

PAT 1 (มี.ค. 58)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 7 มีนาคม 2558 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \in R \mid 1 < x < 2\}$

$$P(x) \text{ แทน } 3x^2 - 4x - 4 < 0$$

$$Q(x) \text{ แทน } x^2 > |x^2 - 4|$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(ก) \forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{จริง}}$$

$$(ข) \exists x[Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)] \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{เท็จ}}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

2. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(ก) \text{ ถ้าประพจน์ } p \rightarrow (q \wedge r) \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{จริง}}$$

$$\text{แล้วประพจน์ } (p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{จริง}}$$

$$(ข) \text{ ถ้าประพจน์ } p \rightarrow (q \wedge r) \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{เท็จ}}$$

$$\text{แล้วประพจน์ } [(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee (p \vee \sim r) \text{ มีค่าความจริงเป็น } \underline{\text{จริง}}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

3. ถ้า A เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $x < \sqrt{6+x-x^2} + 1 < x+3$ แล้วเซต A เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้
1. $(-1, 2)$
 2. $(0, 3)$
 3. $(1, 4)$
 4. $(2, 5)$

4. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ S' แทนคอมพลีเมนต์ของเซต S
 ให้ $f = \{ (x, y) \in R \times R \mid y^2 + |1-x|y^2 = 4 \}$ และ $g = \{ (x, y) \in R \times R \mid y = \sqrt{1-x^4} \}$
 และให้ A เป็นเรนจ์ของ f และ B เป็นโดเมนของ g พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- (ก) $A \subset B'$
- (ข) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$
- ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

5. ให้ a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < a < 1$ เซตคำตอบของอสมการ $\frac{a|x|+1}{x} > 1$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้
1. $(-\infty, -\frac{1}{a})$
 2. $(-1, \frac{1}{1-a})$
 3. $(1, \frac{1}{a})$
 4. $(\frac{1}{1-a}, \infty)$

6. กำหนด $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ และ $f(x) = 12x - 9x^2$ เมื่อ $0 < x < 1$

ถ้า $\sin \theta = a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงที่ $f(a)$ มีค่ามากที่สุด แล้ว

ค่าของ $\frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} + \frac{(\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)}{1 + \sec \theta}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $1 + \sqrt{5}$ 2. $\sqrt{5}$ 3. $1 - \sqrt{5}$ 4. 0

7. กำหนด ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ จุดยอด A จุดยอด B และจุดยอด C อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมวงหนึ่ง มีรัศมีเท่ากับ R หน่วย ถ้าความยาวของด้านตรงข้ามมุม A และมุม B เท่ากับ a และ b หน่วยตามลำดับ มุม $\hat{A}BC$ เท่ากับ 18° และมุม $\hat{A}CB$ เท่ากับ 36° แล้วค่าของ $a - b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. R 2. $\frac{1}{2}R$ 3. $\frac{1}{4}R$ 4. $\frac{1}{16}R$

8. ค่าของ $\arctan \left(\frac{2 \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ} \right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15° 2. 30° 3. 45° 4. 60°

9. กล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลขนาดเดียวกัน 7 ลูก เป็นลูกบอลสีขาว 4 ลูก และเป็นลูกบอลสีแดง 3 ลูก สุ่มหยิบลูกบอลจากกล่องใบนี้มา 6 ลูก นำมาจัดเรียงเป็นแถวตรง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอล โดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว หรือ ท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดง เท่ากับ $\frac{11}{42}$

(ข) ความน่าจะเป็นที่การจัดเรียงแถวตรงของลูกบอล โดยหัวแถวเป็นลูกบอลสีขาว มากกว่า ความน่าจะเป็นที่ท้ายแถวเป็นลูกบอลสีแดง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

10. กำหนดให้ $16y^2 - 9x^2 + 36x + 32y + 124 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา

ให้ L เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(0, 0)$ และจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้

ผลบวกของระยะจากโฟกัสทั้งสองไปยังเส้นตรง L เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1. $2\sqrt{5}$ | 2. $3\sqrt{5}$ | 3. $4\sqrt{5}$ | 4. $5\sqrt{5}$ |
|----------------|----------------|----------------|----------------|

11. ถ้าจุด (a, b) เป็นจุดบนเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 1)$ มากที่สุด

วงกลมที่มีจุด (a, b) เป็นจุดศูนย์กลางและสัมผัสแกน x ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| 1. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 = 0$ | 2. $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$ |
| 3. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 16 = 0$ | 4. $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ |

12. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ โดยที่ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$

เวกเตอร์ $\vec{a}$ ทำมุม 135° กับ เวกเตอร์ $\vec{b}$

เวกเตอร์ $\vec{b}$ ทำมุม 105° กับ เวกเตอร์ $\vec{c}$ และ

เวกเตอร์ $\vec{c}$ ทำมุม 120° กับ เวกเตอร์ $\vec{a}$

ถ้าขนาดของเวกเตอร์ $\vec{a}$ เท่ากับ 5 หน่วย แล้ว ผลบวกของขนาดของเวกเตอร์ $\vec{b}$ กับเวกเตอร์ $\vec{c}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10+2\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$

2. $\frac{10+3\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$

3. $\frac{10+4\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$

4. $\frac{10+5\sqrt{6}}{1+\sqrt{3}}$

13. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

โดยที่ $a, b, c, d \in R - \{0\}$ และ $i = \sqrt{-1}$

สมมติว่า มีจำนวนจริง t และ s ที่ว่า $z_1^2 + z_2^2 = t$ และ $z_1 - z_2 = s$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $|z_1| = |z_2|$

(ข) $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

14. ถ้า α และ θ เป็นจำนวนจริงโดยที่ $0 < \theta < \alpha < 90^\circ$ และสอดคล้องกับสมการ $\tan(\alpha + \theta) = 5 \tan(\alpha - \theta)$ แล้ว $(\sin 2\theta)(\text{cosec } 2\alpha)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{5}{6}$

2. $\frac{5}{4}$

3. $\frac{3}{2}$

4. $\frac{2}{3}$

15. การสอบคัดเลือกพนักงานของหน่วยงานแห่งหนึ่ง พบว่า จำนวนผู้เข้าสอบทั้งหมด 160 คน เป็นผู้ชายเข้าสอบคิดเป็นร้อยละ 55 แต่เมื่อประกาศผลสอบพบว่าในบรรดาผู้ที่สอบได้ เป็นผู้ชายคิดเป็นร้อยละ 70 และในบรรดาผู้ที่สอบไม่ผ่าน เป็นผู้ชายคิดเป็นร้อยละ 40 จำนวนผู้ที่สอบได้เป็นผู้หญิงเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16 คน 2. 20 คน 3. 24 คน 4. 28 คน

16. กำหนดให้ $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ เมื่อ $-1 < x < 1$
ถ้า $\int f(x) dx = A$ แล้ว $\int f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. A^2 2. $-A^2$ 3. $2A$ 4. $-2A$

17. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงบวก สอดคล้องกับ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5x+1| - |5x-1|}{\sqrt{x+a} - \sqrt{a}} = 80$

ค่าของ $a^2 + a + 58$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 64 2. 78 3. 130 4. 330

18. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 โดยที่ $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ และ $ABA = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $BAB = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 32 \end{bmatrix}$

(ข) $(A - B)(A + B) \neq A^2 - B^2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

19. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่ง ผ่านจุด $(8, 0)$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(4, -1)$ และโฟกัสจุดหนึ่งอยู่ที่ $(1, -1)$

ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุดปลายของแกนโทของวงรีในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 1 และมีเส้นไดเรกตริกซ์
ทับกับแกนเอกของวงรี แล้วสมการของพาราโบลารูปนี้ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $x^2 - 8x + 4y + 13 = 0$
2. $x^2 - 8x - 4y + 20 = 0$
3. $x^2 - 8x + 6y - 12 = 0$
4. $x^2 - 8x - 6y + 19 = 0$

20. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชันพหุนามจาก R ไปยัง R โดยที่ $f(x) = 2x - 5$,
 $(f^{-1} \circ g)(x) = 4x$ และ $(g \circ h)(x)$ หาด้วย $x - 1$ แล้ว เหลือเศษเท่ากับ -21 ให้ c เป็นจำนวนเต็มบวกที่
น้อยสุดที่สอดคล้องกับ $h(x - c) = x^3 - 3x^2 - 2$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(f \circ h)(c) = 23$

(ข) $(h + g)(c) = 35$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

21. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) > 0$, $\det(A \operatorname{adj} A) - 2(\det A)^2 - 3 \det A = 0$ และ $AB = I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $7 \det B - \det A^t < 0$

(ข) $\det(2A - 3 \operatorname{adj} B) = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

22. นาย ก. วางแผนจะปลูกมันหรือสับปะรดบนที่ดิน 150 ไร่ โดยมีข้อมูลในการลงทุนดังนี้ ในการปลูกมัน จะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 200 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 10 ชั่วโมง ในการปลูกสับปะรดจะต้องลงทุนค่าต้นกล้าไร่ละ 300 บาท และใช้แรงงานไร่ละ 12.5 ชั่วโมง นาย ก. มีเงินลงทุนสำหรับค่าต้นกล้า 40,000 บาท และมีแรงงานไม่เกิน 1,850 ชั่วโมง ถ้าปลูกมันจะได้กำไรไร่ละ 1,500 บาท ปลูกสับปะรดจะได้กำไรไร่ละ 2,000 บาท ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. ปลูกสับปะรดเพียงอย่างเดียว จะได้กำไรสูงสุด 300,000 บาท
2. ปลูกมัน 10 ไร่ ปลูกสับปะรด 140 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 295,000 บาท
3. ปลูกมัน 50 ไร่ ปลูกสับปะรด 100 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 275,000 บาท
4. ปลูกมัน 110 ไร่ ปลูกสับปะรด 40 ไร่ จะได้กำไรสูงสุด 245,000 บาท

23. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ $\log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt[4]{2} + \log_a \sqrt[8]{2} + \dots = \frac{1}{3}$ และ $4^{\log b} - 2b^{\log 2} = 8$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a + b = 102$

(ข) $a \log b = 16$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

24. กำหนดให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_5, y_5)$ เป็นจุด 5 จุดบนระนาบ โดยที่

$$\sum_{i=1}^5 x_i = 20, \quad \sum_{i=1}^5 y_i = 45, \quad \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 485, \quad \sum_{i=1}^5 x_i y_i = 220$$

และความสัมพันธ์ระหว่าง x_i กับ y_i เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง คือ $y = ax + b$ เมื่อ x เป็นตัวแปรอิสระและ a, b เป็นจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a^2 + b^2 = 5$

(ข) ถ้า x เป็นจำนวนเต็ม แล้ว y เป็นจำนวนคี่

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

25. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 60 จำนวน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและสัมประสิทธิ์ของการแปรผันเท่ากับ 40 และ 0.125 ตามลำดับ ถ้า นาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตได้น้อยกว่า 40 และคำนวณความแปรปรวนเท่ากับ 34 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ นาย ก. คำนวณได้ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|-------|-------|-------|-------|
| 1. 30 | 2. 33 | 3. 37 | 4. 39 |
|-------|-------|-------|-------|

26. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มที้อยดคล้อยกับ (1) $a^2 + b^2 \leq 90$

(2) $a + b = 5 + c$

(3) $a > 8$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a + 2b + 3c \leq 36$

(ข) ค่ามากที่สุดของ $a^3 + b^3 + c^3$ เท่ากับ 1085

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

27. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่ามัธยฐานเท่ากับ 60 คะแนน ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 55.5 คะแนน มีอยู่ร้อยละ 18.41 แล้ว นักเรียนที่สอบได้คะแนนสูงกว่า 64 คะแนนมีจำนวนคิดเป็นร้อยละเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังนี้

Z	0.7	0.8	0.9	1.0
พื้นที่	0.2580	0.2881	0.3159	0.3413

1. 21.19 2. 24.20 3. 25.80 4. 28.81
28. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 3 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 45 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานมีค่าเท่ากับศูนย์ มีนักเรียนอีก 2 คน ได้คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์นี้ เท่ากับ a และ b คะแนน โดยอัตราส่วนของ a ต่อ b เป็น 2 : 3 ถ้านำคะแนนของนักเรียนทั้งสองคนนี้รวมกับคะแนนสอบของนักเรียน 3 คน ได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 50 คะแนน แล้วความแปรปรวนของนักเรียนทั้ง 5 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 90 2. 90.4 3. 90.6 4. 92

29. กำหนดให้ $z = a + bi$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab > 0$ และ $i = \sqrt{-1}$
 ถ้า $z^3 = i$ แล้วค่าของ $|iz^5 + 2|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 (เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ z)
1. $5 + 2\sqrt{3}$ 2. 7
 3. $5 - 2\sqrt{3}$ 4. 3

30. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ที่สอดคล้องกับ $a^2 + b^2 + 9 = 2(2a - b + 2)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $a < b$

(ข) $(2a - b)^n = (a + 3b^2)^n$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ให้ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต S ถ้า A, B, C, D และ E เป็นเซตจำกัด โดยที่ $P(D) = \{ \emptyset, \{1\}, D, E \}$

$D \cup E \subset A \cap B$, $B \cap C = \emptyset$, $\{2, 3, 4, 5\} \subset A \cup B$ แต่ $2 \notin B$ และ

เซต	$P(A)$	$P(B)$	$P(A \cap C)$	$P(C - A)$
จำนวนสมาชิก	8	32	2	4

แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B \cup C$ เท่ากับเท่าใด

32. ถ้า $\frac{\sin^2 0^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \dots + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ}{\cos^2 0^\circ + \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ} = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก

โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

33. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_m \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \log_n (6x^2 + 11x + 4) = 4$

เมื่อ $m = \sqrt{3x + 4}$ และ $n = 2x + 1$ และให้ $B = \{8x^2 \mid x \in A\}$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต B เท่ากับเท่าใด

34. ข้อมูลชุดที่ 1 มี 4 จำนวน คือ x_1, x_2, x_3, x_4 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของควอร์ไทล์ที่ 1 และควอร์ไทล์ที่ 3 เท่ากับ 18

และมีฐาน เท่ากับ 15 ข้อมูลชุดที่ 2 มี 5 จำนวน คือ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 มีควอร์ไทล์ที่ 3 มีฐาน ฐานนิยม และพิสัย เท่ากับ 18.5, 15, 12 และ 8 ตามลำดับ

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 9 จำนวน คือ $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5$ เท่ากับเท่าใด

35. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ที่สอดคล้องกับสมการ

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ และ } y \text{ และ } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

ค่าของ $f'(1) + f''(5)$ เท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ จงหาจำนวนสับเซต $A \subset S$ ทั้งหมดที่เซต A มีจำนวนสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว และ $a - b > 1$ สำหรับทุกสมาชิก a และ b ใน A

37. ให้ A แทนเซตของ (x, y) ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับระบบสมการ $2^{2x} \log_{\frac{1}{4}} y = 1 + 2^{4x-1}$
 $9(2^{2x}) \log_{\frac{1}{8}} y = 9 + \log_{\frac{1}{2}} y$
และให้ $B = \left\{ \frac{x}{y} \mid (x, y) \in A \right\}$ คำน้อยที่สุดของสมาชิกในเซต B เท่ากับเท่าใด

38. ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริง โดยที่ $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{n+1}{2n-1}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$
ค่าของ $\frac{2b_{100}}{a_{100}}$ เท่ากับเท่าใด

39. ให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $x + 3\sqrt{3x - 2 - x^2} = 3 + 2\sqrt{x - 1} - 2\sqrt{2 - x}$

ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของสมาชิกในเซต S ตามลำดับ แล้ว ค่าของ $25b + 58a$ เท่ากับเท่าใด

40. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f'(x) = \frac{2x^4 - x}{x^3}$ เมื่อ $x \neq 0$

$g(x) = (1 + x^2)f(x)$ และ $g(1) = 2$ ค่าของ $\int_{-1}^2 x^3 g''(x) dx$ เท่ากับเท่าใด

41. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} e^{2x} + 2a & , x < 0 \\ a + b & , x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+bx+5x^2}-1}{x} & , x > 0 \end{cases}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ แล้วค่าของ $15a + 30b$ เท่ากับเท่าใด

42. ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n = \frac{2^n}{n(n+2)}$ และ $b_n = \frac{3^n}{5n+18}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ แล้วอนุกรม $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$ มีผลบวกเท่ากับเท่าใด

43. มีกระเบื้องสี่เหลี่ยมจัตุรัสสีแดง สีขาว และสีเขียว เป็นจำนวนอย่างน้อยสี่ละ 5 แผ่น (แต่ละสีเหมือนกันและมีขนาดเท่ากันทั้งหมด) ต้องการนำกระเบื้อง 7 แผ่นมาจัดเรียงเป็นแถวตรง โดยมีกระเบื้องแต่ละสีอย่างน้อยหนึ่งแผ่น จะจัดเรียงกระเบื้องดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

44. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = 1$ และ

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{1}{9}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \text{ สำหรับ } n = 2, 3, 4, \dots \text{ ค่าของ } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

45. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับระบบสมการ $|x| - x + y = 8$

$$x + |y| + y = 10$$

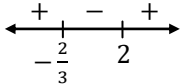
ค่าของ $20x + 15y$ เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 2	11. 1	21. 2	31. 8	41. 15
2. 1	12. 4	22. 3	32. 181	42. 8
3. 2	13. 1	23. 3	33. 4.5	43. 1806
4. 3	14. 4	24. 1	34. 16	44. 0.5
5. 2	15. 3	25. 3	35. 35	45. 60
6. 4	16. 3	26. 2	36. 0	
7. 1	17. 4	27. 1	37. 4	
8. 4	18. 1	28. 2	38. 3.97	
9. 3	19. 4	29. 4	39. 112	
10. 1	20. 2	30. 3	40. 132	

แนวคิด

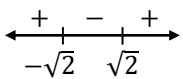
1. 2

พิจารณา $P(x)$ แก้อสมการ $3x^2 - 4x - 4 < 0$
 $(3x + 2)(x - 2) < 0$  ได้คำตอบคือ $(-\frac{2}{3}, 2)$

ซึ่งจะเห็นว่า เอกภพสัมพัทธ์ $(1, 2)$ เป็นสับเซตของ $(-\frac{2}{3}, 2)$

ดังนั้น ทุกตัวในเอกภพสัมพัทธ์ จะทำให้ $P(x)$ เป็นจริง

พิจารณา $Q(x)$ เนื่องจากทั้งสองฝั่งเป็นบวก จะยกกำลังสองทั้งสองข้าง เพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

$$\begin{aligned}
 x^4 &> (x^2 - 4)^2 \\
 x^4 - (x^2 - 4)^2 &> 0 \\
 (x^2 - (x^2 - 4))(x^2 + (x^2 - 4)) &> 0 \\
 (4)(2x^2 - 4) &> 0 \\
 8(x^2 - 2) &> 0 \\
 8(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) &> 0
 \end{aligned}$$


ได้คำตอบคือ $(-\infty, -\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2}, \infty)$
 $= (-\infty, -1.414...) \cup (1.414..., \infty)$

จะเห็นว่า เอกภพสัมพัทธ์ $(1, 2)$ มีทั้งส่วนที่อยู่ใน $(-\infty, -1.414...) \cup (1.414..., \infty)$ เช่น $x = 1.9$

และส่วนที่ไม่อยู่ใน $(-\infty, -1.414...) \cup (1.414..., \infty)$ เช่น $x = 1.1$

ดังนั้น บางตัวในเอกภพสัมพัทธ์จะทำให้ $Q(x)$ จริง แต่บางตัวจะทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ

(ก) เนื่องจาก x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ จริง ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง

เนื่องจาก มี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ จริง และ x ตัวนั้นจะทำให้ $P(x)$ จริงด้วย (เพราะ x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ จริง)

ดังนั้น จะมี x บางตัวที่ทำให้ $P(x) \wedge Q(x)$ เป็นจริง ดังนั้น $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

ดังนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow \exists x[P(x) \wedge Q(x)] \equiv T \rightarrow T \equiv T$ จะได้ (ก) ถูก

(ข) เนื่องจาก มี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ จริง ดังนั้น $\exists x[Q(x)]$ เป็นจริง

จะได้ $\exists x[Q(x)] \rightarrow \forall x[P(x)] \equiv T \rightarrow T \equiv T$ แต่ (ข) บอกเป็นเท็จ ดังนั้น (ข) ผิด

2. 1

(ก) ถ้า...แล้ว... จะเป็นจริงได้หลายแบบ จะจัดรูปให้เป็นเครื่องหมายอื่นก่อน

$$\begin{aligned}
 p \rightarrow (q \wedge r) &\equiv \sim p \vee (q \wedge r) \\
 &\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \\
 &\equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$ เป็นจริงได้แบบเดียว คือ $p \rightarrow q$ เป็นจริง และ $p \rightarrow r$ เป็นจริง

ดังนั้น $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow r) \equiv T \leftrightarrow T \equiv T$ จะได้ (ก) ถูก

(ข) $p \rightarrow (q \wedge r)$ เป็นเท็จ จะได้ p เป็นจริง และ $q \wedge r$ เป็นเท็จ

$$\begin{aligned} \text{จะเห็นว่า แล้วยุ่ว่า } p \text{ ข้างหลังเป็นจริง จะได้ } & [(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee (p \vee \sim r) \\ & \equiv [(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee (T \vee \sim r) \\ & \equiv [(\sim p \rightarrow q) \wedge r] \vee T \\ & \equiv T \end{aligned} \quad \text{จะได้ (ข) ถูก}$$

3. 2

ลบ 1 ตลอด จะได้ $x - 1 < \sqrt{-(x^2 - x - 6)} < x + 2$

เนื่องจากในรูป เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $\begin{aligned} -(x^2 - x - 6) &\geq 0 \\ x^2 - x - 6 &\leq 0 \\ (x - 3)(x + 2) &\leq 0 \end{aligned}$ คูณ -1 ตลอด ต้องกลับ $\geq$ เป็น $\leq$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -2 \quad 3 \end{array} \quad \text{จะได้ } x \in [-2, 3] \quad \dots(1)$$

จากขอบเขตของ x ที่ได้ใน (1) จะเห็นว่า $x + 2$ ทางขวาของอสมการไม่มีทางติดลบได้

ดังนั้น ถ้าพิจารณา อสมการคู่ขวา $\sqrt{-(x^2 - x - 6)} < x + 2$ ก่อน จะสามารถยกกำลังสองทั้งสองข้างได้

$$\begin{aligned} -(x^2 - x - 6) &< (x + 2)^2 \\ -x^2 + x + 6 &< x^2 + 4x + 4 \\ 0 &< 2x^2 + 3x - 2 \\ 0 &< (2x - 1)(x + 2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -2 \quad \frac{1}{2} \end{array} \quad \begin{aligned} &\text{ได้ } x \in (-\infty, -2) \cup (\frac{1}{2}, \infty) \\ &\text{กรองด้วยขอบเขตจาก (1) } \rightarrow \cap [-2, 3] \\ &\text{จะเหลือ } x \in (\frac{1}{2}, 3] \quad \dots(2) \end{aligned}$$

พิจารณา อสมการคู่ซ้าย $x - 1 < \sqrt{-(x^2 - x - 6)}$

จากขอบเขตของ x ที่ได้ล่าสุดใน (2) จะเห็นว่า $x - 1$ ทางซ้ายของอสมการ ยังเป็นได้ทั้งบวกและลบ ทำให้ยกกำลังสองทั้งสองข้างทันทีไม่ได้ $\rightarrow$ จะแบ่งกรณี เป็น $x < 1$ กับ $x \geq 1$ เพื่อให้รู้เครื่องหมายของ $x - 1$ ก่อน ค่อยคิดต่อ

กรณี $x < 1$: จะได้ $x - 1$ เป็นลบ แต่ผลรูปทางขวา ≥ 0 เสมอ ดังนั้น ถ้า $x - 1$ ทางซ้ายเป็นลบ อสมการจะจริง

เสมอ ดังนั้น $x < 1$ จะทำให้อสมการเป็นจริงเสมอ จะได้คำตอบในกรณีนี้คือ $x \in (-\infty, 1) \quad \dots(3)$

กรณี $1 \leq x$: จะได้ $x - 1 \geq 0 \rightarrow$ จะยกกำลังสองทั้งสองข้างได้ $\begin{aligned} (x - 1)^2 &< -(x^2 - x - 6) \\ x^2 - 2x + 1 &< -x^2 + x + 6 \\ 2x^2 - 3x - 5 &< 0 \\ (2x - 5)(x + 1) &< 0 \end{aligned}$

$$\begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ | \quad | \quad | \\ -1 \quad \frac{5}{2} \end{array} \quad \text{จะได้ } x \in (-1, \frac{5}{2})$$

กรองคำตอบด้วยเงื่อนไขของกรณี $1 \leq x \rightarrow \cap [1, \infty)$ จะเหลือคำตอบของกรณีนี้คือ $x \in [1, \frac{5}{2}) \quad \dots(4)$

รวมทั้งสองกรณี (3) กับ (4) $\rightarrow (-\infty, 1) \cup [1, \frac{5}{2})$ จะได้คำตอบของอสมการคู่ซ้าย คือ $(-\infty, \frac{5}{2})$

พิจารณาร่วมกับคำตอบของอสมการคู่ขวาจาก (2) จะได้ $A = (\frac{1}{2}, 3] \cap (-\infty, \frac{5}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})$

ซึ่งจะเป็นสับเซตของ $(0, 3)$ ในข้อ 2

4. 3

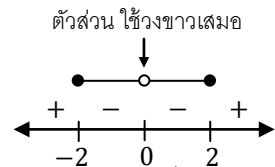
หา A : หาเรนจ์ ต้องจัดรูปให้ x แยกไปอยู่ตัวเดียว

$$y^2(1 + |1 - x|) = 4 \quad \text{แต่ } x \text{ อยู่ในค่าสัมบูรณ์ จะแยก } x \text{ ตัวเดียวลำบาก}$$

$$1 + |1 - x| = \frac{4}{y^2} \quad \text{วิธีคือ เราจะจัดรูปให้ได้มากที่สุด แล้วอ้างว่าค่าสัมบูรณ์ } \geq 0$$

$$|1 - x| = \frac{4}{y^2} - 1 \rightarrow \text{ดังนั้น } \frac{4}{y^2} - 1 \geq 0$$

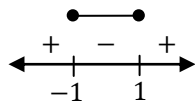
$$\text{คูณ } -1 \text{ ตลอด ต้องกลับ } \geq \text{ เป็น } \leq \left(\begin{aligned} \frac{4 - y^2}{y^2} &\geq 0 \\ \frac{y^2 - 4}{y^2} &\leq 0 \\ \frac{(y-2)(y+2)}{y^2} &\leq 0 \end{aligned} \right.$$



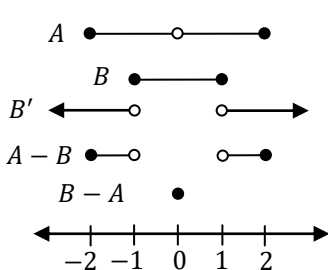
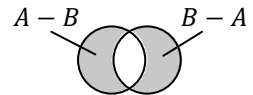
$$\text{จะได้ } A = [-2, 0) \cup (0, 2]$$

กำลังคู่ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย

$$\text{หา } B: \text{ ในรูปต้อง } \geq 0 \text{ จะได้ } \begin{aligned} 1 - x^4 &\geq 0 \\ x^4 - 1 &\leq 0 \\ (x^2 - 1)(x^2 + 1) &\leq 0 \\ x^2 - 1 &\leq 0 \\ (x - 1)(x + 1) &\leq 0 \end{aligned} \left. \begin{aligned} &\text{คูณ } -1 \text{ ตลอด ต้องกลับ } \geq \text{ เป็น } \leq \\ &x^2 + 1 \text{ เป็นบวกเสมอ } \rightarrow \text{หารตลอดได้} \end{aligned} \right\}$$



$$\text{จะได้ } B = [-1, 1]$$

ก. หา B' ได้ดังรูปจะเห็นว่า มีบางตัวใน A (เช่น 1) ที่ไม่อยู่ใน $B' \rightarrow$ ก. ผิดข. จะเห็นว่า $A - B$ กับ $B - A$ ไม่มีส่วนซ้อนทับกัน(ปกติ $A - B$ กับ $B - A$ จะไม่มีส่วนซ้อนทับกันอยู่แล้ว ไม่ว่าเป็นเซตไหน)

$$\text{ดังนั้น } (A - B) \cap (B - A) = \emptyset \rightarrow \text{ข. ถูก}$$

5. 2

กรณี $x > 0$: จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|x| = x$ จะได้สมการกลายเป็น $\frac{ax+1}{x} > 1$ และเนื่องจาก $x > 0$ จะสามารถ คูณ x ตลอดได้โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมายมากกว่าน้อยกว่า

$$\text{ได้เป็น } \begin{aligned} ax + 1 &> x \\ 1 &> x - ax \\ 1 &> (1 - a)x \\ \frac{1}{1-a} &> x \end{aligned} \left. \begin{aligned} &0 < a < 1 \text{ ทำให้ } 1 - a \text{ เป็นบวก } \rightarrow \text{ไม่ต้องกลับมากกว่าน้อยกว่า} \end{aligned} \right\}$$

พิจารณาร่วมกับเงื่อนไขของกรณี ($x > 0$) จะได้คำตอบของกรณีนี้คือ $(0, \frac{1}{1-a})$ กรณี $x = 0$: จะทำให้ตัวส่วนเป็น 0 $\rightarrow$ เป็นคำตอบไม่ได้กรณี $x < 0$: จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|x| = -x$ จะได้สมการกลายเป็น $\frac{-ax+1}{x} > 1$ และเนื่องจาก $x < 0$ จะสามารถ คูณ x ตลอดได้ แต่ต้องกลับเครื่องหมาย $>$ เป็น $<$

$$\text{ได้เป็น } \begin{aligned} -ax + 1 &< x \\ 1 &< x + ax \\ 1 &< (1 + a)x \\ \frac{1}{1+a} &< x \end{aligned} \left. \begin{aligned} &1 + a \text{ เป็นบวก } \rightarrow \text{ไม่ต้องกลับมากกว่าน้อยกว่า} \end{aligned} \right\}$$

พิจารณาร่วมกับเงื่อนไขของกรณี ($x < 0$) จะเห็นว่า เป็นไปไม่ได้ที่ $\frac{1}{1+a} < x$ (เพราะ $\frac{1}{1+a}$ เป็นบวก)

ดังนั้น กรณี $x < 0$ จะไม่มีคำตอบ

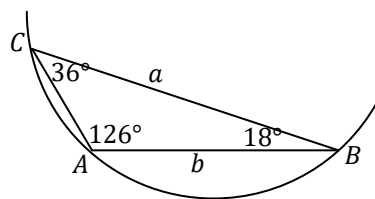
รวมทุกกรณี จะได้คำตอบคือ $(0, \frac{1}{1-a})$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของข้อ 2

6. 4

$$\begin{aligned}
 \text{จัดรูปสิ่งที่โจทย์ถามก่อน จะได้} & \frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)}{1 + \sin \theta} + \frac{(\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)}{1 + \sec \theta} \\
 &= \frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)(1 + \sec \theta) + (\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)(1 + \sin \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 + \sec \theta)} \\
 &= \frac{(\cot^2 \theta)(\sec \theta - 1)(\sec \theta + 1) + (\sec^2 \theta)(\sin \theta - 1)(\sin \theta + 1)}{(1 + \sin \theta)(1 + \sec \theta)} \\
 &= \frac{(\cot^2 \theta)(\sec^2 \theta - 1) + (\sec^2 \theta)(\sin^2 \theta - 1)}{(1 + \sin \theta)(1 + \sec \theta)} \quad \left. \begin{array}{l} (n-l)(n+l) = n^2 - l^2 \\ \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta \\ 1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta \end{array} \right\} \\
 &= \frac{(\cot^2 \theta)(\tan^2 \theta) + (\sec^2 \theta)(-\cos^2 \theta)}{(1 + \sin \theta)(1 + \sec \theta)} \\
 &= \frac{1 + -1}{(1 + \sin \theta)(1 + \sec \theta)} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ : จะเห็นว่าได้คำตอบเลย โดยที่ไม่ต้องหาค่า a

7. 1



จะได้มุม $\hat{A}$ ที่เหลือ $= 180^\circ - 18^\circ - 36^\circ = 126^\circ$ วาดได้ดังรูป

จากกฎของ $\sin$ จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$$\rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R \text{ จะได้ } a = 2R \sin A$$

$$\rightarrow \frac{b}{\sin B} = 2R \text{ จะได้ } b = 2R \sin B$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 a - b &= 2R \sin A - 2R \sin B \\
 &= 2R(\sin 126^\circ - \sin 18^\circ) \\
 &= 2R \left(2 \cos \frac{126^\circ + 18^\circ}{2} \sin \frac{126^\circ - 18^\circ}{2} \right) \\
 &= 2R(2 \cos 72^\circ \sin 54^\circ) \\
 &= 2R(2 \sin 18^\circ \cos 36^\circ) \\
 &= 2R \left(\frac{2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \\
 &= 2R \left(\frac{\sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \\
 &= R \left(\frac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} \right) \\
 &= R
 \end{aligned}$$

โคฟังก์ชัน

เติม $\cos 18^\circ$ ทั้งเศษ

และส่วน จะเข้าสู่ตรรกะ

สองเท่าได้สองรอบ

โคฟังก์ชัน

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cos \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \sin \left(\frac{A-B}{2} \right)$$

8. 4

$$\begin{aligned}
 \frac{2 \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ} &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \left(-2 \sin \frac{10^\circ + 50^\circ}{2} \sin \frac{10^\circ - 50^\circ}{2}\right)}{2 \cos \frac{70^\circ + 10^\circ}{2} \sin \frac{70^\circ - 10^\circ}{2}} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + (-2 \sin 30^\circ \sin(-20^\circ))}{2 \cos 40^\circ \sin 30^\circ} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \left(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 20^\circ\right)}{2 \cos 40^\circ \cdot \frac{1}{2}} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 70^\circ}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos \frac{10^\circ + 70^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 70^\circ}{2}}{\cos 40^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos 40^\circ \cos(-30^\circ)}{\cos 40^\circ} \\
 &= 2 \cos 30^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\arctan\left(\frac{2 \cos 10^\circ - \cos 50^\circ}{\sin 70^\circ - \cos 80^\circ}\right) = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$

9. 3

ข้อนี้ ตอนหยิบ 6 ลูก จะแบ่งกรณี เป็นกรณี “ขาว 3 แดง 3” กับ “ขาว 4 แดง 2” ก็ได้
 แต่เนื่องจากมีลูกบอลแค่ 7 ลูก ดังนั้น “จำนวนแบบของการเรียง 7 ลูก” จะเท่ากับ “จำนวนแบบของการเรียง 6 ลูก”
 (เพราะตอนเรียง 7 ลูก ลูกสุดท้ายจะเรียงได้แค่แบบเดียว ทำให้ เรียง 6 ลูก หรือ 7 ลูก ก็ได้จำนวนวิธีเท่ากัน)
 ดังนั้น จะหาจำนวนแบบของการเรียง 7 ลูก มาใช้แทนจำนวนแบบของการเรียง 6 ลูกได้เลย

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = จำนวนแบบการเรียง 7 ลูก $\rightarrow$ ใช้สูตรเรียงของซ้ำได้ $= \frac{7!}{4!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3!} = 35$ แบบ

ก. ใช้หลัก **Inclusive - Exclusive** โดยรวมแบบที่ต้องการ และหักแบบซ้ำ จะได้จำนวนแบบที่ต้องการ = จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาว + จำนวนแบบที่ทำแถวสีแดง - จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาวและทำแถวสีแดง

จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาว $\rightarrow$ หัวแถวเลือกได้ 4 แบบ ที่เหลือ ได้ 6! $\rightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \frac{4 \cdot 6!}{4!3!} = 20$ แบบ

จำนวนแบบที่ทำแถวสีแดง $\rightarrow$ ทำแถวเลือกได้ 3 แบบ ที่เหลือ ได้ 6! $\rightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \frac{3 \cdot 6!}{4!3!} = 15$ แบบ

จำนวนแบบที่หัวแถวสีขาว และ ทำแถวสีแดง $\rightarrow$ หัวแถวเลือกได้ 4 แบบ ทำแถวเลือกได้ 3 แบบ ที่เหลือ ได้ 5!

$\rightarrow$ ยุบของซ้ำได้ $= \frac{4 \cdot 3 \cdot 5!}{4!3!} = 10$ แบบ

จะได้จำนวนแบบที่โจทย์ถาม $= 20 + 15 - 10 = 25$ แบบ $\rightarrow$ ความน่าจะเป็น $= \frac{25}{35} = \frac{5}{7} \rightarrow$ ก. ผิด

ข. จากข้อ ก. จำนวนแบบที่หัวแถวเป็นสีขาว = 20 แบบ และจำนวนแบบที่ทำแถวเป็นสีแดง = 15 แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่หัวแถวเป็นสีขาว จะมากกว่า $\rightarrow$ ข. ถูก

10. 1

จัดรูปไฮเพอร์โบล่าได้

$$\begin{aligned}
 16y^2 + 32y - 9x^2 + 36x + 124 &= 0 \\
 16(y^2 + 2y) - 9(x^2 - 4x) &= -124 \\
 16(y^2 + 2y + 1) - 9(x^2 - 4x + 4) &= -124 + 16(1) - 9(4) \\
 16(y+1)^2 - 9(x-2)^2 &= -144 \\
 \frac{16(y+1)^2}{-144} - \frac{9(x-2)^2}{-144} &= 1 \\
 \frac{(y+1)^2}{9} - \frac{(x-2)^2}{16} &= 1 \\
 \frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{(y+1)^2}{3^2} &= 1
 \end{aligned}$$

จะได้ ไฮเพอร์โบล่าเป็นแบบแนวนอน จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, -1)$

ระยะโฟกัส $c = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \rightarrow$ จะได้จุดโฟกัส คือ $(2 \pm 5, -1) = F_1(7, -1)$ และ $F_2(-3, -1)$

ดังนั้น เส้นตรง L ผ่านจุด $(0, 0)$ และ $(2, -1) \rightarrow$ จะได้สมการของ L คือ $\frac{y-0}{x-0} = \frac{-1-0}{2-0}$

$$\begin{aligned} \text{เส้นตรงที่ผ่านจุด } (a, b) \text{ และ} \\ (c, d) \text{ คือ } \frac{y-b}{x-a} &= \frac{d-b}{c-a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{y}{x} &= -\frac{1}{2} \\ 2y &= -x \\ 2y + x &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ผลบวกระยะจาก $F_1(7, -1)$ และ $F_2(-3, -1)$ ไปเส้นตรง $L = \frac{|2(-1)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} + \frac{|2(-1)+-3|}{\sqrt{1^2+2^2}}$

$$\begin{aligned} \text{ระยะจากจุด } (a, b) \text{ ไปยังเส้นตรง} \\ Ax + By + C = 0 \text{ คือ } \frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}$$

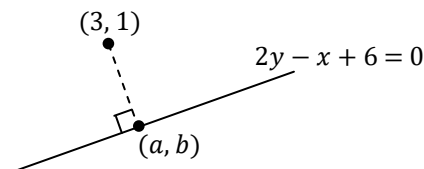
$$\begin{aligned} &= \frac{5}{\sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

11. 1

เนื่องจากระยะสั้นสุด คือ ระยะตั้งฉาก จะวาดได้ดังรูป

(a, b) อยู่บนเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 2b - a + 6 &= 0 \\ 2b + 6 &= a \quad \dots(*) \end{aligned}$$



และจากเส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

จากสูตรความชัน $= \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow$ จะได้ความชันเส้นประ $= \frac{b-1}{a-3}$

จัดรูปเส้นตรง $2y - x + 6 = 0$ ในรูป $y = mx + c$

จะได้ $2y = x - 6$

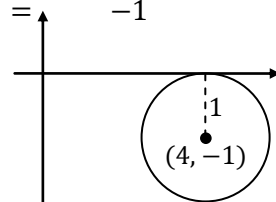
$y = \frac{x}{2} - 3 \rightarrow$ จะได้ความชันเส้นตรง $m = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{b-1}{a-3} \times \frac{1}{2} &= -1 \\ \frac{b-1}{2b+6-3} \times \frac{1}{2} &= -1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{แทน } a = 2b + 6 \\ \text{จาก } (*) \end{array} \right\} \\ \frac{b-1}{2b+3} &= -2 \\ \frac{b-1}{b-1} &= -4b - 6 \\ 5b &= -5 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

แทน $b = -1$ ใน $(*)$ จะได้ $a = 2(-1) + 6 = 4$ จะได้ $(a, b) = (4, -1)$

วงกลมที่มี $(4, -1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และสัมผัสแกน x จะมีรัศมี $= 1$ ดังรูป

$$\begin{aligned} \text{จะได้สมการวงกลมคือ } (x-4)^2 + (y+1)^2 &= 1^2 \\ x^2 - 8x + 16 + y^2 + 2y + 1 &= 1 \\ x^2 + y^2 - 8x + 2y + 16 &= 0 \end{aligned}$$



12. 4

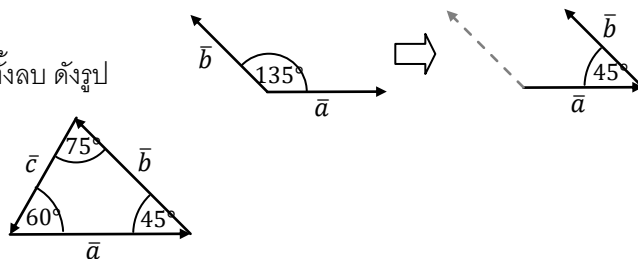
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ แสดงว่า เวกเตอร์ต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม แบบ หัวต่อหาง

แต่มุมที่เวกเตอร์ทำกัน จะวัดแบบ หางต่อหาง

ถ้าจะแปลงเป็นแบบ หัวต่อหาง ต้องเอา 180° ตั้งลบ ดังรูป

แปลงมุมที่โจทย์ให้ จะได้ $135^\circ \rightarrow 45^\circ$
 $105^\circ \rightarrow 75^\circ$
 $120^\circ \rightarrow 60^\circ$

ดังนั้น จะวาดสามเหลี่ยมได้ดังรูป



โจทย์ให้ $|\vec{a}| = 5 \rightarrow$ ใช้กฎของ $\sin$ จะได้ $\frac{5}{\sin 75^\circ} = \frac{|\vec{b}|}{\sin 60^\circ} = \frac{|\vec{c}|}{\sin 45^\circ}$

จับคู่ตัวแรก ไปเท่ากับสองตัวทางขวา จะได้ $|\vec{b}| = \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ}$ และ $|\vec{c}| = \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ}$

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } |\vec{b}| + |\vec{c}| &= \frac{5 \sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} + \frac{5 \sin 45^\circ}{\sin 75^\circ} \\
 &= \frac{5(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)}{\sin 75^\circ} \\
 &= \frac{5(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)}{\sin(30^\circ + 45^\circ)} \\
 &= \frac{5(\sin 60^\circ + \sin 45^\circ)}{\sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ} \\
 &= \frac{5\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\
 &= \frac{5\left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right)} \\
 &= 5 \left(\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{3}}\right) \\
 &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2)}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2)}{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\
 &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(2)(\sqrt{2})}{2(1 + \sqrt{3})} \\
 &= \frac{5(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2})}{1 + \sqrt{3}} \\
 &= \frac{5\sqrt{6} + 10}{1 + \sqrt{3}}
 \end{aligned}$$

13. 1

จาก $z_1 - z_2 = s$ เป็นจำนวนจริง แสดงว่าส่วนจินตภาพของ z_1 และ z_2 ต้องเท่ากัน ถึงจะหักล้างกันหมด $\rightarrow b = d$

จาก $z_1^2 + z_2^2 = t$ แทนค่า $z_1 = a + bi$, $z_2 = c + di$ และ $b = d$ จะได้

$$\begin{aligned}
 (a + di)^2 + (c + di)^2 &= t \\
 a^2 + 2adi + d^2i^2 + c^2 + 2cdi + d^2i^2 &= t \\
 a^2 - d^2 + c^2 - d^2 + 2adi + 2cdi &= t \\
 (a^2 + c^2 - 2d^2) + 2d(a + c)i &= t
 \end{aligned}$$

เนื่องจาก t เป็นจำนวนจริง จะสรุปได้ว่าส่วนจินตภาพ $2d(a + c) = 0$

แต่โจทย์ให้ $a, b, c, d \in \mathbb{R} - \{0\}$ ดังนั้น $d \neq 0$ จึงสรุปได้ว่า $a + c = 0$ ซึ่งจะได้ $a = -c$

แทน $a = -c$ และ $b = d$ ใน z_1 จะได้ $z_1 = a + bi = -c + di$

$$\text{ก. } |z_1| = \sqrt{(-c)^2 + d^2} = \sqrt{c^2 + d^2} = |z_2| \rightarrow \text{ก. ถูก}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ข. จะได้ } z_1 z_2 &= (-c + di)(c + di) \\
 &= -c^2 - cdi + cdi + d^2i^2 \\
 &= -c^2 - d^2
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า i หักล้างกันหมด กลายเป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\text{Im}(z_1 z_2) = 0$ จริง $\rightarrow$ ข. ถูก

14. 4

$$\begin{aligned}
 \tan(\alpha + \theta) &= 5 \tan(\alpha - \theta) \\
 \frac{\sin(\alpha + \theta)}{\cos(\alpha + \theta)} &= 5 \cdot \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos(\alpha - \theta)} \\
 \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha - \theta) &= 5 \sin(\alpha - \theta) \cos(\alpha + \theta) \\
 2 \sin(\alpha + \theta) \cos(\alpha - \theta) &= 5(2 \sin(\alpha - \theta) \cos(\alpha + \theta)) \\
 \sin((\alpha + \theta) + (\alpha - \theta)) + \sin((\alpha + \theta) - (\alpha - \theta)) &= 5(\sin((\alpha - \theta) + (\alpha + \theta)) + \sin((\alpha - \theta) - (\alpha + \theta))) \\
 \sin(\alpha + \theta + \alpha - \theta) + \sin(\alpha + \theta - \alpha + \theta) &= 5(\sin(\alpha - \theta + \alpha + \theta) + \sin(\alpha - \theta - \alpha - \theta)) \\
 \sin(2\alpha) + \sin(2\theta) &= 5(\sin(2\alpha) + \sin(-2\theta)) \\
 \sin(2\alpha) + \sin(2\theta) &= 5 \sin(2\alpha) - 5 \sin(2\theta) \\
 6 \sin(2\theta) &= 4 \sin(2\alpha) \\
 \frac{\sin(2\theta)}{\sin(2\alpha)} &= \frac{4}{6} \\
 \sin(2\theta) (\text{cosec}(2\alpha)) &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

จากสูตร $2 \sin A \cos B = \sin(A + B) + \sin(A - B)$

15. 3

มีคนเข้าสอบ 160 คน $\rightarrow$ ให้มีคนสอบผ่าน x คน ดังนั้น จะมีคนสอบไม่ผ่าน $160 - x$ คน

จากคนเข้าสอบ 160 คน เป็นชายร้อยละ 55 $\rightarrow$ คิดเป็นชายที่เข้าสอบ $= \frac{55}{100} \cdot 160 = 88$ คน

จากคนสอบผ่าน x คน เป็นชายร้อยละ 70 $\rightarrow$ คิดเป็นชายที่สอบผ่าน $= \frac{70}{100} \cdot x = \frac{7x}{10}$ คน

จากคนสอบไม่ผ่าน $160 - x$ คน เป็นชายร้อยละ 40 $\rightarrow$ คิดเป็นชายที่สอบไม่ผ่าน $= \frac{40}{100} \cdot (160 - x)$
 $= \frac{640 - 4x}{10}$ คน

เนื่องจาก ชายที่เข้าสอบทั้งหมด = ชายที่สอบผ่าน + ชายที่สอบไม่ผ่าน จะได้สมการคือ $88 = \frac{7x}{10} + \frac{640 - 4x}{10}$
 $880 = 7x + 640 - 4x$
 $240 = 3x$
 $80 = x$

ดังนั้น มีคนที่สอบผ่าน 80 คน โดยจะเป็นชาย $= \frac{7x}{10} = \frac{7(80)}{10} = 56$ คน

ดังนั้น จะมีหญิงที่สอบผ่าน $= 80 - 56 = 24$ คน

16. 3

$$\begin{aligned} \text{แทน } x \text{ ใน } f(x) \text{ ด้วย } \frac{2x}{1+x^2} \text{ จะได้ } f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) &= \log\left(\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right) &= \log\left(\frac{1+2x+x^2}{1-2x+x^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{\frac{1+x^2+2x}{1+x^2}}{\frac{1+x^2-2x}{1+x^2}}\right) &= \log\left(\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right) \\ &= \log\left(\frac{1+2x+x^2}{1+x^2} \cdot \frac{1+x^2}{1-2x+x^2}\right) &= \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \\ & &= 2 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \int f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) dx = \int 2 \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 2 \int \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 2A$$

17. 4

เมื่อ $x \rightarrow 0$ จะเห็นว่า $5x + 1$ เป็นบวก และ $5x - 1$ เป็นลบ

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $|5x + 1| = 5x + 1$ และ $|5x - 1| = -(5x - 1)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5x+1|-|5x-1|}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(5x+1)-(-(5x-1))}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x+1+5x-1}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} &= \lim_{x \rightarrow 0} 10(\sqrt{x+a}+\sqrt{a}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x}{\sqrt{x+a}-\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{a}} &= 10(\sqrt{0+a}+\sqrt{a}) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10x(\sqrt{x+a}+\sqrt{a})}{x+a-a} &= 10\left(\frac{2\sqrt{a}}{2}\right) \\ & &= 20\sqrt{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 20\sqrt{a} &= 80 & \text{จะได้ } a^2 + a + 58 &= 16^2 + 16 + 58 \\ \sqrt{a} &= 4 & &= 256 + 16 + 58 \\ a &= 16 & &= 330 \end{aligned}$$

18. 1

$$\begin{aligned}
 ABA &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} A &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{ย้ายข้าง } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \text{ แบบ "ด้านหน้า"} \\
 A &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\
 A &= \frac{1}{(1)(4)-(2)(3)} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\
 A &= -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

จาก $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ แทนค่า A จะได้ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 B &= \frac{1}{(1)(1)-(-1)(0)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \\
 B &= \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ก. จะได้ $BAB = B(AB) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 22 & 32 \end{bmatrix} \rightarrow$ ก. ถูก

ข. $(A-B)(A+B) = A^2 + AB - BA - B^2$

$$\begin{aligned}
 &= A^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - B^2 \\
 &= A^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} - B^2 \\
 &= A^2 + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - B^2 \neq A^2 - B^2 \rightarrow \text{ข. ผิด}
 \end{aligned}$$

19. 4

จะเห็นว่า จุดศูนย์กลาง กับ โฟกัส มีพิกัด y เท่ากัน $(= -1)$ ดังนั้น แกนเอกจะเรียงตัวในแนวนอน $\rightarrow$ เป็นวงรีแนวนอน

จากจุดศูนย์กลาง $(4, -1)$ จะได้สมการวงรีอยู่ในรูป $\frac{(x-4)^2}{a^2} + \frac{(y+1)^2}{b^2} = 1$

จากจุดศูนย์กลาง $(4, -1)$ และโฟกัส $(1, -1)$ จะได้ระยะโฟกัส $c = 4 - 1 = 3$

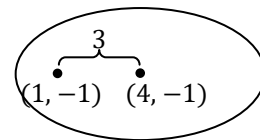
และจาก $a^2 - b^2 = c^2$ จะได้ $a^2 - b^2 = 3^2 = 9$

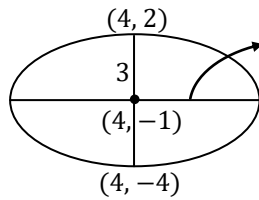
$$\begin{aligned}
 a^2 &= 9 + b^2 \quad \dots (*) \\
 \text{จากวงรีผ่าน } (8, 0) \text{ จะได้ } \frac{(8-4)^2}{a^2} + \frac{(0+1)^2}{b^2} &= 1 \\
 \frac{16}{9+b^2} + \frac{1}{b^2} &= 1 \\
 \frac{16b^2 + 9+b^2}{(9+b^2)b^2} &= 1
 \end{aligned}$$

แทนค่า a^2 จาก (*)

$$\begin{aligned}
 16b^2 + 9 + b^2 &= 9b^2 + b^4 \\
 0 &= b^4 - 8b^2 - 9 \\
 0 &= (b^2 - 9)(b^2 + 1) \\
 0 &= (b - 3)(b + 3)(b^2 + 1) \\
 b &= 3, \quad \text{ในสูตรวงรี จะต้องเป็นบวก}
 \end{aligned}$$

$b^2 + 1 > 0$ เสมอ
จะไม่มีทางเท่ากับ 0 ได้





แกนเอก $y = -1$ ดังนั้น จุดปลายแกนโทของวงรีคือ $(4, -1 \pm 3) = (4, 2)$ และ $(4, -4)$
 เอาจุดปลายของแกนโทในควอดรันต์ 1 จะได้ $(4, 2)$
 และจะได้ แกนเอก คือ $y = -1$

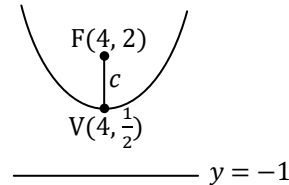
ดังนั้น พาราโบลาที่มีโฟกัส $(4, 2)$ และ ไดรเรกทริกซ์ คือ $y = -1$

จุดยอด จะอยู่ตรงกลางระหว่างโฟกัส กับ ไดรเรกทริกซ์

จะได้จุดยอด $V(4, \frac{2+(-1)}{2}) = (4, \frac{1}{2})$ ดังรูป

และจะได้ระยะโฟกัส $c = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

เป็น พาราโบลาแนวตั้ง $\rightarrow (x-h)^2 = 4c(y-k)$
 $(x-4)^2 = 4\left(\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)$
 $x^2 - 8x + 16 = 6y - 3$
 $x^2 - 8x - 6y + 19 = 0$



20. 2

จาก $(f^{-1} \circ g)(x) = 4x$

$f^{-1}(g(x)) = 4x$

$g(x) = f(4x)$

$g(x) = 2(4x) - 5$

$g(x) = 8x - 5$

และจาก $(g \circ h)(x)$ หาด้วย $x - 1$ เหลือเศษ -21

ใช้ทฤษฎีเศษ จะได้ $(g \circ h)(1) = -21$

$g(h(1)) = -21$

$8h(1) - 5 = -21$

$8h(1) = -16$

$h(1) = -2$

แต่โจทย์กำหนดให้ $h(x-c) = x^3 - 3x^2 - 2$

ดังนั้น ถ้า $x - c = 1$ แล้วจะได้ $x^3 - 3x^2 - 2 = -2$

ถ้า $x - c = 1$ จะได้ $x = c + 1$ แทนใน $x^3 - 3x^2 - 2 = -2$ จะได้ $(c+1)^3 - 3(c+1)^2 - 2 = -2$

ดึงตัวร่วม $(c+1)^2$ $\begin{cases} (c+1)^3 - 3(c+1)^2 & = 0 \\ (c+1)^2(c+1-3) & = 0 \\ (c+1)^2(c-2) & = 0 \end{cases}$

จะได้ $c = -1$ หรือ $2 \rightarrow$ แต่ c เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ $c = 2$ ดังนั้น $h(x-2) = x^3 - 3x^2 - 2 \dots (*)$

ก. $(f \circ h)(c) = (f \circ h)(2) = f(h(2)) \rightarrow$ จะหา $h(2)$ จาก $(*)$ ต้องให้ $x - 2 = 2$
 $x = 4$

แทน $x = 4$ ใน $(*)$ จะได้ $h(4-2) = 4^3 - 3(4^2) - 2$
 $h(2) = 64 - 48 - 2$
 $h(2) = 14$

$= f(14)$

$= 2(14) - 5 = 23 \rightarrow$ ก. ถูก

ข. $(h+g)(c) = (h+g)(2) = h(2) + g(2) \rightarrow$ จาก $g(x) = 8x - 5$ ในตอนแรก
 $= 14 + 8(2) - 5 = 25 \rightarrow$ ข. ผิด

21. 2

จากสมบัติ $A \operatorname{adj} A = (\det A)I$

$$\begin{aligned} \det(A \operatorname{adj} A) &= \det((\det A)I) \\ \det(A \operatorname{adj} A) &= (\det A)^3 \det(I) \\ \det(A \operatorname{adj} A) &= (\det A)^3 \end{aligned}$$

ใส่ $\det$ ทั้งสองฝั่ง
จากสมบัติ $\det(kA) = k^n \det A$
 $\det(I) = 1$

แทนในสมการที่โจทย์กำหนด

$$\begin{aligned} \det(A \operatorname{adj} A) - 2(\det A)^2 - 3 \det A &= 0 \\ (\det A)^3 - 2(\det A)^2 - 3 \det A &= 0 \\ (\det A)((\det A)^2 - 2 \det A - 3) &= 0 \\ (\det A)(\det A - 3)(\det A + 1) &= 0 \\ \det A &= 0, 3, -1 \end{aligned}$$

ตั้ง $\det A$ เป็นตัวรวม

แต่โจทย์ให้ $\det A > 0 \rightarrow$ จะได้ $\det A = 3$

และจาก $AB = I$ จะได้ A และ B เป็นอินเวอร์สการคูณของกันและกัน ดังนั้น $\det B = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{3}$

ก. จากสมบัติ $\det A^t = \det A$ จะได้ $7 \det B - \det A^t = 7 \det B - \det A$

$$= 7\left(\frac{1}{3}\right) - 3 = \frac{7-9}{3} = -\frac{2}{3} < 0 \rightarrow \text{ก. ผิด}$$

ข. จาก $A = B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot \operatorname{adj} B = \frac{1}{\frac{1}{3}} \cdot \operatorname{adj} B = 3 \operatorname{adj} B$

ดังนั้น $\det(2A - 3 \operatorname{adj} B) = \det(2A - A) = \det(A) = 3 \rightarrow \text{ข. ผิด}$

22. 3

สมมติให้ปลูกมัน x ไร่ และปลูกสับปะรด y ไร่ $\rightarrow$ จำนวนไร่ ห้ามติดลบ ดังนั้น $x \geq 0, y \geq 0$

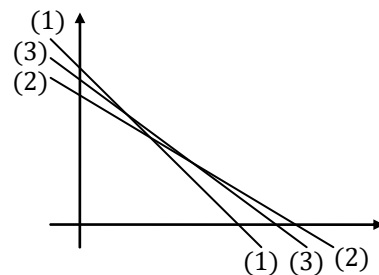
$\rightarrow$ มีที่ดิน 150 ไร่ ดังนั้น $x + y \leq 150 \dots(1)$

$\rightarrow$ มีทุน 40,000 บาท ดังนั้น $200x + 300y \leq 40000$
 $2x + 3y \leq 400 \dots(2)$

$\rightarrow$ มีแรงงาน 1,850 ชั่วโมง ดังนั้น $10x + 12.5y \leq 1850$
 $20x + 25y \leq 3700$
 $4x + 5y \leq 740 \dots(3)$

วาดกราฟอสมการข้อจำกัดบนแกนเดียวกัน แล้วหาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน

	ตัดแกน x ที่ (แทน $y = 0$)	ตัดแกน y ที่ (แทน $x = 0$)
(1) $x + y = 150$	150	150
(2) $2x + 3y = 400$	200	133.3
(3) $4x + 5y = 740$	185	148

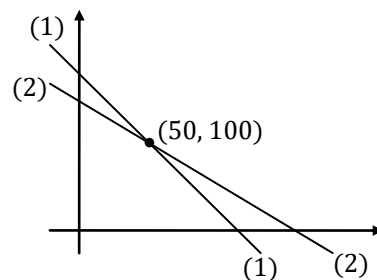


จะเห็นว่า ทั้งสามเส้น ตัดใกล้กันมาก ถ้าวาดเส้นที่ (3) ตรงกลาง คลาดเคลื่อนแค่นิดเดียว จะได้รูปที่ผิดทันที
ดังนั้น จะวาดแค่ (1) กับ (2) แล้วหาจุดตัดก่อน

เอา (2) - 2(1) จะทำให้ x ตัดกันหมด

$$\begin{aligned} \text{เหลือ } 3y - 2y &= 400 - 2(150) \\ y &= 100 \end{aligned}$$

แทน $y = 100$ ใน (1) จะได้ $x = 50$ ได้จุดตัดคือ (50, 100) ดังรูป



แทน $(50, 100)$ ในอสมการ (3) จะได้ $4(50) + 5(100) \leq 740$
 $700 \leq 740$

จะเห็นว่า $(50, 100)$ ทำให้ $4x + 5y$ ต่ำกว่า 740

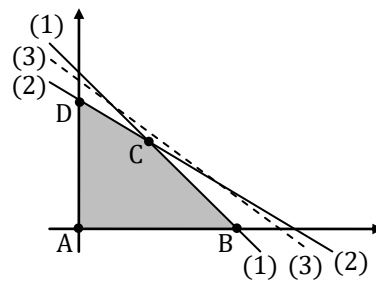
ดังนั้น จึงแน่ใจได้ว่า $(50, 100)$ อยู่ต่ำกว่าเส้น (3)

ดังนั้น พื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะไม่มีส่วนที่เกิดจาก (3) เลย ดังรูป

นำจุดมุม A, B, C, D ไปแทนเพื่อหาค่า $1500x + 2000y$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } A(0, 0) &\rightarrow 1500(0) + 2000(0) = 0 \\ B(150, 0) &\rightarrow 1500(150) + 2000(0) = 225,000 \\ C(50, 100) &\rightarrow 1500(50) + 2000(100) = 275,000 \\ D(0, 133.3) &\rightarrow 1500(0) + 2000(133.3) = 266,666.6 \end{aligned}$$

ดังนั้น ได้กำไรสูงสุด 275,000 บาท ที่จุด C $\rightarrow$ ปลูग्มัน 50 ไร่ สับปะรด 100 ไร่



หมายเหตุ : ข้อนี้จะเอาตัวเลือกแต่ละข้อมาไล่แทน แล้วดูว่าข้อไหนตรงกับเงื่อนไขทั้ง 3 และได้กำไรมากที่สุด ก็ได้ ที่ต้องระวังคือ ข้อ 1. ไม่ได้กำหนด x มา (ปลูग्มันอย่างเดียว แปลว่า $y = 0$ แต่ x ไม่รู้) $\rightarrow$ ต้องหา x มากสุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 เอง

23. 3

$$\begin{aligned} \text{หา } a : \quad &\log_a \sqrt{2} + \log_a \sqrt[4]{2} + \log_a \sqrt[8]{2} + \dots = \frac{1}{3} \\ &\log_a 2^{\frac{1}{2}} + \log_a 2^{\frac{1}{4}} + \log_a 2^{\frac{1}{8}} + \dots = \frac{1}{3} \\ &\frac{1}{2} \log_a 2 + \frac{1}{4} \log_a 2 + \frac{1}{8} \log_a 2 + \dots = \frac{1}{3} \\ &(\log_a 2) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \right) = \frac{1}{3} \\ &\quad \downarrow \\ &\text{อนุกรมเรขาคณิต } a_1 = \frac{1}{2}, r = \frac{1}{2} \\ &\text{จะได้ } S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\log_a 2)(1) &= \frac{1}{3} \\ \log_a 2 &= \frac{1}{3} \\ 2 &= a^{\frac{1}{3}} \\ 2^3 &= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\ 8 &= a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หา } b : \quad &4^{\log b} - 2b^{\log 2} = 8 \\ &(2^2)^{\log b} - 2b^{\log 2} - 8 = 0 \\ &(2^{\log b})^2 - 2b^{\log 2} - 8 = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{จากสมบัติ } (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn} \\ \text{จากสมบัติ } a^{\log_n b} = b^{\log_n a} \end{array} \right\} \\ &(2^{\log b})^2 - 2(2^{\log b}) - 8 = 0 \\ &(2^{\log b} - 4)(2^{\log b} + 2) = 0 \\ &2^{\log b} = 4, \quad \cancel{2^{\log b} = -2} \\ &2^{\log b} = 2^2 \quad \rightarrow \text{ฝั่งซ้าย มีฐานการยกกำลังเป็นบวก (= 2) จะได้ผลลัพธ์เป็นบวกเท่านั้น} \\ &\log b = 2 \\ &b = 10^2 = 100 \quad \left. \begin{array}{l} \log \text{ ไม่มีฐาน} = \log \text{ ฐาน } 10 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

ก. $a + b = 8 + 100 = 108 \rightarrow$ ก. ผิด

ข. $a \log b = 8 \log 100 = 8(2) = 16 \rightarrow$ ข. ถูก

24. 1

จากสูตรความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i + bn \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i &= a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

จะได้

$$45 = a(20) + b(5) \quad \dots(1)$$

$$220 = a(100) + b(20) \quad \dots(2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{แก้ระบบสมการ } (1) \div 5: \quad 9 &= 4a + b \quad \dots(3) \\ (2) \div 20: \quad 11 &= 5a + b \quad \dots(4) \end{aligned} \right\} (4) - (3) \text{ จะได้ } 2 = a$$

$$\text{แทนใน (3) จะได้ } 9 = 4(2) + b \text{ จะได้ } b = 1$$

$$\text{ก. } a^2 + b^2 = 2^2 + 1^2 = 5 \rightarrow \text{ก. ถูก}$$

$$\text{ข. จะได้สมการทำนายคือ } y = 2x + 1 \text{ ดังนั้น ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนเต็ม จะทำนายได้ } y \text{ เป็นจำนวนคี่} \rightarrow \text{ข. ถูก}$$

25. 3

$$\text{จะได้ } n = 60, \bar{x} = 40, \text{ และ } \frac{s}{\bar{x}} = 0.125$$

$$\frac{s}{40} = 0.125$$

$$s = 5$$

$$\text{สัมประสิทธิ์การแปรผัน} = \frac{s}{\bar{x}}$$

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = s^2$$

$$\text{จะได้ความแปรปรวนที่ถูกต้อง} = s^2 = 5^2 = 25 \text{ ดังนั้น}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } \frac{\sum x_i}{n} = \bar{x} \text{ จะได้ } \sum x_i &= (n)(\bar{x}) \\ &= (60)(40) \\ \text{จาก } \sum c = nc \text{ จะได้ } \sum 1600 &= n(1600) \\ &= (60)(1600) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \frac{\sum (x_i - 40)^2}{60} &= 25 \\ \frac{\sum (x_i^2 - 80x_i + 1600)}{60} &= 25 \\ \frac{\sum x_i^2 - 80 \sum x_i + \sum 1600}{60} &= 25 \\ \frac{\sum x_i^2 - 80(60)(40) + (60)(1600)}{60} &= 25 \\ \frac{\sum x_i^2}{60} - 80(40) + 1600 &= 25 \\ \frac{\sum x_i^2}{60} &= 1625 \quad \dots(*) \end{aligned} \right.$$

$$\text{แต่ นาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยผิดไป} \rightarrow \text{สมมติให้ นาย ก. คำนวณค่าเฉลี่ยได้} = a$$

$$\text{โดย นาย ก. ใช้ } \bar{x} = a \text{ ได้ความแปรปรวน} = 34 \text{ แสดงว่า } \frac{\sum (x_i - a)^2}{60} = 34$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum x_i \text{ ที่เกิดจากการกระจาย } \sum (x_i - a)^2 \\ \text{จะยังเท่ากับ } \sum x_i \text{ ที่ถูกต้อง} = (60)(40) \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \frac{\sum (x_i^2 - 2ax_i + a^2)}{60} &= 34 \\ \frac{\sum x_i^2 - 2a \sum x_i + \sum a^2}{60} &= 34 \\ \frac{\sum x_i^2 - 2a(60)(40) + 60a^2}{60} &= 34 \\ \frac{\sum x_i^2}{60} - 2a(40) + a^2 &= 34 \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } (*) \quad \frac{\sum x_i^2}{60} &= 1625 \\ 1625 - 80a + a^2 &= 34 \\ a^2 - 80a + 1591 &= 0 \\ (a - 37)(a - 43) &= 0 \\ a &= 37, 43 \end{aligned}$$

หมายเหตุ : ข้อนี้ต้องสมมติให้

นาย ก. คำนวณความ

แปรปรวนด้วยสูตร $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$

เท่านั้น

ถ้า นาย ก. ใช้สูตร $\frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

จะได้คำตอบที่ไม่ตรงกับ

ตัวเลือกไหนเลย

$$\text{แต่โจทย์ให้ นาย ก. คำนวณได้ } a < 40 \text{ ดังนั้น จะได้ } a = 37$$

26. 2

จาก (3) จะได้ $a = 9, 10, 11, \dots$ แต่จาก (1) ถ้า a เป็น 10 ขึ้นไป ฝ่ายซ้ายที่เป็น $a^2 + b^2$ จะมีค่าเกิน 90 และ (1) จะไม่จริง $\rightarrow$ ดังนั้น $a = 9$ เท่านั้น

$$\text{แทน } a = 9 \text{ ใน (1) และ (2) จะได้ } \begin{array}{l} 81 + b^2 \leq 90 \\ b^2 \leq 9 \dots (*) \end{array} \quad \text{และ} \quad \begin{array}{l} 9 + b = 5 + c \\ 4 + b = c \dots (**) \end{array}$$

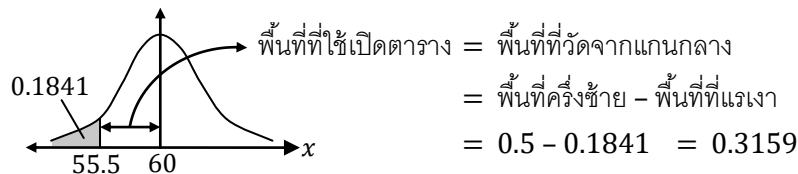
จาก (*) จะได้ $b = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ แทน b แต่ละค่าใน (**) จะได้ $(b, c) = (-3, 1), (-2, 2), (-1, 3), (0, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 7)$ (ก) $a + 2b + 3c$ จะมากที่สุด เมื่อ $(b, c) = (3, 7)$

$$\text{ดังนั้น } a + 2b + 3c \leq 9 + 2(3) + 3(7) = 36 \rightarrow (\text{ก}) \text{ ถูก}$$

(ข) $a^3 + b^3 + c^3$ จะมากที่สุด เมื่อ $(b, c) = (3, 7)$ เช่นกัน

$$\text{จะได้ค่ามากที่สุดของ } a^3 + b^3 + c^3 \text{ คือ } 9^3 + 3^3 + 7^3 = 729 + 27 + 343 = 1099 \rightarrow (\text{ข}) \text{ ผิด}$$

27. 1

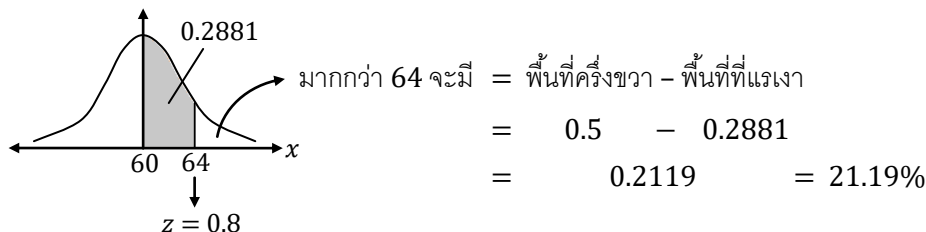
แจกแจงแบบปกติ จะได้ $\bar{x}$ = มัธยฐาน = ฐานนิยม $\rightarrow$ โจทย์ให้ มัธยฐาน = 60 จะได้ $\bar{x} = 60$ ด้วย $\rightarrow$ น้อยกว่า 55.5 คะแนน มี 18.41% จะวาดได้ดังรูปเอาพื้นที่ 0.3159 ไปเปิดตาราง จะได้ $z = 0.9 \rightarrow$ แต่ $x = 55.5$ อยู่ครึ่งซ้าย จะมี z ติดลบ $\rightarrow z = -0.9$

$$\text{แทน } x = 55.5, z = -0.9, \bar{x} = 60 \text{ ในสูตร } z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s} \text{ จะได้ } -0.9 = \frac{55.5 - 60}{s}$$

$$s = \frac{-4.5}{-0.9} = 5$$

หาจำนวนนักเรียนที่ได้สูงกว่า 64 คะแนน $\rightarrow$ แปลง $x = 64$ เป็นค่า z โดยใช้สูตร $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$

$$\text{จะได้ } z_i = \frac{64 - 60}{5} = 0.8 \rightarrow \text{เปิดตารางได้พื้นที่} = 0.2881 \text{ จะวาดได้ดังรูป}$$



28. 2

3 คนแรก มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต = 45 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน = 0 $\rightarrow$ แสดงว่าทั้ง 3 คนได้คะแนนเท่ากัน = 452 คนหลัง มีอัตราส่วนคะแนน = 2 : 3 $\rightarrow$ ให้ทั้งสองคนได้คะแนน $2x$ และ $3x$ ตามลำดับ

$$\text{โจทย์ให้ } \bar{x} \text{ ทั้ง 5 คน} = 50 \rightarrow \frac{45 + 45 + 45 + 2x + 3x}{5} = 50$$

$$\begin{array}{rcl} 135 + 5x & = & 250 \\ 5x & = & 115 \\ x & = & 23 \end{array}$$

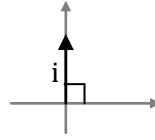
จะได้คะแนนของสองคนหลัง $= 2(23)$ และ $3(23) = 46$ และ 69

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ความแปรปรวน} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(45-50)^2 + (45-50)^2 + (45-50)^2 + (46-50)^2 + (69-50)^2}{5} \\ &= \frac{25+25+25+16+361}{5} = \frac{452}{5} = 90.4 \end{aligned}$$

29. 4

จะได้ z เป็นรากที่ 3 ของ i

หารากที่ 3 ของ $i \rightarrow$ แปลง i เป็นรูปเชิงขั้ว จากรูป จะได้ $i = 1 \operatorname{cis} 90^\circ$



จะได้รากตัวแรกคือ $\sqrt[3]{1} \operatorname{cis} \frac{90^\circ}{3} = 1 \operatorname{cis} 30^\circ$

รากอีกสองตัว จะได้จากการเพิ่มมุม รากละ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ \rightarrow$ รากที่เหลือคือ $1 \operatorname{cis} 150^\circ$ และ $1 \operatorname{cis} 270^\circ$

เนื่องจาก z ต้องมี $ab > 0 \rightarrow$ ดังนั้น a, b ต้องเป็นบวกทั้งคู่ หรือ ลบทั้งคู่ $\rightarrow$ จะได้ z อยู่ใน Q_1 หรือ Q_3

จะเห็นว่า ในรากทั้งสามตัว $1 \operatorname{cis} 30^\circ, 1 \operatorname{cis} 150^\circ, 1 \operatorname{cis} 270^\circ$ จะมี $1 \operatorname{cis} 30^\circ$ เท่านั้น ที่อยู่ใน Q_1 สอดคล้องกับ

เงื่อนไข $\rightarrow$ ดังนั้น $z = 1 \operatorname{cis} 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } |iz^5 + 2|^2 &= |i(1 \operatorname{cis} 30^\circ)^5 + 2|^2 \\ &= |i(1^5 \operatorname{cis} 5(30^\circ)) + 2|^2 \\ &= |i(1 \operatorname{cis} 150^\circ) + 2|^2 \\ &= |i(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) + 2|^2 \\ &= \left| i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) + 2 \right|^2 \\ &= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + 2 \right|^2 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned} &= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2} \right|^2 \\ &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} + \frac{9}{4} \\ &= \frac{12}{4} = 3 \end{aligned}$$

30. 3

$$\begin{aligned} \text{จัดรูปสมการ จะได้ } a^2 + b^2 + 9 &= 4a - 2b + 4 \\ a^2 - 4a + b^2 + 2b + 5 &= 0 \\ a^2 - 4a + 4 + b^2 + 2b + 1 &= 0 \\ (a-2)^2 + (b+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

แยก 5 เป็น 4 + 1 ไปเติมเป็น 4^2 ให้เข้า
สูตร $n^2 + 2nl + l^2 = (n+l)^2$

เนื่องจาก $(a-2)^2 \geq 0$ และ $(b+1)^2 \geq 0$ ดังนั้น ถ้าสองตัวนี้บวกกันเป็น 0 แสดงว่า ต้องเป็น 0 ทั้งสองตัว

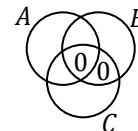
จะได้ $a = 2$ และ $b = -1$

(ก) แทนค่า a กับ b จะได้ $2 < -1 \rightarrow$ (ก) ผิด

(ข) แทนค่า a กับ b จะได้ $\left(\frac{2(2) - (-1)}{5}\right)^n = \left(\frac{2 + 3(-1)^2}{5}\right)^n \rightarrow$ (ข) ถูก

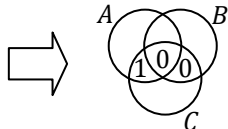
31. 8

เอาข้อมูลที่วาดรูปได้ มาใส่ในแผนภาพก่อน จาก $B \cap C = \emptyset$ จะได้ดังรูป



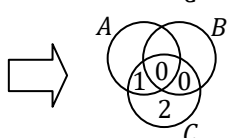
จาก $P(A \cap C)$ มี 2 ตัว $= 2^1$

จะได้ $A \cap C$ มีสมาชิก 1 ตัว



จาก $P(C - A)$ มี 4 ตัว $= 2^2$

จะได้ $C - A$ มีสมาชิก 2 ตัว



จำนวนสมาชิกของ $P(A) = 2^{n(A)}$

จาก $P(D) = \{\emptyset, \{1\}, D, E\}$ มีสมาชิก 4 ตัว $= 2^2 \rightarrow$ ดังนั้น D มีสมาชิก 2 ตัว

เนื่องจาก E เป็นหนึ่งในสมาชิกของ $P(D)$ จากสมบัติของเพาเวอร์เซต จะได้ $E \subset D$

โจทย์กำหนดให้ $\begin{matrix} D \cup E \subset A \cap B \\ D \subset A \cap B \end{matrix} \rightarrow$ จาก $E \subset D$ ดังนั้น $D \cup E = D$

เนื่องจาก D มีสมาชิก 2 ตัว และ $D \subset A \cap B$ ดังนั้น $A \cap B$ จะมีสมาชิก ≥ 2 ตัว

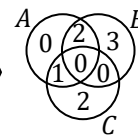
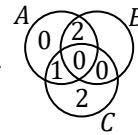
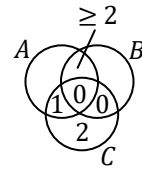
จาก $P(A)$ มี 8 ตัว $= 2^3 \rightarrow$ จะได้ A มีสมาชิก 3 ตัว

แต่จากแผนภาพ จะเห็นว่าวง A มี 1 กับ ≥ 2 ซึ่งครบ 3 แล้ว ดังนั้น

สุดท้าย จาก $P(B)$ มี 32 ตัว $= 2^5$

จะได้ B มีสมาชิก 5 ตัว $\rightarrow$ หักกับ 2 ที่มีอยู่แล้วในวง B จะเหลือ 3

ดังนั้น $A \cup B \cup C$ มีสมาชิก $= 0 + 2 + 3 + 1 + 0 + 0 + 2 = 8$ ตัว



32. 181

เราสามารถจับคู่มุมที่รวมกันเป็น 90° เพื่อเข้าสู่สูตรโคฟังก์ชัน แล้วเข้าสู่สูตร $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ได้ ดังนี้

$$\sin^2 0^\circ + \sin^2 90^\circ = \sin^2 0^\circ + \cos^2 0^\circ = 1$$

$$\sin^2 10^\circ + \sin^2 80^\circ = \sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ = 1$$

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ = \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ = 1$$

$$\sin^2 30^\circ + \sin^2 60^\circ = \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1$$

$$\sin^2 40^\circ + \sin^2 50^\circ = \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ = 1$$

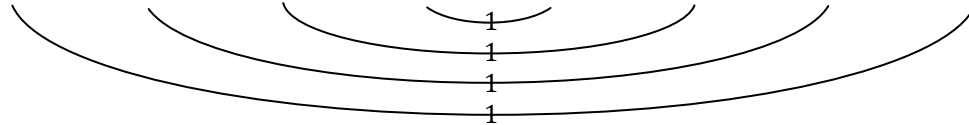
มุมรวมกันได้ $90^\circ \rightarrow \sin = \cos$

ส่วนมุมที่เกิน 90° ต้องทำให้น้อยกว่า 90° ก่อน แล้วค่อยจับคู่ให้ได้ 1 แบบเดิม

มุมรวมกันได้ $180^\circ \rightarrow \sin$ จะเท่ากัน

$$\sin^2 100^\circ + \sin^2 110^\circ + \sin^2 120^\circ + \sin^2 130^\circ + \sin^2 140^\circ + \sin^2 150^\circ + \sin^2 160^\circ + \sin^2 170^\circ + \sin^2 180^\circ$$

$$\sin^2 80^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 50^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ + 0$$



รวมตัวเศษ จะจับคู่ 1 ได้ทั้งหมด 9 คู่ $\rightarrow$ จะได้ เศษ = 9

สำหรับตัวส่วน จะใช้วิธีจับคู่เหมือนเดิมก็ได้ แต่ถ้าสังเกตดีๆ จะเห็นว่า ถ้านำ เศษ กับ ส่วน มารวมกัน จะจับคู่ เข้าสู่สูตร

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \text{ ได้ทั้งหมด } 19 \text{ คู่ } (0, 1, 2, \dots, 18 \text{ มี } 19 \text{ ตัว}) \text{ ดังนั้น เศษ} + \text{ส่วน} = 19$$

$$\text{แต่เศษ} = 9 \text{ ดังนั้น ส่วน} = 19 - 9 = 10 \text{ จะได้ } \frac{a}{b} = \frac{9}{10} \text{ ดังนั้น } a^2 + b^2 = 9^2 + 10^2 = 181$$

33. 4.5

$$\text{แทนค่า } m, n \text{ จะได้ } \log_{\sqrt{3x+4}} \sqrt{4x^2 + 4x + 1} + \log_{2x+1} (6x^2 + 11x + 4) = 4$$

$$2x+1 > 0 \left\{ \begin{array}{l} \log_{\sqrt{3x+4}} \sqrt{(2x+1)^2} + \log_{2x+1} (3x+4)(2x+1) = 4 \\ \log_{(3x+4)^{\frac{1}{2}}} (2x+1) + \log_{2x+1} (3x+4) + \log_{2x+1} (2x+1) = 4 \end{array} \right.$$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}} \log_{3x+4} (2x+1) + \log_{2x+1} (3x+4) + 1 = 4$$

$$2 \log_{3x+4} (2x+1) + \log_{2x+1} (3x+4) + 1 = 4$$

$$2 \log_{3x+4} (2x+1) + \log_{2x+1} (3x+4) - 3 = 0$$

เนื่องจาก $\log_{3x+4} (2x+1)$ กับ $\log_{2x+1} (3x+4)$ เป็นส่วนกลับกัน

ดังนั้น ถ้าเปลี่ยนตัวแปร ให้ $\log_{2x+1}(3x+4) = k$ จะได้อีกตัว $= \frac{1}{k}$

(จะสมมติให้ $\log_{3x+4}(2x+1)$ เป็น k ก็ได้ แต่ $\log_{3x+4}(2x+1)$ อยู่ในรูป $\log$ มาก น้อย จะได้ k เป็นเศษส่วน)

จะเปลี่ยนตัวแปรเป็น k ได้เป็น $\frac{2}{k} + k - 3 = 0$

$$2 + k^2 - 3k = 0$$

$$k^2 - 3k + 2 = 0$$

$$(k-1)(k-2) = 0$$

$$k = 1, 2$$

$$\begin{array}{lcl} \log_{2x+1}(3x+4) = 1 & \swarrow & \log_{2x+1}(3x+4) = 2 \\ 3x+4 = (2x+1)^1 & & 3x+4 = (2x+1)^2 \\ 3x+4 = 2x+1 & & 3x+4 = 4x^2+4x+1 \\ x = -3 & & 0 = 4x^2+x-3 \\ & & 0 = (4x-3)(x+1) \\ & & x = \frac{3}{4}, -1 \end{array}$$

แต่ x เป็น -3 กับ -1 ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $2x+1$ ที่ฐาน $\log$ ติดลบ

จะได้ A มีสมาชิกตัวเดียว คือ $\frac{3}{4} \rightarrow$ ดังนั้น B มีสมาชิกตัวเดียว คือ $8\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 4.5$

34. 16

จะหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลทั้ง 9 ตัว ต้องหา $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{9}$

เนื่องจากสิ่งที่โจทย์ถาม ไม่ขึ้นกับลำดับของ x และ y ดังนั้น โดยไม่เสียนัยตัวไป เราสามารถสมมติให้ข้อมูลทั้งสองชุด เรียงลำดับจากน้อยไปมากเรียบร้อยแล้ว (ถ้าข้อมูลยังไม่เรียง ก็ให้เรียง แล้วเปลี่ยนชื่อตัวแปร)

ชุดแรก โจทย์ให้ มัธยฐาน = 15 $\rightarrow$ มัธยฐานจะอยู่ตรงกลางระหว่างตัวที่ 2 กับ ตัวที่ 3 ดังนั้น $\frac{x_2+x_3}{2} = 15$
 $x_2 + x_3 = 30 \dots(1)$

$$\begin{aligned} Q_1 \text{ จะอยู่ตัวที่ } \frac{(1)(N+1)}{4} &= \frac{(1)(4+1)}{4} = \text{ตัวที่ } 1.25 = \text{ตัวที่ } 1 + (0.25)(\text{ตัวที่ } 2 - \text{ตัวที่ } 1) \\ &= x_1 + (0.25)(x_2 - x_1) \\ &= x_1 + 0.25x_2 - 0.25x_1 \\ &= 0.75x_1 + 0.25x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_3 \text{ จะอยู่ตัวที่ } \frac{(3)(4+1)}{4} &= \text{ตัวที่ } 3.75 = \text{ตัวที่ } 3 + (0.75)(\text{ตัวที่ } 4 - \text{ตัวที่ } 3) \\ &= x_3 + (0.75)(x_4 - x_3) \\ &= x_3 + 0.75x_4 - 0.75x_3 \\ &= 0.25x_3 + 0.75x_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โจทย์ให้ค่าเฉลี่ย } Q_1 \text{ และ } Q_3 &= 18 \rightarrow \text{จะได้ } \frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{0.75x_1+0.25x_2+0.25x_3+0.75x_4}{2} = 18 \\ 0.75(x_1+x_4) + 0.25(x_2+x_3) &= 36 \\ 0.75(x_1+x_4) + 0.25(30) &= 36 \quad \text{จาก (1)} \\ 0.75(x_1+x_4) + 7.5 &= 36 \\ 0.75(x_1+x_4) &= 28.5 \\ x_1 + x_4 &= \frac{28.5}{0.75} = 38 \dots(2) \end{aligned}$$

ชุดที่สอง มีมัธยฐาน = 15 $\rightarrow$ จะได้ตัวตรงกลาง คือ $y_3 = 15 \dots(3)$

$$\begin{aligned} Q_3 \text{ จะอยู่ตัวที่ } \frac{(3)(5+1)}{4} &= \text{ตัวที่ } 4.5 = \text{ตัวที่ } 4 + (0.5)(\text{ตัวที่ } 5 - \text{ตัวที่ } 4) \\ &= y_4 + (0.5)(y_5 - y_4) \\ &= y_4 + 0.5y_5 - 0.5y_4 \\ &= 0.5y_4 + 0.5y_5 \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $Q_3 = 18.5$ ดังนั้น $0.5y_4 + 0.5y_5 = 18.5 \rightarrow$ คูณ 2 ตลอด จะได้ $y_4 + y_5 = 37 \dots(4)$

โจทย์ให้ฐานนิยม = 12 ดังนั้น ต้องมีข้อมูล อย่างน้อยสองตัวเท่ากับ 12 แต่จาก (3) จะได้ $y_3 = 15$ ซึ่งมากกว่า 12 ดังนั้น ถ้าจะมีอย่างน้อยสองตัวเท่ากับ 12 แล้ว สองตัวนั้นต้องเป็น y_1 กับ $y_2 \rightarrow$ จะได้ $y_1 = y_2 = 12 \dots (5)$

$$\begin{aligned} \text{จาก (1), (2), (3), (4), (5) จะได้ } \frac{x_1+x_2+x_3+x_4+y_1+y_2+y_3+y_4+y_5}{9} &= \frac{(x_1+x_4)+(x_2+x_3)+y_1+y_2+y_3+(y_4+y_5)}{9} \\ &= \frac{38 + 30 + 12+12+15+ 37}{9} \\ &= \frac{144}{9} = 16 \end{aligned}$$

35. 35

$$\begin{aligned} \text{จากนิยามของอนุพันธ์ จะได้ } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \begin{array}{l} \text{จาก } f(x+y) = f(x) + f(y) + 3x^2y + 3xy^2 \\ \text{จะได้ } f(x+h) = f(x) + f(h) + 3x^2h + 3xh^2 \end{array} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)+f(h)+3x^2h+3xh^2-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)+3x^2h+3xh^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(h)}{h} + 3x^2 + 3xh \right) \\ \text{จาก } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad &\left(\begin{array}{l} = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)}{h} \right) + \left(\lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh \right) \\ = 2 + 3x^2 + 0 = 3x^2 + 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } f'(x) = 3x^2 + 2 &\rightarrow f'(1) = 3(1^2) + 2 = 5 \\ \text{ดิฟได้ } f''(x) = 6x &\rightarrow f''(5) = 6(5) = 30 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} f'(x) = 3x^2 + 2 \\ f''(x) = 6x \end{aligned}} \right\} \rightarrow f'(1) + f''(5) = 5 + 30 = 35$$

36. 0

ข้อนี้ เงื่อนไขจะต้องเป็นจริง ไม่ว่า a กับ b จะเป็นสมาชิกตัวไหนใน A ก็ตาม ซึ่งจะเห็นว่า เป็นไปไม่ได้ เพราะกรณีที่ a เป็นตัวน้อย และ b เป็นตัวมาก (หรือกรณีที่ a กับ b เป็นตัวเดียวกัน) จะทำให้เงื่อนไข $a - b > 1$ เป็นเท็จเสมอ เช่น กรณี $A = \{4, 7\}$ จะเห็นว่า ถ้า $a = 4, b = 7$ จะทำให้ $4 - 7 > 1$ เป็นเท็จ (หรือกรณีที่ $a = 4, b = 4$ ก็ทำให้ $4 - 4 > 1$ เป็นเท็จ) เมื่อมี a, b บางแบบที่ไม่สอดคล้อง จะทำให้ A ผิดเงื่อนไขทันที (ถึงแม้ว่า $7 - 4$ มากกว่า 1 ก็ตาม) เพราะเงื่อนไขต้องจริง สำหรับทุกๆ a กับ b ใน A

ดังนั้น จะไม่มี A แบบไหนเลย ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดได้ ดังนั้น จำนวนแบบของ A จึงเท่ากับ 0

อย่างไรก็ตาม ถ้าโจทย์ข้อนี้เปลี่ยนเงื่อนไข เป็นคิดเฉพาะ “ทุกสมาชิก a และ b ใน A ที่ $a > b$ ” จะเป็นโจทย์ที่น่าสนใจ เนื่องจาก $a - b > 1$ แสดงว่า ห้ามมีสมาชิกสองตัวไหนอยู่ติดกัน $\rightarrow$ จะแบ่งกรณีนับ ตามขนาดของ A

กรณี A มีสมาชิก 2 ตัว : คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่ “เลือกเก้าอี้ 2 ตัว จาก 7 ตัว โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน” ซึ่งทำได้โดย เอาเก้าอี้ 1 ตัวไปซ่อน แล้วเลือกเก้าอี้ 2 ตัว จาก 6 ตัวที่เหลือ (เลือกได้ $\binom{6}{2}$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้ที่ซ่อนไว้ไปค้น (ตรงไหนก็ได้ ระหว่างเก้าอี้ 2 ตัวที่เหลือ) จะรับประกันได้ว่า เก้าอี้ 2 ตัวที่เหลือ ไม่อยู่ติดกัน
 $\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ แบบ

กรณี A มีสมาชิก 3 ตัว : คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่ “เลือกเก้าอี้ 3 ตัว จาก 7 ตัว โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน” ซึ่งทำได้โดย เอาเก้าอี้ 2 ตัวไปซ่อน แล้วเลือกเก้าอี้ 3 ตัว จาก 5 ตัวที่เหลือ (เลือกได้ $\binom{5}{3}$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้ 2 ตัวที่ซ่อนไว้ไปค้น (ระหว่างตัวแรกที่ถูกเลือกกับตัวที่สองที่ถูกเลือก กับ ระหว่างตัวที่สองที่ถูกเลือกกับตัวที่สามที่ถูกเลือก) จะรับประกันได้ว่า เก้าอี้ทั้ง 3 ตัวที่ถูกเลือก ไม่อยู่ติดกัน $\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ แบบ

กรณี A มีสมาชิก 4 ตัว : คำตอบ จะเท่ากับ จำนวนแบบที่ "เลือกเก้าอี้ 4 ตัว จาก 7 ตัว โดยห้ามเลือกเก้าอี้ที่อยู่ติดกัน"

จะเขียนนับเอาเลยก็ได้ (ได้แบบเดียว คือ 1, 3, 5, 7) หรือจะทำแบบเดิมก็ได้ คือ เอาเก้าอี้ 3 ตัวไปซ้อน แล้วเลือก

เก้าอี้ 4 ตัว จาก 4 ตัวที่เหลือ (เลือกได้ $\binom{4}{4} = 1$ แบบ) แล้วค่อยเอาเก้าอี้ 3 ตัวที่ซ้อนไว้ไปคืน $\rightarrow$ ได้ 1 แบบ

จะเห็นว่า ถ้า A มีสมาชิกมากกว่านี้ จะทำไม่ได้แล้ว

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $= 15 + 10 + 1 = 26$ แบบ

37. 4

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $m = 2^{2x}$ และให้ $n = \log_2 y$

จัดรูปสมการ จะได้ $2^{2x} \log_{\frac{1}{4}} y = 1 + 2^{4x-1}$ และ $9(2^{2x}) \log_{\frac{1}{8}} y = 9 + \log_{\frac{1}{2}} y$

$$2^{2x} \log_{2^{-2}} y = 1 + \frac{2^{4x}}{2} \quad 9(2^{2x}) \log_{2^{-3}} y = 9 + (\log_{2^{-1}} y)^2$$

$$2^{2x} \left(\frac{1}{-2} \log_2 y \right) = 1 + \frac{(2^{2x})^2}{2} \quad 9(2^{2x}) \left(\frac{1}{-3} \log_2 y \right) = 9 + \left(\frac{1}{-1} \log_2 y \right)^2$$

$$\text{คูณตลอดด้วย } -\frac{2}{m} \quad m \left(-\frac{1}{2} n \right) = 1 + \frac{m^2}{2} \quad \text{แทนค่า } n \quad -3m \left(-\frac{2}{m} - m \right) = 9 + \left(\frac{2}{m} + m \right)^2$$

$$n = -\frac{2}{m} - m \quad \dots (*) \quad 6 + 3m^2 = 9 + \frac{4}{m^2} + 4 + m^2$$

$$2m^2 - 7 - \frac{4}{m^2} = 0$$

$$2m^4 - 7m^2 - 4 = 0$$

$$(2m^2 + 1)(m^2 - 4) = 0$$

$$(2m^2 + 1)(m - 2)(m + 2) = 0$$

$$m = 2, -2$$

≥ 0
 $\downarrow$
 $2m^2 + 1$ เป็นบวกเสมอ
 จะไม่มีทางเป็น 0 ได้ $\rightarrow$

แต่ $m = 2^{2x}$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น $m = 2$ ได้ค่าเดียว จะได้ $2^{2x} = 2$
 $2x = 1$
 $x = \frac{1}{2}$

แทนค่า $m = 2$ ใน (*) จะได้ $n = -\frac{2}{2} - 2 = -3$ ดังนั้น $\log_2 y = -3$
 $y = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

จะได้ $\frac{x}{y} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{1} = 4 \rightarrow B$ มีสมาชิกตัวเดียวคือ 4 ดังนั้น สมาชิกน้อยสุด = 4

38. 3.97

ลำดับเลขคณิต จะสามารถใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ได้

ให้ผลต่างร่วมของลำดับทั้งสอง คือ d_a และ d_b จะได้ $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{\frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d_a)}{\frac{n}{2}(2b_1 + (n-1)d_b)} = \frac{2a_1 + (n-1)d_a}{2b_1 + (n-1)d_b}$

แต่โจทย์ให้ $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = \frac{n+1}{2n-1}$ ดังนั้น $\frac{2a_1 + (n-1)d_a}{2b_1 + (n-1)d_b} = \frac{n+1}{2n-1} \dots (1)$

โจทย์ถามค่าของ $\frac{2b_{100}}{a_{100}} \rightarrow$ จากสูตรลำดับเลขคณิต $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้ $\frac{2b_{100}}{a_{100}} = \frac{2(b_1 + (100-1)d_b)}{a_1 + (100-1)d_a}$
 $= \frac{2b_1 + 198d_b}{a_1 + 99d_a} \dots (2)$

จะเห็นว่า จาก (1) ถ้าแทน $n = 199$ จะได้ตัวส่วนฝั่งซ้าย $= 2b_1 + 198d_b$ เหมือนตัวเศษของสิ่งที่โจทย์ถามใน (2)

$\rightarrow$ แทน $n = 199$ ใน (1) จะได้ $\frac{2a_1 + (199-1)d_a}{2b_1 + (199-1)d_b} = \frac{199+1}{2(199)-1}$

กลับเศษกลับส่วน จัดรูปให้
 เหมือนสิ่งที่โจทย์ถามใน (2)

$$\frac{2a_1 + 198d_a}{2b_1 + 198d_b} = \frac{200}{397} \quad \frac{2b_1 + 198d_b}{2(a_1 + 99d_a)} = \frac{397}{200}$$

$$\frac{2b_1 + 198d_b}{2a_1 + 198d_a} = \frac{397}{200} \quad \frac{2b_1 + 198d_b}{a_1 + 99d_a} = \frac{397}{100} = 3.97$$

39. 112

เปลี่ยนตัวแปร ให้ $A = \sqrt{x-1}$ และ $B = \sqrt{2-x} \rightarrow$ จะเปลี่ยนที่ส่วนที่เหลือในสมการให้อยู่ในรูป A กับ B

ลองนำ A และ B มาทดแทนดู จะพบว่า $A^2 = x-1 \quad \dots(1)$

$B^2 = 2-x \quad \dots(2)$

$A^2 + B^2 = x-1 + 2-x = 1 \quad \dots(3)$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x-1)(2-x)} \\ &= \sqrt{2x - x^2 - 2 + x} \\ &= \sqrt{3x - x^2 - 2} \quad \dots(4) \end{aligned}$$

จัดรูปสมการให้อยู่ในรูป A กับ B โดยใช้ (1), (2), (3), (4) ดังนี้

$$\begin{aligned} x + 3\sqrt{3x-2-x^2} &= \quad \quad \quad \begin{array}{c} 3 \quad + \quad 2\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2-x} \\ \downarrow \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 3 \quad AB \quad = \quad 1 + \quad 2-x + \quad 2A \quad - \quad 2B \\ \quad \quad \quad \downarrow \quad \quad \downarrow \\ \quad \quad \quad (3) \quad (2) \\ 3 \quad AB \quad = \quad A^2 + B^2 + B^2 + 2A - 2B \\ \quad \quad \quad = \quad A^2 - 3AB + 2B^2 + 2A - 2B \\ \quad \quad \quad = \quad (A-B)(A-2B) + 2(A-B) \\ \quad \quad \quad = \quad (A-B)(A-2B+2) \end{array} \\ \begin{array}{c} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \quad \quad \quad \left. \begin{array}{c} \text{ดึงตัวร่วม } A-B \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$\frac{A}{\sqrt{x-1}} = \frac{B}{\sqrt{2-x}}$
 $\frac{x-1}{x-1} = \frac{2-x}{2-x}$
 $\frac{2x}{x} = \frac{3}{2}$
 $x = \frac{3}{2}$

ตรวจคำตอบกับสมการก่อนยกกำลังสอง

$$\sqrt{\frac{3}{2}-1} = \sqrt{2-\frac{3}{2}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{จริง}$$

$A - 2B + 2 = 0$
 $A + 2 = 2B$
 $\sqrt{x-1} + 2 = 2\sqrt{2-x}$
 $(\sqrt{x-1} + 2)^2 = (2\sqrt{2-x})^2$
 $x-1 + 4\sqrt{x-1} + 4 = 4(2-x)$
 $x+3 + 4\sqrt{x-1} = 8-4x$
 $5x-5 + 4\sqrt{x-1} = 0$
 $5(x-1) + 4\sqrt{x-1} = 0$
 $5\sqrt{(x-1)^2} + 4\sqrt{x-1} = 0$
 $\sqrt{x-1} \cdot (5\sqrt{x-1} + 4) = 0$

แต่ $5\sqrt{x-1} + 4$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น $\sqrt{x-1} = 0$
 $x = 1$

ตรวจคำตอบกับสมการก่อนยกกำลังสอง

$$\sqrt{1-1} + 2 = 2\sqrt{2-1}$$

$$2 = 2 \rightarrow \text{จริง}$$

จะได้คำตอบคือ $\frac{3}{2}$ และ 1 ดังนั้น $a = \text{ตัวมาก} = \frac{3}{2}$ และ $b = \text{ตัวน้อย} = 1$

ดังนั้น $25b + 58a = 25(1) + 58 \cdot \frac{3}{2} = 25 + 87 = 112$

40. 132

$f'(x) = \frac{2x^4-x}{x^3} = 2x - x^{-2} \rightarrow$ อินทิเกรต จะได้ $f(x) = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^{-1}}{-1} + c$
 $= x^2 + x^{-1} + c$

โจทย์ให้ $g(1) = 2 \rightarrow$ จาก $g(x) = (1+x^2)f(x)$ แทน $x=1$ จะได้ $g(1) = (1+1^2)f(1)$
 $2 = (2)(1^2 + 1^{-1} + c)$
 $1 = 2 + c$
 $-1 = c$

ดังนั้น $f(x) = x^2 + x^{-1} - 1$ แทนใน $g(x)$ จะได้ $g(x) = (1+x^2)(x^2 + x^{-1} - 1)$

$$= x^2 + x^{-1} - 1 + x^4 + x - x^2$$

$$= x^{-1} - 1 + x^4 + x$$

$$g'(x) = -x^{-2} + 4x^3 + 1$$

$$g''(x) = 2x^{-3} + 12x^2$$

ดังนั้น $\int_{-1}^2 x^3 g''(x) dx = \int_{-1}^2 x^3 (2x^{-3} + 12x^2) dx$

$$= \int_{-1}^2 2 + 12x^5 dx$$

$$= 2x + \frac{12x^6}{6} \Big|_{-1}^2$$

$$= (2(2) + 2(2^6)) - (2(-1) + 2(-1)^6) = 132 - 0 = 132$$

41. 15

ต่อเนื่องที่ $x = 0$ แสดงว่า $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

→ หา $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ จะได้ $x < 0 \rightarrow$ ใช้สูตรบน $\rightarrow$ แทน $x = 0$ จะได้ $= e^{2(0)} + 2a = 1 + 2a$

→ หา $f(0)$ จะได้ $x = 0 \rightarrow$ ใช้สูตรกลาง $\rightarrow$ แทน $x = 0$ จะได้ $= a + b$

→ หา $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ จะได้ $x > 0 \rightarrow$ ใช้สูตรล่าง $\rightarrow$ แทน $x = 0$ จะได้ $= \frac{\sqrt{1+b(0)+5(0^2)}-1}{x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \rightarrow$ ต้องจัด

รูปให้ x ตัดกันก่อน (มีรูป $\rightarrow$ คูณคอนจูเกต) แล้วค่อยแทน $x = 0$ ลงไปใหม่ ดังนี้

$$= \frac{\sqrt{1+bx+5x^2}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+bx+5x^2}+1}{\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \quad \left| \quad = \frac{bx+5x^2}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \right.$$

$$= \frac{\sqrt{1+bx+5x^2}-1^2}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \quad \left| \quad = \frac{(x)(b+5x)}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \right.$$

$$= \frac{\cancel{x}+bx+5x^2-\cancel{x}}{(x)\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \quad \left| \quad = \frac{b+5x}{\sqrt{1+bx+5x^2}+1} \rightarrow \text{แทน } x = 0 \text{ จะได้} = \frac{b+5(0)}{\sqrt{1+b(0)+5(0^2)}+1} \right.$$

$$= \frac{b}{\sqrt{1+1}} = \frac{b}{2}$$

จับสามตัวมาเท่ากัน จะได้สมการคือ $1 + 2a = a + b = \frac{b}{2}$

จากคู่นี้ จะได้ $1 + 2a = a + b$ จากคู่นี้ จะได้ $a + b = \frac{b}{2}$

$$a = b - 1 \quad \dots (*) \quad \rightarrow \quad b - 1 + b = \frac{b}{2}$$

$$2b - 1 = \frac{b}{2} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 4b - 2 = b \\ 3b = 2 \\ b = \frac{2}{3} \end{array} \right.$$

แทน $b = \frac{2}{3}$ ใน $(*)$ จะได้ $a = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$

ดังนั้น $15a + 30b = 15\left(-\frac{1}{3}\right) + 30\left(\frac{2}{3}\right) = -5 + 20 = 15$

42. 8

จะได้ $\frac{a_n}{b_n} = \frac{\frac{2^n}{n(n+2)}}{\frac{3^n}{5n+18}} = \frac{2^n}{n(n+2)} \cdot \frac{5n+18}{3^n} = \frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{5n+18}{n(n+2)} \rightarrow$ จะใช้เทคนิคเทเลสโคปิค ลองแยก $\frac{5n+18}{n(n+2)}$ เป็นผลบวกของ

เศษส่วนสองตัว แล้วหวังว่า ค่าลบของตัวหน้า จะหักกับค่าบวกของตัวหลังได้

สมมติให้ $\frac{5n+18}{n(n+2)}$ แยกเป็นผลลบได้ $\frac{A}{n} - \frac{B}{n+2} \rightarrow$ นั่นคือ $\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{B}{n+2}$

$$\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{A(n+2) - Bn}{n(n+2)}$$

$$5n + 18 = An + 2A - Bn$$

$$5n + 18 = (A - B)n + 2A$$

จัดรูปเรียงตามกำลังของ n เพื่อเทียบ สปส.

$$5 = A - B \quad 18 = 2A$$

$$5 = 9 - B \quad 9 = A$$

$$B = 4$$

ดังนั้น $\frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{9}{n} - \frac{4}{n+2}$

ดังนั้น $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{5n+18}{n(n+2)} = \frac{2^n}{3^n} \left(\frac{9}{n} - \frac{4}{n+2} \right) = \frac{2^n}{3^n} \left(\frac{3^2}{n} - \frac{2^2}{n+2} \right) = \frac{2^n}{(3^{n-2})(n)} - \frac{2^{n+2}}{(3^n)(n+2)}$

แทน $n = 1, 2, 3, \dots$ ใน $\frac{a_n}{b_n} = \frac{2^n}{(3^{n-2})(n)} - \frac{2^{n+2}}{(3^n)(n+2)}$ แล้วเอามาวกกัน จะได้ ค่าของ $\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \dots$ ดังนี้

$$= \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} + \frac{a_5}{b_5} + \dots$$

$$= \frac{2^1}{(3^{-1})(1)} - \frac{2^3}{(3^1)(3)} + \frac{2^2}{(3^0)(2)} - \frac{2^4}{(3^2)(4)} + \frac{2^3}{(3^1)(3)} - \frac{2^5}{(3^3)(5)} + \frac{2^4}{(3^2)(4)} - \frac{2^6}{(3^4)(6)} + \frac{2^5}{(3^3)(5)} - \frac{2^7}{(3^5)(7)} + \dots$$

จะเห็นว่า ค่าลบของตัวหน้า จะตัดกับ ค่าบวกของตัวที่ถัดไปสองตัว ได้ เสมอ

สุดท้าย จะเหลือค่าบวกของสองตัวหน้า (กับค่าลบสองตัวสุดท้าย ซึ่ง $\frac{2^n}{3^n} \cdot \frac{5n+18}{n(n+2)}$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ n มีค่ามาก)

ดังนั้น จะได้ผลบวก = ค่าบวกของสองตัวหน้า = $\frac{2^1}{(3^{-1})(1)} + \frac{2^2}{(3^0)(2)} = 6 + 2 = 8$

43. 1806

มีกระเบื้องแต่ละสีอย่างน้อยหนึ่งแผ่น แสดงว่า ใน 7 แผ่น ต้องมีครบทั้ง 3 สี

ดังนั้น จะมีกระเบื้องสีเดียวกันได้ไม่เกิน 5 แผ่น (เพราะถ้ามีสีเดียวกัน 6 แผ่น รวมกับที่เหลืออีกแผ่นจะได้ไม่ครบ 3 สี)

ซึ่งโจทย์มีกระเบื้องอย่างน้อยสีละ 5 แผ่น แสดงว่ามีกระเบื้องเหลือเพื่อ นับได้โดยไม่ต้องกังวลว่ากระเบื้องสีไหนจะไม่พอ

โดยข้อนี้ จะนับแบบตรงข้าม แล้วเอาทั้งหมดตั้งลบ

จำนวนแบบทั้งหมด $\rightarrow$ มี 7 ตำแหน่ง แต่ละตำแหน่งเลือกได้ 3 สี $\rightarrow$ เลือกได้ทั้งหมด = 3^7 แบบ

จำนวนแบบที่มีสีเดียว $\rightarrow$ เลือก 1 สีจาก 3 สี ได้ 3 แบบ (แดงล้วน, ขาวล้วน, เขียวล้วน) $\rightarrow$ 3 แบบ

จำนวนแบบที่มีสองสี $\rightarrow$ ขั้นที่ 1 : เลือก 2 สีจาก 3 สี ได้ $\binom{3}{2}$ แบบ

$\rightarrow$ ขั้นที่ 2 : นำ 2 สีจากขั้นแรกมาใช้ เช่น สมมติขั้นแรก เลือกได้สีแดงกับขาว $\rightarrow$ มี 7 ตำแหน่ง

แต่ละตำแหน่งเป็นแดงหรือขาวได้ 2 สี $\rightarrow$ เลือกได้ 2^7 แบบ $\rightarrow$ แต่อยากได้แบบที่

มีสองสี ต้องหักแบบที่มีสีเดียวออก 2 แบบ (แดงล้วน กับขาวล้วน) ได้ $2^7 - 2$ แบบ

$\rightarrow$ จะได้จำนวนแบบที่มีสองสี = $\binom{3}{2}(2^7 - 2)$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบที่มีครบทั้ง 3 สี = จำนวนแบบทั้งหมด - จำนวนแบบที่มีสีเดียว - จำนวนแบบที่มีสองสี

$$= 3^7 - 3 - \binom{3}{2}(2^7 - 2)$$

$$= 2187 - 3 - (3)(126) = 1806$$

44. 0.5

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \left(1 - \frac{1}{5^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
 &= \left(\frac{2^2-1}{2^2}\right) \left(\frac{3^2-1}{3^2}\right) \left(\frac{4^2-1}{4^2}\right) \left(\frac{5^2-1}{5^2}\right) \dots \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) \\
 &= \left(\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\right) \left(\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\right) \left(\frac{(4-1)(4+1)}{4^2}\right) \left(\frac{(5-1)(5+1)}{5^2}\right) \dots \left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) \\
 &= \left(\frac{(\cancel{2})}{2} \cdot \frac{(\cancel{3})(3)}{2}\right) \left(\frac{(\cancel{3})(\cancel{4})}{3} \cdot \frac{(\cancel{4})(4)}{3}\right) \left(\frac{(\cancel{4})(\cancel{5})}{4} \cdot \frac{(\cancel{5})(5)}{4}\right) \left(\frac{(\cancel{5})(\cancel{6})}{5} \cdot \frac{(\cancel{6})(6)}{5}\right) \dots \left(\frac{(\cancel{n})(\cancel{n+1})}{n} \cdot \frac{(\cancel{n+1})(n+1)}{n}\right)
 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ตัวเลขในกรอบสี่เหลี่ยม ตัดกันได้หมด เหลือ $a_n = \frac{(\cancel{1})(n+1)}{(\cancel{2})(\cancel{n})} = \frac{n+1}{2n}$

ดังนั้น $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} \rightarrow \text{ดีกรีบน} = \text{ดีกรील่าง} \text{ จะได้ลิมิต} = \frac{\text{สปสบน}}{\text{สปสล่าง}} = \frac{1}{2} = 0.5$

45. 60

ให้ $|x| - x + y = 8 \quad \dots(1)$
 $x + |y| + y = 10 \quad \dots(2)$

$$|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$$

สังเกตว่า ถ้า x เป็นบวก แล้ว $|x| - x$ ใน (1) จะตัดกันได้

ดังนั้น เราจะลองสมมติให้ $x \geq 0$ ดู $\rightarrow$ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|x| = x$

จะได้ (1): $x - x + y = 8$
 $y = 8 \rightarrow$ แทนใน (2) ได้ $x + |8| + 8 = 10$
 $x = -6 \rightarrow$ ขัดแย้งกับที่สมมติให้ $x \geq 0$

ดังนั้น $x \geq 0$ ไม่ได้ $\rightarrow$ จึงสรุปได้ว่า $x < 0$ เท่านั้น

จาก $x < 0$ และ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|x| = -x \rightarrow$ จะได้ (1): $(-x) - x + y = 8$
 $-2x + y = 8 \quad \dots(3)$

ถัดมา สังเกตว่าถ้า y เป็นลบ แล้ว $|y| + y$ ใน (2) จะตัดกันได้

ดังนั้น เราจะลองสมมติให้ $y < 0$ ดู $\rightarrow$ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|y| = -y$

จะได้ (2): $x + (-y) + y = 10$
 $x = 10 \rightarrow$ ขัดแย้งกับข้อสรุปก่อนหน้านี้ ที่ว่า $x < 0$

ดังนั้น $y < 0$ ไม่ได้ $\rightarrow$ จึงสรุปได้ว่า $y \geq 0$ เท่านั้น

จาก $y \geq 0$ และ จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์จะได้ $|y| = y \rightarrow$ จะได้ (2): $x + y + y = 10$
 $x + 2y = 10 \quad \dots(4)$

เอา (3) กับ (4) มาแก้ระบบสมการ

$$-2x + y = 8 \quad \dots(3)$$

$2 \times (4)$ แล้วบวกกับ (3) จะทำให้ x ตัดกันได้

$$x + 2y = 10 \quad \dots(4)$$

$$2 \times (4): \quad 2x + 4y = 20 \quad \dots(5)$$

$$(3) + (5): \quad 5y = 28$$

$$y = 5.6$$

แทน $y = 5.6$ ใน (4): $x + 2(5.6) = 10$
 $x = 10 - 11.2 = -1.2$

ดังนั้น $20x + 15y = 20(-1.2) + 15(5.6)$
 $= -24 + (84) = 60$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ บุญช่วย ฤทธิเทพ สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ อ. ศิลา สุวัชรศรี และ คุณ Tarm Chaidirek ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของข้อสอบ

ขอบคุณ เฉลยคำตอบ จากคุณ Tarm Chaidirek

ขอบคุณ เฉลยข้อ 6. จากคุณ Prasop Tongtawat

ขอบคุณ เฉลยข้อ 14. จากคุณ สุภาพกรณ์ สุวรรณกิจ

ขอบคุณ เฉลยละเอียด จาก #GTRmath by GTRping

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490 ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของ
เฉลย

ขอบคุณ คุณ สดุดี นนท์คำภา ที่ช่วยตรวจสอบคุณภาพของเฉลย