= [-3, \infty) = A \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(3x^2 - 3) \\ &= 3x^2 - 3 + 1 \\ &= 3x^2 - 2 \\ &\geq -2 \\ &\quad (\text{เพราะ } x^2 \geq 0) \\ \rightarrow \text{จะได้เรนจ์} &= [-2, \infty) = B \end{aligned} \right.$$

จะได้ $A - B = [-3, -2)$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของข้อ 4

19. 2

$$\begin{aligned} \text{จัดสมการให้อยู่ในรูปของ } 3^{x+5} : \quad & 3^{2x+10} - 4(3^{x+6}) + 27 \leq 0 \\ & 3^{2(x+5)} - 4(3^{x+5} \cdot 3^1) + 27 \leq 0 \\ & (3^{x+5})^2 - 12(3^{x+5}) + 27 \leq 0 \\ & (3^{x+5} - 3)(3^{x+5} - 9) \leq 0 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 3 &\leq 3^{x+5} \leq 9 \\ 3^1 &\leq 3^{x+5} \leq 3^2 \\ 1 &\leq x + 5 \leq 2 \\ -4 &\leq x \leq -3 \end{aligned}$$

จะได้ $A = [-4, -3]$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของข้อ 2

20. 5

$$\text{จากสูตร } S_n \text{ จะได้ } \sum_{n=1}^{25} a_n = \frac{25}{2}(2a_1 + (25 - 1)d) = 1900$$

$$\frac{2a_1}{2} + \frac{24d}{2} = \frac{1900}{25}$$

$$a_1 + 12d = 76$$

$$a_1 = 76 - 12d \quad \dots (*)$$

อนุกรมเลขคณิต

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n - 1)d)$$

$$\begin{aligned} \text{กระจาย } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{4^{n-1}} = 8 \text{ จะได้ } \frac{a_1}{4^0} + \frac{a_2}{4^1} + \frac{a_3}{4^2} + \frac{a_4}{4^3} + \dots &= 8 \\ \frac{a_1}{4^0} + \frac{a_1+d}{4^1} + \frac{a_1+2d}{4^2} + \frac{a_1+3d}{4^3} + \dots &= 8 \quad \dots (1) \end{aligned}$$

÷ 4 ตลอด ให้ตำแหน่งเลื่อน

$$\frac{a_1}{4^1} + \frac{a_1+d}{4^2} + \frac{a_1+2d}{4^3} + \frac{a_1+3d}{4^4} + \dots = 2 \quad \dots (2)$$

$$(1) - (2) : \frac{a_1}{1} + \frac{d}{4} + \frac{d}{4^2} + \frac{d}{4^3} + \dots = 6$$

$$\begin{aligned}
 (1) - (2) : \quad & \frac{a_1}{1} + \underbrace{\frac{d}{4} + \frac{d}{4^2} + \frac{d}{4^3} + \dots}_{\text{อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ พจน์แรก} = \frac{d}{4}, \text{ อัตราส่วนร่วม} = \frac{1}{4}} = 6 \\
 & \downarrow \\
 & \text{จะได้ } S_\infty = \frac{\frac{d}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{d}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{d}{3} \\
 & \downarrow \\
 & \begin{array}{rcl}
 a_1 + & \frac{d}{3} & = 6 \\
 3a_1 + & d & = 18 \quad \left. \begin{array}{l} \times 3 \text{ ตลอด} \\ \text{จาก (*)} \end{array} \right\} \\
 3(76 - 12d) + & d & = 18 \\
 228 - 36d + & d & = 18 \\
 210 & & = 35d \\
 6 & & = d
 \end{array}
 \end{aligned}$$

แทน $d = 6$ ใน (*) จะได้ $a_1 = 76 - 12(6) = 4$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } a_{100} &= a_1 + (100 - 1)d \\
 &= 4 + (99)6 = 598
 \end{aligned}$$

21. 4

จะหาความแปรปรวนของ $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ก่อน แล้วค่อยขยายผลไปสู่ $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1$

จากค่าเฉลี่ยของ $x_1^2, x_2^2, x_3^2, \dots, x_{10}^2$ เท่ากับ 70 จะได้ $\frac{\sum x_i^2}{10} = 70$ ดังนั้น $\sum x_i^2 = 700 \dots (1)$

$$\begin{aligned}
 \text{และจาก } \quad & \sum (x_i - 3)^2 = 310 \\
 & \sum (x_i^2 - 6x_i + 9) = 310 \\
 \text{จาก (1) } \quad & \sum x_i^2 - 6\sum x_i + \sum 9 = 310 \quad \boxed{\sum c = Nc} \\
 & 700 - 6\sum x_i + 10(9) = 310 \\
 & 480 = 6\sum x_i \\
 & 80 = \sum x_i \rightarrow \text{ดังนั้น } \bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{80}{10} = 8 \dots (2)
 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ ความแปรปรวนของ $x_1, x_2, \dots, x_{10} = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{700}{10} - 8^2 = 6$

ข้อมูล $3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1$ เกิดจากการเอาข้อมูล $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ มาคูณ 3 แล้วลบ 1

การบวกลบ จะไม่ทำให้ s เปลี่ยน แต่การคูณ 3 จะทำให้ค่า s เพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า

เนื่องจาก ความแปรปรวน $= s^2$ ดังนั้น การคูณ 3 จะทำให้ ความแปรปรวนเพิ่มขึ้นเป็น 3^2 เท่า $= 9$ เท่า

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น ความแปรปรวนของ } 3x_1 - 1, 3x_2 - 1, \dots, 3x_{10} - 1 &= 9 \times \text{ความแปรปรวนของ } x_1, x_2, \dots, x_{10} \\
 &= 9 \times 6 = 54
 \end{aligned}$$

22. 3

Q_1 จะอยู่ตัวที่ $\frac{1}{4} \cdot (N + 1) = \frac{1}{4} \cdot (20 + 1) =$ ตัวที่ 5.25

$$\begin{aligned}
 \boxed{a_n = a_1 + (n - 1)d} &= \text{ตัวที่ 5} + 0.25(\text{ตัวที่ 6} - \text{ตัวที่ 5}) \\
 &= x_1 + (5 - 1)d + 0.25d \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{ลำดับเลขคณิต} \\ \text{พจน์เพิ่มทีละ } d \end{array} \\
 &= x_1 + 4.25d
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } Q_1 = 23.5 \text{ ดังนั้น } x_1 + 4.25d &= 23.5 \\
 x_1 &= 23.5 - 4.25d \dots (*)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_6 \text{ จะอยู่ตัวที่ } \frac{6}{10} \cdot (N+1) &= \frac{6}{10} \cdot (20+1) = \text{ตัวที่ } 12.6 \\
 &= \text{ตัวที่ } 12 + 0.6(\text{ตัวที่ } 13 - \text{ตัวที่ } 12) \\
 &= x_1 + (12-1)d + 0.6d \\
 &= x_1 + 11.6d
 \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $D_6 = 38.2$ ดังนั้น $x_1 + 11.6d = 38.2$

$$\begin{aligned}
 \text{แทน } x_1 = 23.5 - 4.25d \text{ จาก (*) จะได้ } 23.5 - 4.25d + 11.6d &= 38.2 \\
 7.35d &= 14.7 \\
 d &= 2
 \end{aligned}$$

$$\text{แทนใน (*) จะได้ } x_1 = 23.5 - 4.25(2) = 15$$

โจทย์ถาม ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ ซึ่งมีสูตรคือ $\frac{Q_3 - Q_1}{2} \rightarrow$ โจทย์ให้ $Q_1 = 23.5$ แล้ว แต่ยังต้องหา Q_3 เพิ่ม

$$\begin{aligned}
 Q_3 \text{ จะอยู่ตัวที่ } \frac{3}{4} \cdot (N+1) &= \frac{3}{4} \cdot (20+1) = \text{ตัวที่ } 15.75 \\
 &= \text{ตัวที่ } 15 + 0.75(\text{ตัวที่ } 16 - \text{ตัวที่ } 15) \\
 &= x_1 + (15-1)d + 0.75d \\
 &= x_1 + 14.75d \\
 x_1 = 15, d = 2 \hookrightarrow &= 15 + 14.75(2) = 44.5
 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{44.5 - 23.5}{2} = 10.5$$

23. 5

มีทั้งหมด $2 + 3 + 3 = 8$ คน เอา นาย ก. ตอกไว้หัวโต๊ะไม่ให้วงหมุน

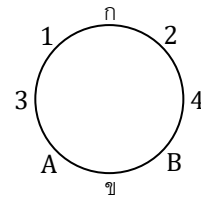
ข. ต้องนั่งตรงข้าม ก. จะวาดได้ดังรูป

ตำแหน่ง A กับ B ต้องเป็นหญิง $\rightarrow$ มีหญิง 3 คน ดังนั้น A เลือกได้ 3 แบบ

$\rightarrow$ เหลือหญิง 2 คน เลือกให้ B ได้ 2 แบบ

ที่เหลือ หญิง 1 คน + ชาย 3 คน รวม เป็น 4 คน เลือกนั่งใน 4 ที่นั่งที่เหลือ ได้ $4!$ แบบ

$$\text{ดังนั้น จำนวนวิธี} = 3 \times 2 \times 4! = 144 \text{ แบบ}$$



24. 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{4n^2-1} - \left(-\frac{1}{3}\right)^n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n \quad \dots (*)$$

$$\text{จะเห็นว่า } \frac{2}{4n^2-1} \text{ แยกเป็นผลลบเพื่อทำเทเลสโคปิกได้ } \rightarrow \frac{2}{4n^2-1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \\
 &= \frac{1}{2(1)-1} - \frac{1}{2(1)+1} + \frac{1}{2(2)-1} - \frac{1}{2(2)+1} + \frac{1}{2(3)-1} - \frac{1}{2(3)+1} + \dots \\
 &= \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \\
 &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\
 &\quad \text{ตัดกันได้หมด เหลือเทอมแรก} = 1 \quad \text{กับเทอมสุดท้ายที่เข้าใกล้ } 0 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \rightarrow$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตที่มี $a_1 = -\frac{1}{3}$, $r = -\frac{1}{3}$

$$= \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} = -\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$

แทนใน (*) จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4n^2-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$

$$= 1 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{5}{4}$$

25. 5

จาก $a * b = 1 \neq 0$ ดังนั้น $a * b$ ต้องมาจากสูตรแรก จะได้ $a * b = \frac{ab}{a+b} = 1$

$$\frac{1}{1} = \frac{a+b}{ab}$$

$$1 = \frac{1}{b} + \frac{1}{a} \quad \dots(1)$$

ทำนองเดียวกัน $a * c = \frac{ac}{a+c} = 2$ $b * c = \frac{bc}{b+c} = 3$

$$\frac{1}{2} = \frac{a+c}{ac}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{c} + \frac{1}{a} \quad \dots(2)$$

$$\frac{1}{3} = \frac{b+c}{bc}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \quad \dots(3)$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $A = \frac{1}{a}$, $B = \frac{1}{b}$, $C = \frac{1}{c}$ จะได้ระบบสมการ (1), (2), (3) ดังนี้

$$\begin{aligned} B + A &= 1 \quad \dots(1) \\ C + A &= \frac{1}{2} \quad \dots(2) \\ C + B &= \frac{1}{3} \quad \dots(3) \end{aligned}$$

(1) - (2): $B - C = 1 - \frac{1}{2}$

$$B - C = \frac{1}{2} \quad \dots(4)$$

(3) + (4): $2B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

$$B = \frac{5}{12}$$

แทนค่าหา A กับ C จะได้

$$\begin{aligned} (1): \quad \frac{5}{12} + A &= 1 \\ A &= \frac{7}{12} \\ (2): \quad C + \frac{7}{12} &= \frac{1}{2} \\ C &= \frac{1}{2} - \frac{7}{12} = -\frac{1}{12} \end{aligned}$$

จะได้ $A = \frac{7}{12}$, $B = \frac{5}{12}$, $C = -\frac{1}{12}$ ดังนั้น $a = \frac{12}{7}$, $b = \frac{12}{5}$, $c = -12 \rightarrow$ แทนในตัวเลือก

1. $\frac{7}{12} + \frac{5}{12} < -12 \rightarrow$ ผิด ผังซ้ายเป็นบวก จะมากกว่าผังขวาที่เป็นลบ
2. $\frac{7}{12} < \frac{5}{12} + (-12) \rightarrow$ ผิด ผังซ้ายเป็นบวก แต่ผังขวาเป็นลบ
3. 4. 5. ต้องเรียงลำดับ a, b, c จะเห็นว่า $-12 < \frac{12}{7} < \frac{12}{5}$ ดังนั้น $c < a < b \rightarrow$ ตอบ ข้อ 5

26. 2

จาก $(A^t)^{-1}B = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ } ย้ายข้าง B

$$(A^t)^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$$

$$(A^{-1})^t = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot B^{-1}$$

} $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$ (เพราะ $A^t \cdot (A^{-1})^t = (A^{-1} \cdot A)^t = I^t = I$)

} แทนค่าที่โจทย์ให้

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8-2b & -2 \\ -3+b & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{เทียบสมาชิกตัวต่อตัว จะได้ } a = 8-2b \text{ และ } 0 = -3+b$$

$$a = 8 - 2(3) = 2$$

แทน $a = 2$ จะได้ $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(2)(1)-(-2)(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

แทน $b = 3$ จะได้ $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(1)(1)-(3)(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $2A + B = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det \text{ จะได้ } (2)(3) - (-1)(0) = 6$

27. 2

ต้องการทำนาย x เมื่อรู้ $y = 8 \rightarrow$ ต้องใช้รูปสมการ $\hat{X} = a + by \dots (*)$ (สลับ x, y กับแบบปกติที่เคยใช้)

จะได้ระบบสมการคือ $\sum x = an + b \sum y \dots (1)$

$\sum xy = a \sum y + b \sum y^2 \dots (2)$

หาค่าที่ต้องใช้ จากตารางที่โจทย์ให้ จะได้

มี (x, y) อยู่ 5 คู่ $\rightarrow n = 5$

x	1	3	4	5	7	$\rightarrow \sum x = 20$
y	0	3	6	7	9	$\rightarrow \sum y = 25$
xy	0	9	24	35	63	$\rightarrow \sum xy = 131$
y^2	0	9	36	49	81	$\rightarrow \sum y^2 = 175$

แทนในระบบสมการ จะได้ $20 = 5a + 25b \dots (1)$

$131 = 25a + 175b \dots (2)$

$5 \times (1): 100 = 25a + 125b \dots (3)$

$(2) - (3): 31 = 50b$

$0.62 = b$

$(1) \div 5$

$\begin{aligned} 4 &= a + 5b \\ 4 &= a + 5(0.62) \\ 0.9 &= a \end{aligned}$

แทนค่า a, b ใน $(*)$ จะได้สมการทำนายคือ $\hat{X} = 0.9 + 0.62y$

ดังนั้น เมื่อ $y = 8$ จะทำนาย x ได้ $= 0.9 + 0.62(8) = 5.86$

28. 1

อินทิเกรต $g'(x) = 4x^3 + 9x^2 + 2$

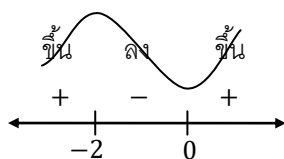
จะได้ $g(x) = \frac{4x^4}{4} + \frac{9x^3}{3} + 2x + c = x^4 + 3x^3 + 2x + c \dots (*)$

จาก $g(x) = xf(x)$ แทน $g(x)$ จาก $(*)$ จะได้ $x^4 + 3x^3 + 2x + c = xf(x)$
 $0^4 + 3(0^3) + 2(0) + c = (0)f(0) \rightarrow \text{แทน } x = 0$
 $c = 0$

แทน $c = 0$ ใน $(*)$ จะได้ $g(x) = x^4 + 3x^3 + 2x = xf(x)$
 $x^3 + 3x^2 + 2 = f(x) \rightarrow \div x \text{ ตลอด}$
 $\dots (**)$

ก. และ ข. หาค่าสัมพัทธ์ของ f ต้องดูเครื่องหมายของ $f'(x)$

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) = x^3 + 3x^2 + 2 &\rightarrow \text{ดิฟจะได้ } f'(x) = 3x^2 + 6x \\ &= 3x(x + 2) \end{aligned}$$



สูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -2$
ต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 0$

ดังนั้น ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ $= f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 2 = 6 \rightarrow$ ก. ถูก

ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= f(0) = (0)^3 + 3(0)^2 + 2 = 2 \rightarrow$ ข. ถูก

ค. อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $(f + g)(x)$ ขณะที่ $x = 1$ คือ $(f + g)'(1)$ นั่นเอง

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) = x^3 + 3x^2 + 2 + x^4 + 3x^3 + 2x \\ &= x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

ดิฟ จะได้ $(f + g)'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 6x + 2$

ดังนั้น $(f + g)'(1) = 4(1)^3 + 12(1)^2 + 6(1) + 2 = 24 \rightarrow$ ค. ผิด

29. 5

จากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้

$$P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว หรือ ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง}) = P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว}) + P(\text{ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง}) - P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว และ ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง})$$

จำนวนแบบทั้งหมด : มีลูกแก้ว $2 + 3 + 3 = 8$ ลูก หยิบทีละลูก 8 ครั้งแบบไม่ใส่คืน $\rightarrow$ จะหยิบได้ทั้งหมด $8!$ แบบ

$P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว})$: มีสีขาว 3 ลูก ดังนั้น ครั้งที่ 1 เลือกได้ 3 แบบ

ที่เหลือ 7 ครั้ง เหลือลูกแก้วในกล่อง 7 ลูก จะหยิบได้ $7!$ แบบ

$$\text{ดังนั้น } P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว}) = \frac{3 \cdot 7!}{8!} = \frac{3}{8}$$

$P(\text{ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง})$: มีสีอื่นๆที่ไม่ใช่สีแดง $= 3 + 3 = 6$ ลูก ดังนั้น ครั้งที่ 8 เลือกได้ 6 แบบ

ที่เหลือ 7 ครั้ง เหลือลูกแก้วในกล่อง 7 ลูก จะหยิบได้ $7!$ แบบ

$$\text{ดังนั้น } P(\text{ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง}) = \frac{6 \cdot 7!}{8!} = \frac{3}{4}$$

$P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว และ ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง})$: มีสีขาว 3 ลูก ดังนั้น ครั้งที่ 1 เลือกได้ 3 แบบ

เหลือสีขาว 2 ลูก ดังนั้น เหลือสีอื่นๆที่ไม่ใช่สีแดง $= 2 + 3 = 5$ ลูก

ดังนั้น ครั้งที่ 8 เลือกได้ 5 แบบ

ที่เหลือ 6 ครั้ง เหลือลูกแก้วในกล่อง 6 ลูก จะหยิบได้ $6!$ แบบ

$$\text{ดังนั้น } P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว และ ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง}) = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6!}{8!} = \frac{15}{56}$$

$$\text{จะได้ } P(\text{ครั้งที่ 1 สีขาว หรือ ครั้งที่ 8 ไม่ได้สีแดง}) = \frac{3}{8} + \frac{3}{4} - \frac{15}{56} = \frac{21 + 42 - 15}{56} = \frac{48}{56} = \frac{6}{7}$$

30. 5

$$\text{ให้ } x = \sqrt[4]{3} \text{ จะได้ } x^2 = \sqrt[4]{3}^2 = 3^{\frac{2}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$\text{และ } x^4 = \sqrt[4]{3}^4 = 3^{\frac{4}{4}} = 3$$

→ จะเปลี่ยน A, B, C ให้อยู่ในรูปของ x

$$\begin{array}{lcl} A = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} - \sqrt[4]{3} & B = \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\sqrt[4]{3} - \sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}}} & C = \frac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)} + \frac{3}{\sqrt[4]{27}} \\ = \frac{2}{x} - x & = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{x - \sqrt{\frac{1}{x^2}}} & = \frac{2}{\sqrt{3}\left(\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt{\sqrt{3}}}\right)} + \frac{3}{\sqrt[4]{3^3}} \\ & = \frac{x^2 - \frac{1}{x^2}}{x - \frac{1}{x}} & = \frac{2}{x^2\left(x + \frac{1}{\sqrt{x^2}}\right)} + \frac{x^4}{x^3} \\ & = \frac{\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x - \frac{1}{x}} & = \frac{2}{x^2\left(x + \frac{1}{x}\right)} + x \\ & = x + \frac{1}{x} & = \frac{2}{x^3 + x} + x \end{array}$$

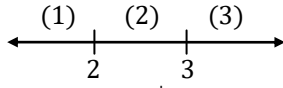
$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } A - B + C &= \left(\frac{2}{x} - x\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(\frac{2}{x^3 + x} + x\right) \\ &= \frac{2}{x} - x - x - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3 + x} + x \\ &= \frac{1}{x} - x + \frac{2}{x(x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^2(x^2 + 1) + 2}{x(x^2 + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 1 - x^4 - x^2 + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{3 - x^4}{x(x^2 + 1)} \stackrel{x^4 = 3}{=} \frac{3 - 3}{x(x^2 + 1)} = 0 \end{aligned}$$

31. 34

$$\begin{aligned} 25 + 3(15)^{|x|} &= 5^{|x|} + 25(3^{|x|+1}) \\ 25 + 3(3 \cdot 5)^{|x|} &= 5^{|x|} + 25(3^{|x|} \cdot 3^1) \\ 25 + 3 \cdot 3^{|x|} \cdot 5^{|x|} &= 5^{|x|} + 75 \cdot 3^{|x|} \quad \text{ให้ } a = 3^{|x|} \text{ และ } b = 5^{|x|} \\ 25 + 3 \cdot a \cdot b &= b + 75 \cdot a \\ 0 &= b - 25 - 3ab + 75a \\ 0 &= (b - 25) - 3a(b - 25) \\ 0 &= (b - 25)(1 - 3a) \\ b = 25 &\text{ หรือ } a = \frac{1}{3} \\ 5^{|x|} = 5^2 & \quad 3^{|x|} = 3^{-1} \\ |x| = 2 & \quad |x| = -1 \\ x = 2, -2 & \quad \text{ไม่มีคำตอบ (ค่าสัมบูรณ์เป็นลบไม่ได้)} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $x = 2$ จะทำให้ $3^x + 5^x$ มีค่ามากกว่า $x = -2$ ดังนั้น ค่ามากที่สุดของ $3^x + 5^x$ คือ $3^2 + 5^2 = 34$

32. 45

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $\sqrt{x-1} = a$ จะได้สมการคือ $|a-2| + |a-3| = 1$ จะแบ่งกรณีตามค่า a เป็น 3 กรณี ดังรูปเพื่อให้รู้เครื่องหมายของ $a-2$ และ $a-3$ และถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้ ด้วยสมบัติ $|k| = \begin{cases} k & , k \geq 0 \\ -k & , k < 0 \end{cases}$ กรณี (1): $a < 2$ จะได้ $a-2$ และ $a-3$ เป็นลบ

$$\begin{aligned} |a-2| + |a-3| &= 1 \\ -(a-2) + -(a-3) &= 1 \\ -a+2 -a+3 &= 1 \\ -2a &= -4 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

ใช้ไม่ได้ เพราะกรณีนี้ $a < 2$ กรณี (2): $2 \leq a < 3$ จะได้ $a-2 \geq 0$ แต่ $a-3 < 0$

$$\begin{aligned} |a-2| + |a-3| &= 1 \\ a-2 + -(a-3) &= 1 \\ a-2 -a+3 &= 1 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

จริงเสมอ ดังนั้น กรณี $2 \leq a < 3$

เป็นคำตอบของสมการได้ทุกตัว

กรณี (3): $a \geq 3$ จะได้ $a-2$ และ $a-3 \geq 0$

$$\begin{aligned} |a-2| + |a-3| &= 1 \\ a-2 + a-3 &= 1 \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

ใช้ได้ ($a \geq 3$ คือเป็น 3 ได้)

รวมทั้ง 3 กรณี จะได้คำตอบคือ $2 \leq a < 3$ หรือ $a = 3 \rightarrow$ เขียนใหม่ได้เป็น

$$\begin{aligned} 2 &\leq a \leq 3 \\ 2 &\leq \sqrt{x-1} \leq 3 \\ 4 &\leq x-1 \leq 9 \\ 5 &\leq x \leq 10 \end{aligned}$$
A เอาแต่จำนวนเต็ม $\rightarrow$ จะได้ผลบวกของจำนวนเต็มตั้งแต่ 5 ถึง 10 $= 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45$

33. 5

ให้ $z = x + yi$ จะได้

$$\begin{aligned} |z| &= |z - 1 + i| \\ |x + yi| &= |x + yi - 1 + i| \\ |x + yi| &= |x - 1 + (y + 1)i| \\ \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} \\ x^2 + y^2 &= x^2 - 2x + 1 + y^2 + 2y + 1 \\ 2x - 2y &= 2 \\ x - y &= 1 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

และจะได้

$$\begin{aligned} \frac{(1-2i)z}{3-i} &= \frac{(1-2i)(x+yi)}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} \\ &= \frac{(3+i-6i+2)(x+yi)}{9-(-1)} \\ &= \frac{(5-5i)(x+yi)}{10} \\ &= \frac{(1-i)(x+yi)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{x+yi-xi+y}{2} \\ &= \frac{x+y}{2} + \frac{(y-x)}{2}i \end{aligned}$$

ส่วนจริง ส่วนจินตภาพ

$\rightarrow$ โจทย์ให้ส่วนจริง = 0 ดังนั้น $\frac{x+y}{2} = 0$

$$x + y = 0 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2): 2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{แทนใน (2) จะได้ } \frac{1}{2} + y = 0$$

$$y = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{ดังนั้น } z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } |2z + 1|^2 &= \left| 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) + 1 \right|^2 \\ &= \left| 1 - i + 1 \right|^2 \\ &= \left| 2 - i \right|^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \end{aligned}$$

34. 3

ถอดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ $|x+2|$ ก่อนโจทย์จะอินทิเกรตในช่วง $x = -4$ ถึง $x = -2$ ซึ่งในช่วงนี้จะเห็นว่า $x+2 \leq 0$ ดังนั้น $|x+2|$ จะเปลี่ยน $x+2$ ให้เป็นบวกโดยการคูณลบเข้าไป จะได้ $|x+2| = -(x+2)$ หมายเหตุ : สมบัติค่าสัมบูรณ์ $|k| = \begin{cases} k & , k \geq 0 \\ -k & , k < 0 \end{cases}$ จะย้ายกรณี $k = 0$ ไปไว้สูตรล่าง เป็น $|k| = \begin{cases} k & , k > 0 \\ -k & , k \leq 0 \end{cases}$ ก็ได้ เพราะเมื่อ $k = 0$ จะได้ $k = -k$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{x^3+x^2+x}{x|x+2|-x^2-2} &= \frac{x^3+x^2+x}{x(-(x+2))-x^2-2} \\ &= \frac{x^3+x^2+x}{-x^2-2x-x^2-2} \\ &= \frac{x^3+x^2+x}{-2x^2-2x-2} \\ &= \frac{x(x^2+x+1)}{-2(x^2+x+1)} = -\frac{x}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-4}^{-2} \frac{x^3+x^2+x}{x|x+2|-x^2-2} dx = \int_{-4}^{-2} -\frac{x}{2} dx = -\frac{x^2}{4} \Big|_{-4}^{-2} = \left(-\frac{(-2)^2}{4}\right) - \left(-\frac{(-4)^2}{4}\right) = -1 + 4 = 3$$

35. 97.2

จาก $3a_{n+1} = a_n$ $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$ แสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ จะมีพจน์ถัดไป (a_{n+1}) จะเท่ากับ พจน์ก่อนหน้า (a_n) คูณ $\frac{1}{3}$ ดังนั้น a_n เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี อัตราส่วนร่วม $r = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \text{โจทย์ให้ } a_5 = 2 \rightarrow \text{จะแทน } n = 5 \text{ ในสูตรลำดับเรขาคณิต } a_n &= a_1 r^{n-1} \text{ จะได้ } a_5 = a_1 r^{5-1} \\ 2 &= a_1 \left(\frac{1}{3}\right)^4 \\ 162 &= a_1 \end{aligned}$$

จะได้สูตรพจน์ทั่วไปของลำดับ $\{a_n\}$ คือ $a_n = a_1 r^{n-1} = 162\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ และจาก $2^n b_n = a_n = 162\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

$$\text{จะได้ } b_n = \frac{162}{2^n 3^{n-1}}$$

ดังนั้น $b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \frac{162}{2^1 3^0} + \frac{162}{2^2 3^1} + \frac{162}{2^3 3^2} + \dots$ จะเป็นอนุกรมอนันต์ ที่มี $a_1 = \frac{162}{2^1 3^0} = 81$

$$\text{และมี } r = \frac{1}{2^1 3^1} = \frac{1}{6}$$

เนื่องจาก $|r| = \left|\frac{1}{6}\right| < 1 \rightarrow$ จะได้ผลบวกอนุกรมอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{81}{1-\frac{1}{6}} = 81 \times \frac{6}{5} = 97.2$

36. 641

จาก $a(a+b+3) = 0$ จะได้ $a = 0$ หรือ $a+b+3 = 0$ กรณี $a = 0$: แทน $a = 0$ ใน $2(b-a) = (a+b+1)(2-b)$

$$\frac{2(b)}{2b} = \frac{(b+1)(2-b)}{2b-b^2+2-b}$$

$$b^2 + b - 2 = 0$$

$$(b+2)(b-1) = 0$$

$$b = -2, 1$$

 $\rightarrow$ ได้คำตอบคือ

a	b
0	-2
0	1

กรณี $a + b + 3 = 0$: ย้ายข้าง จะได้ $a = -b - 3$ แทนในอีกสมการ จะได้

$$\begin{aligned} 2(b - a) &= (a + b + 1)(2 - b) \\ 2(b - (-b - 3)) &= ((-b - 3) + b + 1)(2 - b) \\ 2(b + b + 3) &= (-b - 3 + b + 1)(2 - b) \\ 2(2b + 3) &= (-2)(2 - b) \\ 2b + 3 &= -2 + b \\ b &= -5 \end{aligned}$$

แทน $b = -5$ เพื่อหา $a \rightarrow$ จะได้ $a = -b - 3$
 $= -(-5) - 3 = 2 \rightarrow$ ได้คำตอบคือ

a	b
2	-5

a	b
0	-2
0	1
2	-5

รวมทั้ง 2 กรณี จะได้ทั้งหมด 3 คำตอบ

ซึ่งจะพอกะๆ ได้ว่า $(a, b) = (2, -5)$ จะทำให้ $a^4 + b^4$ มีค่ามากกว่าคำตอบอื่นๆ

(เลขติดลบ ยกกำลัง 4 จะกลายเป็นบวก)

ดังนั้น ค่ามากที่สุดของ $a^4 + b^4 = 2^4 + (-5)^4 = 16 + 625 = 641$

37. 61

นางสาว ก. = $P_{22.66}$ ของทั้งห้อง แสดงว่า พื้นที่ทางซ้ายของ ก. คือ 0.2266 ดังรูป

แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง (ตรงบริเวณที่แรเงา)

พื้นที่ครึ่งซ้าย = 0.5 $\rightarrow$ จะได้พื้นที่ที่แรเงา = $0.5 - 0.2266$
 $= 0.2734$

เปิดตาราง พื้นที่ = 0.2734 จะได้ $z = 0.75$

แต่นางสาว ก. อยู่ฝั่งซ้าย จะมี z ติดลบ $\rightarrow$ จะได้ $z_n = -0.75$

โจทย์ถามคะแนนของ นางสาว ก. $\rightarrow$ ต้องหา $\bar{x}$ กับ s ของทั้งห้อง (นางสาว ก. = $P_{22.66}$ ของทั้งห้อง)

แล้วใช้สูตร $z_n = \frac{x_n - \bar{x}}{s}$ เพื่อย้อนหา x_n จาก $z_n = -0.75 \dots (*)$

ทั้งห้อง 30 คน เป็นชาย 18 คน จะเป็นหญิง = $30 - 18 = 12$ คน $\rightarrow$ แทนในสูตร $\bar{x}_{รวม} = \frac{N_{ช}\bar{x}_{ช} + N_{ญ}\bar{x}_{ญ}}{N_{ช} + N_{ญ}}$

$$64 = \frac{18(64) + 12\bar{x}_{ญ}}{18 + 12}$$

$$30(64) = 18(64) + 12\bar{x}_{ญ}$$

$$12(64) = 12\bar{x}_{ญ}$$

$$64 = \bar{x}_{ญ}$$

จะเห็นว่า $\bar{x}_{รวม} = \bar{x}_{ช} = \bar{x}_{ญ} = 64$

ดังนั้น จะหา $s_{รวม}$ ได้จากสูตร $s_{รวม}^2 = \frac{N_{ช}s_{ช}^2 + N_{ญ}s_{ญ}^2}{N_{ช} + N_{ญ}}$ โจทย์ให้ความแปรปรวนชาย $s_{ช}^2 = 10$

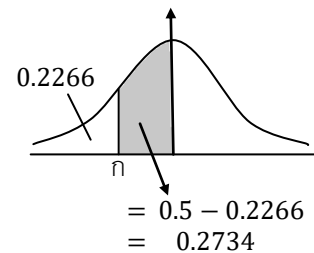
$$= \frac{(18)(10) + (12)(5^2)}{18 + 12}$$

$$= \frac{480}{30} = 16 \rightarrow \text{จะได้ } s_{รวม} = \sqrt{16} = 4$$

แทน $\bar{x}_{รวม} = 64, s_{รวม} = 4$ ใน $(*)$ จะได้ $-0.75 = \frac{x_n - 64}{4}$

$$-3 = x_n - 64$$

$$61 = x_n$$



38. 0.75

ย้ายข้างฟังก์ชัน arc จะได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccc}
 A = \arcsin\left(\frac{\sin \theta}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}\right) & B = \arctan(1 - \sin \theta) & C = \arctan \sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta} \\
 \sin A = \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}} & \tan B = \frac{1 - \sin \theta}{1} & \tan C = \frac{\sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta}}{\sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta}} \\
 \swarrow \text{ทำเป็น tan ให้เหมือน B กับ C} & \dots(1) & \dots(2)
 \end{array}$$

$0 < \theta < 90^\circ$ ทำให้ $\sin \theta$ เป็นบวก $\rightarrow \frac{\sin \theta}{\sqrt{1+\sin^2 \theta}}$ เป็นบวก

$\rightarrow$ ใช้สามเหลี่ยม $\sin = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ฉาก}}$ ได้โดยไม่ต้องสนใจเครื่องหมายบวกลบ

$$\begin{array}{c}
 \sqrt{1 + \sin^2 \theta} \\
 \swarrow \\
 A \\
 \searrow \\
 = (1 + \sin^2 \theta) - \sin^2 \theta \\
 = 1
 \end{array}
 \Rightarrow \text{จะได้ } \tan A = \frac{\text{ข้าม}}{\text{ชิด}} = \frac{\sin \theta}{1} = \sin \theta \quad \dots(3)$$

จาก $A + B = 2C \rightarrow$ ใส่ tan ตลอด จะได้

$$\begin{aligned}
 \tan(A + B) &= \tan 2C \\
 \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} &= \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} \quad \text{จาก (1), (2), (3)} \\
 \frac{\sin \theta + (1 - \sin \theta)}{1 - \sin \theta(1 - \sin \theta)} &= \frac{2\sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta}}{1 - (\sin \theta - \sin^2 \theta)} \\
 \frac{1}{1 - \sin \theta + \sin^2 \theta} &= \frac{2\sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta}}{1 - \sin \theta + \sin^2 \theta} \\
 1 &= 2\sqrt{\sin \theta - \sin^2 \theta} \\
 1 &= 4(\sin \theta - \sin^2 \theta) \\
 4 \sin^2 \theta - 4 \sin \theta + 1 &= 0 \\
 (2 \sin \theta - 1)^2 &= 0 \\
 \sin \theta &= \frac{1}{2} \quad \rightarrow \text{จะได้ } \theta = 30^\circ
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $3 \sin^4 \theta + \cos^4 \theta = 3 \sin^4 30^\circ + \cos^4 30^\circ$

$$= 3 \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0.75$$

39. 3

จาก

$$\begin{array}{ccc}
 A & A^t & = 9I \\
 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ a & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ -2 & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} & = 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ a & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & a & 1 \\ -2 & b & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} & = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

เลือกคูณแค่บางแถว / บางหลัก ให้หา a, b ได้ก็พอจะเอาแถว 2 ที่มี a กับ b มาคูณ หลัก 1 กับ หลัก 3 ของ A^t ที่รู้ทุกตัว

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ 2a - 2b + 2 & ? & a + 2b + 4 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 2a - 2b + 2 = 0 \quad \dots(1) \\ a + 2b + 4 = 0 \quad \dots(2) \end{array}$$

$$(1) + (2) : \begin{aligned} 3a + 6 &= 0 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{แทนค่า } a \text{ ใน (2) : } \begin{aligned} -2 + 2b + 4 &= 0 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } a^2 - b^2 = (-2)^2 - (-1)^2 = 3$$

40. 48

อัตราการเปลี่ยนแปลง จาก -1 ถึง $1 = -2$

$$\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} = -2$$

$$\frac{(1^3 + a(1) + b) - ((-1)^3 + a(-1) + b)}{2} = -2$$

$$1 + a + b + 1 + a - b = -4$$

$$2a = -6$$

$$a = -3$$

แทนค่า a จะได้ $f(x) = x^3 - 3x + b$

และจาก $\int_{-1}^1 f(x) dx = 2$

$$\left. \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + bx \right|_{-1}^1 = 2$$

$$\left(\frac{1^4}{4} - \frac{3(1)^2}{2} + b(1) \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3(-1)^2}{2} + b(-1) \right) = 2$$

$$\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + b - \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + b \right) = 2$$

$$2b = 2$$

$$\text{แทนค่า } b \text{ จะได้ } f(x) = x^3 - 3x + 1$$

โจทย์ถาม $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ ซึ่งจะคล้ายๆ กับนิยามของอนุพันธ์ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$

$$\text{จาก } f(x) = x^3 - 3x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 3x^2 - 3 \quad \text{แทน } x = 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 3(3^2) - 3$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 24 \quad \dots(1)$$

จาก (1) แทน h ด้วย $-h$ จะได้

$$\lim_{-h \rightarrow 0} \frac{f(3+(-h)) - f(3)}{-h} = 24$$

$-h \rightarrow 0$ มีความหมายเหมือนกันกับ $h \rightarrow 0$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+(-h)) - f(3)}{-h} = 24$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-f(3-h) + f(3)}{h} = 24 \quad \dots(2)$$

$$(1) + (2) : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} + \frac{-f(3-h) + f(3)}{h} = 48$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} = 48$$

หมายเหตุ : ข้อนี้ ช่วงครึ่งหลัง จะใช้โลปีตาลก็ได้ (เพราะ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h}$ อยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0}$)

$$\begin{aligned} \text{ใช้ } \frac{\text{ดิฟบน}}{\text{ดิฟล่าง}} \text{ จะได้ } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f'(3+h))(1) - (f'(3-h))(-1)}{1} \\ &= f'(3) + f'(3) \\ &= 3(3)^2 - 3 + 3(3)^2 - 3 = 48 \end{aligned}$$

41. 20

จะวาดกราฟ r_1 กับ r_2 แล้วดูส่วนซ้อนทับเพื่อหา $r_1 \cap r_2$

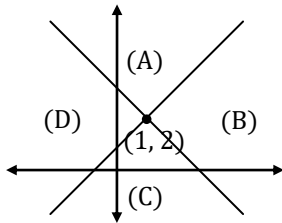
วาดกราฟอสมการ ต้องวาดกราฟสมการ (เปลี่ยนเครื่องหมายเป็น เท่ากับ) ก่อน แล้วค่อยใส่จุด - แแรงพื้นที่

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - 2x + 4y &= 3 \\(x^2 - 2x) - (y^2 - 4y) &= 3 \\(x^2 - 2x + 1) - (y^2 - 4y + 4) &= 3 + 1 - 4 \\(x - 1)^2 - (y - 2)^2 &= 0\end{aligned}$$

เป็นสมการเส้นกำกับ ของไฮเพอร์โบลา

$$(x - 1)^2 - (y - 2)^2 = 1$$

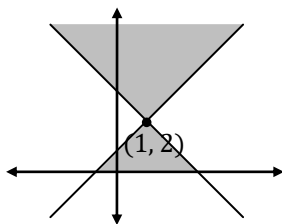
ซึ่งจะวาดได้ดังรูป



ใส่จุด - แแรงพื้นที่ → กราฟแบ่งระนาบออกเป็น 4 ส่วน

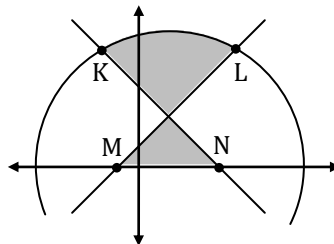
บริเวณ	ใส่จุด	$x^2 - y^2 - 2x + 4y \leq 3$
(A)	(1, 3)	$1 - 9 - 2 + 12 \leq 3$ $2 \leq 3$ ✓
(B)	(2, 2)	$4 - 4 - 4 + 8 \leq 3$ $4 \leq 3$ ✗
(C)	(0, 0)	$0 - 0 - 0 + 0 \leq 3$ $0 \leq 3$ ✓
(D)	(0, 2)	$0 - 4 - 0 + 8 \leq 3$ $4 \leq 3$ ✗

บริเวณ (A) กับ (C) เท่านั้น ที่ทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้น จะได้กราฟ r_1 เป็นส่วนที่แรเงาดังรูป $(r_1$ มี $y \geq 0$ ด้วย → เหลือเฉพาะส่วนที่อยู่เหนือแกน Y)ดังนั้น จะได้ $r_1 \cap r_2$ ดังรูป

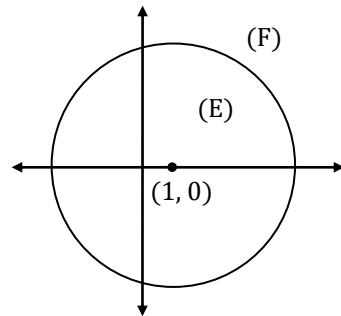
หาโดเมน ต้องหาพิกัด x ของ K, L, M, N

(ถ้าวาดรูปได้สัดส่วน จะเห็นว่าหาแค่ K กับ L ก็พอ)



$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2x &= 33 \\(x^2 - 2x) + y^2 &= 33 \\(x^2 - 2x + 1) + y^2 &= 33 + 1 \\(x - 1)^2 + y^2 &= 34\end{aligned}$$

เป็นสมการวงกลม ซึ่งจะวาดได้ดังรูป



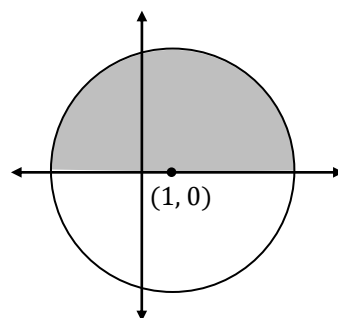
→ กราฟแบ่งระนาบออกเป็น 2 ส่วน

บริเวณ	ใส่จุด	$x^2 + y^2 - 2x \leq 33$
(E)	(0, 0)	$0 + 0 - 0 \leq 33$ $0 \leq 33$ ✓
(F)	(0, 10)	$0 + 100 - 0 \leq 33$ $100 \leq 33$ ✗

บริเวณ (E) เท่านั้น ที่ทำให้สมการเป็นจริง

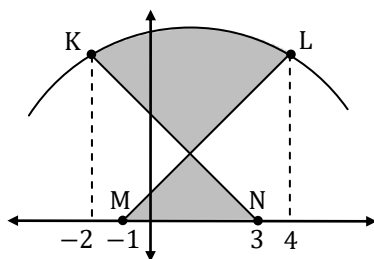
ดังนั้น จะได้กราฟ r_2 เป็นส่วนที่แรเงาดังรูป $(r_2$ มี $y \geq 0$ ด้วย → เหลือเฉพาะส่วนที่อยู่เหนือ

แกน Y)



หา M, N → หาจุดตัดแกน X ของสมการกราฟ r_1 : $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 3$
 (แทน $y = 0$) $x^2 - 0 - 2x + 0 = 3$
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x + 1)(x - 3) = 0$
 $x = -1, 3$

หา K, L → หาจุดตัดของสมการกราฟ r_1 กับ r_2 : $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 3$... (1)
 $x^2 + y^2 - 2x = 33$... (2)
 $(2) - (1) : 2y^2 - 4y = 30$
 $y^2 - 2y = 15$
 $y^2 - 2y - 15 = 0$
 $(y + 3)(y - 5) = 0$
 $y = -3, 5$ (r_2 ต้องมี $y \geq 0$)
 แทน $y = 5$ ใน (2) : $x^2 + 5^2 - 2x = 33$
 $x^2 - 2x - 8 = 0$
 $(x + 2)(x - 4) = 0$
 $x = -2, 4$



จากพิกัด x ของ K, L, M, N จะวาดได้ดังรูป
 ซึ่งจะเห็นว่าส่วนที่แรเงา คลุมค่าทางแกน X ตั้งแต่ -2 ถึง 4
 ดังนั้น โดเมน ของ $r_1 \cap r_2 = [-2, 4]$
 จะได้ $a^2 + b^2 = (-2)^2 + 4^2 = 20$

42. 9

ก่อนอื่น พิจารณาเครื่องหมายบวกลบของ $x^2 - x - 2$ เพื่อถอดค่าสัมบูรณ์ก่อน
 $(x - 2)(x + 1)$

$x \rightarrow 2^-$ คือ x น้อยกว่า 2 นิดๆ ซึ่งจะทำให้ $x - 2$ เป็นลบ และทำให้ $x + 1$ เป็นบวก

ดังนั้น $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1) = (\text{ลบ})(\text{บวก}) = \text{ลบ}$

จากสมบัติ $|A| = -A$ เมื่อ $A < 0$ จะได้ $|x^2 - x - 2| = -(x^2 - x - 2)$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2 - \sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x^2 - x - 2)}{2 - \sqrt{x^2 + 4}} \rightarrow$ ถ้าแทน $x = 2$ จะได้ $\frac{0}{0}$ ดังนั้น ต้องจัดรูปให้ $x - 2$ ตัดกันก่อน

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)}{2 - \sqrt{x^2 + 4}} \cdot \frac{2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2}{2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{เศษ} \rightarrow \text{แยกตัวประกอบ} \\ \text{ส่วน} \rightarrow \text{คูณให้เข้าสูตร} \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x+1)(x-2)(2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2)}{8 - (x^2 + 4)} \quad (n - l)(n^2 + nl + l^2) = n^3 - l^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)(x-2)(2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2)}{x^2 - 4}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)(x-2)(2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+1)(2^2 + 2\sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}^2)}{(x+2)}$$

$$= \frac{(2+1)(2^2 + 2\sqrt{2^2 + 4} + \sqrt{2^2 + 4}^2)}{(2+2)} = \frac{(3)(4+4+4)}{4} = 9$$

43. 396

จะเห็นว่า ถ้าเอาทุกตัวใน A มาบวกกัน ตัวบวก กับตัวลบ จะหักกันหมดพอดี

ดังนั้น $\bar{x}$ ของข้อมูลใน $A = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{0}{2n} = 0$

โจทย์ให้ความแปรปรวน = 46 $\rightarrow$ จากสูตรความแปรปรวน $\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2$ จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} \frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2+(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2+\dots+(-n)^2}{2n} - 0^2 &= 46 \\ \frac{2(1^2+2^2+3^2+\dots+n^2)}{2n} &= 46 \quad \left. \begin{array}{l} \text{กลาย} \end{array} \right\} \text{(ลบ)}^2 \text{ กลายเป็นบวก จับคู่กับกลุ่มหน้า} \\ 1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 &= 46n \\ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} &= 46n \\ (n+1)(2n+1) &= 276 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ตัด } n \text{ ได้ เพราะ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก } \neq 0 \end{array} \right\} \\ 2n^2+3n-275 &= 0 \\ (2n+25)(n-11) &= 0 \\ n = \cancel{\frac{275}{2}}, 11 & \quad (n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวก}) \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $1^3, 2^3, 3^3, \dots, n^3 = \frac{1^3+2^3+3^3+\dots+n^3}{n}$

$$= \frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n} = \frac{\left(\frac{11(11+1)}{2}\right)^2}{11} = \frac{11^2 \cdot 12^2}{4} \cdot \frac{1}{11} = 396$$

44. 3

จาก $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ จะได้ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$

จาก $|\vec{b}| = |\vec{a}|^2$ จะได้ $|\vec{b}| = \sqrt{3}^2 = 3 \rightarrow$ ดังนั้น $|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = 3, |\vec{c}| = \sqrt{2}$

จาก $\vec{a} + \vec{b} = t\vec{c}$ จะได้ $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |t\vec{c}|^2$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= t^2 |\vec{c}|^2 \\ \sqrt{3}^2 + 3^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= t^2 \sqrt{2}^2 \\ 12 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 2t^2 \\ 6 + \vec{a} \cdot \vec{b} &= t^2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= t^2 - 6 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

พยายามสร้างอีกสมการให้มี $\vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow$ จาก $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 9$ $\rightarrow$ สลับที่การ dot, สลับที่การบวก

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 9 \quad \rightarrow \text{โจทย์ให้ } \vec{a} + \vec{b} = t\vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + (t\vec{c}) \cdot \vec{c} = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + t(\vec{c} \cdot \vec{c}) = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + t|\vec{c}|^2 = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} + t\sqrt{2}^2 = 9$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 9 - 2t \quad \dots(2)$$

$$(1) = (2) : \quad t^2 - 6 = 9 - 2t$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$(t+5)(t-3) = 0$$

$$t = \cancel{5}, 3 \quad (\text{โจทย์ให้ } t \text{ เป็นบวก})$$

45. 70

จะเห็นว่า ถ้าฐาน $3 + a$ เป็นเลขคี่แล้ว เอาไปยกกำลังอะไรก็ตาม ผลลัพธ์จะเป็นเลขคี่เสมอ และจะไม่มีทางทำให้

$(3 + a)^{(b^c)}$ หารด้วย 4 ลงตัวได้ ดังนั้น $3 + a$ ต้องเป็นเลขคู่ $\rightarrow a = 1, 3, 5$ เท่านั้น

กรณี $a = 1$ หรือ 5 : จะได้ $3 + a = 4$ หรือ $8 \rightarrow$ จะเห็นว่า ฐาน หารด้วย 4 ลงตัว

เมื่อเอาจำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว ไปยกกำลังอะไรก็ตาม ผลลัพธ์ก็ยังคงหารด้วย 4 ลงตัวเสมอ

ดังนั้น $(3 + a)^{(b^c)}$ จะหารด้วย 4 ลงเสมอ ไม่ว่า b กับ c เป็นอะไรก็ตาม

ดังนั้น กรณีนี้ a เป็นได้ 2 แบบ (1 หรือ 5) , b กับ c เป็นอะไรก็ได้ (1, 2, 3, 4, 5) ได้ 5 แบบ

จะได้จำนวนแบบ $= 2 \times 5 \times 5 = 50$ แบบ

กรณี $a = 3$: จะได้ $3 + a = 6 = 2 \times 3 \rightarrow$ จะเห็นว่า ฐาน มี 2 เป็นตัวประกอบแค่ตัวเดียว

แต่ $(3 + a)^{(b^c)}$ จะหารด้วย 4 ลงตัวได้ ต้องมี 2 เป็นตัวประกอบ 2 ตัวขึ้นไป (เพราะ $4 = 2 \times 2$)

ดังนั้น กรณีนี้ เลขชี้กำลัง b^c ต้องมากกว่า 1 เพื่อให้มี 2 เป็นตัวประกอบมากขึ้นอีกนิด

(เช่น $6^2, 6^3, 6^4, \dots$ ทุกตัวจะมี 2 เป็นตัวประกอบมากพอที่จะหารด้วย 4 ลงตัวแล้ว)

เนื่องจาก b^c จะมากกว่า 1 เมื่อ $b > 1$ ในขณะที่ c เป็นอะไรก็ได้

ดังนั้น กรณีนี้ a เป็นได้ 1 แบบ (3) , $b > 1$ เป็นได้ 4 แบบ (2, 3, 4, 5) , c เป็นอะไรก็ได้ ได้ 5 แบบ

จะได้จำนวนแบบ $= 1 \times 4 \times 5 = 20$ แบบ

รวมทั้งสองกรณี จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 50 + 20 = 70$ แบบ

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สารศิลป์ ทับทิมทอง คุณ Gtr Ping จาก GTRmath และ คุณ สนธยา เสนามนตรี สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ เฉลยคำตอบ จากคุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข ผู้เขียน Math E-Book

ขอบคุณ เฉลยวิธีทำ จาก คุณ Gtr Ping จาก GTRmath

และ คุณ วัชร บัวใหญ่ และ คุณ มิกกี้ นารีรัตน์

ขอบคุณ คุณ สารศิลป์ ทับทิมทอง

คุณ สนธยา เสนามนตรี

คุณ Terasut Numwong

คุณ Watee Meemouse เจ้าของเพจ จดติวบ่อยบ่อย

คุณ Tae Potae

คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร ครับ