

PAT 1 (พ.ย. 57)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 22 พฤศจิกายน 2557 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 30 ข้อละ 6 คะแนน

1. กำหนดให้ p, q และ r แทนประพจน์ใดๆ ให้ $S(p, q, r)$ แทนประพจน์ที่ประกอบด้วยประพจน์ p, q และ r และค่าความจริงของประพจน์ $S(p, q, r)$ แสดงดังตารางต่อไปนี้

p	q	r	ค่าความจริงของ $S(p, q, r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

ประพจน์ $S(p, q, r)$ สมมูลกับประพจน์ใดต่อไปนี้

- | | |
|---|---|
| 1. $(q \rightarrow p) \vee (q \wedge r)$ | 2. $(q \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$ |
| 3. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (q \wedge r)$ | 4. $(p \wedge \sim q) \rightarrow (p \rightarrow \sim r)$ |

2. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $\exists x \forall y [x^2 - y^2 < y - x]$ มีค่าความจริงเป็นจริง(ข) ประพจน์ $\forall x \forall y [|x - y| < 1 - xy]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

3. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมโดยมีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B และมุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ สมมติว่ามุม A มีขนาดเป็นสามเท่าของมุม B และ $a = 2b$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

(ข) ถ้า $a = kc$ แล้ว k สอดคล้องกับ $3x^3 - 9x^2 - x + 3 = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

4. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก นิยาม aRb หมายถึง a หารด้วย b ลงตัว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า xRy และ yRz แล้ว $xR(y+z)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก x, y และ z

(ข) ถ้า wRx และ yRz แล้ว $(wy)R(xz)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก w, x, y และ z

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่มากกว่า 1 และสอดคล้องกับ $\log_a 4 + \log_b 4 = 9 \log_{ab} 2$

ค่ามากที่สุดของ $\log_a(ab^5) + \log_b\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|---------|---------|------|------|
| 1. 13.5 | 2. 11.5 | 3. 9 | 4. 7 |
|---------|---------|------|------|

6. $\frac{\sin 25^\circ \sin 85^\circ \sin 35^\circ}{\sin 75^\circ}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\tan 15^\circ$
2. $\sin 15^\circ \sin 75^\circ$
3. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$
4. $\sec 420^\circ$

7. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และกำหนดให้ $f(x) = ax + \frac{b}{x}$ เมื่อ $x \neq 0$ โดยที่ $y = f(x)$ เป็นเส้นโค้งที่สัมผัสกับเส้นตรง $y = 1$ ที่จุด $(1, 1)$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

(ข) $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x) = f(2a^2 + 2b^2)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

8. ให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$ และให้ A เป็นสับเซตของ S โดยมีจำนวนสมาชิกของเซต A เท่ากับ 4 ความน่าจะเป็นที่จะได้เซต A โดยที่สมาชิกในเซต A จัดเรียงเป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเป็นจำนวนเต็มบวก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{455}$

2. $\frac{4}{455}$

3. $\frac{1}{91}$

4. $\frac{2}{91}$

9. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ที่สอดคล้องกับสมการ $|z| + 2\bar{z} - 3z = 3 - 45i$ เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ z และ $\bar{z}$ แทนสังยุค (conjugate) ของ z ค่าของ $|z|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 95

2. 225

3. 245

4. 375

10. กำหนดให้ $y^2 - 2x^2 + 8x - 6 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ให้เส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่จุด A และจุด B เมื่อจุด B อยู่ทางขวามือของจุด A และเส้นตรง $y = \sqrt{2}$ ตัดกับกราฟไฮเพอร์โบลาที่จุด P และจุด Q เมื่อจุด Q อยู่ทางขวามือของจุด P สมการของวงรีที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด P และจุด Q โฟกัสของวงรีอยู่ที่จุด A และจุด B มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|---|---|
| 1. $2x^2 + y^2 - 8x + 4\sqrt{2}y - 4 = 0$ | 2. $2x^2 + y^2 - 8x - 2\sqrt{2}y + 8 = 0$ |
| 3. $x^2 + 2y^2 - 4x - 4\sqrt{2}y + 6 = 0$ | 4. $x^2 + 2y^2 + 4x + 4\sqrt{2}y + 6 = 0$ |

11. ให้ C เป็นวงกลมมีสมการ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ในควอดรนต์ (quadrant) ที่ 1 และวงกลม C สัมผัสแกน y ให้ P เป็นพาราโบลามีสมการ $Dx = y^2 + Ey + F$ ผ่านจุด $(-4, -1)$ และระยะระหว่างจุดยอดกับโฟกัสเท่ากับ 1 หน่วย พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $D^2 + E^2 + F^2 = 133$

(ข) เส้นตรง $4x + 3y - 7 = 0$ สัมผัสกับวงกลม C

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

12. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่ด้าน AB ยาว 5 หน่วย ด้าน BC ยาว 12 หน่วย และมุม ABC เท่ากับ 60° ถ้าเวกเตอร์ $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ เวกเตอร์ $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ และเวกเตอร์ $\vec{w} = \overrightarrow{CA}$ แล้ว $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 64
 2. 109
 3. 114
 4. 124

13. ให้ A เป็นเอกพจน์สัมพัทธ์ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x [2x^2 + x - 3 \leq 0 \text{ และ } |x - 2| \leq 3]$ มีค่าความจริงเป็นจริง และให้ B เป็นเซตคำตอบของสมการ $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. $A \subset B$
 2. $A - B$ มีสมาชิก 2 ตัว
 3. $(A - B) \cup (B - A) = (-6, 1)$
 4. $(-6, 0) \subset (B - A)$

14. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกและสอดคล้องกับสมการ $2 \log_2(x - 2y) + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} y = 0$ แล้ว $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 2
 2. 5
 3. 10
 4. 17

15. ให้ a, b, c, d และ x เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{a+x}{b} < \frac{c+x}{d}$

(ข) $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

16. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยทั้ง f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ และสอดคล้องกับ $(f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ สำหรับทุก x ที่อยู่ในโดเมนของ $f \circ g$ และ $\int g(x) dx = x^2 - 4x + C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว ถ้า L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสเส้นโค้ง $y = f(x)$ ณ $x = 0$ แล้วเส้นตรง L ตั้งฉากกับเส้นตรงที่มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y - 3 = 0$

2. $2x + y - 7 = 0$

3. $3x + y - 5 = 0$

4. $5x + y - 2 = 0$

17. กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(-2, -4)$ มีความชันเป็นจำนวนเต็มบวก และตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และจุด B ตามลำดับ โดยผลบวกของระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 3 หน่วย ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และผ่านจุด $(0, -13)$ ถ้า C เป็นจุดบนเส้นตรง L_2 โดยที่ $CA = CB$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8.5 ตารางหน่วย

2. 7.5 ตารางหน่วย

3. 6.5 ตารางหน่วย

4. 5.5 ตารางหน่วย

18. กำหนดให้ฟังก์ชันจุดประสงค์ $P_1 = 5x + 2y$ และ $P_2 = 4x + 3y$ โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้

$$2x + 3y \geq 6, \quad 3x - y \leq 15, \quad -x + y \leq 4, \quad 2x + 5y \leq 27, \quad x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

ให้ ค่ามากที่สุดของ P_1 และ P_2 เท่ากับ M_1 และ M_2 ตามลำดับ

และค่าน้อยที่สุดของ P_1 และ P_2 เท่ากับ N_1 และ N_2 ตามลำดับ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) M_1 มีค่ามากกว่า M_2

(ข) N_1 มีค่าน้อยกว่า N_2

ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

19. กำหนดให้ $f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ b, c และ d เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\int_{-2}^2 f(x) dx = -\frac{64}{3}$

ถ้า $g(x)$ เป็นพหุนามซึ่ง $g'(x) = f(x)$ และ $g'(1) = g'(0) = g(0) = 0$

แล้ว $g''(x) = g'(x) + g(x)$ ตรงกับสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 6x = 0$

2. $x^4 - 8x^3 - 12x^2 - 6x = 0$

3. $3x^4 - 16x^3 + 48x^2 - 24x = 0$

4. $3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 24x = 0$

20. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_1 = \frac{1}{6}$ และ $a_n = a_{n-1} - \frac{1}{3^n}$ สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

(ข) อนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า มีผลบวกเท่ากับ 0.75

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

21. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $ab = 24$ และ $cd = 8$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $d > b$ แล้ว $\frac{\sqrt{a}}{(c+1)^b} < \frac{\sqrt{c}}{(a+1)^d}$

(ข) ถ้า $a < c$ แล้ว $(0.01)^b < (0.05)^d$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

22. นิยาม จำนวนสามหลักลด คือ จำนวน ABC โดยที่ $A, B, C \in \{0, 1, \dots, 9\}$ และ $A > B > C$ จำนวนวิธีสร้าง
จำนวนสามหลักลด ที่มีค่ามากกว่า 500 มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| 1. 119 | 2. 117 | 3. 114 | 4. 110 |
|--------|--------|--------|--------|

23. ให้ S เป็นเซตของข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็ม n จำนวนที่แตกต่างกัน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลใน S เท่ากับ 22 ถ้านำค่าต่ำสุดของข้อมูลออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 24 ถ้านำค่าสูงสุดของข้อมูลออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 15 แต่ถ้านำทั้งค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดออกจาก S จะได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) พิสัยของข้อมูลเท่ากับ 96

(ข) $n = 9$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

24. กำหนดให้เส้นตรง L เป็นความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y ที่กำหนดในตารางต่อไปนี้ โดยที่ x เป็นตัวแปรอิสระ

x	1	2	3	4	5
y	9	11	b	17	19

และให้ $(3, b)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L เมื่อ b เป็นจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $b = 13$

(ข) ถ้าค่าของ x เพิ่มขึ้น 0.5 แล้วค่าของ y จะเพิ่มขึ้น 1.3

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

25. กำหนดให้ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นจำนวนจริงบวก ข้อมูลชุดที่ 1 คือ $x_1, x_2, \dots, x_n$ และ

ข้อมูลชุดที่ 2 คือ $2x_1 + 1, 2x_2 + 1, \dots, 2x_n + 1$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 1 มากกว่า สัมประสิทธิ์ของการแปรผันของข้อมูลชุดที่ 2

(ข) สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูลชุดที่ 1 น้อยกว่า สัมประสิทธิ์พิสัยของข้อมูลชุดที่ 2

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

26. กำหนดให้ A เป็น 2×3 เมทริกซ์ B เป็น 3×2 เมทริกซ์ และ C เป็น 2×2 เมทริกซ์ โดยที่ $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\det(AB) - \det(BA) = 0$

(ข) ถ้า $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $CAB = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 10 \end{bmatrix}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

27. คะแนนสอบของนักเรียน 160 คน มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 60 คะแนน มีนักเรียนเพียง 4 คนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 84.5 คะแนน นักเรียนที่สอบได้ 55 คะแนนจะอยู่ตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

z	0.3	0.4	0.5	1.0	1.1	1.96	2.0
พื้นที่	0.1179	0.1554	0.1915	0.3413	0.3643	0.4750	0.4773

1. 19.15 2. 15.54 3. 34.46 4. 30.85
28. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวนที่แตกต่างกัน โดยที่ค่าเฉลี่ยของควอร์ไทล์ที่หนึ่ง และควอร์ไทล์ที่สาม เท่ากับมัธยฐาน ถ้าส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 2.8 และมัธยฐานเท่ากับ 15 แล้วส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3.5 2. 5.25 3. 7.5 4. 11.25

29. ถ้า $\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\cos^4 x}{7} = \frac{1}{12}$ สำหรับบาง $x > 0$ แล้วค่าของ $\frac{\sin^2(2x)}{5} + \frac{\cos^2(2x)}{7}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{144}$ 2. $\frac{25}{126}$ 3. $\frac{2}{9}$ 4. $\frac{1}{6}$

30. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับ

$$B = C + D, \quad D = A + C - B \quad \text{และ} \quad A = 2C - B \quad \text{ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง}$$

- | | |
|--------------------|--------------------|
| 1. $D < A < C < B$ | 2. $A < D < C < B$ |
| 3. $D < C < A < B$ | 4. $C < A < D < B$ |

ตอนที่ 2 ข้อ 31 - 45 ข้อละ 8 คะแนน

31. ให้ S' แทนคอมพลีเมนต์ของเซต S และ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของ

เอกภพสัมพัทธ์ U โดยที่ $A \cap C = \emptyset, A - B \neq \emptyset, B - A \neq \emptyset, B - C \neq \emptyset$ และ $C - B \neq \emptyset$

ถ้า $n(U) = 20, n(A') = 12, n(B') = 9, n(C') = 15, n((A - B) \cup (B - A)) = 11$

และ $n((B - C) \cup (C - B)) = 12$ แล้ว $n((A - B) \cup (C - B))$ เท่ากับเท่าใด

32. ให้ $A = \cos 15^\circ + \cos 87^\circ + \cos 159^\circ + \cos 231^\circ + \cos 303^\circ$

$$\text{และ } B = \sin\left(\arctan\left(\frac{15}{8}\right) + \arccos\left(\frac{4}{5}\right)\right)$$

ถ้า $A + B = \frac{a}{b}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้วค่าของ $a + b$ เท่ากับเท่าใด

33. ให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = \sqrt{2}$, $|z_2| = \sqrt{3}$ และ $|z_1 - z_2| = 1$
แล้วค่าของ $|z_1 + z_2|$ เท่ากับเท่าใด เมื่อ $|z|$ แทนค่าสัมบูรณ์ของ z

34. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a > 0$ และ $b > 1$ ถ้า $ab = b^a$ และ $b = ab^{3a}$ แล้ว $20a + 14b$
เท่ากับเท่าใด

35. ให้ a เป็นจำนวนจริงบวก และให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $b_n = (a + n - 1)(a + n)$ สำหรับ
 $n = 1, 2, 3, \dots$ ถ้า a สอดคล้องกับ $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \dots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}} \right) = \frac{1}{312}$ แล้วค่าของ $a^2 + 57$ เท่ากับ
เท่าใด

36. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\begin{bmatrix} |x| & 1 \\ 2 & x - |y| \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} y & 3 \\ -1 & |y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+x & 0 \\ 7 & 7-y \end{bmatrix}^t$
แล้วค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด

37. กำหนดให้ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ให้ S เป็นเซตของคู่อันดับ (A, B) ทั้งหมด โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2 เมื่อ A และ B เป็นสับเซตของ U จำนวนสมาชิกของเซต S เท่ากับเท่าใด

38. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 2$ และ $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$ สมมุติว่า a_2, a_4, a_8 เรียงกันเป็น
ลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ n ที่ทำให้ $\frac{(a_1-1)^3 + (a_2-1)^3 + \dots + (a_n-1)^3}{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} = \frac{391}{450}$

39. ให้ S แทนเซตคำตอบของสมการ $3\sqrt{2+x} - 6\sqrt{2-x} + 4\sqrt{4-x^2} = 10 - 3x$ ถ้าผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S เท่ากับ $\frac{a}{b}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $8 \cos(2\theta) + 8 \sec(2\theta) = 65$ เมื่อ $0 < \theta < 90^\circ$ ค่าของ $160 \sin(\frac{\theta}{2}) \sin(\frac{5\theta}{2})$ เท่ากับเท่าใด

41. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง โดยที่ $f(2x - 1) = 4x^2 - 10x + a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ $f(0) = 12$ ค่าของ $\int_1^4 f(x) dx$ เท่ากับเท่าใด

42. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันโดยที่ $g(x) = 2f(x) + 5$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
ถ้า a เป็นจำนวนจริงที่ $(f \circ g^{-1})(1 + a) = (g \circ f^{-1})(1 + a)$ แล้วค่าของ a^2 เท่ากับเท่าใด

43. ให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $(4^x + 2^x - 6)^3 = (2^x - 4)^3 + (4^x - 2)^3$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

44. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่

$$f(x) = x + 1 \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R} \quad g(f(x)) = x^2 + 2x - 1 \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{และ } s(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h} \text{ สำหรับทุก } x \in \mathbb{R} \quad \text{ค่าของ } (sg)(1) \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

45. ให้ $A = \{0, 1, 2, \dots\}$ กำหนดให้ $a(n, m) \in A$ สำหรับทุก $n, m \in A$ โดยที่

$$(ก) \ a(n, 0) = n + 1 \text{ สำหรับทุก } n \in A$$

$$(ข) \ a(0, m) = a(1, m - 1) \text{ สำหรับทุก } m \in A - \{0\}$$

$$(ค) \ a(n + 1, m + 1) = a(a(n, m + 1), m) \text{ สำหรับทุก } n, m \in A$$

ถ้า $x \in A$ และ $a(x, 2) = 2557$ แล้วค่าของ x เท่ากับเท่าใด

เฉลย

1. 3	11. 1	21. 3	31. 7	41. 34.5
2. 3	12. 4	22. 4	32. 169	42. 36
3. 2	13. 2	23. 4	33. 3	43. 3.5
4. 3	14. 4	24. 3	34. 66	44. 4
5. 2	15. 4	25. 4	35. 201	45. 1277
6. 2	16. 3	26. 4	36. 3	
7. 1	17. 1	27. 3	37. 270	
8. 4	18. 1	28. 1	38. 14	
9. 2	19. 4	29. 2	39. 11	
10. 3	20. 2	30. 1	40. 55	

แนวคิด

1. 3

จะได้แทนแต่ละข้อดูก็ได้ หรืออีกวิธีคือ สังเกตว่า 4 แถวกลางของตารางที่ p เป็น F จะได้ช่องผลลัพธ์เป็น T

ดังนั้น $S(p, q, r)$ น่าจะอยู่ในรูป $\sim p \vee \underline{\quad}$ (เพราะ $\sim F \vee \underline{\quad} \equiv T \vee \underline{\quad}$ จะเป็น T เสมอ)

และ 4 แถวบน จะได้ผลลัพธ์เหมือน q ดังนั้น $S(p, q, r) \equiv \sim p \vee q$

ทำแต่ละข้อให้อยู่ในรูปอย่างง่าย จะได้ตรงกับข้อ 3

$$\begin{aligned}
 1. & \equiv \sim q \vee p \vee (q \wedge r) \\
 & \equiv p \vee [(\sim q \vee q) \wedge (\sim q \vee r)] \quad \left. \begin{array}{l} \text{กระจาย } \sim q \vee \\ \text{เข้าไปในวงเล็บ} \end{array} \right\} \\
 & \equiv p \vee [T \wedge (\sim q \vee r)] \\
 & \equiv p \vee (\sim q \vee r)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. & \equiv \sim(\sim q \vee p) \vee (\sim p \vee \sim r) \\
 & \equiv (q \wedge \sim p) \vee \sim p \vee \sim r \\
 & \equiv (q \wedge \sim p) \vee (T \wedge \sim p) \vee \sim r \quad \left. \begin{array}{l} \text{เปลี่ยน } \sim p \text{ เป็น } T \wedge \sim p \\ \text{เพื่อดึงตัวร่วม } q \end{array} \right\} \\
 & \equiv [(q \vee T) \wedge \sim p] \vee \sim r \\
 & \equiv [T \wedge \sim p] \vee \sim r \\
 & \equiv \sim p \vee \sim r
 \end{aligned}$$

หรือจะใช้สูตร $\boxed{p \wedge (p \vee q) \equiv p}$
 $\boxed{p \vee (p \wedge q) \equiv p}$
 ใช้สูตรล่าง จะทำจากบรรทัด 2 ไปบรรทัดสุดท้ายเลยได้

$$\begin{aligned}
 3. & \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge r) \\
 & \equiv \sim p \vee q \vee (q \wedge r) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ควานี้ขอใช้สูตรในกรอบสี่เหลี่ยม (สูตรล่าง)} \\ \text{(หรือจะเปลี่ยน } q \text{ เป็น } q \wedge T) \end{array} \right\} \\
 & \equiv \sim p \vee q
 \end{aligned}$$

แล้วดึงตัวร่วม $q \wedge$ แบบข้อ 2 ก็ได้

$$\begin{aligned}
 4. & \equiv \sim(p \wedge \sim q) \vee (p \rightarrow \sim r) \\
 & \equiv \sim p \vee q \vee (\sim p \vee \sim r) \\
 & \equiv \sim p \vee q \vee \sim r
 \end{aligned}$$

2. 3

ก. $\exists x \forall y$ เป็นจริงเมื่อ มี x หนึ่งค่า ที่คู่กับ y ได้ทุกตัว

สังเกตว่า ถ้า $y = x$ ประโยคนี้จะกลายเป็น $0 < 0$ ซึ่งไม่จริง ดังนั้น x จะคู่กับ y ไม่ได้ทุกตัว

(เช่น $x = 0.2$ จะคู่กับ $y = 0.2$ ไม่ได้, $x = 0.7$ จะคู่กับ $y = 0.7$ ไม่ได้) $\rightarrow$ ก. ผิด

ข. จะเห็นว่า อสมการเป็นบวกทั้งสองฝั่ง (เพราะเอกภาพสัมพัทธ์คือ $(0, 1)$ บังคับใช้กับทั้ง x และ y ซึ่งจะทำให้ $1 - xy$ เป็นบวก) ดังนั้น จะสามารถยกกำลังสองทั้งสองข้างเพื่อกำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์ได้

$$\begin{aligned}
 |x - y|^2 & < (1 - xy)^2 \\
 (x - y)^2 & < (1 - xy)^2 \\
 (x - y)^2 - (1 - xy)^2 & < 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ไม่ต้องกระจาย แต่ให้ย้ายข้าง} \\ \text{แล้วใส่สูตร } n^2 - l^2 = (n + l)(n - l) \end{array} \right\} \\
 (x - y + 1 - xy)(x - y - 1 + xy) & < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+1-y-xy)(x-1-y+xy) &< 0 \\ (x+1-y(1+x))(x-1+y(-1+x)) &< 0 \\ (x+1)(1-y) & \quad (x-1)(1+y) < 0\end{aligned}$$

เนื่องจาก $x, y \in (0, 1) \rightarrow (+)(+) \quad (-)(+) \rightarrow$ เป็นลบ < 0 จริง $\rightarrow$ ข. ถูก

3. 2

ก. จากกฎของ sin จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ แทน $A = 3B$ และ $a = 2b$ ในคู่แรก จะได้ $\frac{2b}{\sin 3B} = \frac{b}{\sin B}$
จากสูตรมุม 3 เท่า จะได้ $\frac{2b}{3 \sin B - 4 \sin^3 B} = \frac{b}{\sin B}$ ตัด b กับ $\sin B$ ตลอดทั้งสองฝั่ง เหลือ $\frac{2}{3 - 4 \sin^2 B} = 1$

แก้สมการ จะได้ $2 = 3 - 4 \sin^2 B$

$$\frac{1}{4} = \sin^2 B$$

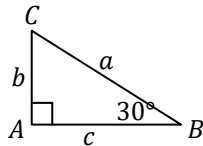
แต่มุมใน Δ อยู่ในช่วง 0° ถึง $180^\circ \rightarrow \sin$ เป็นบวก

$$\pm \frac{1}{2} = \sin B$$

$$\text{ได้ } \sin B = \frac{1}{2} \rightarrow B = 30^\circ, 150^\circ$$

แต่ $B = 150^\circ$ ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $A = 3(150^\circ)$ เกิน $180^\circ \rightarrow B = 30^\circ, A = 3(30^\circ) = 90^\circ \rightarrow$ ก. ถูก

ข. วาดรูปได้



ดังนั้น $k = \frac{a}{c} = \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ลองแทนในสมการในข้อ ข.

$$\text{จะได้ } 3\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right) - 9\left(\frac{4}{3}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}} + 3 = \frac{8}{\sqrt{3}} - 12 - \frac{2}{\sqrt{3}} + 3 \neq 0 \rightarrow \text{ข. ผิด}$$

4. 3

ข้อนี้ต้องระวังคำว่า “หารด้วย” $\rightarrow a$ หารด้วย b ลงตัว คือ a เป็นตัวตั้ง (แต่ a หาร b ลงตัว คือ b เป็นตัวตั้ง)

aRb ก็คือ $b \mid a$ นั่นเอง ดังนั้น ก. และ ข. เปลี่ยนเป็นสัญลักษณ์ที่เราคุ้นเคยได้เป็น

ก. ถ้า $y \mid x$ และ $z \mid y$ แล้ว $(y+z) \mid x$

จะเห็นว่าผิด เช่น ถ้า $x = y = z = 1$ จะได้ $1 \mid 1$ และ $1 \mid 1$ แต่ $2 \nmid 1 \rightarrow$ ก. ผิด

ข. ถ้า $x \mid w$ และ $z \mid y$ แล้ว $xz \mid wy$ ข้อนี้ตรงตามสมบัติของการหารลงตัว $\rightarrow$ ข. ถูก

(หรือพิสูจน์โดยให้ $w = mx, y = nz$ คูณกันได้ $wy = (mn)(xz) \rightarrow xz \mid wy$ ก็ได้)

5. 2

เปลี่ยน 4 เป็น 2^2 แล้วโยนเลขชี้กำลังไปหน้า log จะได้ $2 \log_a 2 + 2 \log_b 2 = 9 \log_{ab} 2$

คูณตลอดด้วย $\log_2 ab$: $(2 \log_a 2)(\log_2 ab) + (2 \log_b 2)(\log_2 ab) = (9 \log_{ab} 2)(\log_2 ab)$

$$2 \log_a ab + 2 \log_b ab = 9$$

$$2(\log_a a + \log_a b) + 2(\log_b a + \log_b b) = 9$$

$$2\left(1 + \log_a b\right) + 2\left(\log_b a + 1\right) = 9$$

$$2 \log_a b + 2 \log_b a - 5 = 0$$

$\log_a b$ กับ $\log_b a$ เป็นส่วนกลับกัน ดังนั้น ถ้าให้ $\log_a b = k$ จะได้ $\log_b a = \frac{1}{k}$

ดังนั้น สมการจะกลายเป็น $2k + \frac{2}{k} - 5 = 0$

$$2k^2 + 2 - 5k = 0$$

$$2k^2 - 5k + 2 = 0$$

$$(2k - 1)(k - 2) = 0$$

$$k = \frac{1}{2}, 2 \rightarrow \log_a b = \frac{1}{2}, 2$$

โจทย์ถาม $\log_a(ab^5) + \log_b\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right) = \log_a a + \log_a b^5 + \log_b a^2 - \log_b \sqrt{b}$

$$= 1 + 5 \log_a b + 2 \log_b a - \frac{1}{2}$$

แทนค่าหาตัวมาก $\rightarrow$ ถ้า $\log_a b = \frac{1}{2}$ จะได้ $\log_b a = 2 \rightarrow$ แทนได้ $1 + 5\left(\frac{1}{2}\right) + 2(2) - \frac{1}{2}$
 $\rightarrow$ ถ้า $\log_a b = 2$ จะได้ $\log_b a = \frac{1}{2} \rightarrow$ แทนได้ $1 + 5(2) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \rightarrow$ มากกว่า
 จะได้ค่ามากที่สุด $= 1 + 5(2) + 2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 1 + 10 + 1 - 0.5 = 11.5$

6. 2

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(-2 \sin 25^\circ \sin 85^\circ) \sin 35^\circ}{-2 \sin 75^\circ} \leftarrow \text{คูณ } -2 \text{ บนล่างให้เข้าสูตร} \\
 &= \frac{[\cos 110^\circ - \cos(-60^\circ)] \sin 35^\circ}{-2 \sin 75^\circ} \\
 &= \frac{\left[\cos 110^\circ - \frac{1}{2}\right] \sin 35^\circ}{-2 \sin 75^\circ} \\
 &= \frac{\cos 110^\circ \sin 35^\circ - \frac{1}{2} \sin 35^\circ}{-2 \sin 75^\circ} \\
 &= \frac{2 \cos 110^\circ \sin 35^\circ - \sin 35^\circ}{-4 \sin 75^\circ} \leftarrow \text{คูณ 2 บนล่างให้เข้าสูตร} \\
 &= \frac{\sin 145^\circ - \sin 75^\circ - \sin 35^\circ}{-4 \sin 75^\circ} \\
 &= \frac{-\sin 75^\circ - \sin 75^\circ}{-4 \sin 75^\circ} \leftarrow \begin{array}{l} \sin 145^\circ = \sin 35^\circ \\ \text{เพราะมุมรวมกันได้ } 180^\circ \end{array} \\
 &= \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

$ \begin{aligned} \sin(A+B) + \sin(A-B) &= 2 \sin A \cos B \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) &= 2 \cos A \sin B \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) &= 2 \cos A \cos B \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) &= -2 \sin A \sin B \end{aligned} $
--

1. $\tan 15^\circ$ เป็นค่าที่ดูทไม่ลงตัว $\neq \frac{1}{4}$ แน่นอน

$$\begin{aligned}
 2. &= \frac{-2 \sin 15^\circ \sin 75^\circ}{-2} \\
 &= \frac{\cos 90^\circ - \cos(-60^\circ)}{-2} \\
 &= \frac{0 - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{ถูก}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. &= \frac{(2 \cos 20^\circ \cos 40^\circ) \cos 80^\circ}{2} \\
 &= \frac{[\cos 60^\circ + \cos(-20^\circ)] \cos 80^\circ}{2} \\
 &= \left[\frac{1}{2} + \cos 20^\circ\right] \cos 80^\circ \leftarrow \cos(-\theta) = \cos \theta \\
 &= \frac{1}{2} \cos 80^\circ + \cos 20^\circ \cos 80^\circ \\
 &= \frac{\cos 80^\circ + 2 \cos 20^\circ \cos 80^\circ}{4} \\
 &= \frac{\cos 80^\circ + \cos 100^\circ + \cos(-60^\circ)}{4} \leftarrow \begin{array}{l} \cos 80^\circ \text{ กับ } \cos 100^\circ \text{ เป็นลบซึ่ง} \\ \text{กันและกัน จะตัดกันได้} \end{array} \\
 &= \frac{\cos(-60^\circ)}{4} = \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{1}{8}
 \end{aligned}$$

$$4. = \sec 60^\circ = 2$$

7. 1

เส้นตรง $y = 1$ เป็นเส้นแนวนอน มีความชัน $= 0 \rightarrow$ ความชัน $y = f(x)$ ที่ $x = 1$ ต้องเป็น 0 ด้วย $\rightarrow f'(1) = 0$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } f(x) &= ax + \frac{b}{x} = ax + bx^{-1} \rightarrow \text{ดิฟได้ } f'(x) = a - bx^{-2} \text{ ดังนั้น } a - b(1^{-2}) = 0 \\
 &\quad \quad \quad a - b = 0 \quad \dots(1)
 \end{aligned}$$

$y = f(x)$ ผ่านจุด $(1, 1)$ แสดงว่า แทน $(1, 1)$ แล้วสมการต้องเป็นจริง

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } 1 &= a(1) + \frac{b}{1} && \text{แก้ (1) กับ (2) บวกสองสมการ } b \text{ จะตัดกันได้ เหลือ } 2a = 1 \\
 1 &= a + b \quad \dots(2) && a = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

แทนใน (1) จะได้ $b = \frac{1}{2}$ ด้วย

$$\begin{aligned}
 \text{ก. หาค่าสูงสุดสัมพัทธ์ ต้องแก้ } f'(x) &= 0 \rightarrow f'(x) = a - bx^{-2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^{-2} = 0 \\
 &\quad \quad \quad x^{-2} = 1 \\
 &\quad \quad \quad x = \pm 1
 \end{aligned}$$

$$\text{หาว่าสูงหรือต่ำ ต้องดูว่า } f''(x) < 0 \text{ มั้ย } \rightarrow f''(x) = 0 + 2bx^{-3} = 2\left(\frac{1}{2}\right)x^{-3} = x^{-3}$$

$$\text{จะเห็นว่า } f''(1) = 1^{-3} = 1 \rightarrow > 0 \rightarrow \text{ต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

$$f''(-1) = (-1)^{-3} = -1 \rightarrow < 0 \rightarrow \text{สูงสุดสัมพัทธ์} \rightarrow \text{ก. ถูก}$$

ข. หา $\lim_{x \rightarrow 1} \rightarrow$ เทคนิคคือ จะลองแทน $x = 1$ ลงไปดูก่อน ถ้าหาค่าได้ ($\neq \frac{0}{0}$) ก็ไม่ต้องจัดรูป

$$(f \circ f)(1) = f(f(1)) = f\left(\frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1^{-1})\right) = f(1) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{2}(1^{-1}) = 1 \text{ ไม่อยู่ในรูป } \frac{0}{0}$$

ดังนั้น $\lim_{x \rightarrow 1} (f \circ f)(x) = 1$ ได้เลย

$$\text{และ } f(2a^2 + 2b^2) = f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f(1) \text{ เท่ากัน } \rightarrow \text{ ข. ถูก }$$

8. 4

จำนวนแบบทั้งหมด : เลือก 4 ตัวจาก S ได้ $\binom{15}{4} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 15 \cdot 7 \cdot 13$

จำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ : จะได้ 4 ตัวใน A ต้องอยู่ในรูป $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d$ โดยมีเงื่อนไขคือ

a_1 และ d ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก และตัวสุดท้าย $a_1 + 3d$ ต้องไม่เกิน 15 นั่นคือ $a_1 + 3d \leq 15$

กรณี $d = 1$: จะได้ $a_1 + 3(1) \leq 15 \rightarrow a_1 \leq 12 \rightarrow a_1 = 1, 2, \dots, 12$ ทั้งหมด 12 แบบ

กรณี $d = 2$: จะได้ $a_1 + 3(2) \leq 15 \rightarrow a_1 \leq 9 \rightarrow a_1 = 1, 2, \dots, 9$ ทั้งหมด 9 แบบ

กรณี $d = 3$: จะได้ $a_1 + 3(3) \leq 15 \rightarrow a_1 \leq 6 \rightarrow a_1 = 1, 2, \dots, 6$ ทั้งหมด 6 แบบ

กรณี $d = 4$: จะได้ $a_1 + 3(4) \leq 15 \rightarrow a_1 \leq 3 \rightarrow a_1 = 1, 2, 3$ ทั้งหมด 3 แบบ

กรณี $d = 5$: จะได้ $a_1 + 3(5) \leq 15 \rightarrow a_1 \leq 0$ เป็นไปไม่ได้ เพราะ a_1 ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก

จะเห็นว่า ถ้า $d > 5$ จะหา a_1 ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขไม่ได้แล้ว

$$\text{รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ} = 12 + 9 + 6 + 3 = 30 \rightarrow \text{ความน่าจะเป็น} = \frac{30}{15 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{2}{7 \cdot 13} = \frac{2}{91}$$

9. 2

ให้ $z = x + yi$ จะได้ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ และ $\bar{z} = x - yi$ แทนในสมการ แล้วจับกลุ่มจำนวนจริง กับจำนวนจินต

$$\text{ภาพ จะได้ } \sqrt{x^2 + y^2} + 2(x - yi) - 3(x + yi) = 3 - 45i$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} + 2x - 2yi - 3x - 3yi = 3 - 45i$$

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - x) - 5yi = 3 - 45i$$

เทียบส่วนจริง = ส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ = ส่วนจินตภาพ จะได้ $\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3$ และ $5y = 45$

แทน $y = 9$ จะได้ $\sqrt{x^2 + 9^2} - x = 3$ $y = 9$

$$\sqrt{x^2 + 9^2} = x + 3$$

$$x^2 + 81 = x^2 + 6x + 9$$

$$72 = 6x$$

$$12 = x$$

อย่าลืมตรวจคำตอบด้วย !!

เพราะมีการยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$\text{จะได้ } |z|^2 = |12 - 9i|^2 = \sqrt{12^2 + 9^2}^2 = 144 + 81 = 225$$

10. 3

จัดรูปไฮเพอร์โบลา : $y^2 - 2(x^2 - 4x) = 6$

$$y^2 - 2(x^2 - 4x + 4) = 6 - 2(4)$$

$$y^2 - 2(x - 2)^2 = -2$$

$$\frac{y^2}{-2} - \frac{2(x-2)^2}{-2} = 1$$

$$\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow$$

หาสมการเส้นกำกับ ให้เปลี่ยน 1 ทางขวาเป็น 0

$$\text{จะได้สมการเส้นกำกับคือ } \frac{(x-2)^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 0$$

หาจุดตัดเส้นตรง กับ ไฮเพอร์โบลา

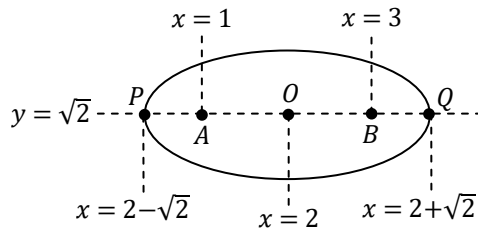
แทน $y = \sqrt{2}$ ในสมการไฮเพอร์โบลา

$$\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{\sqrt{2}^2}{2} &= 1 \\ (x-2)^2 - 1 &= 1 \\ (x-2)^2 &= 2 \\ x-2 &= \sqrt{2}, -\sqrt{2} \\ x &= 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}\end{aligned}$$

หาจุดตัดเส้นตรง กับ เส้นกำกับ

แทน $y = \sqrt{2}$ ในสมการเส้นกำกับ

$$\begin{aligned}\frac{(x-2)^2}{1} - \frac{\sqrt{2}^2}{2} &= 0 \\ (x-2)^2 - 1 &= 0 \\ (x-2)^2 &= 1 \\ x-2 &= 1, -1 \\ x &= 3, 1\end{aligned}$$

วาดทั้ง 4 จุด จะได้วงรีแนวนอนดังรูป และจะได้จุดศูนย์กลาง $(2, \sqrt{2})$ และ $a = OQ = \sqrt{2}$, $c = OB = 1$ และจะได้ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{2-1} = 1$ ดังนั้น สมการวงรีคือ $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{2}^2} + \frac{(y-\sqrt{2})^2}{1^2} = 1$

$$\begin{aligned}1(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 2\sqrt{2}y + 2) &= 2 \\ x^2 + 2y^2 - 4x - 4\sqrt{2}y + 6 &= 0\end{aligned}$$

11. 1

ให้วงกลมมี ศก อยู่ที่ (a, b) เนื่องจาก ศก อยู่ในควอดรันต์ 1 ดังนั้น $a > 0$ และ $b > 0$ เนื่องจากวงกลมสัมผัสแกน y ดังนั้น วงกลมจะมีรัศมี r เท่ากับ a ดังรูปดังนั้น สมการวงกลม จะอยู่ในรูป $(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2$

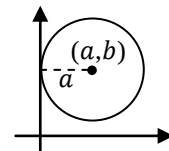
$$\begin{aligned}x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 - 2ax - 2by + b^2 &= 0\end{aligned}$$

เทียบกับ $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ จะได้ $D = -2a$, $E = -2b$ และ $F = b^2$...(1)เนื่องจาก a เป็นบวก จะได้ D เป็นลบ ดังนั้น พาราโบลา $Dx = y^2 + Ey + F$ เป็นพาราโบลาแบบเปิดซ้าย (เพราะกำลังสองอยู่ที่ y และ D เป็นลบ) จะได้รูปสมการคือ $(y-k)^2 = -4c(x-h)$ โจทย์ให้ระยะโฟกัส $c = 1$ แทนแล้วจัดในรูป $Dx = y^2 + Ey + F$ จะได้ $y^2 - 2ky + k^2 = -4x + 4h$
 $y^2 - 2ky + k^2 - 4h = -4x$
 $-4x = y^2 - 2ky + k^2 - 4h$ เทียบกับ $Dx = y^2 + Ey + F$ จะได้ $D = -4$, $E = -2k$ และ $F = k^2 - 4h$...(2)พาราโบลาผ่าน $(-4, -1)$ ดังนั้นต้องแทนในสมการพาราโบลาแล้วเป็นจริง $\rightarrow D(-4) = (-1)^2 + E(-1) + F$

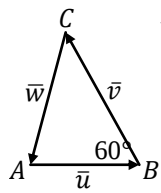
$$\begin{aligned}\text{แทน } D = -4 \text{ จาก (2) แทน } E = -2b, F = b^2 \text{ จาก (1) จะได้ } (-4)(-4) &= (-1)^2 + (-2b)(-1) + b^2 \\ 16 &= 1 + 2b + b^2 \\ 0 &= b^2 + 2b - 15 \\ 0 &= (b+5)(b-3)\end{aligned}$$

แต่ b เป็นบวก ดังนั้น $b = 3$ แทนใน (1) จะได้ $E = -6$, $F = 9$ ก. $D^2 + E^2 + F^2 = (-4)^2 + (-6)^2 + 9^2 = 16 + 36 + 81 = 133 \rightarrow$ ถูก

ข. วงกลม จะสัมผัสเส้นตรง เมื่อ ระยะจาก ศก ไปเส้นตรง = รัศมี

จาก (1): $D = -2a$ จะได้ $-4 = -2a \rightarrow a = 2$ ดังนั้น ศก $(a, b) = (2, 3)$ และรัศมี $= a = 2$ จากสูตรระยะห่างจากจุด (a, b) ไปเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ เท่ากับ $\frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ จะได้ ระยะห่างจาก $(2, 3)$ ไปเส้นตรง $4x + 3y - 7 = 0$ เท่ากับ $\frac{|4(2)+3(3)-7|}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{10}{5} = 2 =$ รัศมี $\rightarrow$ ถูก

12. 4



$$\vec{w} = \vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = -\vec{v} - \vec{u}$$

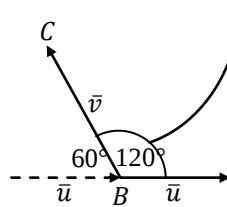
ดังนั้น $(2\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{w} = (2\vec{u} - \vec{v}) \cdot (-\vec{v} - \vec{u})$ การ dot กระดาษในการบวกเลขเวกเตอร์ได้

$$\begin{aligned} &= -2\vec{u} \cdot \vec{v} - 2\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} \\ &= -\vec{u} \cdot \vec{v} - 2|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \end{aligned}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมที่ $\vec{u}$ ทำกับ $\vec{v}$

แบบหัวต่อหัว (หรือหางต่อหาง)

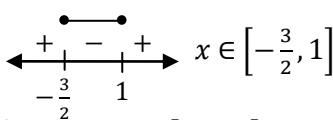


$$\begin{aligned} &= -|\vec{u}||\vec{v}|\cos 120^\circ - 2|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 \\ &= -(5)(12)\left(-\frac{1}{2}\right) - 2(5^2) + 12^2 \\ &= 30 - 50 + 144 \\ &= 124 \end{aligned}$$

13. 2

หา A :

$$\begin{aligned} 2x^2 + x - 3 &\leq 0 \\ (2x + 3)(x - 1) &\leq 0 \end{aligned}$$



และ

$$\begin{aligned} |x - 2| &\leq 3 \\ -3 &\leq x - 2 \leq 3 \\ -1 &\leq x \leq 5 \\ x &\in [-1, 5] \end{aligned}$$

จะได้ส่วนที่ซ้อนทับกัน คือ $[-\frac{3}{2}, 1] \cap [-1, 5] = [-1, 1]$ ดังนั้น ถ้า เอกภพสัมพัทธ์ A อยู่ภายในช่วง $[-1, 1]$ ก็จะได้

ทำให้ประพจน์อันแรกจริงได้ → สังเกตว่า A ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $[-1, 1]$ แค่ $A \subset [-1, 1]$ ก็พอ

แต่ ถ้าคิดให้ $A \subset [-1, 1]$ ข้อนี้จะไม่คำตอบ ดังนั้น คนออกข้อสอบน่าจะตั้งใจให้ $A = [-1, 1]$ ซึ่งในกรณีนี้ ควรแก้

ข้อความในโจทย์เป็น “ให้ A เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่ใหญ่ที่สุด ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x [2x^2 + x \dots]$ เป็นจริง”

หา B : $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$

$$\frac{6}{x^2} - \frac{5}{x} - 1 > 0$$

$$\frac{6 - 5x - x^2}{x^2} > 0$$

$$\frac{-x^2 - 5x + 6}{x^2} > 0$$

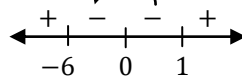
$$\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2} < 0$$

$$\frac{(x+6)(x-1)}{x^2} < 0$$

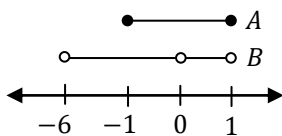
ไม่ควรรู้น x^2 ตลอด เพราะจะพลาดกรณีที่ $x = 0$

คูณ - ตลอด ต้องเปลี่ยน > เป็น <

วงเล็บกำลังคู่ ใช้เครื่องหมายเดิม



$$\text{จะได้ } B = (-6, 0) \cup (0, 1)$$



ก. $A \subset B$ ผิด เพราะ A มี 0 แต่ B ไม่มี → ผิด

ข. $A - B = \{0, 1\}$ มี 2 ตัว → ถูก

ค. $(A - B) \cup (B - A) = \{0, 1\} \cup (-6, -1) \rightarrow$ ผิด

ง. $(-6, 0) \subset (B - A) = (-6, -1) \rightarrow$ ผิด

14. 4

$$\begin{aligned} \log_2(x - 2y)^2 + \frac{1}{-1}\log_2 x + \frac{1}{-1}\log_2 y &= 0 \\ \log_2(x - 2y)^2 - \log_2 x - \log_2 y &= 0 \\ \log_2 \frac{(x-2y)^2}{xy} &= 0 \\ \frac{(x-2y)^2}{xy} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x - 2y)^2 &= xy \\ x^2 - 4xy + 4y^2 &= xy \\ x^2 - 5xy + 4y^2 &= 0 \\ (x - 4y)(x - y) &= 0 \\ x &= 4y \text{ หรือ } x = y \end{aligned}$$

แต่หลัง $\log$ ต้องเป็นบวก และ โจทย์ให้ x, y เป็นบวก ดังนั้น $x = y$ ใช้ไม่ได้ เพราะจะทำให้ $x - 2y$ หลัง $\log$ ตัวแรก เป็นลบ $\rightarrow$ เหลือ $x = 4y \rightarrow$ จะได้ $\frac{x}{y} = 4$ ดังนั้น $\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1 = 4^2 + 1 = 17$

15. 4

ทุกตัวเป็นบวก $\rightarrow$ ย้ายข้างแบบคูณหารได้โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมายมากกว่าน้อยกว่า

ก. $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ คูณไขว้จะได้ $ad < bc$ ประโยคหลัง $\frac{a+x}{b} < \frac{c+x}{d}$ คูณไขว้จะได้ $ad + xd < bc + bx$

ดังนั้น ประโยคในข้อ ก. คือ ถ้า $ad < bc$ แล้ว $ad + xd < bc + bx$ ดังรูป

$$\begin{array}{ccc} ad & < & bc \\ & \downarrow & \\ ad + xd & < & bc + bx \end{array}$$

จะเห็นว่า ถ้า xd มากกว่า bx มากๆ ประโยคหลังจะผิดได้

นั่นคือ ถ้าให้ d มากกว่า b มากๆ ประโยคนี้จะผิด

เช่น $a = 1, b = 2, c = 11, d = 20$ จะได้ $\frac{1}{2} < \frac{11}{20}$ แต่ $\frac{1+1}{2} < \frac{11+1}{20}$ ผิด

ข.
$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$$

$$ab + ax < ab + bx$$

$$ax < bx$$

$$a < b$$

ดังนั้น ถ้า $a > b$ ประโยคนี้จะผิด

เช่น ถ้า $a = 2, b = 1$ จะเห็นว่า $\frac{2}{1} < \frac{2+1}{1+1}$ ผิด

16. 3

$$\begin{array}{l} \text{ดิฟฟังก์ชันคอมโพสิท} \\ \text{ด้วยกฎลูกโซ่} \end{array} \left(\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 + 5} \\ (f \circ g)'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 5)^{-\frac{1}{2}}(2x) \\ f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad \dots(*) \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{ดิฟด้วยกฎลูกโซ่} \end{array}$$

เราจะหา $g(x)$ และ $g'(x)$ มาแทนใน (*)

$$\begin{array}{l} \text{จาก } \int g(x) dx = x^2 - 4x + C \\ g(x) = 2x - 4 \\ g'(x) = 2 \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{ดิฟทั้งสองข้าง} \\ \text{ฝั่งซ้าย ดิฟจะตัดกับอินทิเกรตได้} \end{array} \right\}$$

$$\text{แทน } g(x) \text{ และ } g'(x) \text{ ที่ได้ ใน } (*) \text{ จะได้ } f'(2x - 4) \cdot (2) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad \dots(**)$$

$$\text{จากสมบัติของอนุพันธ์ จะได้ ความชันของ } L = f'(0) \rightarrow \text{จาก } (**) \text{ ต้องเทียบให้ } \begin{array}{l} 2x - 4 = 0 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\text{แทน } x = 2 \text{ ใน } (**) \text{ จะได้ } f'(0) \cdot (2) = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 5}} = \frac{2}{3} \rightarrow \text{หารด้วย 2 ตลอดได้ } f'(0) = \frac{1}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } L \text{ มีความชัน} = \frac{1}{3} \text{ ดังนั้น เส้นตรงที่ตั้งฉากกับ } L \text{ ต้องมีความชัน} = -3 \quad (\text{ตั้งฉากกัน ความชันคูณกันได้ } -1)$$

$$\text{จะเห็นว่า ข้อ 3 คือ } y = -3x + 5 \rightarrow \text{ชัน} = -3$$

17. 1

$$\text{ให้ } L_1 \text{ ตัดแกน } X \text{ และแกน } Y \text{ ที่จุด } A(a, 0) \text{ และ } B(0, b) \text{ จากโจทย์จะได้ } \begin{array}{l} a + b = 3 \\ a = 3 - b \quad \dots(1) \end{array}$$

เนื่องจาก $(-2, -4), A(a, 0)$ และ $B(0, b)$ อยู่บนเส้นตรง L_1 เหมือนกัน ดังนั้น จะใช้จุดไหนมาหาความชันของ L_1 ก็

ต้องได้ความชันเท่ากัน นั่นคือ ความชันจาก $(-2, -4)$ ไป $A(a, 0)$ จะเท่ากับ ความชันจาก $(-2, -4)$ ไป $B(0, b)$

$$\text{จากสูตรความชัน} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \text{ จะได้ } \frac{0 - (-4)}{a - (-2)} = \frac{b - (-4)}{0 - (-2)}$$

คุณไขว้ จะได้

$$(4)(2) = (b+4)(a+2) \quad \text{แทน } a = 3-b \text{ จาก (1)}$$

$$8 = (b+4)(3-b+2)$$

$$8 = (b+4)(5-b)$$

$$8 = 5b - b^2 + 20 - 4b$$

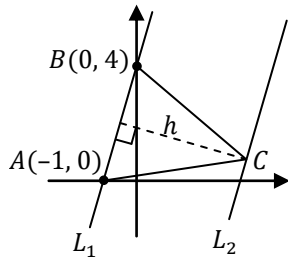
$$b^2 - b - 12 = 0$$

$$(b-4)(b+3) = 0$$

$$b = 4, -3$$

แต่ถ้า $b = -3$ จะได้ความชัน $L_1 = \frac{-3-(-4)}{0-(-2)} = \frac{1}{2}$ ใช้ไม่ได้ เพราะโจทย์ให้ความชัน L_1 เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $b = 4$ จะได้ความชัน $L_1 = \frac{4-(-4)}{0-(-2)} = \frac{8}{2} = 4$ ใช้ได้ และจาก (1) จะได้ $a = 3 - 4 = -1$



จะได้ $A(-1, 0)$ และ $B(0, 4)$ ซึ่งจะวาดได้ดังรูป

จะได้ พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times h \dots (*)$

$$\text{จะได้ } AB = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-1-0)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{17}$$

$$\text{และ } h = \text{ระยะระหว่าง } L_1 \text{ กับ } L_2 = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

(จริงๆข้อนี้ไม่ต้องบอก $CA = CB$ ก็ได้)

L_1 ชัน = 4 และตัดแกน Y ที่ $(0, 4)$ ดังนั้น สมการ L_1 คือ $y = 4x + 4 \rightarrow$ จัดรูปได้ $L_1: 4x - y + 4 = 0$

L_2 ขนาน L_1 ดังนั้น จะชัน = 4 ด้วย และ L_2 ตัดแกน Y ที่ $(0, -13)$ ดังนั้น สมการ L_2 คือ $y = 4x - 13$

$$\rightarrow \text{จัดรูปได้ } L_2: 4x - y - 13 = 0$$

$$\text{จะได้ } h = \frac{|4 - (-13)|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{17}{\sqrt{17}} \rightarrow \text{แทนค่า } AB \text{ กับ } h \text{ ใน } (*) \text{ จะได้ } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times \sqrt{17} \times \frac{17}{\sqrt{17}} = \frac{17}{2} = 8.5$$

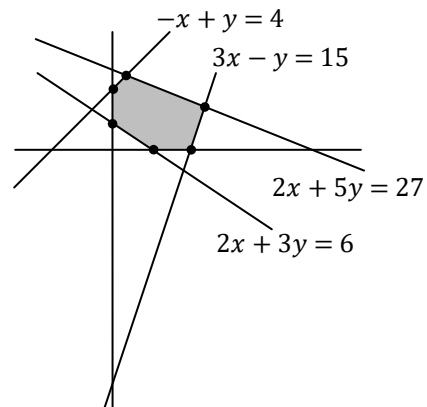
18. 1

หาจุดตัดแกน X (แทน $y = 0$) และจุดตัดแกน Y (แทน $x = 0$)

ของสมการข้อจำกัด แล้ววาดกราฟหาพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะได้ดังรูป

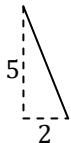
($x \geq 0, y \geq 0$ คือ เสาเฉพาะบริเวณใน Q_1)

	$x = 0$	$y = 0$
$2x + 3y = 6$	$(0, 2)$	$(3, 0)$
$3x - y = 15$	$(0, -15)$	$(5, 0)$
$-x + y = 4$	$(0, 4)$	$(-4, 0)$
$2x + 5y = 27$	$(0, 5.4)$	$(13.5, 0)$

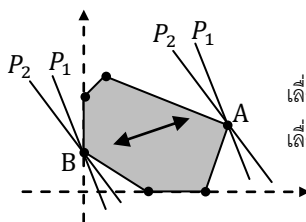
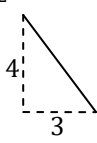


หาจุดที่ได้ค่ามากที่สุด-น้อยสุดโดยการ “เลื่อนเส้นจุดประสงค์”

$$P_1 = 5x + 2y$$



$$P_2 = 4x + 3y$$



เลื่อน P_1, P_2 ได้มากที่สุดที่จุด $A \rightarrow$ ค่ามากที่สุด

เลื่อน P_1, P_2 ได้น้อยสุดที่จุด $B \rightarrow$ ค่าน้อยสุด

จะได้ จุด A ให้ค่า P_1, P_2 มากสุด และ จุด B ให้ค่า P_1, P_2 น้อยสุด

ถัดมา จะเทียบว่า $P_1 = 5x + 2y$ กับ $P_2 = 4x + 3y$ อันไหนมากกว่ากัน

จะเห็นว่า P_1 มี x มากกว่า P_2 อยู่ $5 - 4 = 1$ ตัว แต่ P_2 ก็มี y มากกว่า P_1 อยู่ $3 - 2 = 1$ ตัวเช่นกัน

ดังนั้น ถ้า $x > y$ จะได้ $P_1 > P_2$ แต่ถ้า $x < y$ จะได้ $P_1 < P_2$

ค่ามากที่สุด : จุด A อยู่ใกล้แกน X มากกว่าแกน Y ดังนั้น จะมีพิกัด $x > y \rightarrow P_1 > P_2 \rightarrow M_1 > M_2 \rightarrow$ ก. ถูก

ค่าน้อยสุด : จุด B อยู่บนแกน Y บวก จะมีพิกัด $x = 0$ ดังนั้น $x < y \rightarrow P_1 < P_2 \rightarrow N_1 < N_2 \rightarrow$ ข. ถูก

19. 4

จาก $g'(x) = f(x)$ จะได้ $g'(x) = 4x^3 + bx^2 + cx + d \dots(1)$ ดังนั้น

$$g'(0) = 4(0^3) + b(0^2) + c(0) + d = d \quad \text{แต่โจทย์ให้ } g'(0) = 0 \text{ ดังนั้น } d = 0$$

$$g'(1) = 4(1^3) + b(1^2) + c(1) + 0 = 4 + b + c \quad \text{แต่โจทย์ให้ } g'(1) = 0 \text{ ดังนั้น } 4 + b + c = 0 \dots(*)$$

จาก $d = 0$ จะได้ $f(x) = 4x^3 + bx^2 + cx$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-2}^2 f(x) dx = x^4 + \frac{b}{3}x^3 + \frac{c}{2}x^2 \Big|_{-2}^2 = \left(16 + \frac{8b}{3} + 2c\right) - \left(16 - \frac{8b}{3} + 2c\right) = \frac{16b}{3}$$

$$\text{แต่โจทย์ให้ } \int_{-2}^2 f(x) dx = -\frac{64}{3} \text{ ดังนั้น } \frac{16b}{3} = -\frac{64}{3} \text{ จะได้ } b = -4 \text{ แทนใน } (*) \text{ จะได้ } c = 0$$

$$\text{แทน } a, b, c, d \text{ ใน } (1) \text{ จะได้ } g'(x) = 4x^3 - 4x^2 \dots(2) \rightarrow \text{ดิฟจะได้ } g''(x) = 12x^2 - 8x \dots(3)$$

$$\text{อินทิเกรต } (2) \text{ จะได้ } g(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + k \text{ ดังนั้น } g(0) = 0^4 - \frac{4}{3}(0^3) + k = k \text{ แต่โจทย์ให้ } g(0) = 0$$

$$\text{ดังนั้น } k = 0 \text{ จะได้ } g(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 \dots(4)$$

$$\text{แทน } (2), (3), (4) \text{ ในสมการ } g''(x) = g'(x) + g(x) \text{ จะได้ } 12x^2 - 8x = 4x^3 - 4x^2 + x^4 - \frac{4}{3}x^3$$

$$0 = x^4 + \frac{8}{3}x^3 - 16x^2 + 8x$$

$$0 = 3x^4 + 8x^3 - 48x^2 + 24x$$

20. 2

$$\text{แทนหาพจน์ต่างๆ } a_1 = \frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$$

$$a_2 = a_1 - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3^2}$$

$$a_3 = a_2 - \frac{1}{3^3} = \frac{1}{2 \cdot 3^2} - \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3^2} \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3^3}$$

$$a_4 = a_3 - \frac{1}{3^4} = \frac{1}{2 \cdot 3^3} - \frac{1}{3^4} = \frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3^3} \left(\frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2 \cdot 3^4}$$

จะเห็นว่า เราทำซ้ำแบบนี้ไปได้เรื่อยๆ และจากแบบรูปที่ได้ จะสรุปได้ว่า $a_n = \frac{1}{2 \cdot 3^n}$

$$\text{ก. } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 \cdot 3^n} = 0 \rightarrow \text{ก. ถูก}$$

$$\text{ข. } a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^3} + \dots = \frac{\frac{1}{2 \cdot 3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4} = 0.25 \rightarrow \text{ข. ผิด}$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์

$$S_{\infty} = \frac{a_1}{1-r} \text{ เมื่อ } |r| < 1$$

21. 3

ก. ข้อนี้ จะแทนตัวเลขก็ได้ ไม่ว่าแทนอะไร ประโยคนี้จะผิดหมด

$$\text{เนื่องจาก } ab = 24 \text{ จะได้ } b = \frac{24}{a} \text{ และจาก } cd = 8 \text{ จะได้ } d = \frac{8}{c} \text{ แทนใน } d > b \text{ จะได้เป็น } \frac{8}{c} > \frac{24}{a} \\ a > 3c$$

$$\text{ตัวเศษ: เนื่องจาก } a > 3c > c \text{ จะได้ } \sqrt{a} > \sqrt{c} \dots(1)$$

$$\text{ตัวส่วน: เนื่องจาก } a, c > 0 \text{ ดังนั้น } (c+1)^b, (a+1)^d \text{ มีฐาน } > 1 \rightarrow \text{ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งมาก}$$

$$\text{และเนื่องจาก } c < a \text{ และ } b < d \text{ ดังนั้น } \frac{(c+1)^b}{(c+1)^b} > \frac{(a+1)^d}{(a+1)^d} \dots(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{กลับเศษกลับส่วนต้องกลับเครื่องหมาย} \end{array} \right\}$$

$$(1) \times (2) \text{ จะได้ } \frac{\sqrt{a}}{(c+1)^b} > \frac{\sqrt{c}}{(a+1)^d} \rightarrow \text{ก. ผิด}$$

ข. ทำแบบเดียวกับข้อ ก. แต่ไปเน้นที่ a กับ c แทน

เนื่องจาก $ab = 24$ จะได้ $a = \frac{24}{b}$ และจาก $cd = 8$ จะได้ $c = \frac{8}{d}$ แทนใน $a < c$ จะได้เป็น $\frac{24}{b} < \frac{8}{d}$
 $3d < b$

เนื่องจากฐาน 0.01 กับ $0.05 < 1 \rightarrow$ ยิ่งยกกำลังมาก ค่าจะยิ่งน้อย

ดังนั้น $(0.01)^b < (0.01)^{3d} = (0.01^3)^d = (0.000001)^d < (0.05)^d \rightarrow$ ข. ถูก

22. 4

จะใช้วิธีนับแบบตรงข้าม คือ เอาจำนวนแบบทั้งหมด ลบด้วยจำนวนแบบที่โจทย์ไม่ต้องการ

นั่นคือ #จำนวนสามหลักที่มากกว่า 500 = #จำนวนสามหลักทั้งหมด - #จำนวนสามหลักที่ไม่เกิน 500

จำนวนสามหลักทั้งหมด : เลือก 3 ตัว จาก 0, 1, ..., 9 (= 10 แบบ) แล้วเอาตัวมากเป็นหลักร้อย, ตัวกลางเป็นหลัก

สิบ, ตัวน้อยเป็นหลักหน่วย จะได้จำนวนสามหลักทั้งหมด $\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ แบบ

จำนวนสามหลักที่ไม่เกิน 500 : เนื่องจาก 500 ไม่ใช่จำนวนสามหลัก ดังนั้น หลักร้อยต้องเป็น 4 ลงไป

และจำนวนสามหลัก จะมีหลักสิบกับหลักหน่วยที่น้อยลงไปเรื่อยๆ ดังนั้น ทั้งสามหลักจะเกิดจาก 0, 1, 2, 3, 4

เท่านั้น $\rightarrow$ เลือก 3 ตัว จาก 0, 1, 2, 3, 4 (= 5 แบบ) แล้วเอาตัวมากเป็นหลักร้อย, ตัวกลางเป็นหลักสิบ, ตัวน้อย

เป็นหลักหน่วย จะได้จำนวนสามหลักทั้งหมดที่ไม่เกิน 500 $\rightarrow$ เลือกได้ $\binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ แบบ

จะได้จำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ = $120 - 10 = 110$ แบบ

23. 4

ให้จำนวนน้อยสุด = a , จำนวนมากสุด = b จากโจทย์ จะได้ว่า $\frac{a + \text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} + b}{n} = 22$

$$\frac{\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} + b}{n-1} = 24$$

$$\begin{array}{l} \text{หักออก 1 ตัว เหลือ } n-1 \text{ ตัว} \\ \frac{a + \text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}}{n-1} = 15 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{หักออก 2 ตัว เหลือ } n-2 \text{ ตัว} \\ \frac{\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง}}{n-2} = 16 \end{array}$$

ย้ายตัวส่วนขึ้นไปคูณทางขวา จะได้ $a + \text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} + b = 22n \quad \dots(1)$

$$\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} + b = 24n - 24 \quad \dots(2)$$

$$a + \text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} = 15n - 15 \quad \dots(3)$$

$$\text{ผลบวกจำนวนตรงกลาง} = 16n - 32 \quad \dots(4)$$

$$(1) - (2) : a = 22n - (24n - 24) = -2n + 24 \quad \dots(5)$$

$$(3) - (4) : a = (15n - 15) - (16n - 32) = -n + 17 \quad \dots(6)$$

จะเห็นว่า ฝั่งซ้ายของ (5) กับ (6) เป็น a ทั้งคู่ ดังนั้น ฝั่งขวาของ (5) กับ (6) ต้องเท่ากัน $-2n + 24 = -n + 17$
 $7 = n$

แทน $n = 7$ ใน (6) จะได้ $a = -7 + 17 = 10$

และเอา (2) - (4) จะได้ $b = (24n - 24) - (16n - 32) = 8n + 8 = 8(7) + 8 = 64$

ก. พิสัย = มากสุด - น้อยสุด = $b - a = 64 - 10 = 54 \rightarrow$ ก. ผิด

ข. $n = 7 \rightarrow$ ข. ผิด

24. 3

ก. จากสมบัติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน จะได้ว่า L ต้องผ่านจุดกึ่งกลางของข้อมูล คือ L ต้องผ่าน $(\bar{x}, \bar{y})$

จะเห็นว่า $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$ ดังนั้น L ต้องผ่าน $(3, \bar{y})$

แต่โจทย์ให้ L ผ่าน $(3, b)$ ดังนั้น $b = \bar{y}$

$$\begin{aligned} b &= \frac{9+11+b+17+19}{5} \\ 5b &= b + 56 \\ b &= 14 \rightarrow \text{ก. ผิด} \end{aligned}$$

ข. การเปลี่ยนของ y เทียบกับ x จะขึ้นกับค่า m ที่ในสมการทำนาย $\hat{y} = c + mx$

แทน $b = 14$ ในตาราง

x	1	2	3	4	5	$\sum x = 15$
y	9	11	14	17	19	$\sum y = 70$
x^2	1	4	9	16	25	$\sum x^2 = 55$
xy	9	22	42	68	95	$\sum xy = 236$

$$\text{จากสูตร } \sum y = cn + m \sum x$$

$$\sum xy = c \sum x + m \sum x^2$$

$$\text{จะได้ } 70 = 5c + 15m \quad \dots(1)$$

$$236 = 15c + 55m \quad \dots(2)$$

$$(2) - 3(1) : 26 = 10m \rightarrow \text{จะได้ } m = 2.6 \text{ ดังนั้น สมการทำนายคือ } \hat{y} = c + 2.6x$$

เนื่องจาก x ถูก 2.6 คุณอยู่ ดังนั้น ถ้า x เพิ่ม 1 แล้ว y จะเพิ่ม 2.6

$$\text{ถ้า } x \text{ เพิ่ม } 0.5 \text{ แล้ว } y \text{ จะเพิ่ม } \frac{2.6}{1} \times 0.5 = 1.3 \rightarrow \text{ข. ถูก}$$

25. 4

ก. สปส การแปรผัน $= \frac{s}{x} \rightarrow$ ต้องเทียบ s กับ $\bar{x}$ ของข้อมูลทั้งสองชุด

จะเห็นว่า ข้อมูลชุดที่ 2 ได้จากการเอาข้อมูลชุดแรก คูณ 2 แล้วบวก 1

$$\text{ดังนั้น } \bar{x}_{\text{ชุด } 2} \text{ จะสัมพันธ์กับ } \bar{x}_{\text{ชุด } 1} \text{ ในลักษณะเดียวกัน คือ } \bar{x}_{\text{ชุด } 2} = 2\bar{x}_{\text{ชุด } 1} + 1 \quad \dots(1)$$

แต่การบวก 1 จะไม่มีผลกับค่า s (เพราะ ถ้าทุกตัวบวก 1 เท่าๆกัน ข้อมูลจะยังกระจายตัวเท่าเดิม) แต่การคูณ 2 จะทำ

$$\text{ให้ } s \text{ เพิ่ม 2 เท่า นั่นคือ } s_{\text{ชุด } 2} = 2s_{\text{ชุด } 1} \quad \dots(2)$$

$$\text{จะได้ สปส การแปรผัน}_{\text{ชุด } 2} = \frac{s_{\text{ชุด } 2}}{\bar{x}_{\text{ชุด } 2}} = \frac{2s_{\text{ชุด } 1}}{2\bar{x}_{\text{ชุด } 1} + 1} \leq \frac{2s_{\text{ชุด } 1}}{2\bar{x}_{\text{ชุด } 1}} = \frac{s_{\text{ชุด } 1}}{\bar{x}_{\text{ชุด } 1}} = \text{สปส การแปรผัน}_{\text{ชุด } 1}$$

จาก (1) ตัวหารน้อยลง $\rightarrow$ ค่ามากขึ้น โดยกรณีที่เศษเป็น 0 ค่าจะยังเท่าเดิมได้

ดังนั้น สปส การแปรผัน_{ชุด 2} $\leq$ สปส การแปรผัน_{ชุด 1} $\rightarrow$ ก. ผิด (เพราะ เท่ากันได้ ถ้าข้อมูลทุกตัวเท่ากัน จะได้ $s = 0$)

(แต่ถ้าโจทย์ให้ x บางคู่ไม่เท่ากัน จะได้ $s \neq 0$ แล้ว ข้อ ก. จะถูก)

$$\text{ข. สปส พิสัย} = \frac{\max - \min}{\max + \min} \text{ และจาก } \max_{\text{ชุด } 2} = 2\max_{\text{ชุด } 1} + 1 \text{ และ } \min_{\text{ชุด } 2} = 2\min_{\text{ชุด } 1} + 1$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ สปส พิสัย}_{\text{ชุด } 2} &= \frac{\max_{\text{ชุด } 2} - \min_{\text{ชุด } 2}}{\max_{\text{ชุด } 2} + \min_{\text{ชุด } 2}} = \frac{(2\max_{\text{ชุด } 1} + 1) - (2\min_{\text{ชุด } 1} + 1)}{(2\max_{\text{ชุด } 1} + 1) + (2\min_{\text{ชุด } 1} + 1)} = \frac{2\max_{\text{ชุด } 1} - 2\min_{\text{ชุด } 1}}{2\max_{\text{ชุด } 1} + 2\min_{\text{ชุด } 1} + 2} \\ &= \frac{2(\max_{\text{ชุด } 1} - \min_{\text{ชุด } 1})}{2(\max_{\text{ชุด } 1} + \min_{\text{ชุด } 1} + 1)} = \frac{\max_{\text{ชุด } 1} - \min_{\text{ชุด } 1}}{\max_{\text{ชุด } 1} + \min_{\text{ชุด } 1} + 1} \leq \frac{\max_{\text{ชุด } 1} - \min_{\text{ชุด } 1}}{\max_{\text{ชุด } 1} + \min_{\text{ชุด } 1}} = \text{สปส พิสัย}_{\text{ชุด } 1} \end{aligned}$$

ตัวหารน้อยลง $\rightarrow$ ค่ามากขึ้น โดยกรณีที่เศษเป็น 0 ค่าจะยังเท่าเดิมได้

ดังนั้น สปส พิสัย_{ชุด 2} $\leq$ สปส พิสัย_{ชุด 1} $\rightarrow$ ข้อ ข. ผิด

26. 4

ก. เนื่องจาก A, B ไม่ใช่เมทริกซ์จัตุรัส ดังนั้น จะใช้กฎ $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ไม่ได้
ซึ่งจะทำให้เราไม่รู้ค่า $\det(AB)$ กับ $\det(BA)$ เท่ากันหรือไม่

จะเห็นว่า $ABC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$ ยังไม่ค่อยเกี่ยวกับข้อ ก. เพราะไม่ว่า A, B จะเป็นอะไร จะหา C ได้โดยการย้ายข้าง AB

ได้เป็น $C = (AB)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix}$ ได้เสมอ ขอแค่ $\det(AB) \neq 0$ เพื่อให้หา $(AB)^{-1}$ ได้

ลองสุ่ม A, B มาแทนดู ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{จะได้ } AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

จะได้ $\det(AB) = 1 \neq 0, \det(BA) = 0$ ดังนั้น $\det(AB) \neq \det(BA) = 1 \rightarrow$ ก. ผิด

$$\text{ข. จาก } C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ และจากสูตรอินเวอร์ส } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$\text{จะได้ } C^{-1} = \frac{1}{(-1)(2)-(1)(2)} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } ABC = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} \text{ ย้ายข้าง } C \text{ จะได้ } AB &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} C^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 14 \end{bmatrix} \left(\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } CAB = C(AB) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ข. ผิด}$$

27. 3

มากกว่า 84.5 คะแนน = 4 คน $\rightarrow$ คิดเป็นจำนวนนักเรียนร้อยละ $\frac{4}{160} \times 100 = 2.5\%$

$\rightarrow$ คิดเป็นพื้นที่ใต้โค้ง 0.025 ซึ่งจะวาดได้ดังรูป

แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง จะเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลางไปทางขวา

ดังนั้น พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง = พื้นที่ฝั่งขวาทั้งหมด - 0.025

$$= 0.5 - 0.025 = 0.475 \rightarrow \text{เปิดตารางได้ } z = 1.96$$

ดังนั้น ข้อมูล $x = 84.5$ จะมี $z = 1.96$ แทนในสูตร $z = \frac{x - \bar{x}}{s}$ จะได้ $1.96 = \frac{84.5 - 60}{s}$ (โจทย์ให้ $\bar{x} = 60$)

$$s = \frac{24.5}{1.96} = \frac{2450}{196} = 12.5$$

และจะได้ ข้อมูล $x = 55$ จะมี $z = \frac{55 - 60}{12.5} = -\frac{5}{12.5} = -\frac{50}{125} = -0.4 \rightarrow$ เป็นลบ $\rightarrow$ พื้นที่อยู่ทางซ้าย

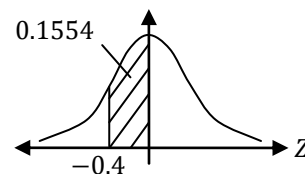
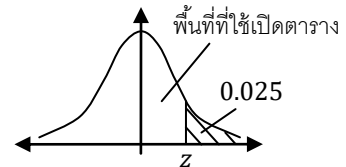
เอา $z = 0.4$ ไปเปิดตาราง ได้พื้นที่ = 0.1554 จะวาดได้ดังรูป

หาเปอร์เซ็นต์ ต้องดูว่ามีข้อมูลได้น้อยกว่า $z = -0.4$ อยู่กี่เปอร์เซ็นต์

จะได้บริเวณทางซ้ายของ $z = -0.4$ มีพื้นที่ = $0.5 - 0.1554$

$$= 0.3446 = 34.46\%$$

ดังนั้น $x = 55$ จะเท่ากับเปอร์เซ็นต์ที่ 34.46



28. 1

มัธยฐาน = 15 จะได้ข้อมูลเรียงจากน้อยไปมาก คือ $a, b, 15, c, d$

ข้อมูลมาเป็นตัวๆ จะได้ตำแหน่ง $Q_r = \frac{r(N+1)}{4}$

ดังนั้น Q_1 อยู่ตัวที่ $\frac{1(5+1)}{4} = 1.5 =$ ตรงกลางระหว่างตัวที่ 1 กับ 2 $\rightarrow Q_1 = \frac{a+b}{2}$

Q_3 อยู่ตัวที่ $\frac{3(5+1)}{4} = 4.5 =$ ตรงกลางระหว่างตัวที่ 4 กับ 5 $\rightarrow Q_3 = \frac{c+d}{2}$

จากค่าเฉลี่ย Q_1 กับ Q_3 มีฐาน จะได้ $\frac{Q_1+Q_3}{2} = \frac{\frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2}}{2} = 15 \rightarrow \frac{a+b}{2} + \frac{c+d}{2} = 30$
 $\rightarrow a + b + c + d = 60$

จะได้ $\bar{x} = \frac{a+b+15+c+d}{5} = \frac{(a+b+c+d)+15}{5} = \frac{60+15}{5} = 15$

จาก ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย $= \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{N} = 2.8$ จะได้ $\frac{|a-15| + |b-15| + |15-15| + |c-15| + |d-15|}{5} = 2.8$

$a, b < 15 \rightarrow |a-15| = 15-a$
 $|b-15| = 15-b$
 $c, d > 15 \rightarrow |c-15| = c-15$
 $|d-15| = d-15$

$$\frac{15-a + 15-b + 0 + c-15 + d-15}{5} = 2.8$$

$$\frac{-a - b + c + d}{(c+d) - (a+b)} = 14$$

ดังนั้น จะได้ ส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{\frac{c+d}{2} - \frac{a+b}{2}}{2} = \frac{(c+d) - (a+b)}{2} = \frac{14}{2} = 7 = 3.5$

29. 2

แปลงเป็น sin ให้หมด จะได้

$$\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{\cos^4 x}{7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{\sin^4 x}{5} + \frac{(1-\sin^2 x)^2}{7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{7\sin^4 x + 5(1-2\sin^2 x + \sin^4 x)}{35} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{12\sin^4 x + 5 - 10\sin^2 x}{35} = \frac{1}{12}$$

$$144\sin^4 x + 60 - 120\sin^2 x = 35$$

$$144\sin^4 x - 120\sin^2 x + 25 = 0$$

$$(12\sin^2 x - 5)^2 = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{5}{12}$$

ดังนั้น $\frac{\sin^2(2x)}{5} + \frac{\cos^2(2x)}{7}$

$$= \frac{(2\sin x \cos x)^2}{5} + \frac{(1-2\sin^2 x)^2}{7}$$

$$= \frac{4\sin^2 x \cos^2 x}{5} + \frac{(1-2\sin^2 x)^2}{7}$$

$$= \frac{4\sin^2 x (1-\sin^2 x)}{5} + \frac{(1-2\sin^2 x)^2}{7}$$

$$= \frac{4(\frac{5}{12})(1-\frac{5}{12})}{5} + \frac{(1-2(\frac{5}{12}))^2}{7}$$

$$= \frac{\frac{7}{36}}{5} + \frac{\frac{1}{7(36)}}$$

$$= \frac{49+1}{252} = \frac{50}{252} = \frac{25}{126}$$

30. 1

ข้อนี้จะแก้ระบบสมการก็ได้ อีกวิธีคือใช้ทักษะการเปรียบเทียบเบื้องต้น ดังนี้

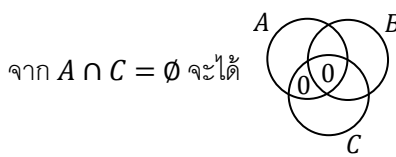
จาก $B = C + D$ เราจะสรุปได้ว่า B จะมากกว่า C และ D

จาก $A = 2C - B$ จะได้ $A + B = C + C$ เนื่องจาก B มากกว่า C ดังนั้น A ต้องน้อยกว่า C
 จึงจะทำให้สองฝั่งเท่ากันได้ $\rightarrow A < C < B \dots(1)$

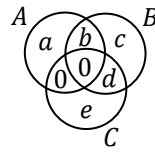
จาก $D = A + C - B$ จะได้ $D + B = A + C$ เนื่องจาก B มากกว่า C ดังนั้น D ต้องน้อยกว่า A
 จึงจะทำให้สองฝั่งเท่ากันได้ $\rightarrow D < A \dots(2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $D < A < C < B$

31. 7



กำหนดให้แต่ละส่วนเป็นดังนี้



จาก $n(U) = 20$ และ $n(A') = 12$ จะได้ $n(A) = 20 - 12 = 8$ ดังนั้น $a + b = 8 \quad \dots(1)$

และ $n(B') = 9$ จะได้ $n(B) = 20 - 9 = 11$ ดังนั้น $b + c + d = 11 \quad \dots(2)$

และ $n(C') = 15$ จะได้ $n(C) = 20 - 15 = 5$ ดังนั้น $d + e = 5 \quad \dots(3)$

จาก $n((A - B) \cup (B - A)) = 11$ จะได้ $a + c + d = 11 \quad \dots(4)$

จาก $n((B - C) \cup (C - B)) = 12$ จะได้ $b + c + e = 12 \quad \dots(5)$

จะเห็นว่า (2) และ (4) เหมือนกันหมด ยกเว้น a กับ b ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a = b$

และจาก (1) จะได้ว่า $a = b = 4$ แทนใน (2) จะได้ $c + d = 7 \quad \dots(6)$

แทนใน (5) จะได้ $c + e = 8 \quad \dots(7)$) ลบกัน จะได้ $d - e = -1 \quad \dots(9)$

(9) + (3) : e จะตัดกันได้ เหลือ $2d = 4 \rightarrow d = 2$ แทนใน (3) ได้ $e = 3$ แทนใน (6) ได้ $c = 5$

ดังนั้น $n((A - B) \cup (C - B)) = a + e = 4 + 3 = 7$

32. 169

หา A : สังเกตว่า มุมเพิ่มทีละ 72° เท่าๆกัน ซึ่ง $72^\circ = \frac{360^\circ}{5}$ พอดี ดังนั้น มุมทั้ง 5 จะเหมือนกับตอนหาค่าที่ n ของ

จำนวนเชิงซ้อน ที่มีรากทั้ง 5 ตัว คือ

$$\left. \begin{array}{l} \cos 15^\circ + i \sin 15^\circ \\ \cos 87^\circ + i \sin 87^\circ \\ \cos 159^\circ + i \sin 159^\circ \\ \cos 231^\circ + i \sin 231^\circ \\ \cos 303^\circ + i \sin 303^\circ \end{array} \right\} \text{มุมเพิ่มทีละ } \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

ซึ่งรากที่ 5 ทั้ง 5 ตัว จะต้องสอดคล้องกับสมการในรูป $z^5 = \text{จำนวนคงที่}$ (เช่นในข้อนี้ คือ $z^5 = 1 \text{ cis } 75^\circ$)

และจากสูตรผลบวกวงกลม จะได้ผลบวกของรากทั้ง 5 ตัว $= \frac{0}{1} = 0$

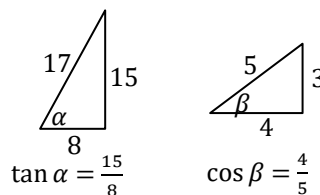
ดังนั้น ส่วนจริงของผลบวก $= \cos 15^\circ + \cos 87^\circ + \cos 159^\circ + \cos 231^\circ + \cos 303^\circ$ ต้องเป็น 0 $\rightarrow A = 0$

หา B : ภายใน arc เป็นบวก $\rightarrow$ ใช้สามเหลี่ยมมาช่วยได้โดยไม่ต้องระวังเครื่องหมาย

ให้ $\alpha = \arctan \frac{15}{8}$ จะได้ $\tan \alpha = \frac{15}{8}$

ให้ $\beta = \arccos \frac{4}{5}$ จะได้ $\cos \beta = \frac{4}{5}$

วาด Δ แล้วพิทาคอรัสหาด้านที่เหลือ จะได้ดังรูป



ดังนั้น $B = \sin \left(\arctan \left(\frac{15}{8} \right) + \arccos \left(\frac{4}{5} \right) \right) = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$

$$= \left(\frac{15}{17} \right) \left(\frac{4}{5} \right) + \left(\frac{8}{17} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = \frac{84}{85}$$

ดังนั้น $A + B = 0 + \frac{84}{85} = \frac{84}{85} = \frac{a}{b}$ ดังนั้น $a + b = 84 + 85 = 169$

33. 3

$$\text{จากสูตร } |z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$\text{บวกสองสูตร จะได้ } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$|z_1 + z_2|^2 + 1^2 = 2(\sqrt{2})^2 + 2(\sqrt{3})^2$$

$$|z_1 + z_2|^2 = 9$$

$$|z_1 + z_2| = 3 \quad (\text{ค่าสัมบูรณ์ต้องเป็นบวก})$$

34. 66

$$\text{สลับข้างสมการแรก ให้มีรูปแบบคล้ายกับสมการที่สอง จะได้ } b^a = ab \quad \dots(1)$$

$$b = ab^{3a} \quad \dots(2)$$

สังเกตว่า b เท่านั้น ที่เป็นฐานของเลขยกกำลัง ดังนั้น เราจะพยายามกำจัด a ที่คูณอยู่กับเลขยกกำลังออก

$$\text{เนื่องจาก } a, b \neq 0 \text{ เอา } (1) \div (2) \text{ จะทำให้ } a \text{ ตัดกันได้ } \rightarrow \frac{b^a}{b} = \frac{b}{b^{3a}} \rightarrow b^{4a} = b^2$$

$$\text{เนื่องจาก } b > 1 \text{ จะตัดฐาน } b \text{ ทั้งสองข้างได้ เหลือ } 4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$\text{แทน } a = \frac{1}{2} \text{ ใน } (1) \text{ จะได้ } b^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}b \rightarrow 2\sqrt{b} = b \text{ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ } 4b = b^2$$

$$0 = b^2 - 4b$$

$$0 = b(b - 4)$$

$$\text{จะได้ } b = 0, 4 \text{ แต่ } b > 1 \text{ ดังนั้น } b = 4 \rightarrow \text{จะได้ } 20a + 14b = 20\left(\frac{1}{2}\right) + 14(4) = 10 + 56 = 66$$

35. 201

$$\text{จาก } b_n = (a + n - 1)(a + n) \text{ จะได้ } b_1 = (a)(a + 1)$$

$$b_2 = (a + 1)(a + 2)$$

$$b_3 = (a + 2)(a + 3)$$

$$\vdots$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \dots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}} = \frac{a+1}{(a)(a+1)^2(a+2)} + \frac{a+2}{(a+1)(a+2)^2(a+3)} + \dots + \frac{a+n}{(a+n-1)(a+n)^2(a+n+1)}$$

$$= \frac{1}{(a)(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)(a+n+1)}$$

$$\text{ตัวส่วน มี 3 ตัวคูณกัน ดังนั้นต้องแยกเทเลสโคปิคด้วยรูปแบบ } \frac{1}{abc} \rightarrow \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$$

$$\text{เช่น } \frac{1}{(a)(a+1)(a+2)} \text{ จะต้องแยกเป็น } \frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \text{ จะได้ตัวส่วนที่เป็น ค.ร.น. ตรงกัน}$$

$$\text{ถัดมา ต้องปรับตัวเศษ } \rightarrow \text{เนื่องจาก } \frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} = \frac{(a+2)-(a)}{(a)(a+1)(a+2)} = \frac{2}{(a)(a+1)(a+2)}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{(a)(a+1)(a+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \right] + \dots$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a+n-1)(a+n)} - \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+1)(a+2)} + \frac{1}{(a+1)(a+2)} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} + \dots + \frac{1}{(a+n-1)(a+n)} - \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} \right]$$

ตัวตรงกลางจะตัดกันได้เป็นทอดๆ
เหลือตัวแรกกับตัวสุดท้าย

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} \right]$$

$$\text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a+1}{b_1 b_2} + \frac{a+2}{b_2 b_3} + \dots + \frac{a+n}{b_n b_{n+1}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(a)(a+1)} - 0 \right] = \frac{1}{2a(a+1)}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{1}{2a(a+1)} = \frac{1}{312} \rightarrow \begin{aligned} a(a+1) &= 156 \\ a^2 + a - 156 &= 0 \\ (a+13)(a-12) &= 0 \end{aligned}$$

แต่ a เป็นบวก ดังนั้น $a = 12$ จะได้ $a^2 + 57 = 12^2 + 57 = 144 + 57 = 201$

36. 3

$$\text{จัดรูป จะได้ } \begin{bmatrix} |x| & 1 \\ 2 & x - |y| \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & 6 \\ -2 & 2|y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+x & 7 \\ 0 & 7-y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} |x| + 2y & 7 \\ 0 & x + |y| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10+x & 7 \\ 0 & 7-y \end{bmatrix}$$

$$\text{จับสมาชิกในตำแหน่งตรงกันมาเท่ากัน จะได้ } \begin{aligned} |x| + 2y &= 10 + x \quad \dots(1) \\ x + |y| &= 7 - y \quad \dots(2) \end{aligned}$$

สังเกตว่า ถ้า $x \geq 0$ จะได้ $|x| = x$ ทำให้ตัด x ใน (1) ได้ เหลือ $2y = 10 \rightarrow y = 5$

แต่ถ้า $y = 5$ จะได้สมการ (2) คือ $x + 5 = 2 \rightarrow x = -3$ ขัดแย้งกับที่ $x \geq 0$

ดังนั้น $x \geq 0$ ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า $x < 0$

และสังเกตว่า ถ้า $y < 0$ จะได้ $|y| = -y$ ทำให้ตัด $-y$ ใน (2) ได้ เหลือ $x = 7$

ซึ่งจะขัดแย้งกับ $x < 0$ ดังนั้น $y < 0$ ไม่ได้ จึงสรุปได้ว่า $y \geq 0$

จาก $x < 0$ และ $y \geq 0$ จะได้ $|x| = -x$ และ $|y| = y$ แทนใน (1) และ (2) จะได้

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 10 + x & \rightarrow & -2x + 2y = 10 \quad \dots(3) \\ x + y &= 7 - y & \rightarrow & x + 2y = 7 \quad \dots(4) \end{aligned}$$

(4) - (3) : y จะตัดกันได้อีก เหลือ $3x = -3 \rightarrow x = -1$

แทน $x = -1$ ใน (4) จะได้ $2y = 8 \rightarrow y = 4$ ดังนั้น $x + y = -1 + 4 = 3$

37. 270

ข้อนี้ ถามว่ามี A, B ได้กี่แบบนั่นเอง ซึ่งสามารถนับจากจำนวนแบบของแผนภาพได้

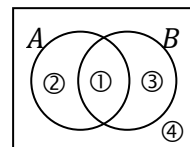
ขั้นที่ 1: จาก $n(A \cap B) = 2$ จะได้ส่วน ① ต้องมี 2 ตัว

เลือก 2 ตัว จาก $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ได้ $\binom{5}{2} = \frac{(5)(4)}{2} = 10$ แบบ

ขั้นที่ 2: U ที่เหลืออีก 3 ตัว แต่ละตัวต้องลง ② หรือ ③ หรือ ④ ช่องใดช่องหนึ่งเพียงช่องเดียว

นั่นคือ แต่ละตัวใน 3 ตัวที่เหลือ จะเลือกได้ตัวละ 3 แบบ จะได้จำนวนแบบ = $(3)(3)(3)$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบของแผนภาพ = $(10)(3)(3)(3) = 270$ แบบ



38. 14

$\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต ดังนั้น จะสอดคล้องกับสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$

แต่โจทย์ให้ $a_1 = 2$ แทนในสูตร จะได้ $a_n = 2 + (n-1)d \quad \dots(*)$

และ a_2, a_4, a_8 เป็นเรขาคณิต จะได้ $\frac{a_4}{a_2} = \frac{a_8}{a_4} \rightarrow$ ใช้สูตรจาก (*) จะได้ $\frac{2+3d}{2+d} = \frac{2+7d}{2+3d}$

$$(2+3d)(2+3d) = (2+d)(2+7d)$$

$$4 + 12d + 9d^2 = 4 + 16d + 7d^2$$

$$2d^2 - 4d = 0$$

$$2d(d-2) = 0 \rightarrow d = 0, 2$$

แต่ $d = 0$ ไม่ได้ เพราะถ้า $d = 0$ จะทำให้ $a_1 = a_2 = a_3 = \dots$ ขัดแย้งกับที่ $a_1 < a_2 < a_3 < \dots$

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $d = 2$ และจะได้ $a_n = 2 + (n-1)(2) = 2n \rightarrow$ จะได้ลำดับนี้คือ 2, 4, 6, 8, ...

ดังนั้น $\frac{(a_1-1)^3 + (a_2-1)^3 + \dots + (a_n-1)^3}{a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3} = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3}$ เอาเศษมาเติมเข้าและหักออกด้วยพจน์เลขคู่

$$= \frac{[1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3] - [2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3]}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3}$$

$$\text{กระจายเศษเข้าไปหาร} \rightarrow = \frac{[1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3]}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3} - 1$$

$$\text{ดึง } 2^3 \text{ เป็นตัวร่วม} \rightarrow = \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (2n)^3}{2^3(1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3)} - 1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} \text{ ใช้สูตร } \rightarrow = \frac{\left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2}{2^3 \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2} - 1 = \frac{n^2(2n+1)^2}{2n^2(n+1)^2} - 1 = \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2} - 1$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2} - 1 &= \frac{391}{450} \\ \frac{(2n+1)^2}{2(n+1)^2} &= \frac{841}{450} \\ \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} &= \frac{841}{225} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{2n+1}{n+1} &= \pm \sqrt{\frac{841}{225}} \\ \frac{2n+1}{n+1} &= \frac{29}{15} \quad (\text{ฝั่งซ้ายเป็นบวก}) \\ 30n + 15 &= 29n + 29 \\ n &= 14 \end{aligned}$$

39. 11

สังเกตว่า $(2+x)(2-x) = 4-x^2$

ดังนั้น ถ้าให้ $A = \sqrt{2+x}$, $B = \sqrt{2-x}$ จะได้ฝั่งซ้ายคือ $3A - 6B + 4AB$

ถัดมา จะพยายามจัดฝั่งขวาให้อยู่ในรูปของ A, B นั่นคือ ต้องเขียน $10 - 3x$ ให้อยู่ในรูปของ $2+x$ กับ $2-x$

ลองเดาๆดู จะได้ $(2+x) + 4(2-x) = 10 - 3x$ (หรือจะให้ $m(2+x) + n(2-x) = 10 - 3x$

$$\begin{aligned} \text{เทียบ สปส เป็น } 2m + 2n &= 10 \\ m - n &= -3 \end{aligned} \text{ แล้วแก้หา } m, n \text{ ก็ได้}$$

ดังนั้น $10 - 3x = (2+x) + 4(2-x) = A^2 + 4B^2$

ดังนั้น สมการจะกลายเป็น $3A - 6B + 4AB = A^2 + 4B^2$

$$\begin{aligned} 0 &= A^2 + 4B^2 - 3A + 6B - 4AB \\ 0 &= (A^2 - 4AB + 4B^2) - 3A + 6B \\ 0 &= (A - 2B)^2 - 3(A - 2B) \\ 0 &= (A - 2B)(A - 2B - 3) \end{aligned}$$

$$A - 2B = 0$$

$$A = 2B$$

$$\sqrt{2+x} = 2\sqrt{2-x}$$

$$2+x = 4(2-x)$$

$$2+x = 8-4x$$

$$5x = 6$$

$$x = \frac{6}{5}$$

$$A - 2B - 3 = 0$$

$$A = 2B + 3$$

จาก $\sqrt{2-x}$ ในสมการโจทย์ จะได้ $2-x \geq 0$

ดังนั้น $2 \geq x$ จะได้ค่ามากที่สุดของ x คือ 2

จะได้ A มีค่าอย่างมาก $= \sqrt{2+x_{\max}} = \sqrt{2+2} = 2$

แต่ $2B + 3$ มีค่าน้อย 3 (เพราะ B เป็นค่าติดลบ จะ ≥ 0)

ดังนั้น $A = 2B + 3$ จึงเป็นไปได้

ตรวจคำตอบในบรรทัด

ก่อนยกกำลังสองก็พอ

$$\sqrt{\frac{16}{5}} = 2\sqrt{\frac{4}{5}} \text{ จริง}$$

จะได้คำตอบคือ $\frac{6}{5}$ ดังนั้น $a = 6$, $b = 5$ จะได้ $a + b = 6 + 5 = 11$

40. 55

$$\begin{aligned} 8 \cos 2\theta + \frac{8}{\cos 2\theta} &= 65 \\ 8 \cos^2 2\theta + 8 &= 65 \cos 2\theta \\ 8 \cos^2 2\theta - 65 \cos 2\theta + 8 &= 0 \\ (8 \cos 2\theta - 1)(\cos 2\theta - 8) &= 0 \\ \cos 2\theta &= \frac{1}{8}, 8 \end{aligned}$$

แต่ $\cos$ เกิน 1 ไม่ได้ ดังนั้น $\cos 2\theta = \frac{1}{8} \dots (1)$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{1}{8} \\ 2 \cos^2 \theta - 1 &= \frac{1}{8} \\ \cos^2 \theta &= \frac{9}{16} \\ \cos \theta &= \pm \frac{3}{4} \end{aligned}$$

แต่ $0 < \theta < 90^\circ$ จะได้ $\cos$ เป็นบวก

$$\text{ดังนั้น } \cos \theta = \frac{3}{4} \dots (2)$$

$$\begin{aligned} 160 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2} &= \frac{160}{-2} \left(-2 \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{5\theta}{2} \right) \\ &= -80 \left(\cos \left(\frac{\theta}{2} + \frac{5\theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{\theta}{2} - \frac{5\theta}{2} \right) \right) \\ &= -80 (\cos 3\theta - \cos(-2\theta)) \\ &= -80 (\cos 3\theta - \cos 2\theta) \\ &= -80 (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta - \cos 2\theta) \\ &= -80 \left(4 \left(\frac{3}{4} \right)^3 - 3 \left(\frac{3}{4} \right) - \frac{1}{8} \right) \\ &= -80 \left(\frac{27}{16} - \frac{9}{4} - \frac{1}{8} \right) = -80 \left(\frac{27-36-2}{16} \right) = -80 \left(\frac{-11}{16} \right) = 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(A+B) - \cos(A-B) \\ &= -2 \sin A \sin B \end{aligned}$$

41. 34.5

$$\begin{aligned} f(\underbrace{2x-1}_k) &= 4x^2 - 10x + a \quad \text{จัดรูปหา } f(x) \text{ ก่อน ให้ } 2x-1 = k \text{ จะได้ } x = \frac{k+1}{2} \\ \text{แทนค่า } x \text{ จะได้ } f(k) &= 4 \left(\frac{k+1}{2} \right)^2 - 10 \left(\frac{k+1}{2} \right) + a \\ &= k^2 + 2k + 1 - 5k - 5 + a \\ &= k^2 - 3k - 4 + a \\ \text{ดังนั้น } f(x) &= x^2 - 3x - 4 + a \end{aligned}$$

จาก $f(0) = 12$ จะได้ $0^2 - 3(0) - 4 + a = 12$ แก้สมการ จะได้ $a = 16$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = x^2 - 3x - 4 + 16 = x^2 - 3x + 12$$

$$\begin{aligned} \text{และจะได้ } \int_1^4 f(x) dx &= \left. \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 12x \right|_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{3(4^2)}{2} + 12(4) \right) - \left(\frac{1^3}{3} - \frac{3(1^2)}{2} + 12(1) \right) \\ &= \frac{64}{3} - 24 + 48 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 12 \\ &= \frac{63}{3} + 12 + \frac{3}{2} = 34.5 \end{aligned}$$

42. 36

$$\text{จากสมบัติของฟังก์ชันคอมโพสิท จะได้ } f(g^{-1}(1+a)) = g(f^{-1}(1+a))$$

หาได้โดย เอา $f(x)$ มาแทน x ด้วย $g^{-1}(1+a)$

$$\begin{aligned} \text{จาก } g(x) &= 2f(x) + 5 \\ \text{แทน } x \text{ ด้วย } g^{-1}(1+a) &\downarrow \\ g(g^{-1}(1+a)) &= 2f(g^{-1}(1+a)) + 5 \\ (g \text{ กับ } g^{-1} \text{ จะตัดกันได้}) &\downarrow \\ 1+a &= 2f(g^{-1}(1+a)) + 5 \\ \frac{1+a-5}{2} &= f(g^{-1}(1+a)) \end{aligned}$$

หาได้โดย เอา $g(x)$ มาแทน x ด้วย $f^{-1}(1+a)$

$$\begin{aligned} \text{จาก } g(x) &= 2f(x) + 5 \\ \text{แทน } x \text{ ด้วย } f^{-1}(1+a) &\downarrow \\ g(f^{-1}(1+a)) &= 2f(f^{-1}(1+a)) + 5 \\ (f \text{ กับ } f^{-1} \text{ จะตัดกันได้}) &\downarrow \\ g(f^{-1}(1+a)) &= 2(1+a) + 5 \\ g(f^{-1}(1+a)) &= 2a + 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จับสองฝั่งมาเท่ากัน จะได้ } \frac{1+a-5}{2} &= 2a+7 \\ a-4 &= 4a+14 \\ -18 &= 3a \\ -6 &= a \quad \rightarrow a^2 = 36 \end{aligned}$$

43. 3.5

สังเกตว่า ถ้าเอาสองตัวข้างในฝั่งขวามาวกกัน จะได้ $2^x - 4 + 4^x - 2 = 2^x + 4^x - 6$ เหมือนข้างในฝั่งซ้าย

ดังนั้น ถ้าให้ $a = 2^x - 4$, $b = 4^x - 2$ จะได้สมการคือ $(a+b)^3 = a^3 + b^3$

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3$$

$$3a^2b + 3ab^2 = 0$$

$$3ab(a+b) = 0$$

$$\begin{array}{c|c|c} \begin{array}{l} a = 0 \\ 2^x - 4 = 0 \\ 2^x = 4 \\ x = 2 \end{array} & \begin{array}{l} b = 0 \\ 4^x - 2 = 0 \\ 2^{2x} = 2 \\ x = \frac{1}{2} \end{array} & \begin{array}{l} a+b = 0 \\ 4^x + 2^x - 6 = 0 \\ (2^x+3)(2^x-2) = 0 \\ 2^x = -3, 2 \\ x = \quad, 1 \end{array} \end{array}$$

$$\text{จะได้ผลบวกคำตอบ} = 2 + \frac{1}{2} + 1 = 3.5$$

44. 4

$$\text{จาก } g(f(x)) = x^2 + 2x - 1 \text{ จะได้ } g(\underbrace{x+1}_k) = x^2 + 2x - 1$$

จัดรูป หา $g(x)$ ให้ $k = x+1$

$$\begin{aligned} k-1 &= x \rightarrow \text{แทนได้ } g(k) = (k-1)^2 + 2(k-1) - 1 \\ &= k^2 - 2k + 1 + 2k - 2 - 1 = k^2 - 2 \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } g(x) = x^2 - 2$$

$$\begin{aligned} \text{จากนิยาม จะได้ } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(g(x+h))^2 - (g(x))^2}{h} &= \frac{d}{dx} (g(x))^2 \\ &= \frac{d}{dx} (x^2 - 2)^2 \\ &= 2(x^2 - 2)(2x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

ดิฟลูกโซ่

$$\text{ดังนั้น } s(x) = 2(x^2 - 2)(2x)$$

$$\text{ดังนั้น } (sg)(1) = s(1) \cdot g(1) = 2(1^2 - 2)(2(1)) \cdot (1^2 - 2) = (-4) \cdot (-1) = 4$$

45. 1277

เพื่อความสะดวก จะใช้ตารางมาช่วย โดยให้ $a(i, j)$ คือ ช่องในแถวที่ i หลักที่ j

จาก (ก) $a(n, 0) = n + 1$ จะได้ $a(0, 0) = 0 + 1 = 1$ จะเติมหลักที่ 0 ได้ดังรูป

$$a(1, 0) = 1 + 1 = 2$$

$$a(2, 0) = 2 + 1 = 3$$

$$a(3, 0) = 3 + 1 = 4$$

⋮

	0	1	2	3
0	1			
1	2			
2	3			
3	4			
4	⋮			

ถัดมา จะหาหลักที่ 1

$$\begin{aligned} \text{จาก (ข) แทน } m = 1 \text{ จะได้ } a(0, 1) &= a(1, 1-1) \\ &= a(1, 0) = 2 \text{ เติมได้ดังรูป} \end{aligned}$$

	0	1	2	3
0	1	2		
1	2			
2	3			
3	4			
4	⋮			

จาก (ค) แทน $m = 0$ จะได้ $a(n+1, 0+1) = a(a(n, 0+1), 0)$

$$a(n+1, 1) = a(a(n, 1), 0)$$

จาก (ก) $a(????, 0) = ????? + 1$

$$a(n+1, 1) = a(n, 1) + 1$$

ความหมายของสูตรที่ได้คือ ใน หลักที่ 1 ช่องถัดลงมา $(n+1)$ จะเท่ากับช่องก่อนหน้า (n) บวก 1

	0	1	2	3
0	1	2	1	
1	2	3	1	
2	3	4	1	
3	4	5		
4	:	:		

จะเติมช่องที่เหลือของหลักที่ 1 ได้ดังรูป

จะเห็นว่า ตัวเลขในหลักที่ 1 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตที่ $a_0 = 2, a_1 = 3, d = 1$

$$\text{จากสูตร } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{จะได้ หลักที่ 1 มีสูตรคือ } a(n, 1) = 3 + (n-1)(1) = n + 2 \quad \dots(*)$$

ถัดมา จะทำซ้ำแบบเดิม เพื่อหาหลักที่ 2

$$\begin{aligned} \text{จาก (ข) แทน } m = 2 \text{ จะได้ } a(0, 2) &= a(1, 2-1) \\ &= a(1, 1) = 3 \text{ เติมได้ดังรูป} \end{aligned}$$

	0	1	2	3
0	1	2	3	
1	2	3		
2	3	4		
3	4	5		
4	:	:		

จาก (ค) แทน $m = 1$ จะได้ $a(n+1, 1+1) = a(a(n, 1+1), 1)$

$$a(n+1, 2) = a(a(n, 2), 1)$$

จาก (*) $a(????, 1) = ????? + 2$

$$a(n+1, 2) = a(n, 2) + 2$$

ความหมายของสูตรที่ได้คือ ใน หลักที่ 2 ช่องถัดลงมา $(n+1)$ จะเท่ากับช่องก่อนหน้า (n) บวก 2

	0	1	2	3
0	1	2	3	2
1	2	3	5	2
2	3	4	7	2
3	4	5	9	
4	:	:		

จะเติมช่องที่เหลือของหลักที่ 2 ได้ดังรูป

จะเห็นว่า ตัวเลขในหลักที่ 2 เรียงเป็นลำดับเลขคณิตที่ $a_0 = 3, a_1 = 5, d = 2$

$$\text{จากสูตร } a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\text{ดังนั้น หลักที่ 2 มีสูตรคือ } a(n, 2) = 5 + (n-1)(2) = 2n + 3 \quad \dots(**)$$

โจทย์ให้ $a(x, 2) = 2557$ ใช้สูตร (**) จะได้ $2x + 3 = 2557$

$$x = \frac{2557-3}{2} = \frac{2554}{2} = 1277$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Gtr Ping สำหรับข้อสอบและเฉลยคำตอบ

ขอบคุณ คุณ ผศ.บัณฑิต ภูริชิตพิพร และคุณ คุณ Sila Sookrasamee สำหรับเฉลยแบบละเอียด

ขอบคุณ คุณ Ty Pongsatorn สำหรับเฉลยข้อ 22

ขอบคุณ คุณ Nattajak Siribanluewuti

คุณ Krittikorn Jianrungsin

คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

คุณ Buay Sahasaporn

ที่ช่วยตรวจคำตอบความถูกต้องของเอกสาร