

PAT 1 (ต.ค. 58)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 31 ตุลาคม 2558 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. กำหนดให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ โดยที่  $(p \vee r) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$  เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็น จริง  
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- |                                                                                      |                                                                             |
|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| 1. $(q \leftrightarrow r) \vee p$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u>                      | 2. $(p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p)$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u> |
| 3. $(r \rightarrow q) \wedge (p \wedge q)$ มีค่าความจริงเป็น <u>จริง</u>             | 4. $(q \rightarrow \sim p) \vee (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u> |
| 5. $(r \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim r)$ มีค่าความจริงเป็น <u>เท็จ</u> |                                                                             |

2. ให้  $S'$  แทนคอมพลีเมนต์ของ  $S$  และ  $n(S)$  แทนจำนวนสมาชิกของเซต  $S$  ให้  $A, B$  และ  $C$  เป็นเซตใดๆ  
โดยที่  $A \cap (B \cup C)' = \emptyset$ ,  $n(A) = 12$ ,  $n(B) = 15$ ,  $n(C) = 16$ ,  $n(A \cup B \cup C) = 20$   
และ  $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C)$  ข้อใดต่อไปนี้ ไม่ถูกต้อง

- |                                |                                |                       |
|--------------------------------|--------------------------------|-----------------------|
| 1. $n(A \cap B \cap C) = 10$   | 2. $n(A \cap B) = 11$          | 3. $n(A' \cap B) = 4$ |
| 4. $n((A \cup B) \cap C) = 12$ | 5. $n((A \cup B)' \cap C) = 5$ |                       |

3. ให้  $A$  เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $||x - 1| - 1| < 1$  และ  $B$  เป็นเซตคำตอบของอสมการ  $\frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-2}{x^2-3x+2}$   
เซต  $A \cap B$  เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

- |               |              |              |
|---------------|--------------|--------------|
| 1. $(-5, -1)$ | 2. $(-3, 1)$ | 3. $(-1, 3)$ |
| 4. $(0, 4)$   | 5. $(1, 5)$  |              |

4.  $(3 - 4 \sin^2 9^\circ)(3 - 4 \sin^2 27^\circ)(3 - 4 \sin^2 81^\circ)(3 - 4 \sin^2 243^\circ)$  มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                   |                   |      |
|-------------------|-------------------|------|
| 1. 0              | 2. 1              | 3. 2 |
| 4. $\tan 9^\circ$ | 5. $\cot 9^\circ$ |      |

5. ถ้า  $2 \cot \frac{\theta}{2} = (1 + \cot \theta)^2$  และ  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  แล้วค่าของ  $\frac{(1 + \sin \theta) \sec^2 \theta}{\cos 2\theta}$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |          |         |      |
|----------|---------|------|
| 1. 0.125 | 2. 0.25 | 3. 1 |
| 4. 2     | 5. 4    |      |

6. ค่าของ  $\sec^2(\arctan 2) + \operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} 3) + \operatorname{cosec}\left(2 \operatorname{arccot} 2 + \arccos \frac{3}{5}\right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $\frac{335}{24}$ | 2. $\frac{351}{24}$ | 3. $\frac{375}{24}$ |
| 4. $\frac{385}{24}$ | 5. $\frac{399}{24}$ |                     |

7. กำหนดให้  $A = \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)$  และ  $0 < B < \frac{\pi}{2}$   
 $\sin^2 B + \sin^2(A + B) + \sin^2(5A + B)$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. 0
  2. 1
  3.  $\frac{3}{2} - \sin 2B$
  4.  $\frac{3}{2} - \cos 2B$
  5.  $\frac{3}{2} - 2 \cos 2B$
8. กำหนดให้  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงบวกที่มากกว่า 2 และสอดคล้องกับ  
 $\log_a(b - 2) = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{3} + \log_{a^2}(b + 2)$  และ  $(\log_b^2 a)(\log_a b) = 1 + \log_{\sqrt{a}} b$   
แล้ว  $a + b$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 183
  2. 210
  3. 216
  4. 225
  5. 239
9. ให้  $\mathbb{R}$  แทนเซตของจำนวนจริง ความสัมพันธ์ในข้อใดต่อไปนี้ไม่เป็นฟังก์ชัน
1. ความสัมพันธ์  $r_1 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy + 1 = 0 \}$
  2. ความสัมพันธ์  $r_2 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \tan x \}$
  3. ความสัมพันธ์  $r_3 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = \sqrt{y^2 + 1} \}$
  4. ความสัมพันธ์  $r_4 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |2 - x| \}$
  5. ความสัมพันธ์  $r_5 = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 = \frac{y}{y+1} \}$

10. ให้วงกลม  $C$  มีสมการเป็น  $x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 = 0$  เมื่อ  $a > 0$  โดยระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลม  $C$  ไปยังเส้นตรง  $4x + 3y = 71$  เท่ากับ 14 หน่วย ถ้าพาราโบลารูปหนึ่ง มีโฟกัสอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงกลม  $C$  และมี  $y = 7$  เป็นไดเรกตริกซ์ แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1.  $x^2 - 4x + 4y - 16 = 0$
2.  $x^2 + 4x + 4y - 16 = 0$
3.  $x^2 + 4x - 4y + 20 = 0$
4.  $x^2 + 4x + 8y + 44 = 0$
5.  $x^2 + 4x + 8y - 36 = 0$

11. ให้พาราโบลารูปหนึ่ง มีสมการเป็น  $y^2 - 4y + 40x - 236 = 0$  โดยมี  $V$  และ  $F$  เป็นจุดยอด และโฟกัสของพาราโบลาลำดับ ถ้าวงรีรูปหนึ่ง ผ่านจุด  $(4, 6)$  และมีโฟกัสอยู่ที่  $V$  และ  $F$  แล้วสมการของวงรีรูปนี้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1.  $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 140 = 0$
2.  $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y - 140 = 0$
3.  $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 = 0$
4.  $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y - 180 = 0$
5.  $9x^2 + 4y^2 + 36x - 8y + 180 = 0$

12. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์ คือ เซตของจำนวนตรรกยะ ให้  $P(x)$  คือ  $8x^3 - 4x - 1 = 0$   
 $Q(x)$  คือ  $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$   
 และ  $R(x)$  คือ  $x^3 + x^2 > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- (ก)  $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง  
 (ข)  $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง  
 (ค)  $\forall x[P(x) \rightarrow R(x)]$  มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

13. ค่าของ  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(1 - \frac{2x^3}{x^2+1}\right)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 0.5
3. 1
4. 2
5. 4

14. กำหนดให้  $C$  เป็นเส้นโค้ง  $y = 2 + x|x - 1|$  เมื่อ  $x$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $L$  เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง  $C$  ที่จุด  $(0, 2)$  และให้  $N$  เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง  $L$  ณ จุด  $(0, 2)$  แล้วเส้นตรง  $N$  ผ่านจุดใดต่อไปนี้

1.  $(-1, 3)$
2.  $(1, 5)$
3.  $(-2, 5)$
4.  $(3, -2)$
5.  $(-3, 4)$

15. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่  $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x+1}$  สำหรับทุกสมาชิก  $x$  ในเรนจ์ของ  $f$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $2f'(4) - f(4) = 3$

(ข)  $f''(f(4)) = f(f''(4))$

(ค)  $f$  เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง  $(0, 2)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

16. กำหนดให้  $\vec{A}$  และ  $\vec{B}$  เป็นเวกเตอร์ในระนาบ โดยที่  $\vec{A} = 16\vec{i} + a\vec{j}$  และ  $\vec{B} = 8\vec{i} + b\vec{j}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง ถ้า  $|\vec{A}| = |\vec{B}|$  และเวกเตอร์  $\vec{B}$  ทำมุม  $60^\circ$  กับเวกเตอร์  $\vec{A}$  แล้วค่าของ  $(a + b)^2$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 16
3. 64
4. 192
5. 320

17. ในการจัดนักเรียนชาย 4 คน และนักเรียนหญิง 4 คน มายืนเรียงเป็นแถวตรงเพียงหนึ่งแถว ความน่าจะเป็นที่ไม่มีนักเรียนชายสองคนใดเลยยืนติดกัน หรือ ไม่มีนักเรียนหญิงสองคนใดเลยยืนติดกัน มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1.  $\frac{1}{70}$
2.  $\frac{1}{35}$
3.  $\frac{4}{35}$
4.  $\frac{1}{7}$
5.  $\frac{2}{7}$

18. ให้  $f$  และ  $g$  เป็นฟังก์ชัน โดยที่  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{9-x} & , x \leq 0 \\ 7-x & , x > 4 \end{cases}$  และ  $g(x) = \begin{cases} x+2 & , x < 1 \\ x-4 & , x \geq 1 \end{cases}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า  $x \leq 0$  แล้ว  $(g \circ f)(x) = \sqrt{9-x} - 4$

(ข) ถ้า  $4 < x \leq 6$  แล้ว  $(g \circ f)(x) = 3 - x$

(ค) ถ้า  $x > 6$  แล้ว  $(g \circ f)(x) = 9 - x$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

19. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ  $(1+i)\bar{z} - \frac{(9-7i)(\bar{z}-z)}{3+i} = 6-2i$  เมื่อ  $i^2 = -1$  และ  $\bar{z}$  แทนสังยุค (conjugate) ของ  $z$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $|z+8| = 2$

(ข)  $|z+3i| = 10$

(ค)  $|iz+2| = 8$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

20. กำหนดให้  $a_n = \frac{n2^{3n}}{3^{2n+1}}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$  อนุกรม  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. อนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ  $\frac{8}{3}$
2. อนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 4
3. อนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 24
4. อนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ  $\frac{64}{3}$
5. อนุกรมลู่ออก

21. กำหนดให้ข้อมูลชุดที่ 1 คือ  $x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{20} + 4$   
และข้อมูลชุดที่ 2 คือ  $2x_1 + 4, 2x_2 + 4, \dots, 2x_{20} + 4$

เมื่อ  $x_1, x_2, \dots, x_{20}$  เป็นจำนวนจริง

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่ 1 เท่ากับ 50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่ 1 เท่ากับ 10  
แล้วข้อมูลชุดที่ 2 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ ความแปรปรวนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 96 และความแปรปรวนเท่ากับ 400
2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 96 และความแปรปรวนเท่ากับ 576
3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 100 และความแปรปรวนเท่ากับ 400
4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 104 และความแปรปรวนเท่ากับ 400
5. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 104 และความแปรปรวนเท่ากับ 576

22. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีสัมประสิทธิ์ของการแปรผันของคะแนนสอบวิชานี้ เท่ากับ 25% และมีนักเรียนร้อยละ 15.87 ที่สอบได้คะแนนมากกว่า 85 คะแนน ถ้านาย ก เป็นนักเรียนคนหนึ่งในห้องนี้ สอบได้คะแนน 47.6 คะแนน จะอยู่ในตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ตรงกับข้อใดต่อไปนี้  
เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้โค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง  $z$  ดังนี้

| $z$     | 0.4    | 0.9    | 1.0    | 1.1    | 1.2    | 1.3    |
|---------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| พื้นที่ | 0.1554 | 0.3159 | 0.3413 | 0.3643 | 0.3849 | 0.4032 |

1. 34.46
2. 18.41
3. 13.57
4. 11.51
5. 9.68



23. กำหนดให้  $a_n = \frac{1+2+2^2+2^3+\dots+2^n}{3^{2n}}$  เมื่อ  $n = 1, 2, 3, \dots$

ค่าของ  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |                  |                    |                   |
|------------------|--------------------|-------------------|
| 1. $\frac{2}{9}$ | 2. $\frac{1}{8}$   | 3. $\frac{9}{56}$ |
| 4. $\frac{2}{7}$ | 5. $\frac{25}{56}$ |                   |

24. กำหนดให้  $\mathbb{I}$  แทนเซตของจำนวนเต็ม และ  $\mathbb{R}$  แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า  $r = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x^2+2}{\sqrt{4-x}-\sqrt{2x+1}} \right\}$  และ  $A = \{ x^2 \mid x \in \mathbb{I} \cap D_r \}$

แล้วผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $A$  เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- |       |       |       |
|-------|-------|-------|
| 1. 6  | 2. 10 | 3. 19 |
| 4. 29 | 5. 30 |       |

25. ภายใต้สมการข้อจำกัดต่อไปนี้  $x + 2y \leq 4$  ,  $x - y \leq 1$  ,  $x + y \geq 1$  ,  $x \geq 0$  และ  $y \geq 0$

สมการจุดประสงค์ในข้อใดต่อไปนี้ ที่มีค่ามากที่สุด

- |                  |                  |                  |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. $z = 2x + 2y$ | 2. $z = 3x + 2y$ | 3. $z = 2x + 3y$ |
| 4. $z = x + 4y$  | 5. $z = 4x + y$  |                  |

26. กำหนดให้  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  เมื่อ  $a, b, c$  และ  $d$  เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่  $abcd = 9$  และ  $ad \neq bc$  ถ้า  $AB^{-1} = B^{-1}A$  และ  $\det(A^t B) = -24$  แล้วค่าของ  $a + b + c + d$  เท่ากับเท่าใด

1. 5
2. 6
3. 7
4. 8
5. 9

27. กำหนดให้  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  เป็นเวกเตอร์ใดๆ ที่ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า  $\vec{a}$  ขนานกับ  $\vec{b}$  แล้ว  $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{a}| - |\vec{b}|$

(ข) ถ้า  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$  แล้ว  $\vec{a}$  ตั้งฉากกับ  $\vec{b}$

(ค) ถ้าเวกเตอร์  $\vec{a} + \vec{b}$  ตั้งฉากกับเวกเตอร์  $\vec{a} - \vec{b}$  แล้ว  $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) และ ข้อ (ข) ถูก แต่ ข้อ (ค) ผิด
2. ข้อ (ก) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ข) ผิด
3. ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูก แต่ ข้อ (ก) ผิด
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

28. กำหนดให้  $a, b, c, d$  และ  $e$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$a + b - 4 = b + c + 5 = c + d + 1 = d + e - 2 = e + a + 3$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก)  $c + e < b + d$

(ข)  $c < b < e < d$

(ค)  $a + d < b + c$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

29. กำหนดข้อมูลชุดหนึ่ง ดังตารางต่อไปนี้

| คะแนน  | จำนวน |
|--------|-------|
| 0 – 2  | 3     |
| 3 – 5  | 5     |
| 6 – 8  | $a$   |
| 9 – 11 | 3     |

เมื่อ  $a$  เป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 5 แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับเท่าใด

1. 3.8
2. 4.3
3. 4.8
4. 4.9
5. ไม่มีคำตอบ

30. จากการสำรวจประชากรของหมู่บ้านแห่งหนึ่ง มีผู้หญิงร้อยละ 60 ของประชากรทั้งหมดในหมู่บ้านนี้ และมีอัตราส่วนของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ ต่อจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ เท่ากับ อัตราส่วนของจำนวนประชากรในหมู่บ้านที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ ต่อ จำนวนประชากรในหมู่บ้านที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ พิจารณาข้อสรุปเกี่ยวกับประชากรในหมู่บ้าน ต่อไปนี้

- (ก) ผู้หญิงที่มีสายตาสีฟ้าตบตบมีจำนวน 1.5 เท่าของจำนวนผู้ชายที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ
- (ข) ผู้ชายที่มีสายตาสีฟ้าตบตบมีจำนวนมากกว่าจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ
- (ค) อัตราส่วนของจำนวนผู้หญิงที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ ต่อ จำนวนผู้หญิงทั้งหมดในหมู่บ้านนี้ มากกว่าอัตราส่วนของจำนวนผู้ชายที่มีสายตาสีฟ้าตบตบ ต่อ จำนวนผู้ชายทั้งหมดในหมู่บ้านนี้

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ข้อ (ก) ถูกเพียงข้อเดียว
2. ข้อ (ข) ถูกเพียงข้อเดียว
3. ข้อ (ค) ถูกเพียงข้อเดียว
4. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ถูกทั้งสามข้อ
5. ข้อ (ก) ข้อ (ข) และ ข้อ (ค) ผิดทั้งสามข้อ

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ในการสำรวจความชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ วิชาภาษาไทย และวิชาภาษาอังกฤษ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง

พบว่า มีนักเรียนชอบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 150 คน

มีนักเรียนชอบเรียนวิชาภาษาไทย 80 คน

มีนักเรียนชอบเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 60 คน

และ มีนักเรียน 30 คน ชอบเรียนทั้งสามวิชา

นักเรียนกลุ่มนี้มีจำนวนอย่างมากกี่คน

32. ให้  $A$  แทนเซตคำตอบของสมการ  $3(9 + 3^{|x|+|x+4|}) = 3^{|x+4|} + 3^{|x|+4}$  และให้  $B = \{ 59 - x \mid x \in A \}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $B$  เท่ากับเท่าใด

33. กำหนดให้  $\mathbb{R}$  แทนเซตของจำนวนจริง ให้  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และสอดคล้องกับ

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{1 + f(x)} - 3} = 6 \text{ และ } 1 + f(x) \geq 0 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x$$

ถ้าเส้นตรง  $6x - y = 4$  ตัดกับกราฟ  $y = f(x)$  ที่  $x = 2$  แล้วค่าของ  $f'(2)$  เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ฟังก์ชัน  $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < -1 \\ ax + b & , \quad -1 \leq x < 1 \\ 3x^2 + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$  เมื่อ  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

ถ้าฟังก์ชัน  $f$  ต่อเนื่อง สำหรับทุกจำนวนจริง  $x$  แล้วค่า  $\int_{-2}^2 f(x)dx$  เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้  $a > 1$  และ นิยาม  $L(n) = \log_2^n(\sqrt[n]{a})$  สำหรับ  $n = 1, 2, 3, \dots$

ถ้า  $\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)} + \dots + \frac{1}{L(10)} = 77$  แล้วค่าของ  $a$  เท่ากับเท่าใด

36. ถ้า  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ  $\begin{vmatrix} 1 & b & 0 \\ a & 4 & 1 \\ 5 & a & -a \end{vmatrix} = -17$

แล้วค่าของ  $\begin{vmatrix} 5+2a & 2 & 5 \\ 8+a & 2b & a \\ 2-a & 0 & -a \end{vmatrix}$  เท่ากับเท่าใด

37. ให้  $\{a_n\}$  เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง

โดยที่  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49} = a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{50} = 1275$  และ  $a_{100} = 200$

ค่าของ  $a_{51} + a_{52} + a_{53} + \dots + a_{100}$  เท่ากับเท่าใด

38. ต้องการสร้างจำนวนห้าหลัก จากเลขโดด 1, 2, 3 โดยที่แต่ละหลักมีตัวเลขซ้ำกันได้ และจำนวนห้าหลักประกอบด้วยตัวเลข 1 อย่างน้อย 1 หลัก ตัวเลข 2 อย่างน้อย 1 หลัก และตัวเลข 3 อย่างมาก 2 หลัก จะมีจำนวนห้าหลักดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่จำนวน

39. จากการสำรวจปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ชนิดหนึ่ง จำนวน 8 ตัว ได้ข้อมูลซึ่งแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอายุ (ปี) ของสัตว์ชนิดนี้ และปริมาณอาหารเสริม (กิโลกรัม) ที่ใช้เลี้ยงสัตว์ดังกล่าวต่อสัปดาห์ ปรากฏผลดังนี้

|                                       |       |       |       |       |       |       |       |       |
|---------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| อายุ (ปี) : $x$                       | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ |
| ปริมาณอาหารเสริมต่อสัปดาห์ (กิโลกรัม) | $y_1$ | $y_2$ | $y_3$ | $y_4$ | $y_5$ | $y_6$ | $y_7$ | $y_8$ |

โดยที่  $\sum_{i=1}^8 x_i = 40$  ,  $\sum_{i=1}^8 y_i = 48$  ,  $\sum_{i=1}^8 x_i^2 = 210$  ,  $\sum_{i=1}^8 y_i^2 = 380$  ,  $\sum_{i=1}^8 x_i y_i = 270$

และ  $3 = x_1 < x_2 < \dots < x_8 < 10$

สมมติว่ากราฟแผนภาพการกระจายที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ต่อสัปดาห์ และอายุของสัตว์ดังกล่าว อยู่ในรูปแบบเส้นตรง ถ้าสัตว์ชนิดนี้มีอายุ 4 ปี จะต้องใช้ปริมาณอาหารเสริมที่ใช้เลี้ยงสัตว์ต่อสัปดาห์ประมาณกี่กิโลกรัม

40. ถ้า  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey = 21$  เป็นสมการของไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีแกนตามขวางขนานแกน  $x$  มีเส้นตรง  $2x - y + 1 = 0$  เป็นเส้นกำกับ (asymtote) เส้นหนึ่ง และมีจุด  $(1 + 2\sqrt{5}, 3)$  เป็นโฟกัสจุดหนึ่ง แล้วค่าของ  $A^2 + B^2 + D^2 + E^2$  เท่ากับเท่าใด

41. ให้  $S$  เป็นเซตของคู่อันดับ  $(a, b)$  ทั้งหมด โดยที่  $a, b$  เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับ  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{10}$  จำนวนสมาชิกของเซต  $S$  เท่ากับเท่าใด

42. ให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนจริง  $x$  ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับอสมการ  $\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} < \sqrt{1-x}$  ถ้า  $a$  เป็นขอบเขตบนน้อยสุดของเซต  $A$  และ  $b$  เป็นขอบเขตล่างมากสุดของเซต  $A$  แล้วค่าของ  $a^2 + b^2$  เท่ากับเท่าใด

43. ให้  $A$  เป็นเซตของคู่อันดับ  $(x, y)$  โดยที่  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$\sqrt{2-x} + \sqrt{y} = 2 \text{ และ } 3 \log_4 16x^2 = 6 + 6 \log_2 \sqrt{y}$$

ให้  $B = \{x^2 + y^2 \mid (x, y) \in A\}$  ค่ามากที่สุดของสมาชิกในเซต  $B$  เท่ากับเท่าใด

44. กำหนดให้ข้อมูลกลุ่มตัวอย่าง 5 จำนวน คือ  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  โดยที่  $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 214$  และ  $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})^2 = 34$

เมื่อ  $\bar{x}$  คือค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกลุ่มตัวอย่างนี้ และ  $\bar{x} > 0$

ถ้าข้อมูลกลุ่มตัวอย่างใหม่ 5 จำนวน คือ  $x_1 + 2x_2, x_2 + 2x_3, x_3 + 2x_4, x_4 + 2x_5, x_5 + 2x_1$  มีส่วน

เบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 16

แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1$  เท่ากับเท่าใด

45. ให้  $S$  เป็นเซตของจำนวนสองหลัก  $ab$  ทั้งหมด โดยที่  $ab + ba = 143$  เมื่อ  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

และ  $a \neq b$  ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $S$  เท่ากับเท่าใด



เฉลย

|       |       |       |          |          |
|-------|-------|-------|----------|----------|
| 1. 2  | 11. 3 | 21. 1 | 31. 230  | 41. 4    |
| 2. 5  | 12. 3 | 22. 4 | 32. 126  | 42. 1.5  |
| 3. 3  | 13. 1 | 23. 5 | 33. 5    | 43. 2    |
| 4. 2  | 14. 1 | 24. 4 | 34. 9.25 | 44. 78.7 |
| 5. 5  | 15. 2 | 25. 5 | 35. 32   | 45. 429  |
| 6. 4  | 16. 4 | 26. 4 | 36. 68   |          |
| 7. 4  | 17. 3 | 27. 3 | 37. -    |          |
| 8. 2  | 18. 4 | 28. 1 | 38. 160  |          |
| 9. 3  | 19. 2 | 29. 2 | 39. 3    |          |
| 10. 5 | 20. 3 | 30. 1 | 40. 117  |          |

แนวคิด

1. 2

จาก  $(p \vee r) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$  เป็นจริง จะสรุปได้ว่า  $p \vee r$  กับ  $\sim p \wedge \sim q$  ต้องมีค่าความจริงเหมือนกัน  
 จะเห็นว่า  $p$  เป็น T ไม่ได้ เพราะถ้า  $p$  เป็นจริง จะทำให้  $p \vee r \equiv T \vee r \equiv T$   
 แต่จะทำให้  $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim T \wedge \sim q \equiv F \wedge \sim q \equiv F$  } ไม่เหมือนกัน  
 ดังนั้น  $p$  ต้องเป็น F และจะได้  $p \vee r \equiv F \vee r \equiv r$   
 และ  $\sim p \wedge \sim q \equiv \sim F \wedge \sim q \equiv T \wedge \sim q \equiv \sim q$  } ต้องเหมือนกัน  $\rightarrow$  จะได้  $r \equiv \sim q$   
 นั่นคือ  $r$  กับ  $q$  ต้องมีค่าความจริงตรงข้ามกัน

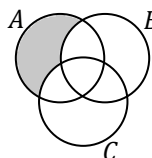
สรุป จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ว่า  $p \equiv F$  และ  $r$  กับ  $q$  ตรงข้ามกัน

- $$\begin{aligned} (q \leftrightarrow r) \vee p & \rightarrow r \text{ กับ } q \text{ ตรงข้ามกัน} \\ \equiv F \vee F & \rightarrow \text{จะได้ } q \leftrightarrow r \equiv F \\ \equiv F & \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (p \rightarrow q) \vee (r \rightarrow p) & \\ \equiv (F \rightarrow q) \vee (r \rightarrow F) & \\ \equiv T \vee (r \rightarrow F) & \\ \equiv T & \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (r \rightarrow q) \wedge (p \wedge q) & \\ \equiv (r \rightarrow q) \wedge (F \wedge q) & \\ \equiv (r \rightarrow q) \wedge F & \\ \equiv F & \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (q \rightarrow \sim p) \vee (q \wedge r) & \\ \equiv (q \rightarrow \sim F) \vee (q \wedge r) & \\ \equiv (q \rightarrow T) \vee (q \wedge r) & \\ \equiv T \vee (q \wedge r) & \\ \equiv T & \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} (r \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim r) & \\ \equiv (r \vee q) \leftrightarrow (F \rightarrow \sim r) & \rightarrow r \text{ กับ } q \text{ ตรงข้ามกัน ดังนั้น จะมีตัวหนึ่ง T ตัวหนึ่ง F} \\ \equiv T \leftrightarrow T & \rightarrow \text{เมื่อมีตัวหนึ่ง T จะได้ } r \vee q \equiv T \text{ เสมอ} \\ \equiv T & \end{aligned}$$

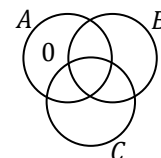
จะเห็นว่า มีข้อ 2. ข้อเดียว ที่ตรงกับข้อความในตัวเลือก

2. 5

จาก  $A \cap (B \cup C)' = \emptyset$   
 $A - (B \cup C) = \emptyset$  } ใช้สูตร  $A - B = A \cap B'$

ซึ่ง  $A - (B \cup C)$  คือบริเวณ

เป็นเซตว่าง ดังนั้น ใส่ 0 ได้ดังรูป

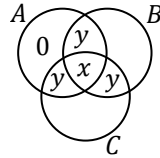


จาก  $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C) \rightarrow$  กำหนด  $a, b, c, x$  ดังรูป

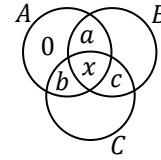
จะได้  $n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(A \cap C)$

$$\begin{aligned} a + x &= c + x = b + x \\ a &= c = b \end{aligned}$$

ให้  $a = b = c = y$  จะได้



$$\begin{aligned} \text{จาก } n(A) = 12 \text{ จะได้ } 0 + y + x + y &= 12 \\ x + 2y &= 12 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

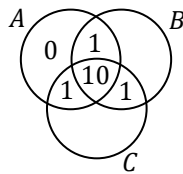


และจากสูตร Inclusive - Exclusive จะได้

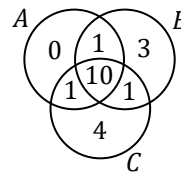
$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \\ 20 &= 12 + 15 + 16 - (x + y) - (x + y) - (x + y) + x \\ 20 &= 43 - x - y - x - y - x - y + x \\ 2x + 3y &= 23 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แก้ระบบสมการ (1) กับ (2):} \quad x + 2y &= 12 \quad \dots(1) \\ 2x + 3y &= 23 \quad \dots(2) \\ 2 \times (1): 2x + 4y &= 24 \quad \dots(3) \\ (3) - (2): y &= 1 \rightarrow \text{แทนใน (1): } x + 2(1) = 12 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

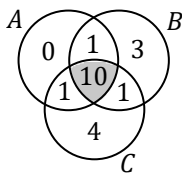
แทน  $x = 10, y = 1$  ในแผนภาพ และหาส่วนที่เหลือ จะได้ดังรูป



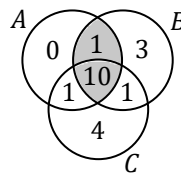
$$\begin{aligned} n(B) &= 15 \\ n(C) &= 16 \end{aligned}$$



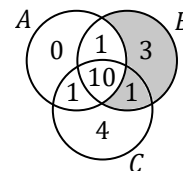
1.  $A \cap B \cap C \rightarrow 10$



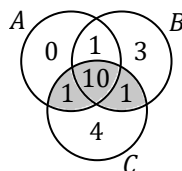
2.  $A \cap B \rightarrow 11$



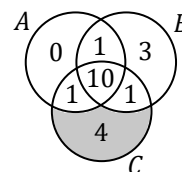
3.  $A' \cap B = B \cap A' = B - A \rightarrow 4$



4.  $(A \cup B) \cap C \rightarrow 12$



5.  $(A \cup B)' \cap C = C \cap (A \cup B)' = C - (A \cup B) \rightarrow 4$



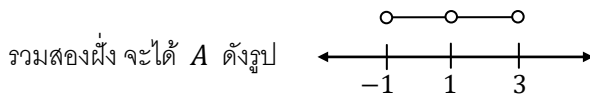
จะเห็นว่า ข้อ 5. เท่านั้น ที่ไม่ตรงกับข้อความในตัวเลือก

3. 3

หา A:  $||x-1|-1| < 1$

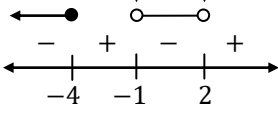
จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ จะได้  $-1 < |x-1|-1 < 1$   
 $0 < |x-1| < 2$

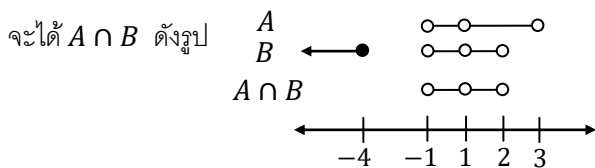
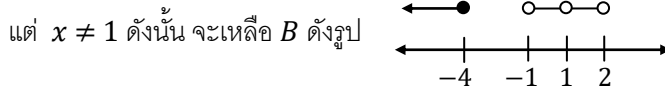
จะได้  $0 < |x-1|$  และ  $|x-1| < 2$   
จริงเสมอ ยกเว้น เมื่อ  $x-1=0$   $-2 < x-1 < 2$   
 $\rightarrow x$  เป็นอะไรก็ได้ที่ไม่ใช่ 1  $-1 < x < 3$

หมายเหตุ : จริงๆแล้ว ข้อนี้ ไม่ต้องหา B ก็ได้ เนื่องจาก A ที่ได้ เป็นสับเซตของ  $(-1, 3)$  ในข้อ 3 เพียงข้อเดียวเนื่องจาก  $A \cap B \subset A$  และ  $A \subset (-1, 3)$  ดังนั้น จะสรุปได้ว่า  $A \cap B \subset (-1, 3)$ 

ดังนั้น ข้อ 3 เป็นคำตอบได้แน่นอน (แต่ถ้าไม่หา B จะไม่รู้ว่ามีตัวเลือกข้ออื่นเป็นคำตอบได้อีกหรือไม่)

หา B :

$$\begin{array}{l} \frac{1}{x+1} \geq \frac{2x-2}{x^2-3x+2} \\ \frac{1}{x+1} \geq \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)} \\ \frac{1}{x+1} \geq \frac{2(x-1)}{(x-2)(x-1)} \\ \frac{1}{x+1} \geq \frac{2}{x-2} ; x \neq 1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 0 \geq \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1} \\ 0 \geq \frac{2(x+1)-1(x-2)}{(x-2)(x+1)} \\ 0 \geq \frac{2x+2-x+2}{(x-2)(x+1)} \\ 0 \geq \frac{x+4}{(x-2)(x+1)} \end{array} \right.$$
  
มาจากตัวส่วน ต้องเป็นวงขาวๆ  


จะเห็นว่า  $A \cap B$  เป็นสับเซตของ  $(-1, 3)$  ในข้อ 3 เพียงข้อเดียว

4. 2

สังเกตว่าแต่ละวงเล็บ จะเข้าสู่สูตร  $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$  ได้ ถ้ามี  $\sin \theta$  คุณเพิ่มอีกตัว $\rightarrow$  คุณ  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta}$  เข้าไปที่แต่ละวงเล็บ แล้วเข้าสู่สูตร  $\sin 3\theta$  ดังนี้

$$\begin{aligned} &= \frac{(\sin 9^\circ)(3-4\sin^2 9^\circ)}{\sin 9^\circ} \cdot \frac{(\sin 27^\circ)(3-4\sin^2 27^\circ)}{\sin 27^\circ} \cdot \frac{(\sin 81^\circ)(3-4\sin^2 81^\circ)}{\sin 81^\circ} \cdot \frac{(\sin 243^\circ)(3-4\sin^2 243^\circ)}{\sin 243^\circ} \\ &= \frac{3\sin 9^\circ - 4\sin^3 9^\circ}{\sin 9^\circ} \cdot \frac{3\sin 27^\circ - 4\sin^3 27^\circ}{\sin 27^\circ} \cdot \frac{3\sin 81^\circ - 4\sin^3 81^\circ}{\sin 81^\circ} \cdot \frac{3\sin 243^\circ - 4\sin^3 243^\circ}{\sin 243^\circ} \\ &= \frac{\sin 3(9^\circ)}{\sin 9^\circ} \cdot \frac{\sin 3(27^\circ)}{\sin 27^\circ} \cdot \frac{\sin 3(81^\circ)}{\sin 81^\circ} \cdot \frac{\sin 3(243^\circ)}{\sin 243^\circ} \\ &= \frac{\sin 27^\circ}{\sin 9^\circ} \cdot \frac{\sin 81^\circ}{\sin 27^\circ} \cdot \frac{\sin 243^\circ}{\sin 81^\circ} \cdot \frac{\sin 729^\circ}{\sin 243^\circ} \rightarrow \text{เหลือ } \frac{\sin 729^\circ}{\sin 9^\circ} \end{aligned}$$

เนื่องจาก 729 หารด้วย 360 เหลือเศษ 9 ดังนั้น  $\frac{\sin 729^\circ}{\sin 9^\circ} = \frac{\sin 9^\circ}{\sin 9^\circ} = 1$

5. 5

จากสูตร  $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$  ได้ จะได้  $\cot \frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$

จะได้  $2 \cot \frac{\theta}{2} = (1 + \cot \theta)^2$

$$\frac{2(1 + \cos \theta)}{\sin \theta} = \left(1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)^2$$

$$\frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta} = \left(\frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2$$

$$\frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta}$$

$$\frac{2 + 2 \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^2 \theta} \quad \swarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$2 + 2 \cos \theta = \frac{1 + 2 \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$2 \sin \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$2 \sin \theta = 1$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2}$$

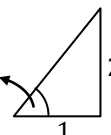
$$\theta = 30^\circ \quad \rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น  $\frac{(1 + \sin \theta) \sec^2 \theta}{\cos 2\theta} = \frac{(1 + \sin 30^\circ) \sec^2 30^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2}{\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{2}{1}\right) = 4$

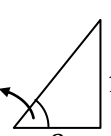
6. 4

หลัง arc ทุกตัวเป็นค่าบวก  $\rightarrow$  ผล arc จะได้มุมใน  $Q_1 \rightarrow$  ใช้สามเหลี่ยมมาช่วยคิดได้ โดยไม่ต้องระวังเรื่องเครื่องหมายบวกลบ

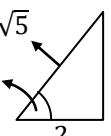
หา  $\sec^2(\arctan 2)$  :

$\arctan 2 \rightarrow$    $\rightarrow$   $\begin{aligned} &= \sqrt{2^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$   $\rightarrow$  จะได้  $\sec(\arctan 2) = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$   
 ดังนั้น  $\sec^2(\arctan 2) = 5$

หา  $\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} 3)$  :

$\operatorname{arccot} 3 \rightarrow$    $\rightarrow$   $\begin{aligned} &= \sqrt{1^2 + 3^2} \\ &= \sqrt{10} \end{aligned}$   $\rightarrow$  จะได้  $\operatorname{cosec}(\operatorname{arccot} 3) = \frac{\sqrt{10}}{1} = \sqrt{10}$   
 ดังนั้น  $\operatorname{cosec}^2(\operatorname{arccot} 3) = 10$

สุดท้าย  $\operatorname{cosec}\left(2 \operatorname{arccot} 2 + \arccos \frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\sin\left(2 \operatorname{arccot} 2 + \arccos \frac{3}{5}\right)}$   
 $= \frac{1}{\sin(2 \operatorname{arccot} 2) \cos\left(\arccos \frac{3}{5}\right) + \cos(2 \operatorname{arccot} 2) \sin\left(\arccos \frac{3}{5}\right)} \dots (*)$

$\begin{aligned} &= \sqrt{1^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{5} \end{aligned}$ 


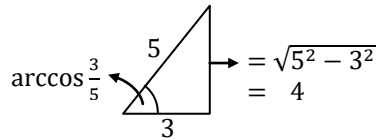
$$\sin(2 \operatorname{arccot} 2) = 2 \sin(\operatorname{arccot} 2) \cos(\operatorname{arccot} 2)$$

$$= 2 \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\cos(2 \operatorname{arccot} 2) = 2 \cos^2(\operatorname{arccot} 2) - 1$$

$$= 2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$$

$$\begin{aligned} \sin 2\theta &= 2 \sin \theta \cos \theta \\ \cos 2\theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \end{aligned}$$



$$\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{5}$$

$$\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{4}{5}$$

แทนใน (\*) จะได้  $\operatorname{cosec}\left(2 \operatorname{arccot} 2 + \arccos\frac{3}{5}\right) = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{5}\right)} = \frac{1}{\frac{24}{25}} = \frac{25}{24}$

จะได้คำตอบที่โจทย์ถาม  $= 5 + 10 + \frac{25}{24} = \frac{360+25}{24} = \frac{385}{24}$

7. 4

จะได้  $A = \arcsin\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$

ดังนั้น  $\sin^2 B + \sin^2(A+B) + \sin^2(5A+B)$

$$= \sin^2 B + \sin^2(30^\circ + B) + \sin^2(5(30^\circ) + B)$$

$$= \sin^2 B + (\sin 30^\circ \cos B + \cos 30^\circ \sin B)^2 + (\sin 150^\circ \cos B + \cos 150^\circ \sin B)^2$$

$$= \sin^2 B + (\sin 30^\circ \cos B + \cos 30^\circ \sin B)^2 + (\sin 30^\circ \cos B - \cos 30^\circ \sin B)^2$$

$$= \sin^2 B + \left(\frac{1}{2} \cos B + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \cos B - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin B\right)^2$$

$$= \sin^2 B + \frac{\cos^2 B}{4} + \frac{\sqrt{3} \cos B \sin B}{2} + \frac{3 \sin^2 B}{4} + \frac{\cos^2 B}{4} - \frac{\sqrt{3} \cos B \sin B}{2} + \frac{3 \sin^2 B}{4}$$

$$= \sin^2 B + \frac{2 \cos^2 B}{4} + \frac{6 \sin^2 B}{4}$$

$$= \sin^2 B + \frac{1 - \sin^2 B}{2} + \frac{3 \sin^2 B}{2}$$

$$= \frac{2 \sin^2 B + 1 - \sin^2 B + 3 \sin^2 B}{2}$$

$$= \frac{4 \sin^2 B + 1}{2}$$

$$= \frac{4\left(\frac{1 - \cos 2B}{2}\right) + 1}{2}$$

$$= \frac{2 - 2 \cos 2B + 1}{2} = \frac{3}{2} - \cos 2B$$

ในตัวเลือก เป็นมุมสองเท่า → จะใช้สูตร  $\cos 2B = 1 - 2 \sin^2 B$  มาช่วยจัดรูป

$$2 \sin^2 B = 1 - \cos 2B$$

$$\sin^2 B = \frac{1 - \cos 2B}{2}$$

8. 2

$$\log_a(b-2) = \log_{\sqrt{a}} \sqrt{3} + \log_{a^2}(b+2) \quad \left. \begin{array}{l} \log_a M = \frac{1}{n} \log_a M \\ \log_a(b-2) = \frac{1}{\frac{1}{2}} \log_a \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_a(b+2) \end{array} \right\}$$

$$\log_a(b-2) = 2 \log_a \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_a(b+2)$$

$$\log_a(b-2) = \log_a \sqrt{3}^2 + \log_a(b+2)^{\frac{1}{2}} \quad \left. \begin{array}{l} n \log_a M = \log_a M^n \\ \log_a(b-2) = \log_a 3 + \log_a \sqrt{b+2} \end{array} \right\}$$

$$\log_a(b-2) = \log_a(3)(\sqrt{b+2}) \quad \left. \begin{array}{l} \log_a M + \log_a N = \log_a MN \\ \log_a(b-2) = \log_a(3)(\sqrt{b+2}) \end{array} \right\}$$

$$b-2 = (3)(\sqrt{b+2}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง} \\ (b-2)^2 = 9(b+2) \end{array} \right\}$$

$$b^2 - 4b + 4 = (9)(b+2) \quad \left. \begin{array}{l} (n-l)^2 = n^2 - 2nl + l^2 \\ b^2 - 13b - 14 = 0 \end{array} \right\}$$

$$(b-14)(b+1) = 0$$

$$b = 14, \quad \leftarrow \text{โจทย์ให้ } b \text{ เป็นจำนวนจริงบวก}$$

แก้สมการ  $(\log_b^2 a)(\log_a b) = 1 + \log_{\sqrt{a}} b$   
 $(\log_b a)^2 (\log_a b) = 1 + \frac{1}{2} \log_a b$   $\rightarrow \log_{a^n} M = \frac{1}{n} \log_a M$   
 $(\log_b a)^2 \left(\frac{1}{\log_b a}\right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{\log_b a}\right)$   $\rightarrow \log_N M = \frac{1}{\log_M N}$   
 $\left(\frac{x}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right) = 1 + 2 \left(\frac{1}{x}\right)$   $\rightarrow$  เปลี่ยนตัวแปร ให้  $\log_b a = x$   
 $\frac{x^2}{x} = x + \frac{2}{x}$   $\rightarrow$  คูณ  $x$  ตลอด  
 $x^2 - x - 2 = 0$   
 $(x-2)(x+1) = 0$   
 $x = 2, -1$   $\rightarrow$  เปลี่ยนตัวแปรกลับ แทน  $b = 14$   
 $\log_b a = 2, -1$   
 $\log_{14} a = 2, -1$   
 $a = 14^2, 14^{-1}$   
 $a = 196, \frac{1}{14}$   $\rightarrow$  โจทย์ให้  $a > 2$

จะได้  $a + b = 196 + 14 = 210$

9. 3

ถ้า  $y$  ถูกยกกำลังคู่ หรือ อยู่ในค่าสัมบูรณ์ แล้ว มักจะ ไม่ใช่ฟังก์ชัน

(เพราะ  $y$  เป็นลบกับบวก จะยกกำลังคู่ได้ค่าเดียวกัน ทำให้อาจมี  $y$  สองค่า สำหรับ  $x$  ค่าหนึ่งๆ)

ข้อ 3. จะเห็นว่าข้อ 3. มี  $y^2$  อยู่ จึงน่าจะสงสัยว่าไม่ใช่ฟังก์ชัน

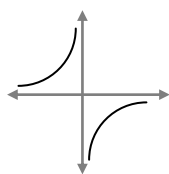
ลองให้  $y = 1$  กับ  $-1$  จะได้  $x^2 = \sqrt{(\pm 1)^2 + 1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$   
 $x = \pm \sqrt{\sqrt{2}} \rightarrow$  หาค่า  $x$  ได้

ดังนั้น จะมี  $x$  หนึ่งค่าที่จับคู่กับ  $y$  สองค่า เช่น  $(\sqrt{\sqrt{2}}, 1)$  กับ  $(\sqrt{\sqrt{2}}, -1) \rightarrow$  ข้อ 3. ไม่เป็นฟังก์ชัน

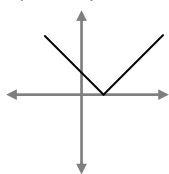
ข้อ 2.  $\tan$  เป็น “ฟังก์ชัน” ตรีโกณมิติ  $\rightarrow$  จึงเป็นฟังก์ชันโดยอัตโนมัติ

ข้อ 1. กับ ข้อ 4. วาดกราฟ

$xy + 1 = 0$   
 $xy = -1$



$y = |2 - x|$   
 $y = |x - 2| \rightarrow$  เป็นตัววีหัทที่ (2, 0)



จะเห็นว่าเส้นแวนดิงตัดกราฟได้อย่าง

มาก 1 จุดเสมอ  $\rightarrow$  เป็นฟังก์ชัน

ข้อ 5. พิสูจน์ได้โดยสมมติให้  $(x_1, y_1)$  และ  $(x_2, y_2)$  สอดคล้องกับความสัมพันธ์  $x^2 = \frac{y}{y+1}$

ถ้า  $x_1 = x_2$   $\rightarrow$  ยกกำลังสองทั้งสองข้าง  
 $x_1^2 = x_2^2$   
 $\frac{y_1}{y_1+1} = \frac{y_2}{y_2+1}$   $\rightarrow$  จะได้  $x_1^2 = \frac{y_1}{y_1+1}$  และ  $x_2^2 = \frac{y_2}{y_2+1}$

$y_1 y_2 + y_1 = y_1 y_2 + y_2$

$y_1 = y_2$

จะเห็นว่า ถ้า  $x_1 = x_2$  แล้ว จะได้  $y_1 = y_2$  สอดคล้องกับเงื่อนไขของฟังก์ชัน  $\rightarrow$  เป็นฟังก์ชัน

10. 5

$$\begin{aligned}
 \text{จัดรูปวงกลม } x^2 + y^2 + ax - 6y - 12 &= 0 \\
 (x^2 + ax) + (y^2 - 6y) &= 12 \\
 \left(x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + (y^2 - 6y + 3^2) &= 12 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + 3^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{เติม } \frac{a^2}{4} \text{ เพื่อเข้าสูตรกำลังสองสมบูรณ์} \\ n^2 + 2nl + l^2 = (n+l)^2 \end{array} \right\} \\
 \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + (y - 3)^2 &= 21 + \frac{a^2}{4}
 \end{aligned}$$

จะได้วงกลมมีจุดศูนย์กลางคือ  $\left(-\frac{a}{2}, 3\right) \dots (*)$ 

ระยะจาก  $(a, b)$  ไปยังเส้นตรง  $Ax + By + C = 0$   
 หาได้จากสูตร  $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$$\text{จะได้ระยะจาก } \left(-\frac{a}{2}, 3\right) \text{ ไปยังเส้นตรง } 4x + 3y - 71 = 0 \text{ เท่ากับ } \frac{\left|4\left(-\frac{a}{2}\right) + 3(3) - 71\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-2a - 62|}{5}$$

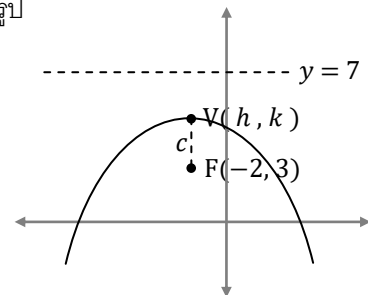
$$\begin{aligned}
 \text{แต่โจทย์ให้ระยะจากจุดศูนย์กลางไปยังเส้นตรง} &= 14 \text{ ดังนั้น } \frac{|-2a - 62|}{5} = 14 \\
 |-2a - 62| &= 70 \\
 -2a - 62 &= 70, -70 \\
 -2a &= 132, -8 \\
 a &= -66, 4
 \end{aligned}$$

แต่โจทย์ให้  $a > 0$  ดังนั้น จะได้  $a = 4$  แทนใน  $(*)$  จะได้จุดศูนย์กลางวงกลมคือ  $\left(-\frac{4}{2}, 3\right) = (-2, 3)$ ดังนั้น พาราโบลา มี  $F(-2, 3)$  และมีเส้นไดเรกทริกซ์ คือ  $y = 7$  จะวาดได้ดังรูปจุดยอด  $V$  จะอยู่ตรงกลาง ระหว่าง  $F$  และ เส้นไดเรกทริกซ์ ดังนั้น จะได้พิกัด

$$\text{ของจุดยอดคือ } V\left(-2, \frac{3+7}{2}\right) = V(-2, 5) \rightarrow \text{จะได้ } h = -2 \text{ และ } k = 5$$

$$\text{และจะได้ระยะโฟกัส } c = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{aligned}
 \text{แทนในรูปสมการของพาราโบลาได้ว่า } (x - h)^2 &= -4c(y - k) \\
 (x - (-2))^2 &= -4(2)(y - 5) \\
 (x + 2)^2 &= -8(y - 5) \\
 x^2 + 4x + 4 &= -8y + 40 \\
 x^2 + 4x + 8y - 36 &= 0
 \end{aligned}$$



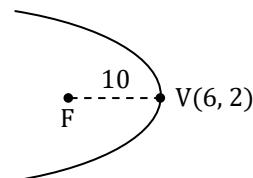
11. 3

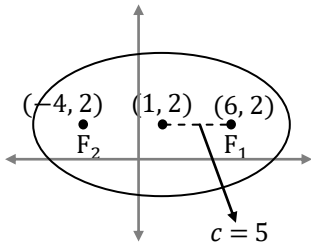
$$\begin{aligned}
 \text{จัดรูปพาราโบลา ได้ } y^2 - 4y &= -40x + 236 \\
 y^2 - 4y + 4 &= -40x + 236 + 4 \\
 (y - 2)^2 &= -40x + 240 \\
 (y - 2)^2 &= -40(x - 6) \\
 (y - 2)^2 &= -4(10)(x - 6)
 \end{aligned}$$

$$\text{เทียบกับ รูปสมการ } (y - k)^2 = -4c(x - h)$$

$$\text{จะได้พาราโบลาเปิดซ้าย มีจุดยอด } V(h, k) = (6, 2)$$

$$\text{จุดโฟกัสจะอยู่ห่างจากจุดยอดไปทางซ้าย } = c = 10 \rightarrow \text{จะได้พิกัดจุดโฟกัสคือ } F(6 - 10, 2) = F(-4, 2)$$





ดังนั้น วงรีมีจุดโฟกัสอยู่ที่  $F_1(6, 2)$  และ  $F_2(-4, 2)$

จะเห็นว่า โฟกัสเรียงตัวในแนวนอน  $\rightarrow$  เป็นวงรีแนวนอน

เนื่องจากจุดศูนย์กลางวงรี จะอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง

จะได้ จุดศูนย์กลางวงรี  $(h, k) = \left(\frac{6+(-4)}{2}, 2\right) = (1, 2)$

และจะได้ ระยะโฟกัส  $c = 6 - 1 = 5$  ดังรูป

จากสมบัติของวงรี ถ้า A เป็นจุดบนวงรี จะได้  $AF_1 + AF_2 =$  ความยาวแกนเอก

เนื่องจากวงรี ผ่านจุด  $A(4, 6)$  ใช้สูตรระยะระหว่างจุด ระหว่าง A กับ  $F_1(6, 2)$  และ  $F_2(-4, 2)$  จะได้

$$\begin{aligned} AF_1 + AF_2 &= \sqrt{(4-6)^2 + (6-2)^2} + \sqrt{(4-(-4))^2 + (6-2)^2} \\ &= \sqrt{4 + 16} + \sqrt{64 + 16} \\ &= \frac{\sqrt{20}}{2\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{80}}{4\sqrt{5}} = 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

ดังนั้น ความยาวแกนเอก  $= 6\sqrt{5} \rightarrow$  จะได้  $a = \frac{6\sqrt{5}}{2} = 3\sqrt{5} \rightarrow$  และจะหา  $b$  ได้จาก  $a^2 = b^2 + c^2$

$$\begin{aligned} (3\sqrt{5})^2 &= b^2 + 5^2 \\ 45 &= b^2 + 25 \\ 20 &= b^2 \end{aligned}$$

แทนในสมการวงรีแนวนอน

$$\begin{aligned} \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{(x-1)^2}{(3\sqrt{5})^2} + \frac{(y-2)^2}{20} &= 1 \\ \frac{x^2-2x+1}{45} + \frac{y^2-4y+4}{20} &= 1 \\ \frac{4(x^2-2x+1)+9(y^2-4y+4)}{180} &= 1 \\ 4x^2 - 8x + 4 + 9y^2 - 36y + 36 &= 180 \\ 4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y - 140 &= 0 \end{aligned}$$

12. 3

ข้อนี้ จะพิจารณาเป็นข้อๆ และแก้สมการเท่าที่จำเป็น

1.  $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$  จะจริงเมื่อ มี  $x$  ค่าหนึ่ง ที่ทำให้ทั้ง  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็นจริง

แก้  $P(x)$  ก่อน  $\rightarrow$  จะใช้ทฤษฎีตัวประกอบตรรกยะและทฤษฎีเศษ หาตัวประกอบของ  $8x^3 - 4x - 1$  ก็ได้

อีกวิธีคือ เติม +1 ให้  $8x^3$  เพื่อเข้าสูตรผลบวกกำลังสาม แล้วจับกลุ่มดึงตัวร่วม ดังนี้

$$\begin{aligned} \text{เติม } +1 - 1 \quad & \left\{ \begin{aligned} 8x^3 &- 4x - 1 &= 0 \\ 8x^3 + 1 - 1 - 4x - 1 &= 0 \\ (8x^3 + 1) - 4x - 2 &= 0 \\ ((2x)^3 + 1^3) - 2(2x + 1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ n^3 + l^3 = (n+l)(n^2 - nl + l^2) \quad & \left\{ \begin{aligned} (2x+1)(4x^2 - 2x + 1) - 2(2x+1) &= 0 \\ (2x+1)(4x^2 - 2x + 1 - 2) &= 0 \\ (2x+1)(4x^2 - 2x - 1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ \text{ดึง } 2x+1 \text{ เป็นตัวร่วม} \quad & \left\{ \begin{aligned} x &= -\frac{1}{2} \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(4)(-1)}}{2(4)} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

แต่  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$  เป็นอตรรกยะ ไม่อยู่ในเอกภาพสัมพัทธ์ ดังนั้น มี  $x = -\frac{1}{2}$  เพียงค่าเดียว ที่ทำให้  $P(x)$  เป็นจริง



$$\begin{aligned} \text{ถ้าลองแทน } x = -\frac{1}{2} \text{ ใน } Q(x) \text{ จะได้ } 8\left(-\frac{1}{2}\right)^4 - 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 &= \frac{1}{2} - 2 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= -1 \neq 0 \rightarrow \text{เป็นเท็จ} \end{aligned}$$

ดังนั้น จะไม่มี  $x$  ตัวไหนเลย ที่ทำให้ทั้ง  $P(x)$  และ  $Q(x)$  เป็นจริง  $\rightarrow$  ข้อ 1. เป็นเท็จ

2.  $\forall x[Q(x) \rightarrow R(x)]$  จะเป็นจริงเมื่อ  $x$  ทุกตัวที่ทำให้  $Q(x)$  เป็นจริง จะทำให้  $R(x)$  เป็นจริงด้วย

แก้หา  $Q(x) \rightarrow$  จับกลุ่มตั้งตัวร่วม แล้วเติม  $-1 + 1$  คล้ายๆแบบเดิมได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 8x^4 - 8x^2 + x + 1 &= 0 \\ n^2 - l^2 &= (n-l)(n+l) \left\{ \begin{aligned} 8x^2(x^2-1) + (x+1) &= 0 \\ 8x^2(x-1)(x+1) + (x+1) &= 0 \\ (x+1)(8x^2(x-1) + 1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ \text{ตั้ง } x+1 \text{ เป็นตัวร่วม} & \\ \text{เติม } -1+1 & \left\{ \begin{aligned} (x+1)(8x^3 - 8x^2 + 1) &= 0 \\ (x+1)(8x^3 - 1 + 1 - 8x^2 + 1) &= 0 \\ (x+1)(8x^3 - 1 - 8x^2 + 2) &= 0 \end{aligned} \right. \\ n^3 - l^3 &= (n-l)(n^2 + nl + l^2) \left\{ \begin{aligned} (x+1)((8x^3 - 1) - 2(4x^2 - 1)) &= 0 \\ (x+1)((2x-1)(4x^2 + 2x + 1) - 2(2x-1)(2x+1)) &= 0 \end{aligned} \right. \\ n^2 - l^2 &= (n-l)(n+l) \left\{ \begin{aligned} (x+1)(2x-1)((4x^2 + 2x + 1) - 2(2x+1)) &= 0 \\ (x+1)(2x-1)(4x^2 + 2x + 1 - 4x - 2) &= 0 \\ (x+1)(2x-1)(4x^2 - 2x - 1) &= 0 \end{aligned} \right. \\ \text{ตั้ง } 2x-1 \text{ เป็นตัวร่วม} & \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow & \\ x = -1 \quad x = \frac{1}{2} \quad \text{เหมือนตัวประกอบของ } P(x) & \\ & \rightarrow \text{ไม่มีคำตอบที่เป็นตรรกยะ} \end{aligned}$$

ดังนั้น มี  $x = -1, \frac{1}{2}$  สองค่าที่ทำให้  $Q(x)$  เป็นจริง  $\rightarrow$  ลองแทนว่าจะทำให้  $R(x)$  เป็นจริงทั้งสองตัวหรือไม่

$$x = -1: (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 \rightarrow \text{ไม่มากกว่า } 0 \rightarrow \text{ทำให้ } R(x) \text{ เป็นเท็จ}$$

จะเห็นว่า  $x = -1$  ทำให้  $Q(x)$  เป็นจริง แต่ทำให้  $R(x)$  เป็นเท็จ  $\rightarrow$  ไม่ต้องแทนต่อ  $\rightarrow$  สรุปได้เลยว่า 2. ผิด

3.  $\forall x[P(x) \rightarrow R(x)]$  จะเป็นจริงเมื่อ  $x$  ทุกตัวที่ทำให้  $P(x)$  เป็นจริง จะทำให้  $R(x)$  เป็นจริงด้วย

จากข้อ 1. จะได้  $x = -\frac{1}{2}$  เป็นค่าเดียวที่ทำให้  $P(x)$  เป็นจริง  $\rightarrow$  ลองแทนว่าจะทำให้  $R(x)$  เป็นจริงหรือไม่

$$x = -\frac{1}{2}: \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{-1+2}{8} > 0 \rightarrow R(x) \text{ เป็นจริง} \rightarrow \text{ข้อ 3. ถูก}$$

13. 1

$$\text{จัดให้อยู่ในรูปเศษส่วน จะได้ } \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(1 - \frac{2x^3}{x^2+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{x^2+1-2x^3}{x^2+1}\right) = \frac{-2x^3+x^2+1}{\sqrt{1-x}(x^2+1)}$$

ซึ่งถ้าแทน  $x = 1$  จะได้  $\frac{0}{0}$  ดังนั้น ทั้งเศษและส่วน ต้องมี  $x - 1$  เป็นตัวประกอบ

$$\begin{aligned} 1 \left| \begin{array}{cccc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ & -2 & -1 & -1 \\ & -2 & -1 & -1 \\ & & & 0 \end{array} \right. & \text{เอาเศษ มาหารสังเคราะห์ ด้วย } x-1 \text{ จะได้ผลหาร } -2x^2 - x - 1 \text{ ดังรูป} \\ \text{ดังนั้น } \frac{-2x^3+x^2+1}{\sqrt{1-x}(x^2+1)} &= \frac{(x-1)(-2x^2-x-1)}{\sqrt{1-x}(x^2+1)} = \frac{-(1-x)(-2x^2-x-1)}{\sqrt{1-x}(x^2+1)} \\ &= \frac{-(\sqrt{1-x})^2(-2x^2-x-1)}{\sqrt{1-x}(x^2+1)} \\ &= \frac{-\sqrt{1-x}(-2x^2-x-1)}{(x^2+1)} \end{aligned}$$

$$\text{แทน } x = 1 \text{ ใหม่ จะได้ } \frac{-\sqrt{1-1}(-2(1^2)-1-1)}{(1^2+1)} = \frac{-0(-2(1^2)-1-1)}{2} = 0$$

14. 1

หาความชันของเส้นโค้ง  $y = 2 + x|x - 1|$  ณ จุด  $(0, 2)$  ก่อนบริเวณจุด  $(0, 2)$  มีค่า  $x$  ประมาณ 0 ซึ่งจะทำให้  $x - 1$  เป็นลบ ดังนั้น  $|x - 1| = -(x - 1)$ จะได้ที่บริเวณ  $(0, 2)$  สมการเส้นโค้งคือ  $y = 2 + x(-(x - 1))$   

$$= 2 - x^2 + x$$

$$|A| = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } A \geq 0 \\ -A & \text{เมื่อ } A < 0 \end{cases}$$

ดิฟ  $y$  จะได้ความชัน บริเวณ  $(0, 2)$  คือ  $y' = 0 - 2x + 1$ ดังนั้น ความชัน ณ จุด  $(0, 2) \rightarrow$  แทน  $x = 0$  จะได้  $y' = 0 - 2(0) + 1 = 1$  ดังนั้น เส้นตรง  $L$  มีความชัน  $= 1$ เนื่องจาก เส้นตรง  $N$  ตั้งฉากกับเส้นตรง  $L \rightarrow$  ความชัน  $N$  กับ  $L$  ต้องคูณกันได้  $-1$  $\rightarrow$  จะได้ เส้นตรง  $N$  มีความชัน  $= -1$  (เพราะ  $-1 \times 1 = -1$ )เนื่องจากเส้นตรง  $N$  ผ่านจุด  $(0, 2)$  ด้วย  $\rightarrow$  ใช้สูตร  $\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$  จะได้สมการเส้นตรง  $N$  คือ  $\frac{y - 2}{x - 0} = -1$   

$$y - 2 = -x$$
  

$$x + y = 2$$
ดังนั้น จุดที่จะอยู่บนเส้นตรง  $N$  ได้ ต้องแทนในสมการ  $x + y = 2$  แล้วเป็นจริง

1.  $-1 + 3 = 2$  จริง

2.  $1 + 5 \neq 2$

3.  $-2 + 5 \neq 2$

4.  $3 + (-2) \neq 2$

5.  $-3 + 4 \neq 2$

จะเห็นว่าข้อ 1. ข้อเดียว ที่อยู่บนเส้นตรง  $N$ 

15. 2

(ก) จะหา  $f(x)$  และ  $f'(x)$  แล้ว แทน  $x = 4$ จาก  $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x+1}$  ย้ายข้าง  $f^{-1}$  ไปเป็น  $f$  อีกข้าง จะได้  $x = f\left(\frac{2x}{x+1}\right)$   

$$-\frac{k}{k-2} = f(k)$$
  

$$\text{ให้ } k = \frac{2x}{x+1}$$
  

$$kx + k = 2x$$
  

$$kx - 2x = -k$$
  

$$x(k - 2) = -k$$
  

$$x = -\frac{k}{k-2}$$
เปลี่ยนชื่อตัวแปร  $k$  เป็น  $x$  จะได้  $f(x) = -\frac{x}{x-2} \dots (*)$ 

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f'(x) &= -\frac{(x-2)(1)-(x)(1)}{(x-2)^2} \\ &= -\frac{x-2-x}{(x-2)^2} \\ &= \frac{2}{(x-2)^2} \dots (**) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\text{บน}}{\text{ล่าง}} \right) = \frac{(\text{ล่าง} \cdot \frac{d}{dx} \text{บน}) - (\text{บน} \cdot \frac{d}{dx} \text{ล่าง})}{(\text{ล่าง})^2}$$

จาก (\*) จะได้  $f(4) = -\frac{4}{4-2} = -2$   
จาก (\*\*) จะได้  $f'(4) = \frac{2}{(4-2)^2} = \frac{1}{2}$  } ดังนั้น  $2f'(4) - f(4) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - (-2) = 3 \rightarrow$  (ก) ถูก

$$\begin{aligned} \text{(ข) ดิฟ (**) จะได้ } f''(x) &= \frac{d}{dx} 2(x-2)^{-2} = -4(x-2)^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(x-2) \\ &= -4(x-2)^{-3} \cdot 1 \\ &= -\frac{4}{(x-2)^3} \dots (***) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } f''(f(4)) = f''(-2) = -\frac{4}{(-2-2)^3} = \frac{1}{16}$$

$$\text{และ } f(f''(4)) = f\left(-\frac{4}{(4-2)^3}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}-2} = -\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{1}{5}$$

จาก (\*\*\*)

} ไม่เท่ากัน  $\rightarrow$  (ข) ผิด

(ค) ฟังก์ชันเพิ่ม จะต้องมี  $f'(x)$  เป็นบวก

จาก (\*\*) จะได้  $f'(x) = \frac{2}{(x-2)^2} \rightarrow$  จะเห็นว่า ตัวส่วน  $(x-2)^2$  เป็นบวกเสมอ

ดังนั้น  $\frac{2}{(x-2)^2}$  จะเป็นบวกเสมอ (ยกเว้นที่  $x = 2$  จะหาค่าไม่ได้)  $\rightarrow$  ดังนั้น  $f'(x)$  เป็นบวกบนช่วง  $(0, 2) \rightarrow$  (ค) ถูก

16. 4

$$\begin{aligned} \text{จาก } |\vec{A}| &= |\vec{B}| \text{ จะได้ } |16\vec{i} + a\vec{j}| = |8\vec{i} + b\vec{j}| \\ \sqrt{16^2 + a^2} &= \sqrt{8^2 + b^2} \\ 256 + a^2 &= 64 + b^2 \quad \dots(*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{และจากสูตร } \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}||\vec{B}| \cos \theta && \left. \begin{array}{l} \text{จาก } |\vec{A}| = |\vec{B}| \\ \text{และ } \vec{B} \text{ ทำมุม } 60^\circ \text{ กับ } \vec{A} \end{array} \right\} \\ (16\vec{i} + a\vec{j}) \cdot (8\vec{i} + b\vec{j}) &= |\vec{A}||\vec{A}| \cos 60^\circ \\ (16)(8) + ab &= |\vec{A}|^2 \cdot \frac{1}{2} \\ 128 + ab &= \sqrt{16^2 + a^2}^2 \cdot \frac{1}{2} \\ 256 + 2ab &= 256 + a^2 \\ 0 &= a^2 - 2ab \\ 0 &= a(a - 2b) \\ a &= 0 \text{ หรือ } a = 2b \end{aligned}$$

แทนแต่ละแบบใน (\*)

กรณี  $a = 0$  :

$$\begin{aligned} 256 + 0^2 &= 64 + b^2 \\ 192 &= b^2 \\ \pm\sqrt{192} &= b \end{aligned}$$

กรณี  $a = 2b$  :

$$\begin{aligned} 256 + (2b)^2 &= 64 + b^2 \\ 256 + 4b^2 &= 64 + b^2 \\ 3b^2 &= -192 \\ \text{ไม่มีคำตอบ (} 3b^2 \text{ เป็นลบไม่ได้)} \end{aligned}$$

ดังนั้น มีคำตอบเดียว คือ  $a = 0$  และ  $b = \pm\sqrt{192}$

$$\text{จะได้ } (a + b)^2 = (0 + (\pm\sqrt{192}))^2 = (\pm\sqrt{192})^2 = 192$$

17. 3

มีคนทั้งหมด 8 คน ดังนั้น จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = 8!

“หรือ” คือ “ยูเนียน” ดังนั้น จำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ จะหาได้จากสูตร  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

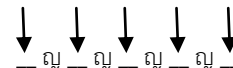
นั่นคือ จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน หรือ ไม่มี ญ ติดกัน = จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน + จำนวนแบบที่ไม่มี ญ ติดกัน

– จำนวนแบบที่ไม่มี ช ไม่ติดกัน และไม่มี ญ ติดกัน

จำนวนแบบที่ไม่มี ช ติดกัน  $\rightarrow$  ขั้นที่ 1 : เอา ญ ทั้ง 4 คนมาเข้าแถวปักเป็นหลักไว้ก่อน ได้ 4! แบบ

$\rightarrow$  ขั้นที่ 2 : จะเหลือช่องให้ ช เข้าไปแทรกได้ 5 จุด ดังรูป

ดังนั้น ช1 เลือกยืนได้ 5 แบบ



ช2 จะยืนได้ 4 แบบ (เพราะ ช ห้ามยืนติดกัน)

ช3 ยืนได้ 3 แบบ และ ช4 ยืนได้ 2 แบบ

$$\text{รวมจะได้จำนวนแบบที่ ช ไม่ติดกัน} = 4! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 4! 5! \text{ แบบ}$$

จำนวนแบบที่ไม่มี ญ ติดกัน  $\rightarrow$  คิดแบบเดิม แต่เอา ช ทั้ง 4 ไปยืนเข้าแถวปักเป็นหลักไว้ก่อน แล้วเอา ญ เข้าไปแทรก

$$\text{จะได้จำนวนแบบที่ ญ ไม่ติดกัน} = 4! 5! \text{ แบบ เหมือนอันแรก}$$

จำนวนแบบที่ไม่มี ซ ไม่ติดกัน และไม่มี ญ ติดกัน  $\rightarrow$  ขั้นที่ 1 : เลือกใครก็ได้ มายืนตำแหน่งแรก ได้ 8 แบบ

$\rightarrow$  ขั้นที่ 2 : ตำแหน่งที่ 2 ต้องเป็นคนละเพศกับตำแหน่งแรก

จะมีคนที่เพศตรงข้ามให้เลือกได้ 4 คน

$\rightarrow$  ขั้นที่ 3 : ตำแหน่งที่ 3 ต้องเป็นคนละเพศกับตำแหน่งที่ 2 แต่ต้องไม่

ซ้ำกับคนตำแหน่งที่ 1 จะเหลือให้เลือกได้ 3 คน

ทำแบบนี้ไปเรื่อยๆ จะได้จำนวนแบบของแต่ละตำแหน่งคือ 8 4 3 3 2 2 1 1

จะได้จำนวนแบบ  $= 8 \cdot 4! \cdot 3!$

ดังนั้น จำนวนแบบที่ไม่มี ซ ติดกัน หรือ ไม่มี ญ ติดกัน  $= 2(4! \cdot 5!) - 8 \cdot 4! \cdot 3!$

$$\text{จะได้ ความน่าจะเป็น} = \frac{2(4! \cdot 5!) - 8 \cdot 4! \cdot 3!}{8!} = \frac{2(5!) - 8 \cdot 3!}{8 \times 7 \times 6 \times 5} = \frac{5 - 1}{7 \times 5} = \frac{4}{35}$$

18. 4

(ก) ถ้า  $x \leq 0$  จะได้  $f(x)$  ต้องใช้สูตรบน จะได้  $f(x) = \sqrt{9-x}$

ดังนั้น  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{9-x})$

และเนื่องจาก  $x \leq 0$  จะได้  $-x \geq 0$

$$9-x \geq 9$$

$\sqrt{9-x} \geq 3 \rightarrow$  ดังนั้น  $g(\sqrt{9-x})$  ต้องใช้สูตรล่าง  $g(x) = x - 4$

$$\text{จะได้ } g(\sqrt{9-x}) = \sqrt{9-x} - 4 \rightarrow (\text{ก}) \text{ ถูก}$$

(ข) ถ้า  $4 < x \leq 6$  จะได้  $f(x)$  ต้องใช้สูตรล่าง จะได้  $f(x) = 7-x$

ดังนั้น  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7-x)$

และเนื่องจาก  $4 < x \leq 6$  จะได้  $-4 > -x \geq -6$

$$7-4 > 7-x \geq 7-6$$

$$3 > 7-x \geq 1$$

$\rightarrow$  ดังนั้น  $g(7-x)$  ต้องใช้สูตรล่าง  $g(x) = x - 4$

$$\text{จะได้ } g(7-x) = 7-x-4 = 3-x \rightarrow (\text{ข}) \text{ ถูก}$$

(ค) ถ้า  $x > 6$  จะได้  $f(x)$  ต้องใช้สูตรล่าง จะได้  $f(x) = 7-x$

ดังนั้น  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(7-x)$

และเนื่องจาก  $x > 6$  จะได้  $-x < -6$

$$7-x < 7-6$$

$7-x < 1 \rightarrow$  ดังนั้น  $g(7-x)$  ต้องใช้สูตรบน  $g(x) = x + 2$

$$\text{จะได้ } g(7-x) = 7-x+2 = 9-x \rightarrow (\text{ค}) \text{ ถูก}$$

19. 2

ให้  $z = x + yi$  จะได้  $\bar{z} = x - yi \rightarrow$  จะได้  $\bar{z} - z = (x - yi) - (x + yi)$

$$= x - yi - x - yi$$

$$= -2yi$$

แทนในสมการ จะได้  $(1+i)(x-yi) - \frac{(9-7i)(-2yi)}{3+i} = 6-2i$  } คูณ  $3+i$  ตลอด

$$(3+i)(1+i)(x-yi) - (9-7i)(-2yi) = (6-2i)(3+i)$$

$$(2+4i)(x-yi) + 18yi + 14y = 20+0i$$

$$2x - 2yi + 4xi + 4y + 18yi + 14y = 20$$

$$2x + 18y + (4x + 16y)i = 20 + 0i$$

$$x + 9y + (2x + 8y)i = 10 + 0i$$
} ทหาร 2 ตลอด

เทียบส่วนจริง กับส่วนจินตภาพของทั้งสองฝั่ง จะได้  $x + 9y = 10 \dots (1)$  และ  $2x + 8y = 0$   
 $x + 4y = 0 \dots (2)$

$$(1) - (2): 5y = 10$$

$$y = 2 \rightarrow \text{แทนใน (2): } x + 4(2) = 0$$

$$x = -8$$

ดังนั้น  $z = -8 + 2i$

(ก)  $|z+8| = |-8+2i+8| = |2i| = 2 \rightarrow$  (ก) ถูก

(ข)  $|z+3i| = |-8+2i+3i| = |-8+5i| = \sqrt{(-8)^2+5^2} = \sqrt{89} \rightarrow$  (ข) ผิด

(ค)  $|iz+2| = |i(-8+2i)+2| = |-8i-2+2| = |-8i| = 8 \rightarrow$  (ค) ถูก

20. 3

แทนหาพจน์แรกๆดู จะได้  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1 \cdot 2^3}{3^3} + \frac{2 \cdot 2^6}{3^5} + \frac{3 \cdot 2^9}{3^7} + \frac{4 \cdot 2^{12}}{3^9} + \dots$

เป็นอนุกรมผลรวม เลขคณิต เรขาคณิต ( $r = \frac{2^3}{3^2}$ ) ต้องใช้เทคนิค คูณ  $r$  เพื่อเลื่อนพจน์ แล้วหักกับตัวมันเอง

ให้  $\frac{1 \cdot 2^3}{3^3} + \frac{2 \cdot 2^6}{3^5} + \frac{3 \cdot 2^9}{3^7} + \frac{4 \cdot 2^{12}}{3^9} + \dots = x \dots (1)$

คูณ  $\frac{2^3}{3^2}$  ตลอด และเลื่อนพจน์

$$\frac{1 \cdot 2^6}{3^5} + \frac{2 \cdot 2^9}{3^7} + \frac{3 \cdot 2^{12}}{3^9} + \frac{4 \cdot 2^{15}}{3^{11}} + \dots = \frac{2^3}{3^2} x \dots (2)$$

$$(1) - (2): \frac{1 \cdot 2^3}{3^3} + \frac{1 \cdot 2^6}{3^5} + \frac{1 \cdot 2^9}{3^7} + \frac{1 \cdot 2^{12}}{3^9} + \dots = x - \frac{2^3}{3^2} x$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์  $a_1 = \frac{1 \cdot 2^3}{3^3} = \frac{8}{27}$  และ  $r = \frac{2^3}{3^2} = \frac{8}{9}$

เนื่องจาก  $|r| < 1$  ดังนั้น อนุกรมลู่เข้า และ  $S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r}$

$$\frac{\frac{8}{27}}{1 - \frac{8}{9}} = x - \frac{8}{9} x$$

$$\frac{\frac{8}{27} \cdot \frac{9}{1}}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{9} x$$

$$24 = x$$

21. 1

ข้อมูลชุดที่ 2 จะได้จากการเอาข้อมูลชุดที่ 1 มา ลบ 4  $\rightarrow$  คูณ 2  $\rightarrow$  บวก 4 ตามลำดับ ดังรูป

ลบ 4  $\rightarrow x_1 + 4, x_2 + 4, \dots, x_{20} + 4$

คูณ 2  $\rightarrow x_1, x_2, \dots, x_{20}$

บวก 4  $\rightarrow 2x_1 + 4, 2x_2 + 4, \dots, 2x_{20} + 4$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต : จะสอดคล้องกันด้วยสูตรเดียวกัน (คือ ลบ 4 → คูณ 2 → บวก 4)

จาก  $\bar{x}_1 = 50$  : จะได้  $50 \xrightarrow{\text{ลบ 4}} 46 \xrightarrow{\text{คูณ 2}} 92 \xrightarrow{\text{บวก 4}} 96$  ดังนั้น  $\bar{x}_2 = 96$

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน : การบวกหรือลบข้อมูลทุกตัวเท่าๆกัน จะไม่ทำให้  $s$  เปลี่ยน

(แต่การคูณ 2 จะยังคงทำให้  $s$  เพิ่ม 2 เท่า)

จาก  $s_1 = 10$  : จะได้  $10 \xrightarrow{\text{ลบ 4}} 10 \text{ เท่าเดิม} \xrightarrow{\text{คูณ 2}} 20 \xrightarrow{\text{บวก 4}} 20 \text{ เท่าเดิม}$  ดังนั้น  $s_2 = 20$

จากสูตร  $v = s^2$  จะได้ ความแปรปรวนของข้อมูลชุดที่ 2  $= 20^2 = 400$

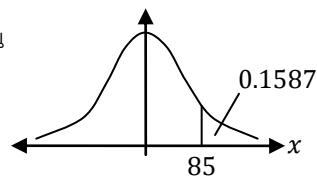
22. 4

จากสูตร สัมประสิทธิ์การแปรผัน  $= \frac{s}{\bar{x}}$  จะได้  $\frac{s}{\bar{x}} = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \rightarrow$  คูณไขว้ จะได้  $4s = \bar{x} \dots (*)$

โจทย์ให้นักเรียนร้อยละ 15.87 ที่สอบได้คะแนนมากกว่า 85 คะแนน

เนื่องจาก 15.87% ไม่ถึงครึ่งหนึ่งของนักเรียนทั้งหมด

จะวาดได้ 85 คะแนนอยู่ฝั่งขวาด้วยรูป



พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง จะเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง

จะได้พื้นที่ที่ใช้เปิดตารางคือ  $0.5 - 0.1587 = 0.3413$  ดังรูป

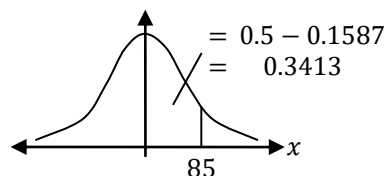
เปิดตารางจะได้  $z = 1.0$

จากสูตร  $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$  จะได้  $1.0 = \frac{85 - \bar{x}}{s}$

$$\begin{aligned} s &= 85 - \bar{x} \\ s &= 85 - 4s \end{aligned} \quad \text{จาก } (*)$$

$$5s = 85$$

$$s = 17 \rightarrow \text{แทนใน } (*) \text{ จะได้ } \bar{x} = 4(17) = 68$$

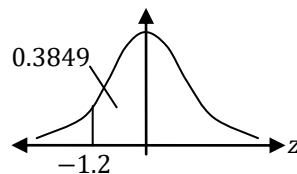


หาเปอร์เซ็นต์ไทล์ของ  $g$  ต้องหาค่า  $z$  ของ  $g$  แล้วเอาไปเปิดตารางหาพื้นที่ทางซ้าย

$$\text{จะได้ } z_g = \frac{47.6 - \bar{x}}{s} = \frac{47.6 - 68}{17} = -\frac{20.4}{17} = -1.2$$

$z$  เป็นลบ จะอยู่ทางซ้ายของแกน

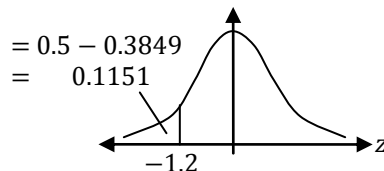
และเอา 1.2 ไปเปิดตาราง จะได้พื้นที่  $= 0.3849$  ดังรูป



$$\text{จะได้ พื้นที่ทางซ้าย} = 0.5 - 0.3849 = 0.1151$$

ดังนั้น มีข้อมูล 11.51% ที่น้อยกว่า  $g$

นั่นคือ คะแนนของนาย  $g$  คือ เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 11.51



23. 5

จะเห็นว่า  $1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$  เป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มี  $a_1 = 1$  และ  $r = 2$

↓ พจน์  $n$  พจน์ แต่มีจำนวนพจน์  $= n + 1$  พจน์

$$\text{จากสูตรอนุกรมเรขาคณิต จะได้ } 1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = \frac{1(1-2^{n+1})}{1-2} = 2^{n+1} - 1$$

$$S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$$

$$\text{แทนใน } a_n \text{ ที่โจทย์ให้ จะได้ } a_n = \frac{2^{n+1} - 1}{3^{2n}}$$

ดังนั้น  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) =$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2^2-1}{3^2} + \frac{2^3-1}{3^4} + \frac{2^4-1}{3^6} + \dots \quad \text{จาก } a_n = \frac{2^{n+1}-1}{3^{2n}} \\
 &= \frac{2^2}{3^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{2^4}{3^6} - \frac{1}{3^6} + \dots \\
 &= \left( \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{3^4} + \frac{2^4}{3^6} + \dots \right) - \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

$|r| < 1 \rightarrow S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$a_1 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$$

$$r = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}$$

$$a_1 = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left( \frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{2}{9}} \right) - \left( \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{9}} \right) \\
 &= \left( \frac{\frac{4}{9} \cdot \frac{9}{7}}{\frac{7}{7}} \right) - \left( \frac{\frac{1}{9} \cdot \frac{9}{8}}{\frac{8}{8}} \right) \\
 &= \frac{4}{7} - \frac{1}{8} = \frac{25}{56}
 \end{aligned}$$

24. 4

จาก  $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{I} \cap D_r\} \rightarrow$  จะหา  $A$  ได้ ต้องหา  $D_r$  ก่อน

จาก  $y = \frac{x^2+2}{\sqrt{4-x}-\sqrt{2x+1}} \rightarrow$  ในรูทห้ามติดลบ และ ส่วนห้ามเป็น 0

$$\begin{aligned} 4-x &\geq 0 \\ 4 &\geq x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+1 &\geq 0 \\ x &\geq -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{4-x}-\sqrt{2x+1} &\neq 0 \\ \sqrt{4-x} &\neq \sqrt{2x+1} \\ 4-x &\neq 2x+1 \\ 3 &\neq 3x \\ 1 &\neq x \end{aligned}$$

จะได้  $-\frac{1}{2} \leq x \leq 4$  และ  $x \neq 1$  $\mathbb{I} \cap D_r$  คือเอาเฉพาะจำนวนเต็ม  $\rightarrow$  เหลือ 0, 2, 3, 4จะได้  $A = \{0^2, 2^2, 3^2, 4^2\}$  ดังนั้น ผลบวกสมาชิกของ  $A = 0^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 29$

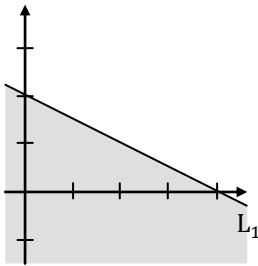
25. 5

หาจุดตัดแกนของเส้นตรง วาดกราฟ และแทนจุดที่ไม่ได้อยู่บนเส้นกราฟ  $(0, 0)$  เพื่อแรงเงา จะได้ดังรูป

$$L_1 : x + 2y \leq 4$$

|           |     |   |   |
|-----------|-----|---|---|
| จุดตัดแกน | $x$ | 0 | 4 |
|           | $y$ | 2 | 0 |

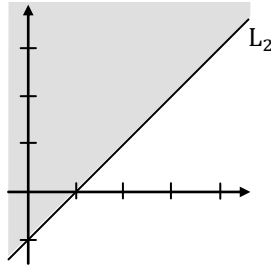
จุด  $(0, 0) \rightarrow$  อสมการเป็นจริง  
แรงเงาส่วนซ้ายล่างที่มี  $(0, 0)$



$$L_2 : x - y \leq 1$$

|           |     |    |   |
|-----------|-----|----|---|
| จุดตัดแกน | $x$ | 0  | 1 |
|           | $y$ | -1 | 0 |

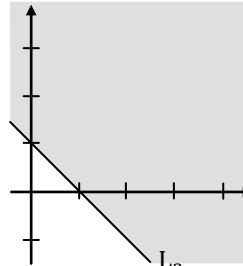
จุด  $(0, 0) \rightarrow$  อสมการเป็นจริง  
แรงเงาส่วนซ้ายบนที่มี  $(0, 0)$



$$L_3 : x + y \geq 1$$

|           |     |   |   |
|-----------|-----|---|---|
| จุดตัดแกน | $x$ | 0 | 1 |
|           | $y$ | 1 | 0 |

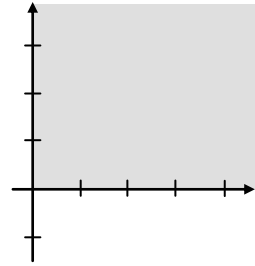
จุด  $(0, 0) \rightarrow$  อสมการเป็นเท็จ  
แรงเงาส่วนขวาบนที่ไม่มี  $(0, 0)$



$$x \geq 0 \text{ และ}$$

$$y \geq 0$$

คือ บริเวณใน  $Q_1$



นำทั้ง 4 รูป มาหาส่วนซ้อนทับกัน จะได้ดังรูป

จะได้พิกัด  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $D(1, 0)$

พิกัด  $C$  ต้องแก้ระบบสมการ  $L_1$  กับ  $L_2$

$$L_1 : x + 2y = 4 \quad \dots(1)$$

$$L_2 : x - y = 1 \quad \dots(2)$$

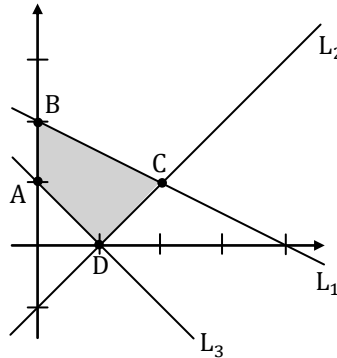
$$(1) - (2): 3y = 3$$

$$y = 1$$

$$\text{แทนใน (2): } x - 1 = 1$$

$$x = 2$$

จะได้พิกัด  $C(2, 1)$



เอา  $A(0, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(2, 1)$ ,  $D(1, 0)$  ไปแทนในตัวเลือกทั้ง 5 แล้วดูว่าค่าที่สูงที่สุดว่ามาจากตัวเลือกไหน

ไม่ต้องคิด  $A(0, 1)$  ก็ได้

เพราะยังไ้กับ  $B(0, 2)$

ไม่ต้องคิด  $2x + 2y$  ก็ได้  
เพราะยังไ้กับ  $3x + 2y$

|           | $A(0, 1)$ | $B(0, 2)$ | $C(2, 1)$ | $D(1, 0)$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $2x + 2y$ | -         | -         | -         | -         |
| $3x + 2y$ | -         | 4         | 8         | 3         |
| $2x + 3y$ | -         | 6         | 7         | 2         |
| $x + 4y$  | -         | 8         | 6         | 1         |
| $4x + y$  | -         | 2         | 9         | 4         |

มากที่สุด

จะเห็นว่า ค่ามากที่สุด = 9 เกิดจาก  $z = 4x + y$  จากตัวเลือกข้อ 5

26. 4

$$\text{จาก } AB^{-1} = B^{-1}A \quad \rightarrow \text{คูณ } B \text{ ทางขวาทั้งสองฝั่ง เพื่อตัดกับ } B^{-1} \text{ ฝั่งซ้าย}$$

$$AB^{-1}B = B^{-1}AB$$

$$A = B^{-1}AB$$

$$BA = BB^{-1}AB$$

$$BA = AB$$

$$\rightarrow \text{คูณ } B \text{ ทางซ้ายทั้งสองฝั่ง เพื่อตัดกับ } B^{-1} \text{ ฝั่งขวา}$$



แทน  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  และ  $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  ใน  $BA = AB$  จะได้  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+2d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}$$

เทียบสมาชิกแต่ละตัว จะได้

$$\begin{bmatrix} a+2b & 2a+b \\ c+2d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ 2a+c & 2b+d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a+2b &= a+2c & 2a+b &= b+2d \\ b &= c & a &= d \\ c+2d &= 2a+c & 2c+d &= 2b+d \\ d &= a & c &= b \end{aligned}$$

จะสรุปได้ว่า  $b = c$  และ  $a = d \rightarrow$  แทนในข้อมูลโจทย์ให้

จาก  $\det(A^t B) = -24$   $\rightarrow$  กระจาย  $\det$  ในการคูณ

$$\begin{aligned} (\det A^t)(\det B) &= -24 \\ (\det A)(\det B) &= -24 \quad \rightarrow \det A^t = \det A \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= -24 \\ (1-4)(ad-bc) &= -24 \\ ad-bc &= 8 \quad \rightarrow a=d, b=c \\ d^2 - c^2 &= 8 \\ d^2 &= c^2 + 8 \end{aligned}$$

จาก  $abcd = 9$

$$\begin{aligned} c^2 d^2 &= 9 \quad \rightarrow a=d, b=c \\ c^2(c^2+8) &= 9 \\ c^4 + 8c^2 - 9 &= 0 \\ (c^2+9)(c^2-1) &= 0 \\ c^2 &= -9 \quad \text{(ไม่มีคำตอบ)} \\ c^2 &= 1 \\ c &= 1, \quad \text{โจทย์ให้ } a, b, c, d \text{ เป็นบวก} \end{aligned}$$

จะได้  $c = 1 \rightarrow$  แทนใน  $d^2 = c^2 + 8 = 1^2 + 8 = 9 \rightarrow$  จะได้  $d = 3$

ดังนั้น  $a = d = 3$  และ  $b = c = 1 \rightarrow$  จะได้  $a + b + c + d = 3 + 1 + 1 + 3 = 8$

27. 3

(ก) สังเกตว่า  $|\vec{a} - \vec{b}|$  ทางซ้าย คือขนาดของเวกเตอร์  $\vec{a} - \vec{b}$  จะเป็นบวกเสมอ

แต่  $|\vec{a}| - |\vec{b}|$  ทางขวา มีโอกาสเป็นลบได้ ถ้า  $\vec{a}$  สั้นกว่า  $\vec{b}$

ดังนั้น ถึง  $\vec{a}$  จะขนานกับ  $\vec{b}$  แต่ถ้า  $\vec{a}$  สั้นกว่า  $\vec{b}$  จะทำให้  $|\vec{a} - \vec{b}| \neq |\vec{a}| - |\vec{b}| \rightarrow$  (ก) ผิด

(ข) จาก  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\ 2\vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= 0 \end{aligned}$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

เนื่องจาก  $\vec{a}$  และ  $\vec{b}$  ไม่เป็นเวกเตอร์ศูนย์ ถ้า  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  จะสรุปได้ว่า  $\vec{a} \perp \vec{b} \rightarrow$  (ข) ถูก

(ค) จาก  $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$  จะสรุปได้ว่า  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{b} &= 0 \\ |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 &= 0 \\ |\vec{a}|^2 &= |\vec{b}|^2 \\ |\vec{a}| &= |\vec{b}| \rightarrow \text{(ค) ถูก} \end{aligned}$$

เวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน จะคูณกันได้ 0

28. 1

จะเห็นว่า สมการที่เกิดจากคู่ที่อยู่ติดกัน สามารถตัดตัวแปร และจัดรูปได้ดังนี้

$$\begin{array}{ccccccc}
 a+b-4 & = & b+c+5 & = & c+d+1 & = & d+e-2 & = & e+a+3 \\
 \text{ตัด } b \text{ ย้ายข้าง} & & \text{ตัด } c \text{ ย้ายข้าง} & & \text{ตัด } d \text{ ย้ายข้าง} & & \text{ตัด } e \text{ ย้ายข้าง} & & \\
 a = c + 9 & & b = d - 4 & & c = e - 3 & & d = a + 5 & & \\
 (1) & & (2) & & (3) & & (4) & & 
 \end{array}$$

จะเห็นว่า มี 5 ตัวแปร แต่มี 4 สมการ จะมีสมการไม่พอ

ทำได้อย่างมากคือจัดรูปทุกตัวแปรให้อยู่ในรูปของตัวแปรหนึ่ง  $\rightarrow$  จะจัด  $b, c, d, e$  ให้อยู่ในรูปของ  $a$

จาก (1) จะได้  $c = a - 9 \rightarrow$  แทนใน (3) จะได้  $a - 9 = e - 3$   
 $a - 6 = e$

จาก (4) จะได้  $d = a + 5 \rightarrow$  แทนใน (2) จะได้  $b = a + 5 - 4$   
 $= a + 1$

จะได้  $b = a + 1, c = a - 9, d = a + 5, e = a - 6$

(ก)  $c + e < b + d$

$$\begin{array}{ccc}
 (a - 9) + (a - 6) & < & (a + 1) + (a + 5) \\
 -15 & < & 6 \quad \rightarrow \text{ถูก}
 \end{array}$$

(ข) จะเห็นว่า  $a - 9 < a - 6 < a < a + 1 < a + 5$

ดังนั้น  $c < e < a < b < d \rightarrow$  ผิด

(ก)  $a + d < b + c$

$$\begin{array}{ccc}
 a + (a + 5) & < & (a + 1) + (a - 9) \\
 5 & < & -8 \quad \rightarrow \text{ผิด}
 \end{array}$$

29. 2

หา  $\bar{x} \rightarrow$  สมมติให้แต่ละชั้นมีคะแนนเท่ากับจุดกึ่งกลางชั้น

| คะแนน  | จำนวน ( $f_i$ ) | จุดกึ่งกลางชั้น ( $x_i$ ) | $f_i x_i$        |
|--------|-----------------|---------------------------|------------------|
| 0 - 2  | 3               | $= \frac{0+2}{2} = 1$     | $= (3)(1) = 3$   |
| 3 - 5  | 5               | $= \frac{3+5}{2} = 4$     | $= (5)(4) = 20$  |
| 6 - 8  | $a$             | 7                         | $= (7)(a) = 7a$  |
| 9 - 11 | 3               | 10                        | $= (3)(10) = 30$ |
|        | $a + 11$        |                           | $7a + 53$        |

จากตาราง จะได้  $\bar{x} = \frac{7a+53}{a+11}$  แต่โจทย์ให้  $\bar{x} = 5$  ดังนั้น  $\frac{7a+53}{a+11} = 5$

$$\begin{array}{rcl}
 7a + 53 & = & 5a + 55 \\
 2a & = & 2 \\
 a & = & 1
 \end{array}$$

แทน  $a = 1$  ในตาราง จะได้ดังรูป

หาความถี่สะสม เพื่อหามัธยฐาน

| คะแนน  | จำนวน | ความถี่สะสม |
|--------|-------|-------------|
| 0 - 2  | 3     | 3           |
| 3 - 5  | 5     | 8           |
| 6 - 8  | 1     | 9           |
| 9 - 11 | 3     | 12          |

$$\text{จะได้ตำแหน่งมัธยฐาน} = \frac{12}{2} = 6$$

จะเห็นว่า ความถี่สะสมเกิน 6 ครั้งแรกในชั้นที่ 2  $\rightarrow$  มัธยฐานอยู่ชั้นที่ 2

$$\begin{aligned}\text{จะได้ มัธยฐาน} &= L + \left( \frac{\frac{N}{2} - F_L}{f_m} \right) I \\ &= 2.5 + \left( \frac{6 - 3}{5} \right) (3) = 2.5 + 1.8 = 4.3\end{aligned}$$

30. 1

มีผู้หญิง 60%  $\rightarrow$  แสดงว่ามีผู้ชาย 40%

ในผู้หญิง 60% ถ้าสมมติให้มีผู้หญิงสายตาสายปกติ  $x$  %

จะมีผู้หญิงสายตาสายผิดปกติ 60 -  $x$  %

ในผู้ชาย 40% ถ้าสมมติให้มีผู้ชายสายตาสายปกติ  $y$  %

จะมีผู้ชายสายตาสายผิดปกติ 40 -  $y$  %

จะวาดได้ดังรูป

|      | ปกติ | ผิดปกติ  |
|------|------|----------|
| หญิง | $x$  | $60 - x$ |
| ชาย  | $y$  | $40 - y$ |

$$\begin{aligned}\text{โจทย์กำหนดให้} \quad \frac{\text{หญิง ผิดปกติ}}{\text{หญิง ปกติ}} &= \frac{\text{ผิดปกติ ทั้งหมด}}{\text{ปกติ ทั้งหมด}} \\ \frac{60-x}{x} &= \frac{60-x+40-y}{x+y} \\ (60-x)(x+y) &= (100-x-y)(x) \\ 60x+60y-x^2-xy &= 100x-x^2-xy \\ 60x+60y &= 100x \\ 60y &= 40x \\ y &= \frac{2x}{3} \quad \dots (*)\end{aligned}$$

(ก) หญิง ผิดปกติ = 1.5 (ชาย ผิดปกติ)

$$\begin{aligned}60-x &= 1.5(40-y) \\ 60-x &= 1.5\left(40-\frac{2x}{3}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (*)} \\ \text{คูณกระจาย 1.5} \end{array} \right\} \\ 60-x &= 60-x\end{aligned}$$

(ก) ถูก

(ข) ชาย ปกติ > หญิง ปกติ

$$\begin{aligned}\text{จาก (*)} \quad y &> x \\ \frac{2}{3}x &> x\end{aligned}$$

(ข) ผิด

$$\begin{aligned}\text{(ค)} \quad \frac{\text{หญิง ผิดปกติ}}{\text{หญิง ทั้งหมด}} &> \frac{\text{ชาย ผิดปกติ}}{\text{ชาย ทั้งหมด}} \\ \frac{60-x}{60} &> \frac{40-y}{40} \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (*)} \\ \text{คูณไขว้} \end{array} \right\} \\ \frac{60-x}{3} &> \frac{40-\frac{2x}{3}}{2} \\ 120-2x &> 120-2x \\ \text{(ค) ผิด}\end{aligned}$$

31. 230

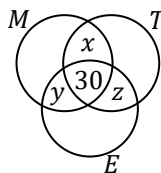
มีนักเรียน 30 คน ชอบทั้งสามวิชา → วาดได้ดังรูป

ข้อนี้ต้องสมมติให้นักเรียนกลุ่มนี้ ชอบอย่างน้อย 1 วิชา

จะได้จำนวนนักเรียนทั้งหมด =  $n(M \cup T \cup E)$ 

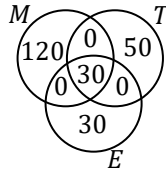
จากสูตร Inclusive - Exclusive จะได้

$$\begin{aligned} n(M \cup T \cup E) &= n(M) + n(T) + n(E) - n(M \cap T) - n(T \cap E) - n(M \cap E) + n(M \cap T \cap E) \\ &= 150 + 80 + 60 - n(M \cap T) - n(T \cap E) - n(M \cap E) + 30 \end{aligned}$$

สมมติ  $x, y, z$  สำหรับ  $n(M \cap T), n(T \cap E), n(M \cap E)$ 

$$\begin{aligned} &= 150 + 80 + 60 - (x + 30) - (z + 30) - (y + 30) + 30 \\ &= 150 + 80 + 60 - x - 30 - z - 30 - y - 30 + 30 \\ &= 230 - x - y - z \end{aligned}$$

$x, y, z$  แทนจำนวนคน  $\rightarrow x, y, z \geq 0$

จะได้จำนวนคนมากที่สุด = 230 เมื่อ  $x, y, z = 0$  ดังรูป

32. 126

สังเกตว่า เราสามารถจัดรูปสมการให้มี  $3^{|x+4|}$  และ  $3^{|x|}$  เป็นตัวแปรได้ ดังนี้

$$\begin{aligned} 3(9 + 3^{|x|+|x+4|}) &= 3^{|x+4|} + 3^{|x|+4} \\ 3(9 + 3^{|x|} \cdot 3^{|x+4|}) &= 3^{|x+4|} + 3^{|x|} \cdot 3^4 \\ 3(9 + b \cdot a) &= a + b \cdot 3^4 \end{aligned}$$

$\rightarrow$  ให้  $3^{|x+4|} = a$   
 $3^{|x|} = b$

$$\begin{aligned} 27 + 3ab &= a + 81b \\ 3ab - a - 81b + 27 &= 0 \\ a(3b - 1) - 27(3b - 1) &= 0 \\ (a - 27)(3b - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 27 & \text{หรือ} & & b &= \frac{1}{3} \\ 3^{|x+4|} &= 3^3 & & & 3^{|x|} &= 3^{-1} \\ |x+4| &= 3 & & & |x| &= -1 \\ x+4 &= 3, -3 & & & & \text{ไม่มีคำตอบ} \\ x &= -1, -7 & & & & \text{(ค่าสัมบูรณ์เป็นลบไม่ได้)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ผลบวกของสมาชิกใน } B &= (59 - (-1)) + (59 - (-7)) \\ &= 60 + 66 = 126 \end{aligned}$$

33. 5

โจทย์ให้ เส้นตรง  $6x - y = 4$  ตัดกับกราฟ  $y = f(x)$  ที่  $x = 2$ แทน  $x = 2$  ในสมการเส้นตรง จะได้  $6(2) - y = 4$ 

$$8 = y \rightarrow \text{จะได้จุดตัดคือ } (2, 8)$$

ดังนั้น  $(2, 8)$  อยู่บนกราฟ  $y = f(x)$  ด้วย จะได้  $f(2) = 8 \dots (*)$

พิจารณา  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3}$  จะเห็นว่า ถ้าแทน  $x = 2$  จะได้  $\frac{2^2+2-6}{\sqrt{1+f(2)}-3} = \frac{0}{\sqrt{1+8}-3} = \frac{0}{0}$   
 ลิมิตอยู่ในรูป  $\frac{0}{0} \rightarrow$  จะใช้กฎของโลปีตาลได้

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{d}{dx} x^2+x-6}{\frac{d}{dx} \sqrt{1+f(x)}-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{\frac{1}{2}(1+f(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}(1+f(x))} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ดิฟลูกโซ่} \end{array} \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+1}{\frac{1}{2}(1+f(x))^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{แทน } x = 2 \end{array} \right\} \\ &= \frac{2(2)+1}{\frac{1}{2}(1+f(2))^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(2)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (*)} \end{array} \right\} \\ &= \frac{5}{\frac{1}{2}(1+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(2)} \\ &= \frac{5}{\frac{1}{6} \cdot f'(2)} = \frac{30}{f'(2)} \end{aligned}$$

แต่โจทย์ให้  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{\sqrt{1+f(x)}-3} = 6$  ดังนั้น  $\frac{30}{f'(2)} = 6$  จะได้  $f'(2) = \frac{30}{6} = 5$

34. 9.25

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < -1 \\ ax + b & , \quad -1 \leq x < 1 \\ 3x^2 + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ตรวจรอยต่อ } x = -1 \text{ จะได้ } (-1)^3 = a(-1) + b \\ -1 = -a + b \\ a - b = 1 \end{array} \right\} \dots(1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{ตรวจรอยต่อ } x = 1 \text{ จะได้ } a(1) + b = 3(1^2) + 2 \\ a + b = 5 \end{array} \right\} \dots(2)$$

$$(1) + (2): \quad \begin{array}{rcl} 2a & = & 6 \\ a & = & 3 \end{array}$$

$$\text{แทนใน (2): } \quad \begin{array}{rcl} 3 + b & = & 5 \\ b & = & 2 \end{array}$$

แทนค่า  $a, b$  จะได้  $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x < -1 \\ 3x + 2 & , \quad -1 \leq x < 1 \\ 3x^2 + 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

จะหา  $\int_{-2}^2 f(x) dx$  ต้องแบ่งเป็น 3 ช่วงตามเงื่อนไขของ  $f(x)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-2}^{-1} x^3 dx + \int_{-1}^1 (3x + 2) dx + \int_1^2 (3x^2 + 2) dx \\ &= \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-2}^{-1} + \left. \left( \frac{3x^2}{2} + 2x \right) \right|_{-1}^1 + \left. (x^3 + 2x) \right|_1^2 \\ &= \left( \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} \right) + \left( \left( \frac{3(1)^2}{2} + 2(1) \right) - \left( \frac{3(-1)^2}{2} + 2(-1) \right) \right) + \left( (2^3 + 2(2)) - (1^3 + 2(1)) \right) \\ &= \frac{1}{4} - 4 + \frac{3}{2} + 2 - \frac{3}{2} + 2 + 12 - 3 = 9.25 \end{aligned}$$

35. 32

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } L(n) &= \log_2 n (\sqrt[n]{a}) \\
 &= \log_2 n (a^{1/n}) \\
 &= \frac{1/n}{n} \log_2 a \\
 &= \frac{\log_2 a}{n^2}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น  $\frac{1}{L(n)} = \frac{n^2}{\log_2 a}$  แทนในโจทย์ จะได้  $\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)} + \dots + \frac{1}{L(10)} = \frac{1^2}{\log_2 a} + \frac{2^2}{\log_2 a} + \frac{3^2}{\log_2 a} + \dots + \frac{10^2}{\log_2 a}$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2}{\log_2 a} \\
 &= \frac{\frac{10(10+1)(2(10)+1)}{6}}{\log_2 a} \\
 &= \frac{5(11)(7)}{\log_2 a}
 \end{aligned}$$

แต่โจทย์ให้  $\frac{1}{L(1)} + \frac{1}{L(2)} + \dots + \frac{1}{L(10)} = 77$  ดังนั้น  $\frac{5(11)(7)}{\log_2 a} = 77$

$$\begin{aligned}
 5 &= \log_2 a \\
 2^5 &= a \\
 32 &= a
 \end{aligned}$$

36. 68

พยายามจัดรูปสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ ไปสู่สิ่งที่โจทย์ถาม ดังนี้

|                                                                            |                                                                                                           |                                                          |
|----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| ทรานสโพส จะทำให้หลัก 3 ตรงกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม                           | $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & b & 0 & \\ a & 4 & 1 & \\ 5 & a & -a & \end{array} \right) = -17$        | ทรานสโพส $\rightarrow$ det ไม่เปลี่ยน                    |
| เอาหลัก 1 มาคูณ 2 แล้วสลับไปหลัก 2 จะทำให้หลัก 2 ตรงกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม | $\left( \begin{array}{ccc c} 1 & b & 0 & \\ b & 4 & a & \\ 0 & 1 & -a & \end{array} \right) = -17$        | คูณ 2 ที่แถวหรือหลักหนึ่งๆ $\rightarrow$ det เป็น 2 เท่า |
|                                                                            | $\left( \begin{array}{ccc c} 2 & a & 5 & \\ 2b & 4 & a & \\ 0 & 1 & -a & \end{array} \right) = -34$       | สลับหลัก $\rightarrow$ det เป็นลบของของเดิม              |
| เอาหลัก 1 มาคูณ 2 ให้คล้ายกับเมทริกซ์ที่โจทย์ถาม                           | $\left( \begin{array}{ccc c} a & 2 & 5 & \\ 4 & 2b & a & \\ 1 & 0 & -a & \end{array} \right) = 34$        | คูณ 2 ที่แถวหรือหลักหนึ่งๆ $\rightarrow$ det เป็น 2 เท่า |
| เอาหลัก 3 มาบวกให้หลัก 1 จะได้เมทริกซ์ที่โจทย์ถาม                          | $\left( \begin{array}{ccc c} 2a & 2 & 5 & \\ 8 & 2b & a & \\ 2 & 0 & -a & \end{array} \right) = 68$       | ทำแบบนี้ det ไม่เปลี่ยน                                  |
|                                                                            | $\left( \begin{array}{ccc c} 2a+5 & 2 & 5 & \\ 8+a & 2b & a & \\ 2-a & 0 & -a & \end{array} \right) = 68$ |                                                          |

37. -

ในลำดับเลขคณิต พจน์ที่อยู่ติดกัน จะเพิ่มขึ้น  $d$  เสมอ  $\rightarrow$  นั่นคือ

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \quad \dots(1) \\ a_4 &= a_3 + d \quad \dots(2) \\ a_6 &= a_5 + d \quad \dots(3) \\ &\vdots \\ a_{50} &= a_{49} + d \quad \dots(25) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_4 &= a_3 + d \\ a_6 &= a_5 + d \\ &\vdots \\ a_{50} &= a_{49} + d \end{aligned}} \right\} \text{บวกทั้ง 25 สมการ}$$

$$\underbrace{a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{50}} = \underbrace{a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49}} + 25d$$

โจทย์ให้สองค่านี้เท่ากัน  $\rightarrow$  ตัดกันได้

$$\text{เหลือ } 0 = 25d \rightarrow \text{จะได้ } d = 0$$

$d = 0$  แสดงว่าแต่ละพจน์ไม่เพิ่มขึ้นเลย  $\rightarrow$  ทุกพจน์เท่ากันหมด

โจทย์ให้  $a_{100} = 200$  แสดงว่าพจน์อื่นๆ ก็ต้องเท่ากับ 200 ด้วย  $\rightarrow$  จะได้  $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = 200$

แต่ถ้าทุกพจน์เท่ากันหมด = 200 จะไม่มีทางที่  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{49} = 1275$  ได้

ดังนั้น ข้อนี้โจทย์ขัดแย้งกันเอง จึงไม่มีคำตอบ

38. 160

เลข 3 จะใช้วิธีแบ่งกรณีนับ ส่วนเลข 1 กับเลข 2 จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม

ต้องมีเลข 3 อย่างมาก 2 หลัก  $\rightarrow$  จะมีสามกรณีคือ “ไม่มีเลข 3 เลย” “มีเลข 3 หนึ่งหลัก” หรือ “มีเลข 3 สองหลัก”  
กรณี ไม่มีเลข 3 เลย

มี 5 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ  $\rightarrow$  จะได้จำนวนแบบทั้งหมด  $= 2^5 = 32$  แบบ

แต่โจทย์ต้องการให้มีเลข 1 อย่างน้อย 1 หลัก และเลข 2 อย่างน้อย 1 หลัก (คือต้องมีทั้งเลข 1 และ เลข 2)

จะเห็นว่าใน 32 แบบนี้ จะมีแบบที่ใช้ไม่ได้อยู่ 2 แบบ คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด (11111 กับ 22222)

ดังนั้น จะเหลือจำนวนแบบที่ “มีทั้งเลข 1 และ เลข 2” อยู่  $= 32 - 2 = 30$  แบบ

กรณี มีเลข 3 หนึ่งหลัก

ขั้นที่ 1: เลือกตำแหน่งให้เลข 3  $\rightarrow$  มี 5 หลัก จะเลือกได้ 5 แบบ

ขั้นที่ 2: ที่เหลือ 4 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด  $= 2^4 = 16$  แบบ

หักแบบที่ใช้ไม่ได้ 2 แบบ (คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด) เหลือ  $= 16 - 2 = 14$  แบบ

รวมจำนวนแบบ  $= 5 \times 14 = 70$  แบบ

กรณี มีเลข 3 สองหลัก

ขั้นที่ 1: เลือกตำแหน่งให้เลข 3 ทั้งสองตัว  $\rightarrow$  มี 5 หลัก จะเลือกได้  $= \binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$  แบบ

ขั้นที่ 2: ที่เหลือ 3 หลัก แต่ละหลักอาจเป็นเลข 1 หรือ 2 ได้หลักละ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด  $= 2^3 = 8$  แบบ

หักแบบที่ใช้ไม่ได้ 2 แบบ (คือ 1 ทั้งหมด กับ 2 ทั้งหมด) เหลือ  $= 8 - 2 = 6$  แบบ

รวมจำนวนแบบ  $= 10 \times 6 = 60$  แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ  $= 30 + 70 + 60 = 160$  แบบ

39. 3

รูปแบบเส้นตรง คือ  $\hat{Y} = a + bX$  ซึ่งจะหาค่า  $a$  และ  $b$  ได้จาก

$$\sum_{i=1}^n y_i = an + b \sum_{i=1}^n x_i \quad \dots(1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 \quad \dots(2)$$

จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะได้ระบบสมการคือ  $48 = a(8) + b(40) \quad \dots(1)$

$$270 = a(40) + b(210) \quad \dots(2)$$

$$(1) \times 5: 240 = a(40) + b(200) \quad \dots(3)$$

$$(2) - (3): 30 = b(10)$$

$$3 = b$$

$$\rightarrow (1): 48 = a(8) + 3(40)$$

$$6 = a + 3(5)$$

$$-9 = a$$

จะได้สมการทำนายคือ  $\hat{Y} = -9 + 3X$

ดังนั้น ถ้าอายุ 4 จะต้องใช้อาหาร  $= -9 + 3(4) = 3$  กก.

40. 117

จาก แกนตามขวางขนานแกน  $x \rightarrow$  จะได้เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน

$\rightarrow$  ดังนั้น จุดโฟกัส และจุดศูนย์กลาง จะอยู่ในแนวนอนแนวเดียวกัน

$\rightarrow$  ดังนั้น จุดโฟกัส และจุดศูนย์กลาง จะมีพิกัด  $y$  เท่ากัน

โจทย์ให้  $F_1(1 + 2\sqrt{5}, 3)$  ดังนั้น พิกัดจุดศูนย์กลาง ต้องอยู่ในรูป  $(h, 3)$

และเนื่องจากเส้นกำกับไฮเพอร์โบลา จะผ่านจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลาเสมอ

ดังนั้น  $(h, 3)$  ต้องสอดคล้องกับสมการเส้นกำกับ  $2x - y + 1 = 0$

$$2h - 3 + 1 = 0$$

$$2h = 2$$

$$h = 1$$

จะได้จุดศูนย์กลาง  $(1, 3)$

และจากพิกัด  $F_1(1 + 2\sqrt{5}, 3)$  จะเห็นว่า  $F_1$  อยู่ถัดไปทางขวาของจุดศูนย์กลาง  $= 2\sqrt{5}$

จะได้ระยะโฟกัส  $c = 2\sqrt{5}$

จากสูตร  $c^2 = a^2 + b^2$  จะได้  $a^2 + b^2 = (2\sqrt{5})^2$   
 $a^2 + b^2 = 20 \quad \dots(*)$

อีกสมการของ  $a$  กับ  $b$  จะใช้ “ความชัน” ของเส้นกำกับมาช่วย

จากรูปจะเห็นว่า เส้นกำกับจะมีความชัน  $\frac{b}{a}$  กับ  $-\frac{b}{a}$

ซึ่งโจทย์กำหนดให้เส้นกำกับเส้นหนึ่งคือ  $2x - y + 1 = 0$   
 $2x + 1 = y$

เทียบกับรูป  $y = mx + c$  จะได้ความชัน  $= 2$

เนื่องจาก 2 เป็นบวก จึงสรุปได้ว่า  $\frac{b}{a} = 2 \rightarrow$  ย้ายข้างได้  $b = 2a \rightarrow$  แทนใน  $(*)$  จะได้  $a^2 + (2a)^2 = 20$   
 $a^2 + 4a^2 = 20$

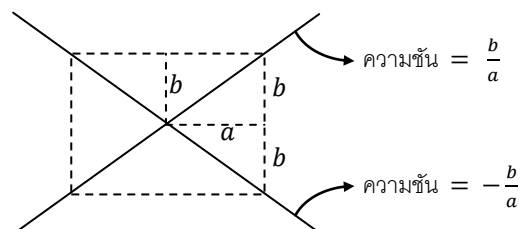
$$5a^2 = 20$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

แทน  $a = 2$  กลับไป จะได้  $b = 2(2)$

$$= 4$$





แทนค่า  $h, k, a, b$  ในรูปสมการของไฮเพอร์โบลาแนวนอน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(y-3)^2}{4^2} = 1$$

$$\frac{x^2-2x+1}{4} - \frac{y^2-6y+9}{16} = 1$$

$$\frac{4(x^2-2x+1) - (y^2-6y+9)}{16} = 1$$

$$4x^2 - 8x + 4 - y^2 + 6y - 9 = 16$$

$$4x^2 - y^2 - 8x + 6y = 21$$

เทียบกับ  $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey = 21$  จะได้  $A = 4$  ,  $B = -1$  ,  $D = -8$  ,  $E = 6$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } A^2 + B^2 + D^2 + E^2 &= 4^2 + (-1)^2 + (-8)^2 + 6^2 \\ &= 16 + 1 + 64 + 36 = 117 \end{aligned}$$

41. 4

สมการจำนวนเต็ม  $\rightarrow$  ต้องจัดรูปให้อยู่ในรูป พหุนาม = จำนวนเต็ม

แยกตัวประกอบพหุนามฝั่งซ้าย แล้วอ้างว่าจำนวนเต็มทางขวาแยกตัวประกอบได้ไม่ก๊แบบ

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{1}{10} \\ 10b - 10a &= ab \quad \left. \begin{array}{l} \text{คูณ } 10ab \text{ ตลอด} \\ \text{ลบ } ab \text{ ทั้งสองฝั่ง} \end{array} \right\} \\ 10b - ab - 10a &= 0 \\ b(10 - a) - 10a &= 0 \\ b(10 - a) + 100 - 10a &= 100 \quad \left. \begin{array}{l} \text{เติม } 100 \text{ ทั้งสองฝั่ง} \\ \text{ให้จับกลุ่มดึงตัวร่วมได้} \end{array} \right\} \\ b(10 - a) + 10(10 - a) &= 100 \\ (b + 10)(10 - a) &= 100 \end{aligned}$$

เนื่องจาก  $b$  เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น  $b + 10$  เป็นจำนวนเต็มบวกด้วย

และจะทำให้  $10 - a$  ต้องเป็นบวกด้วย เพราะ มันต้องคูณกับจำนวนบวก แล้วได้ จำนวนบวก

และเนื่องจาก  $a$  เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น  $10 - a$  จะเป็นได้แค่  $1, 2, 3, \dots, 9$  เท่านั้น

จะเห็นว่า 100 ทางขวา สามารถเขียนเป็นผลคูณของสองจำนวน ที่ตัวหลังเป็น  $1, 2, 3, \dots, 9$  ได้แค่ไม่กี่แบบ ดังนี้

| $b + 10$ | $10 - a$ |                             |
|----------|----------|-----------------------------|
| 100      | 1        | $\rightarrow b = 90, a = 9$ |
| 50       | 2        | $\rightarrow b = 40, a = 8$ |
| 25       | 4        | $\rightarrow b = 15, a = 6$ |
| 20       | 5        | $\rightarrow b = 10, a = 5$ |

มี 4 คำตอบ  $\rightarrow$  ดังนั้น  $S$  จะมีสมาชิก 4 ตัว

42. 1.5

$$\frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} < \sqrt{1-x}$$

$$\frac{\sqrt{2x}}{m + n} < n$$

เปลี่ยนตัวแปร ให้  $\sqrt{1+x} = m$  และ  $\sqrt{1-x} = n$

เหลือ  $x$  ที่เป็นเศษทางฝั่งซ้ายอีกหนึ่งตัว ที่ยังเปลี่ยนตัวแปรไม่ได้

ต้องพยายามจัดรูป  $x$  ทางซ้ายให้อยู่ในรูปของ  $m$  และ  $n$

จาก  $\sqrt{1+x} = m$  จะได้  $1+x = m^2 \quad \dots(1)$

จาก  $\sqrt{1-x} = n$  จะได้  $1-x = n^2 \quad \dots(2)$

$(1) - (2): \quad 2x = m^2 - n^2$

$x = \frac{m^2 - n^2}{2}$

แทน  $m, n$  กลับไปเป็น  $x$

$$\frac{\sqrt{2} \left( \frac{m^2 - n^2}{2} \right)}{m + n} < n$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{m^2 - n^2}{2} \cdot \frac{1}{m+n} < n$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{(m-n)(m+n)}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{m+n} < n$$

$$\frac{m-n}{\sqrt{2}} < n$$

$$m - n < \sqrt{2}n$$

$$m < \sqrt{2}n + n$$

$$m < (\sqrt{2} + 1)n$$

ยกกำลัง 2 ตลอด

$$\sqrt{1+x} < (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{1-x})$$

$$1+x < (\sqrt{2} + 1)^2(1-x)$$

$$1+x < (2 + 2\sqrt{2} + 1)(1-x)$$

$$1+x < (3 + 2\sqrt{2})(1-x)$$

$$1+x < 3 - 3x + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}x$$

$$4x + 2\sqrt{2}x < 2 + 2\sqrt{2}$$

$$2x + \sqrt{2}x < 1 + \sqrt{2}$$

$$(2 + \sqrt{2})x < 1 + \sqrt{2}$$

$$x < \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad \dots(*)$$

หาร 2 ตลอด

เนื่องจากในรูป ต้อง  $\geq 0$  ดังนั้น  $1+x \geq 0$  และ  $1-x \geq 0$

$$x \geq -1 \quad 1 \geq x$$

จะได้  $-1 \leq x \leq 1$

พิจารณาร่วมกับ (\*) สุดท้ายจะได้  $-1 \leq x < \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad \left( \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} < 1 \right)$

ดังนั้น ขอบเขตบนน้อยสุด  $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$

ขอบเขตล่างมากที่สุด  $b = -1$

จะได้  $a^2 + b^2 = \left( \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \right)^2 + (-1)^2$

$$= \frac{1+2\sqrt{2}+2}{4+4\sqrt{2}+2} + 1$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}} + 1$$

$$= \frac{3+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})} + 1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 = 1.5$$

43. 2

โจทย์ให้  $x$  และ  $y$  เป็นจำนวนจริงบวก  $\rightarrow$  ไม่ต้องระวังเวลา  $x, y$  อยู่หลัง  $\log$ 

$$\begin{aligned}
 3 \log_4 16x^2 &= 6 + 6 \log_2 \sqrt{y} \\
 \log_4 16x^2 &= 2 + 2 \log_2 \sqrt{y} \\
 \log_4 16 + \log_4 x^2 &= 2 + 2 \log_2 \sqrt{y} \\
 2 + \log_{2^2} x^2 &= 2 + 2 \log_2 y^{\frac{1}{2}} \\
 \frac{2}{2} \log_2 x &= \frac{2}{2} \log_2 y \\
 \log_2 x &= \log_2 y \\
 x &= y
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \div 3 \text{ ตลอด} \\ \log_a xy = \log_a x + \log_a y \\ \log_a x^m = \frac{m}{a} \log_a x \end{array} \right\}$$

ถ้าโจทย์ไม่ได้กำหนดให้  $x$  และ  $y$  เป็นบวก จะต้องระวังเรื่องค่าหลัง  $\log$  ต้องเป็นบวก นั่นคือ  $\log_4 x^2$  ต้องกลายเป็น  $2 \log_4 |x|$  ( $y$  อยู่ในรูป ต้องเป็นบวกอยู่แล้ว)

แทน  $x = y$  ใน  $\sqrt{2-x} + \sqrt{y} = 2$

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2-y} &= 2 - \sqrt{y} \\
 2 - y &= 4 - 4\sqrt{y} + y \\
 4\sqrt{y} &= 2 + 2y \\
 2\sqrt{y} &= 1 + y \\
 0 &= y - 2\sqrt{y} + 1 \\
 0 &= \sqrt{y}^2 - 2\sqrt{y} + 1 \\
 0 &= (\sqrt{y} - 1)^2 \\
 \sqrt{y} &= 1 \\
 y &= 1
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง} \\ \text{ฝั่งขวา เข้าสูตร } (n-l)^2 = n^2 - 2nl + l^2 \\ n^2 - 2nl + l^2 = (n-l)^2 \end{array} \right\}$$

ดังนั้น  $x = y = 1 \rightarrow$  ตรวจคำตอบ จะเห็นว่า  $\sqrt{2-1} + \sqrt{1} = 2$  จริง  
 $1 + 1$

จะได้  $x^2 + y^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

หมายเหตุ: ถ้าข้อนี้ โจทย์ไม่ได้กำหนดให้  $x$  เป็นบวก จะได้  $y = |x| \rightarrow y = \pm x$

และจะได้เพิ่มอีกคำตอบ คือ  $x = -\frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}$

44. 78.7

$s^2$  ของ "กลุ่มตัวอย่าง" หาได้จาก 2 สูตร คือ  $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1}$  และ  $\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$  ดังนั้น  $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N-1} = \frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$

$$\begin{aligned}
 \frac{34}{5-1} &= \frac{214 - 5\bar{x}^2}{5-1} \\
 5\bar{x}^2 &= 180 \\
 \bar{x}^2 &= 36 \\
 \bar{x} &= 6
 \end{aligned}$$

จะได้ ค่าเฉลี่ยชุดใหม่  $= \frac{(x_1+2x_2)+(x_2+2x_3)+(x_3+2x_4)+(x_4+2x_5)+(x_5+2x_1)}{5} = \frac{3x_1+3x_2+3x_3+3x_4+3x_5}{5} = 3\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}\right) = 3\bar{x} = 3(6) = 18$

และจะหา  $s^2$  ชุดใหม่ โดยใช้สูตร  $\frac{\sum x_i^2 - N\bar{x}^2}{N-1}$  ได้

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(x_1+2x_2)^2 + (x_2+2x_3)^2 + (x_3+2x_4)^2 + (x_4+2x_5)^2 + (x_5+2x_1)^2 - 5(18^2)}{5-1} \\
 &= \frac{(x_1^2+4x_1x_2+4x_2^2) + (x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2) + (x_3^2+4x_3x_4+4x_4^2) + (x_4^2+4x_4x_5+4x_5^2) + (x_5^2+4x_5x_1+4x_1^2) - 1620}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 5x_4^2 + 5x_5^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 4x_3x_4 + 4x_4x_5 + 4x_5x_1 - 1620}{4} \\
&= \frac{5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - 1620}{4} \quad \left. \vphantom{\frac{5(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - 1620}{4}} \right\} \text{ โจทย์ให้ } \sum x_i^2 = 214 \\
&= \frac{5(214) + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - 1620}{4} \\
&= \frac{1070 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - 1620}{4} \\
&= \frac{4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1) - 550}{4} \\
&= x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5
\end{aligned}$$

แต่โจทย์ให้  $s$  ของชุดใหม่  $= 16$  ดังนั้น  $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5 = 16^2$

$$\begin{aligned}
x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 - 137.5 &= 256 \\
x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1 &= 393.5
\end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของ  $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1 = \frac{x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_1}{5} = \frac{393.5}{5} = 78.7$

45. 429

จำนวนสองหลัก  $ab$  จะมีค่า  $= 10a + b$ จำนวนสองหลัก  $ba$  จะมีค่า  $= 10b + a$ 

ดังนั้น  $ab + ba = 143$  จะเขียนใหม่ให้ถูกต้องได้  $(10a + b) + (10b + a) = 143$

$$\begin{aligned}
11a + 11b &= 143 \\
a + b &= 13 \quad \left. \vphantom{a + b = 13} \right\} \div 11 \text{ ตลอด}
\end{aligned}$$

โดยที่  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$  และ  $a \neq b \rightarrow$  จะมี  $a, b$  ทั้งหมดที่  $a + b = 13$  คือ  $4 + 9, 5 + 8, 6 + 7, 9 + 4, 8 + 5, 7 + 6$

ดังนั้น  $S = \{49, 94, 58, 85, 67, 76\}$

$$\begin{aligned}
\text{จะได้ผลบวก} &= 49 + 94 + 58 + 85 + 67 + 76 \\
&= 143 + 143 + 143 = 429
\end{aligned}$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Gtr Ping จาก GTRmath สำหรับข้อสอบ และเฉลยละเอียด

ขอบคุณ คุณ บุญช่วย ฤทธิเทพ และ คุณ Athassawat Kammanee สำหรับเฉลยวิธีทำของบางข้อ

ขอบคุณ คุณ Totsaporn Suwannaruang

คุณครูเบิร์ด

คุณ พุกกัน ณัฐดนัย พู่ไพบูลย์

คุณ สารศิลป์ ทับทิมทอง

คุณ Wichakpol Krasapkan

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ