PAT 1 (เม.ย. 57)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 26 เมษายน 2557

ตอนที่ 1: แบบปรนัย 4 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด จำนวน 30 ข้อ (ข้อ 1 – 30) ข้อละ 6 คะแนน

1. สำหรับเซต S ใดๆ ให้ $n(S)$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต S กำหนดให้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ ถ้า A, B และ C เป็นสับเซตใน $\mathcal{U}$ โดยที่ $n(A) = 2\big(n(B)\big) = 3\big(n(C)\big)$, $n(A \cup B \cup C) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 2$ ถ้า $n(A - B) = 8$, $n(B - C) = 4$ และ $n(A - C) = 9$ แล้ว $n\big((A \cup B) - C\big)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

   1. 13 2. 12 3. 11 4. 10

2. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริงบวก พิจารณาข้อความต่อไปนี้

   (ก) ประพจน์ $\forall x[|x^2 - 5x + 4| < x^2 + 6x + 5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

   (ข) ประพจน์ $\forall x[|x^2 - 1| \geq 2x - 2]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
   2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
   3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
   4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

3. กำหนดให้ p, q, r, s และ t เป็นประพจน์ ซึ่ง $p \to (q \wedge r)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ
$p \leftrightarrow (s \vee t)$ มีค่าความจริงเป็น จริง
ประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้มีค่าความจริงเป็น จริง
1. $(q \wedge s) \to (p \wedge q)$
2. $(s \wedge t) \to \sim q$
3. $(q \vee s) \leftrightarrow p$
4. $(p \to r) \to s$

4. ถ้า A แทนเซตคำตอบของสมการ $|2 - 2x| + |x + 2| = 4 - x$ แล้ว เซต A เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้
1. $(-4, 0)$
2. $(-1, 1)$
3. $(0, 4)$
4. $(-3, 2)$

5. ให้ A แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$
และให้ B แทนเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|x^2 - 2x| + x^2 > 4$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้ (ก) $A \subset B$
(ข) จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

6. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดยที่ $(f\circ g)(x)=4x-5$ และ $g^{-1}(x)=2x+1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $4(f^{-1}\circ g)(2x+1)=g(x)+1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

(ข) $\left(g^{-1}\circ(f^{-1}\circ g)\right)(x)=f^{-1}(x)+1$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

7. กำหนดให้ $A=\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}$, $\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ $ab\neq 0$ และเมทริกซ์ A สอดคล้องกับสมการ $2(A-\mathrm{I})^{-1}=4\mathrm{I}-A$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $ab=2$

(ข) $\det(3A^2A^tA^{-1})=324$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

8. ให้ F เป็นโฟกัสของพาราโบลา $4y = x^2 - 6x + 13$ ถ้าไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีสมบัติดังนี้

(ก) แกนตามขวางขนานแกน y

(ข) จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ F

(ค) โฟกัสหนึ่งของไฮเพอร์โบลาคือ $(3, 2 + 2\sqrt{13})$

(ง) แกนสังยุคยาว 12 หน่วย

แล้วไฮเพอร์โบลารูปนี้มีสมการตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y + 144 = 0$
2. $4x^2 - 9y^2 - 24x + 36y - 36 = 0$
3. $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y - 144 = 0$
4. $9y^2 - 4x^2 + 24x + 36y + 36 = 0$

9. กำหนดให้วงรีรูปหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + Ay^2 + Bx + Cy - 92 = 0$ โดยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2, 1)$ และแกนเอกยาวเป็น 2 เท่าของแกนโท ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $A + B + C = 0$
2. ความเยื้องศูนย์กลางของวงรีเท่ากับ $\frac{\sqrt{3}}{5}$
3. วงรีมีจุดศูนย์กลางร่วมกับจุดศูนย์กลางของวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ และแกนเอกยาวเท่ากับรัศมีของวงกลม
4. ผลบวกของระยะทางจากจุด $(2, 6)$ ไปยังโฟกัสทั้งสองของวงรีเท่ากับ 20 หน่วย

10. ให้ A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x-3y+1=0$ และ $2x+5y-9=0$ ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m เมื่อ $m<0$ มีระยะห่างจากจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ k หน่วย โดยที่ $k^2+2m=1$ และผ่านจุด A แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $2x+y-5=0$ 2. $3x+y-7=0$ 3. $x+2y-4=0$ 4. $x+3y-5=0$

11. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยม โดยที่มีความยาวของด้านตรงข้ามมุม A มุม B มุม C เท่ากับ a หน่วย b หน่วย และ c หน่วย ตามลำดับ และมุม A มีขนาดเป็นสองเท่าของมุม B ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $c^2=a^2+ab$ 2. $c^2=b^2+ab$ 3. $a^2=b^2+bc$ 4. $a^2=c^2+bc$

12. กำหนดให้ $0<\theta<15^\circ$ ค่าของ $y=\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)-\operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\arctan(\cot\theta)$ 2. $\arctan(\tan\theta)$ 3. $\arctan(\sin\theta)$ 4. $\arctan(\cos\theta)$

13. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า A และ B เป็นจำนวนจริง สอดคล้องกับสมการ $\sin^2 B = \sin A \cos A$ แล้ว $\cos 2B = 2\cos^2(45° + A)$

(ข) ถ้า $0 \leq A, B \leq \frac{\pi}{2}$ สอดคล้องกับ $\sin A = \sqrt{2}\sin B$ และ $\sqrt{3}\sec B = \sqrt{2}\sec A$ แล้ว $\sin 10A + \cos 10B = 0.5$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

14. กำหนดให้ $\bar{a}, \bar{b}$ และ $\bar{c}$ เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง $\bar{a} + \bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$, $|\bar{a} + \bar{b}| = 5$, $|\bar{b} + \bar{c}| = 3$ และ $|\bar{b}| = \sqrt{10}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้าเวกเตอร์ $\bar{a}$ ทำมุม θ กับเวกเตอร์ $\bar{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ แล้ว $\tan\theta = 3$

(ข) $\bar{a} \cdot \bar{c} = -12$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

15. จากตัวเลข $1, 2, 3, \ldots, 9$ นำมาสร้างจำนวนห้าหลักใช้เลขซ้ำกันได้ ความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนห้าหลักโดยที่ในแต่ละหลักเป็นตัวเลขที่แตกต่างกันเพียง 3 จำนวนเท่านั้น มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{280}{2187}$
2. $\frac{560}{2187}$
3. $\frac{1400}{6561}$
4. $\frac{5040}{6561}$

16. มีเก้าอี้สีขาวเหมือนกัน 3 ตัว และเก้าอี้สีแดงเหมือนกัน 3 ตัว นำมาจัดเรียงรอบโต๊ะกลม จำนวนวิธีเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 วิธี
2. 6 วิธี
3. 10 วิธี
4. 20 วิธี

17. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชัน นิยามโดย $f(x)=\begin{cases} -x+a & , \quad x \le -2 \\ -\frac{2}{5}x+b & , \quad -2 < x < 3 \\ x^2-6x+11 & , \quad x > 3 \end{cases}$

เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้าฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x=-2$ และ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าได้แล้วค่าของ $|a+5b|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 18
3. $\frac{88}{5}$
4. $\frac{102}{5}$

18. กำหนดให้ $b>1$ และ $\int_1^b \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\,dx=4$ ค่าของ $1+b+b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 21 2. 31 3. 91 4. 111

19. กำหนดให้ $f(x)=ax^2+bx+c$ เป็นพหุนามกำลังสอง เมื่อ a,b,c เป็นจำนวนจริง และ $a\neq 0$ โดยที่ $f(1)=0$ และ f มีค่าสูงสุดที่ $x=\frac{1}{3}$ ให้ $F(\alpha,\beta)=\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ โดยที่ $F(0,t)=F(1,t)+1$ สำหรับจำนวนจริง $t>1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $F(1,2)=F(2,3)+10$

(ข) อนุพันธ์ของ $\frac{f(x)}{x^2}$ เท่ากับ $\frac{-3x^2-2x-2}{x^3}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

20. กำหนดให้ $a_n = \frac{n^2}{16n^2-4}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ถ้า $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n} = \frac{a}{b}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 17
2. 25
3. 145
4. 257

21. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $\bar{z} - 1 - 4\mathrm{i} = 3\mathrm{i}(z - \mathrm{i})$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

1. $z + \bar{z} = \mathrm{i}(z - \bar{z})$
2. $|z + 2| = 2$
3. $\bar{z}^2 - 8\mathrm{i} = 0$
4. $z(1 - \mathrm{i})^3 - 8\mathrm{i} = 0$

22. ตารางต่อไปนี้ เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

x	0	1	2	3
y	1	0.8	0.8	0.6

ให้ $y = ax + b$ เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x กับ y โดย x เป็นตัวแปรอิสระ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $b = a + 1.1$

(ข) ถ้า $x = 8$ แล้ว $y = 0.02$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

23. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x - 2\log_{64} x = 7$ แล้ว x สอดคล้องกับสมการ $x - 3\sqrt{x} = 4$

(ข) ถ้า a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ

$$\begin{aligned}(1-a)\log_3 2 &= 2 - \log_3 5\\ (3+b)\log_5 2 &= 2 - \log_5 3 \quad \text{และ}\\ (3+c)\log_7 2 &= 4\log_7 3 - \log_7 5\end{aligned}$$

แล้ว $2a + b - c = 2 + 5\log_2 5 - 9\log_2 3$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

24. คะแนนสอบของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ คะแนนเต็ม 100 คะแนน มัธยฐานเท่ากับ 45 คะแนน และมีนักเรียนร้อยละ 34.13 ที่สอบได้คะแนนระหว่างมัธยฐานกับ 54 คะแนน ถ้านักเรียนคนหนึ่งมีคะแนนสอบเป็น $\frac{5}{3}$ เท่าของคะแนนเปอร์เซ็นไทล์ที่ 33 แล้วนักเรียนคนนี้สอบได้คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติระหว่าง 0 ถึง Z ดังตารางต่อไปนี้

Z	0.33	0.36	0.41	0.44	0.50	1.0
พื้นที่	0.1293	0.1406	0.1591	0.1700	0.1915	0.3413

1. 41.04%
2. 48.96%
3. 68.40%
4. 81.60%

25. กำหนดข้อมูล 10 จำนวน ดังนี้ 30 32 28 35 42 45 40 48 50 65

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า D_7 แทนข้อมูลที่เป็นเดไซล์ที่ 7 และ M แทนค่ามัธยฐานของข้อมูล แล้ว $D_7 - M$ เท่ากับ 6.5

(ข) ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ เท่ากับ 8.6

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

26. กำหนดเวกเตอร์ $\bar{u} = a\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + b\bar{k}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง

ถ้า $|\bar{u} \times \bar{\jmath}| = 2$ แล้ว $|\bar{u}|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 6
3. 7
4. 8

27. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ถ้า $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวกที่ $abc = 1$

และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณ มิติ 3×3 แล้ว $\det(A^2 + A + \mathrm{I}) = 0$

(ข) ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} a_1 + 2b_1 - 3c_1 & a_2 + 2b_2 - 3c_2 & a_3 + 2b_3 - 3c_3 \\ 2b_1 & 2b_2 & 2b_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$

เมื่อ $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว $\det(B) = -18$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

28. มีปุ๋ยอยู่ 2 ชนิด คือชนิด A และ ชนิด B โดยแต่ละชนิดบรรจุถุงละ 100 กรัม ส่วนประกอบและราคาแต่ละชนิดเป็นดังนี้

ชนิดปุ๋ย	สารอาหาร N	สารอาหาร P	สารอาหาร K	ราคาถุงละ
ชนิด A	2 หน่วย	1 หน่วย	80 หน่วย	10 บาท
ชนิด B	3 หน่วย	3 หน่วย	60 หน่วย	12 บาท

นักวิจัยทดลองผสมปุ๋ยชนิด A และชนิด B ให้พืชในแปลงทดลอง โดยส่วนผสมปุ๋ยที่ได้ประกอบด้วยสารอาหาร N อย่างน้อย 18 หน่วย สารอาหาร P อย่างน้อย 12 หน่วย และสารอาหาร K อย่างน้อย 480 หน่วย ค่าใช้จ่ายน้อยสุดในการผสมปุ๋ยทั้งสองชนิดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 74 บาท
2. 78 บาท
3. 84 บาท
4. 96 บาท

29. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a < b$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\frac{2a+3b+4c}{3a+2b+3c} > \frac{2a+3b}{3a+2b}$ (ข) $\frac{3a+2b+c}{2a+3b+c} > \frac{3a+2b}{2a+3b}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

30. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ และ $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับ $f\big(x+g(y)\big)=2x+y+15$ สำหรับจำนวนจริง x และ y พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $(g\circ f)(x)=2x+15$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y

(ข) $g\big(25+f(57)\big)=75$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

ตอนที่ 2: แบบอัตนัย ระบายคำตอบที่เป็นตัวเลข จำนวน 15 ข้อ (ข้อ 31 – 45) ข้อละ 8 คะแนน

31. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ

$$\log_2(x+7)^2+4\log_4(x-3)\;=\;3\log_8(64x^2-256x+256)$$

ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต A เท่ากับเท่าใด

32. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B และมุม C เป็นมุมแหลม โดยที่ $25\cos\mathrm{B}-13\cos\mathrm{C}=15$, $65(\cos\mathrm{B}+\cos\mathrm{C})=77$ และด้านตรงข้ามมุม C ยาว 20 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด

33. ถ้า $\cos 5\theta = a\cos^5\theta + b\cos^3\theta + c\cos\theta$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$ เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $\log_6(3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x) = x + \log_6 5$ และให้ B แทนเซตคำตอบของสมการ $x + \sqrt{1-x^2} = 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$ จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

35. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ ให้ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = ax + 2$ และ $g(x) = x^3 - 3x(x-1)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
ถ้า $(f^{-1} \circ g^{-1})(1) = 1$ แล้ว $(g \circ f)(a)$ เท่ากับเท่าใด

36. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{1000}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่สอดคล้องกับ $\frac{a_1}{a_1+2} = \frac{a_2}{a_2+3} = \frac{a_3}{a_3+4} = \ldots = \frac{a_{1000}}{a_{1000}+1001}$
และ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{1000} = 250000$ แล้วค่าของ $a_1 + a_{1000}$ เท่ากับเท่าใด

37. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนเต็ม โดยมีสมบัติดังนี้

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} = 2576 - k \text{ เมื่อ } k = 1, 2, 3, \ldots$$

ถ้า $a_1 = 12$, $a_2 = 2556$ และ $a_3 = 7$ แล้วค่าของ a_{2558} เท่ากับเท่าใด

38. ต้องการจัดเรียงตัวอักษร P, P, P, A, A, A, T, T, T ทั้งหมด (ไม่คำนึงถึงความหมาย) โดยมีเงื่อนไขว่า ตัวอักษร P ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมดและตัวอักษร T ทั้งสามตัวต้องอยู่แยกกันทั้งหมด จะมีวิธีการเรียงตัวอักษรดังกล่าวได้ทั้งหมดกี่วิธี

39. กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ เป็นข้อมูลชุดที่ 1 ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2 ให้ $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ เป็นข้อมูลชุดที่ 2 โดยที่ $y_i = ax_i + b$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ และ a, b เป็นจำนวนจริง และ $a > 0$ ถ้านำข้อมูลทั้งสองชุดมารวมกัน $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และความแปรปรวนเท่ากับ 21 แล้วค่าของ $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

40. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าสังเกต (x) และร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ค่าสังเกต (x)	ร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์
1	20
2	40
a	70
6	90
10	100

เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 แล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

41. กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง และ a, b เป็นจำนวนจริง และให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดย $f(x) = a + bx + x^3$ สำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้าเส้นตรง $5x - y + 13 = 0$ สัมผัสกราฟของ f ที่ $x = 1$ แล้ว $\int_0^2 f(x)\,dx$ เท่ากับเท่าใด

42. ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f(3) = 111$ และ $\lim_{x\to 3} \frac{xf(x)-333}{x-3} = 2013$ แล้วอัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$ เท่ากับเท่าใด

43. ต้องการเขียนจำนวนที่มีหกหลัก ABCDEF โดยที่ $A, B, C, D, E, F \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ $A + B = 14$ และ $C - D > D - E > E - F > 0$ จะสร้างได้ทั้งหมดกี่จำนวน

44. ถ้า $A = \frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots + \frac{1}{(2015)(2016)}$ และ $B = \frac{1}{(1009)(2016)} + \frac{1}{(1010)(2015)} + \ldots + \frac{1}{(2016)(1009)}$ แล้วค่าของ $\frac{20A}{11B}$ เท่ากับเท่าใด

45. ให้ A แทนเซตของจำนวน $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ โดยที่ a, b, c, d เป็นจำนวนเต็มบวกที่มีสมบัติ ดังนี้

(ก) $a = b + d$

(ข) $(a + b + c + d)b = (a - c)d$

(ค) $2 + cd = a(c - 1)$

ถ้า M แทนค่ามากที่สุดในเซต A และ m แทนค่าน้อยที่สุดในเซต A แล้วค่า $M - m$ เท่ากับเท่าใด

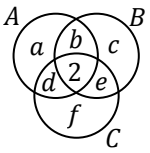
เฉลย

1. 3	11. 3	21. 4	31. 5	41. 38
2. 2	12. 2	22. 1	32. 54	42. 634
3. 1	13. 2	23. 1	33. 681	43. 35
4. 4	14. 1	24. 3	34. 3	44. 2750
5. 3	15. 3	25. 4	35. 9	45. 384
6. 1	16. 1	26. 4	36. 500	
7. 3	17. 2	27. 2	37. 1704	
8. 1	18. 3	28. 2	38. 340	
9* 4	19. 2	29. 3	39. 109	
10. 1	20. 4	30. 4	40. 7	

แนวคิด

1. 3

จาก $n(A \cap B \cap C) = 2$ จะได้ตรงกลาง $= 2$



จาก $n(A - B) = 8$ จะได้ $a + d = 8$ ...(1)

$n(B - C) = 4$ จะได้ $b + c = 4$ ...(2)

$n(A - C) = 9$ จะได้ $a + b = 9$ ...(3)

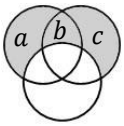
และจาก $n(A \cup B \cup C) = 15$ จะได้ $a + b + c + d + e + f + 2 = 15$

จาก (1) และ (2) $\begin{aligned}(a+d)+(b+c)+e+f &= 13\\ 8 \quad + \quad 4 \quad +e+f &= 13\\ e+f &= 1\end{aligned}$ ...(4)

พอเรามี $a + b$ จาก (3) กับ $e + f$ จาก (4) เราจะใช้ $n(A) = 3\big(n(C)\big)$ มาแก้หา d ได้

$$\begin{aligned}a+b+d+2 &= 3(d+2+e+f)\\ 9 \quad +d+2 &= 3(d+2+\quad 1 \quad)\\ d+11 &= 3d+9\\ 1 \quad &= \quad d\end{aligned}$$

จะแทน d กลับไปหาทุกตัวเลยก็ได้

แต่ข้อนี้ถาม $n\big((A \cup B) - C\big)$ ได้แก่บริเวณ 

$= a + b + c$

ดังนั้น จะหาแค่ตัวที่โจทย์ถามก็พอ

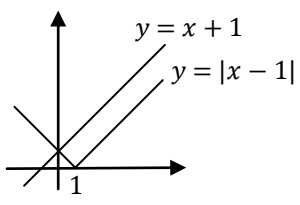
แทน $d = 1$ ใน (1) จะได้ $a = 8 - 1 = 7$ และใน (2) มี $b + c = 4$ อยู่แล้ว

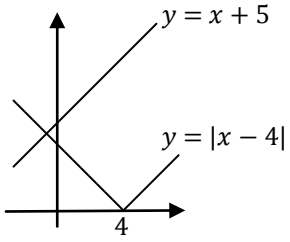
ดังนั้น $a + b + c = a + (b + c) = 7 + 4 = 11$

2. 2

ก. แยกตัวประกอบได้เป็น $|(x-1)(x-4)| < (x+1)(x+5)$

จะใช้วิธีดูค่า y ของกราฟ $y = |x-1|$, $y = |x-4|$, $y = x+1$, $y = x+5$ มาเทียบกัน





และเนื่องจากเอกภพสัมพัทธ์คือ $\mathbb{R}^+$ ดังนั้น

จะดูเฉพาะกรณีที่ $x > 0$

จะเห็นว่า $0 \le |x-1| < x+1$

และ $0 \le |x-4| < x+5$

ดังนั้น $|(x-1)(x-4)| < (x+1)(x+5)$

ดังนั้น ก. ถูก

ข. แยกตัวประกอบได้เป็น $|(x-1)(x+1)| \geq 2(x-1)$

ถ้า $x=1$ จะได้ $0 \geq 0 \rightarrow$ อสมการเป็นจริง

ถ้า $x \neq 1$ จะเอา $|x-1|$ หารตลอด ได้ $|x+1| \geq 2 \cdot \frac{x-1}{|x-1|}$

จะเห็นว่า $\frac{x-1}{|x-1|}$ จะตัดกันเป็น 1 หรือ -1 เสมอ ขึ้นกับว่า $x-1$ เป็นลบหรือบวก

$\rightarrow$ ถ้า $x>1$ จะได้ $\frac{x-1}{|x-1|}=1$ จะได้อสมการกลายเป็น $|x+1| \geq 2$ ซึ่งจริงเสมอ เพราะ $x>1$

$\rightarrow$ ถ้า $x<1$ จะได้ $\frac{x-1}{|x-1|}=-1$ จะได้อสมการกลายเป็น $|x+1| \geq -2$ ซึ่งจริงเสมอ เพราะค่าสัมบูรณ์ ≥ 0

แต่ ข. บอกว่า ประพจน์เป็นเท็จ $\rightarrow$ ข. ผิด

3. 1

จาก $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv \mathrm{F}$ จะได้ $p \equiv \mathrm{T}$ และ $q \wedge r \equiv \mathrm{F}$

แทน $p \equiv \mathrm{T}$ ลงในประโยคที่สอง จะได้ $\mathrm{T} \leftrightarrow (s \vee t) \equiv \mathrm{T}$ ดังนั้น $s \vee t \equiv \mathrm{T}$

1. $\equiv \sim(q \wedge s) \vee (\mathrm{T} \wedge q) \equiv (\sim q \vee \sim s) \vee q \equiv (\sim q \vee q) \vee \sim s \equiv \mathrm{T} \vee \sim s \equiv \mathrm{T}$
2. เป็นเท็จได้เมื่อ $s \equiv \mathrm{T}, t \equiv \mathrm{T}, q = \mathrm{T}$ และถ้าให้ $r \equiv \mathrm{F}$ จะยังทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด
3. $\equiv (q \vee s) \leftrightarrow \mathrm{T} \equiv q \vee s$ เป็นเท็จได้เมื่อ $q \equiv \mathrm{F}, s \equiv \mathrm{F}$ และถ้าให้ $t \equiv \mathrm{T}$ จะยังทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด
4. $\equiv (\mathrm{T} \rightarrow r) \rightarrow s \equiv \sim(\mathrm{F} \vee r) \vee s \equiv \sim r \vee s$ เป็นเท็จได้เมื่อ $r \equiv \mathrm{T}, s \equiv \mathrm{F}$ และถ้าให้ $q \equiv \mathrm{F}, t \equiv \mathrm{T}$ จะยังคงทำให้เงื่อนไขที่มีจริงหมด

4. 4

ข้อนี้ จะแบ่งกรณีทำก็ได้

แต่ถ้าสังเกตดีๆ จะพบว่า ข้างในค่าสมบูรณ์บวกกัน $(2-2x)+(x+2)$ ได้เท่ากับทางขวา $4-x$ พอดี

จากสมบัติค่าสัมบูรณ์ สมการในรูป $|a|+|b|=a+b$ จะเป็นจริงเมื่อ a กับ $b \geq 0$ ทั้งคู่เท่านั้น

ดังนั้น จะได้ $2-2x \geq 0$ และ $x+2 \geq 0$

$2 \geq 2x$ $x \geq -2$

$1 \geq x$

รวมสองเงื่อนไข จะได้ $-2 \leq x \leq 1$ ดังนั้น $A=[-2,1]$ ซึ่งจะเป็นสับเซตของข้อ 4.

5. 3

ข้อนี้ ต้องสังเกตว่าตัวส่วน $4x^2-8x+7$ กับ $4x^2-10x+7$ คล้ายๆกัน ต่างกันแค่ตรงกลาง $-8x$ กับ $-10x$

เราจะสร้างตัวแปรใหม่ เป็นตัวที่อยู่ตรงกลางระหว่าง 2 ตัวนี้ คือ ให้ $k=4x^2-9x+7$

ดังนั้น $k+x = 4x^2-8x+7$ และ $k-x = 4x^2-10x+7$

จะได้สมการคือ $\frac{4x}{k+x}+\frac{3x}{k-x}=1 \rightarrow$ คูณตัวส่วนตลอด ได้

$$\begin{aligned} 4x(k-x)+3x(k+x) &= (k-x)(k+x) \\ 4kx-4x^2+3kx+3x^2 &= k^2-x^2 \\ 0 &= k^2-7kx \\ 0 &= k(k-7x) \end{aligned}$$

จะได้ $k=0$ หรือ $k-7x=0$

แทนค่า k กลับ จะได้ $4x^2-9x+7=0$ หรือ $4x^2-9x+7-7x=0$

ไม่มีคำตอบ เพราะ

$b^2-4ac=(-9)^2-4(4)(7)$
$=81-112$
<0

$4x^2-16x+7=0$
$(2x-7)(2x-1)=0$
$x=\frac{7}{2},\frac{1}{2}$

จะได้ $A=\left\{\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right\}$

เนื่องจาก A มีแค่ 2 ตัว และจากที่ถามใน (ก) และ (ข) จะเห็นว่าไม่ต้องหา B ก็ได้ แค่รู้ว่าแทนใน B แล้วจริงหรือไม่

ลองแทน $\frac{7}{2}$ กับ $\frac{1}{2}$ ใน B ดู : $x=\frac{7}{2}$ จะได้ $\left|\frac{49}{4}-7\right|+\frac{49}{4}>4 \rightarrow$ จริง

$x=\frac{1}{2}$ จะได้ $\left|\frac{1}{4}-1\right|+\frac{1}{4}>4 \rightarrow$ ไม่จริง $\rightarrow$ (ก) ผิด

และจะได้ $A\cap B$ เหลือแค่ $\left\{\frac{7}{2}\right\}$ ตัวเดียว ดังนั้น $P(A\cap B)$ มีสมาชิก $2^1=2$ ตัว $\rightarrow$ (ข) ถูก

6. 1

หา $g(x)$ โดยเอา $g^{-1}(x)$ มาเปลี่ยน x เป็น y, เปลี่ยน y เป็น x จะได้ $x=2y+1 \rightarrow y=\frac{x-1}{2} \rightarrow g(x)=\frac{x-1}{2}$

ทั้ง (ก) และ (ข) ไม่ได้ใช้ $f(x)$ ใช้แต่ $f^{-1}(x)$ ดังนั้น จะหาแต่ $f^{-1}(x)$ จาก $(f\circ g)(x)=4x-5$

$f\big(g(x)\big)=4x-5$
$g(x)=f^{-1}(4x-5)$
$\frac{x-1}{2}=f^{-1}(4x-5)$

ให้ $4x-5=k$ จะได้ $x=\frac{k+5}{4}$ แทนกลับไปใน f^{-1} จะได้ $\frac{\frac{k+5}{4}-1}{2}=f^{-1}(k)$

$\frac{k+1}{8}=f^{-1}(k)$ ดังนั้น $f^{-1}(x)=\frac{x+1}{8}$

ก. $4f^{-1}\big(g(2x+1)\big)=g(x)+1$
$4f^{-1}\left(\frac{2x+1-1}{2}\right)=\frac{x-1}{2}+1$
$4f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}$
$4\cdot\frac{x+1}{8}=\frac{x+1}{2} \rightarrow$ จริง

ข. $g^{-1}\Big(f^{-1}\big(g(x)\big)\Big)=\frac{x+1}{8}+1$
$g^{-1}\left(f^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right)=\frac{x+9}{8}$
$g^{-1}\left(\frac{\frac{x-1}{2}+1}{8}\right)=\frac{x+9}{8}$
$g^{-1}\left(\frac{x+1}{16}\right)=\frac{x+9}{8}$
$2\left(\frac{x+1}{16}\right)+1=\frac{x+9}{8}$
$\frac{x+1}{8}+1=\frac{x+9}{8} \rightarrow$ จริง

7. 3

(ก) แทน A กับ I จะได้ $2\left(\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=4\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & a\\ b & 4\end{bmatrix} \rightarrow 2\begin{bmatrix}0 & a\\ b & 3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}$

จากสูตรอินเวอร์สการคูณเมทริกซ์ $\begin{bmatrix}w & x\\ y & z\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{wz-xy}\begin{bmatrix}z & -x\\ -y & w\end{bmatrix}$ จะได้ $\frac{2}{-ab}\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -a\\ -b & 0\end{bmatrix}$

จะเห็นว่าส่วนที่เป็นเมทริกซ์ของทั้งสองฝั่งเหมือนกัน ดังนั้น $\frac{2}{-ab}=1$ จะได้ $ab=-2 \rightarrow$ (ก) ผิด

(ข) จากสูตร $\det(kA)=k^n\det A$ จะได้ $\det(3A^2A^tA^{-1})=3^2\det(A^2A^tA^{-1})$

det กระจายในการคูณเมทริกซ์ได้

$=\frac{3^2(\det A)^2\det A}{\det A}$
$=3^2(\det A)^2$
$=9(4-ab)^2$
$=9\big(4-(-2)\big)^2=324 \rightarrow$ (ข) ถูก

$\det A^n=(\det A)^n$
$\det A^t=\det A$
$\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}$

8. 1

จัดรูปพาราโบลา หา F ก่อน ได้ $4y-13+9 = x^2-6x+9$ เป็นพาราโบลาหงายที่มี $V(3,1)$ และ $c=1$

$4(y-1) = (x-3)^2$ จะได้ F คือ $(3,2)$

จาก (ก) จะได้ ไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง , จาก (ข) จะได้ ศก $(3,2) \rightarrow$ รูปสมการคือ $\frac{(y-2)^2}{a^2}-\frac{(x-3)^2}{b^2}=1$

จาก (ง) จะได้ $b=\frac{12}{2}=6$ และจาก (ค) จะได้ $c=2+2\sqrt{13}-2=2\sqrt{13}$

แต่จาก $c=\sqrt{a^2+b^2}$ จะได้ $2\sqrt{13}=\sqrt{a^2+6^2}$ แก้จะได้ $a=\sqrt{52-36}=4$

ดังนั้น สมการคือ $\frac{(y-2)^2}{4^2}-\frac{(x-3)^2}{6^2}=1 \rightarrow 3^2(y^2-4y+4)-2^2(x^2-6x+9) = 12^2$

$9y^2-36y+36-4x^2+24x-36-144 = 0$

ไม่ตรงกับตัวเลือกไหนเลย ต้องคูณ -1 ถึงจะตรงกับข้อ 1 $9y^2-4x^2+24x-36y-144 = 0$

$4x^2-9y^2-24x+36y+144 = 0$

9* 4

ข้อนี้ โจทย์ต้องบอกด้วยว่า $A>1$ ไม่งั้นจะมีวงรีสองวงที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์ และจะสรุปอะไรไม่ได้เลย

ศก $=(2,1)$ แต่ยังไม่รู้ว่า รีแนวนอนหรือแนวตั้ง จะสมมติให้วงรีจะมีรูปสมการคือ $\frac{(x-2)^2}{p^2}+\frac{(y-1)^2}{q^2}=1$

จัดรูปให้ สปส x^2 เป็น 1 เหมือนที่โจทย์ให้ โดยกระจายและคูณ p^2 ตลอด ได้ $x^2-4x+4+\frac{p^2(y^2-2y+1)}{q^2} = p^2$

$x^2+\frac{p^2}{q^2}y^2-4x-\frac{2p^2}{q^2}y+4+\frac{p^2}{q^2}-p^2=0$

เทียบ สปส จะได้ $A=\frac{p^2}{q^2}$, $B=-4$, $C=-\frac{2p^2}{q^2}$, $-92=4+\frac{p^2}{q^2}-p^2$ ...(*)

เนื่องจาก $A>1$ จะได้ $p>q$ ดังนั้น เป็นวงรีแนวนอน เนื่องจาก แกนเอก $=2$(แกนโท) จะได้ $p=2q$

แทนใน (*) จะได้ $A=\frac{(2q)^2}{q^2}=\frac{4q^2}{q^2}=4$, $C==-\frac{2(2q)^2}{q^2}=-8$, $4+\frac{(2q)^2}{q^2}-(2q)^2 = -92$

$100 = 4q^2$

$5 = q$

$\rightarrow p=2(5)=10$

(1) $A+B+C=4+(-4)+(-8)\neq 0 \rightarrow$ ผิด

(2) ความเยื้องศก $=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{p^2-q^2}}{p}=\frac{\sqrt{10^2-5^2}}{10}=\frac{\sqrt{75}}{10}=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ ผิด

(3) จัดรูปวงกลม ได้ $(x-2)^2+(y-1)^2=20+2^2+1^2=25 \rightarrow$ ศก $(2,1)$, $r=5$

มี ศก ร่วมกัน แต่ แกนเอกวงรี $=2p=2(10)=20$ ไม่เท่ากับ r วงกลม $\rightarrow$ ผิด

(4) สังเกตว่า $20=$ แกนเอกวงรี พอดี ดังนั้น แค่ตรวจสอบว่า $(2,6)$ อยู่บนวงรีรึเปล่าก็พอ

แทน $(2,6)$ ในสมการวงรี จะได้ $\frac{(2-2)^2}{10^2}+\frac{(6-1)^2}{5^2}=0+1=1$ จริง $\rightarrow$ ถูกต้อง

หมายเหตุ : ถ้าข้อนี้ไม่บอกว่า $A>1$ จะมีวงรี $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{385}/4}+\frac{(y-1)^2}{\sqrt{385}}=1$ อีกวง

ซึ่งจะจัดรูปได้ $x^2+\frac{1}{4}y^2-4x-\frac{1}{2}y-92=0$ สอดคล้องกับเงื่อนไขที่โจทย์ให้

10. 1

หาจุดตัด $x-3y+1=0$ ...(1) และ $2x+5y-9=0$ ...(2)

(2) – 2(1) จะได้ $11y-11=0 \rightarrow y=1$ แทนใน (1) ได้ $x=3(1)-1=2$ ดังนั้น $A=(2,1)$

จะได้ L คือ $\frac{y-1}{x-2}=m \rightarrow y-1=mx-2m \rightarrow y-mx+2m-1=0$ ...(*)

จะได้ระยะจาก $(0,0)=\frac{|0-m(0)+2m-1|}{\sqrt{1^2+(-m)^2}}=\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=k$

แทน k ในสมการ $k^2+2m=1$ จะได้ $\left(\frac{|2m-1|}{\sqrt{m^2+1}}\right)^2+2m = 1$

ตัดค่าสัมบูรณ์ที่ถูกยกกำลังสองออกได้ $\frac{(2m-1)^2}{m^2+1}+2m-1=0$

เนื่องจาก $m<0$ จะได้ $2m-1\neq 0 \rightarrow$ เอา $2m-1$ หารตลอดเหลือ $\frac{2m-1}{m^2+1}+1=0$

คูณตลอด ด้วย m^2+1 จะได้ $2m-1+m^2+1=0$

$$m^2+2m=0$$
$$m(m+2)=0$$
$$m=0,-2$$

เนื่องจาก $m<0$ จะได้ $m=-2$ แทนใน $(*)$ จะได้ $y+2x-5=0$

11. 3

ให้ $\mathrm{B}=\theta$ จะได้ $\mathrm{A}=2\theta$ และ $\mathrm{C}=180^\circ-(\theta+2\theta)=180^\circ-3\theta$

ทุกมุม มี θ หมด $\rightarrow$ สามารถเชื่อมด้วยกฎของ sin ได้ $\frac{a}{\sin \mathrm{A}}=\frac{b}{\sin \mathrm{B}}=\frac{c}{\sin \mathrm{C}}$

$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin(180^\circ-3\theta)}$$
$$\frac{a}{\sin 2\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{\sin 3\theta}$$
$$\frac{a}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{b}{\sin\theta}=\frac{c}{3\sin\theta-4\sin^3\theta}$$
$$\frac{a}{2\cos\theta}=b=\frac{c}{3-4\sin^2\theta} \quad \ldots(*)$$

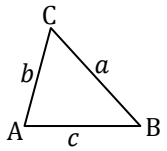
สังเกตว่า ตัวเลือกแต่ละข้อ จะคล้ายๆกฎของ cos

โดย สองตัวเลือกแรก เหมือนจะใช้กฎของ cos ที่ C แต่สองตัวเลือกหลัง ใช้กฎของ cos ที่ A

ถ้าใช้ กฎของ cos ที่ C จะมีมุม 3θ ซึ่งดูยุ่งยาก แต่ถ้าใช้กฎของ cos ที่ A จะมี $\cos 2\theta$ ซึ่งดูง่ายกว่า

ใช้กฎของ cos ที่ A จะได้ $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$$=b^2+c^2-2bc\cos 2\theta$$
$$=b^2+c^2-2bc(1-2\sin^2\theta)$$
$$=b^2+c^2-2bc+4bc\sin^2\theta \quad \ldots(**)$$



จะกำจัด $\sin^2\theta$ ใน $(**)$ โดยเอาคู่หลังใน $(*)$ มาคูณไขว้ จะได้ $3b-4bsin^2\theta=c$

$$3b-c=4b\sin^2\theta$$
$$3bc-c^2=4bc\sin^2\theta$$

แทน $4bc\sin^2\theta$ ใน $(**)$ จะได้ $a^2=b^2+c^2-2bc+3bc-c^2=b^2+bc \rightarrow$ ข้อ 3

12. 2

จะเห็นว่าตัวเลือกทุกข้อ เป็น arctan หมด ซึ่งจะตัดกับ tan ได้

ดังนั้น เราจะดูว่า tan ของสิ่งที่โจทย์ถาม ตรงกับ tan ของตัวเลือกข้อไหน $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

จะได้ $\tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)-\operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right)=\frac{\tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\right)-\tan\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right)}{1+\tan\left(\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\right)\tan\left(\operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)\right)}$

จาก $\tan(\arctan x)=x$ และ $\tan(\operatorname{arccot} x)=\frac{1}{x}$ จะได้ $=\frac{\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}-\frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)\left(\frac{3-\sin\theta}{\cos\theta}\right)}$

เศษ $=\frac{3\cos^2\theta-(3-\sin\theta)(1-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$

$$=\frac{3\cos^2\theta-(3-10\sin\theta+3\sin^2\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$
$$=\frac{3(1-\sin^2\theta)-3+10\sin\theta-3\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$
$$=\frac{3-3\sin^2\theta-3+10\sin\theta-3\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$
$$=\frac{10\sin\theta-6\sin^2\theta}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$
$$=\frac{2\sin\theta(5-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)}$$

$$\begin{aligned}\text{ส่วน} &= 1+\frac{3(3-\sin\theta)}{1-3\sin\theta}\\ &= \frac{1-3\sin\theta+9-3\sin\theta}{1-3\sin\theta}\\ &= \frac{10-6\sin\theta}{1-3\sin\theta}\\ &= \frac{2(5-3\sin\theta)}{1-3\sin\theta}\end{aligned}$$

จะได้ $\frac{\text{เศษ}}{\text{ส่วน}} = \frac{2\sin\theta(5-3\sin\theta)}{(1-3\sin\theta)(\cos\theta)} \times \frac{1-3\sin\theta}{2(5-3\sin\theta)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

จะเห็นว่าตัวเลือกข้อ 3 ข้อเดียว ที่ tan แล้วตัดกับ arctan เหลือ $\tan\theta$

ดังนั้น ตอบข้อ 3

หมายเหตุ : เงื่อนไข $0<\theta<15°$ ที่โจทย์ให้ มีเพื่อรับประกันว่า $\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}$ จะเป็นบวก

เพราะ $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} \sim \frac{0.732}{2.828} < \frac{1}{3}$ ทำให้ $\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right)$ เป็นบวก

ในขณะที่ $\operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)$ เป็นบวกเสมออยู่แล้ว

ถ้า $\theta > 15°$ เช่น $45°$ จะทำให้ $\arctan\left(\frac{3\cos\theta}{1-3\sin\theta}\right) - \operatorname{arccot}\left(\frac{\cos\theta}{3-\sin\theta}\right)$ ติดลบ

และจะไม่เท่ากับ $\arctan(\tan 45°)$ ซึ่งเป็นบวก

13. 2

ก.
$$\begin{aligned}\cos 2B &= 2\cos^2(45°+A)\\ 1-2\sin^2 B &= 2(\cos 45°\cos A-\sin 45°\sin A)^2\\ 1-2\sin A\cos A &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A\right)^2\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A-\sin A)\right)^2\\ &= 2\cdot\frac{2}{4}(\cos A-\sin A)^2\\ &= (\ 1\ )(\cos^2 A-2\sin A\cos A+\sin^2 A)\\ &= \quad 1 \quad -2\sin A\cos A \qquad \rightarrow \text{ก. ถูก}\end{aligned}$$

ข. จาก $\sin A=\sqrt{2}\sin B$ ยกกำลังสอง จะได้ $\sin^2 A = 2\sin^2 B$ ...(1)

จาก $\sqrt{3}\sec B = \sqrt{2}\sec A \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\cos B} = \frac{\sqrt{2}}{\cos A} \rightarrow$ คูณไขว้และยกกำลังสอง จะได้ $3\cos^2 A = 2\cos^2 B$ ...(2)

(1) + (2): $\sin^2 A + 3\cos^2 A = 2\sin^2 B + 2\cos^2 B$

$1-\cos^2 A+3\cos^2 A = 2(\sin^2 B+\cos^2 B)$

$1+2\cos^2 A = 2(\quad 1 \quad)$

$\cos^2 A = \frac{1}{2}$

$\cos A = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

จาก $0\le A\le\frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos A\ge 0$ ดังนั้น $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ จะได้ $A=45°$

และจาก $\sin A=\sqrt{2}\sin B$ จะได้ $\sin B = \frac{\sin 45°}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $B=30°$

ดังนั้น $\sin 10A+\cos 10B = \sin 450°+\cos 300° = \sin 90°+\cos 60° = 1+\frac{1}{2} = 1.5 \rightarrow$ ข. ผิด

14. 1

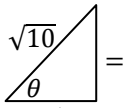
จาก $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ จะได้ $\bar{a}+\bar{b} = -\bar{c}$ ดังนั้น $|\bar{a}+\bar{b}| = |-\bar{c}| = |\bar{c}|$ ดังนั้น $|\bar{c}|=5$

จะได้ $\bar{b}+\bar{c} = -\bar{a}$ ดังนั้น $|\bar{b}+\bar{c}| = |-\bar{a}| = |\bar{a}|$ ดังนั้น $|\bar{a}|=3$

ก. จาก $|\bar{a}+\bar{b}|=5$ และจากสูตร $|\bar{a}+\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2\,\bar{a}\cdot\bar{b}$

$$\begin{aligned} 5^2 &= 3^2+\sqrt{10}^2+2|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta \\ 6 &= 2(3)(\sqrt{10})\cos\theta \\ \frac{1}{\sqrt{10}} &= \cos\theta \end{aligned}$$

เนื่องจาก $0\le\theta\le\pi$ และ $\cos\theta$ เป็นบวก ดังนั้น θ อยู่ใน Quadrant ที่ 1 จะได้ $\tan\theta$ เป็นบวก

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}\rightarrow$  $=\sqrt{\sqrt{10}^2-1^2}=3$ ดังนั้น $\tan\theta=\frac{3}{1}=3$ → ก. ถูก

ข. จะหา $\bar{a}\cdot\bar{c}$ ได้จากสูตร $|\bar{a}+\bar{c}|^2 = |\bar{a}|^2+|\bar{c}|^2+2\,\bar{a}\cdot\bar{c}$

จาก $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}=\bar{0}$ จะได้ $\bar{a}+\bar{c}=-\bar{b}$ ดังนั้น $|\bar{a}+\bar{c}| = |-\bar{b}| = |\bar{b}| = \sqrt{10}$

แทนในสูตร จะได้ $\sqrt{10}^2 = 3^2+5^2+2\,\bar{a}\cdot\bar{c}$

$$\begin{aligned} -24 &= 2\,\bar{a}\cdot\bar{c} \\ -12 &= \bar{a}\cdot\bar{c} \end{aligned}$$ → ข. ถูก

15. 3

มีเลขโดด 9 ตัว แต่ละหลักจะเลือกได้ 9 แบบ เนื่องจากมี 5 หลัก จะสร้างได้ทั้งหมด $=9^5$ แบบ

ถ้าต้องใช้แค่ 3 ตัว จะต้องมีตัวซ้ำ จะแบ่งกรณีตามรูปแบบการซ้ำ

<u>กรณี</u> ซ้ำ $3+$ ต่าง 2 : ขั้นที่ 1 จัดกลุ่มเลขโดด : เลือกเลขโดดที่จะมาซ้ำ 3 ได้ 9 แบบ

ที่เหลือเลือกเลขโดดที่จะมาเป็น ต่าง 2 ได้ $\binom{8}{2}$ แบบ

ขั้นที่ 2 เรียงเลขที่ได้จากขั้นที่ 1 : ซ้ำ $3+$ ต่าง 2 จะเรียงได้ $\frac{5!}{3!}$ แบบ

ดังนั้น ได้จำนวนแบบ $=9\times\binom{8}{2}\times\frac{5!}{3!}=(9)(8)(7)(5)(2)$ แบบ

<u>กรณี</u> ซ้ำ 2 สองคู่ $+$ ต่าง 1 : ขั้นที่ 1 จัดกลุ่มเลขโดด : เลือกเลขโดดที่จะมาซ้ำ 2 สองคู่ ได้ $\binom{9}{2}$ แบบ

เหลือ 7 ตัว เลือกมาเป็น ต่าง 1 ได้ 7 แบบ

ขั้นที่ 2 เรียงเลขที่ได้จากขั้นที่ 1 : ซ้ำ 2 สองคู่ $+$ ต่าง 1 จะเรียงได้ $\frac{5!}{2!2!}$ แบบ

ดังนั้น ได้จำนวนแบบ $=\binom{9}{2}\times 7\times\frac{5!}{2!2!}=(9)(8)(7)(5)(3)$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $=\frac{(9)(8)(7)(5)(2)+(9)(8)(7)(5)(3)}{9^5}=\frac{(8)(7)(5)(2+3)}{9^4}=\frac{1400}{6561}$

16. 1

ข้อนี้ใช้สูตร $\frac{(n-1)!}{(n_1!)(n_2!)\ldots(n_k!)}=\frac{5!}{3!3!}$ <u>ไม่ได้</u> เพราะ ห.ร.ม. $(n_1,n_2,\ldots,n_k)=(3,3)\neq 1$

(หนังสือบางเล่ม บอกว่าใช้ได้ แต่ให้ปัดเศษขึ้น ซึ่งจะ<u>บังเอิญถูก</u>ในบางกรณีเท่านั้น)

ถ้า ห.ร.ม. $(n_1,n_2,\ldots,n_k)\neq 1$ จะมีปัญหาตอนคิดกลุ่มของตัวที่เอามาตอกไม่ให้วงหมุน ในพวกแบบที่ “เป็นคาบ”

เช่น ถ้าใช้ W_1 ตอก จะมีปัญหากับพวกแบบ $W_1RW_2RW_3R$ (ซ้ำเป็นคาบทีละ 2 ตัว คือ <u>WR</u> <u>WR</u> <u>WR</u>)

กล่าวคือ ปกติแล้ว 3! แบบต่อไปนี้ ควรจะเป็นแบบที่ต่างกัน ที่ถูกนับเป็นแบบเดียวเมื่อ W_1, W_2, W_3 ซ้ำกัน

$W_1RW_2RW_3R$	$W_2RW_1RW_3R$	$W_3RW_1RW_2R$
$W_1RW_3RW_2R$	$W_2RW_3RW_1R$	$W_3RW_2RW_1R$

แต่จะเห็นว่า $W_1RW_2RW_3R$ กับ $W_2RW_3RW_1R$ กับ $W_3RW_1RW_2R$ ถือเป็นวงเดียวกันตั้งแต่ยังไม่ได้คิดว่า W_1, W_2, W_3 ซ้ำกันแล้ว ดังนั้นพวกที่ “เป็นคาบ” จะมีกลุ่มซ้ำไม่ถึง 3! แบบ ทำให้เอา $\frac{5!}{3!}$ มาหารด้วย 3! เป็น $\frac{5!}{3!3!}$ <u>ไม่ได้</u>

อย่างไรก็ตาม ข้อนี้เลขน้อย เขียนนับเอาเลยก็ได้ โดยจะแบ่งกรณีนับเป็น 3 กรณี

กรณี W ติดกันทั้ง 3 ตัว	กรณี W ติดกัน 2 ตัว		กรณี W ไม่ติดกัน
W	W	W	W
W W	R W	R W	R R
R R	W R	R R	W W
R	R	W	R

รวมสามกรณี จะมี 4 แบบ → ตอบข้อ 1

หมายเหตุ : ถ้าข้อนี้จะไม่เขียนนับ ต้องแยกพวกแบบที่ "เป็นคาบ" ออกไปคิดต่างหาก

จะได้เป็น $\frac{\frac{(6-1)!}{3!}-(3-1)!}{3!}+(2-1)! = 4$ แบบ

17. 2

ต่อเนื่องที่ $x=-2$ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=f(-2)=\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)$ กับ $f(-2)$ ใช้สูตรเดียวกัน จะได้ $=-(-2)+a=2+a$ เท่ากัน

และ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\frac{2}{5}(-2)+b=\frac{4}{5}+b$ ดังนั้น $2+a=\frac{4}{5}+b$ ...(1)

และจาก $\lim\limits_{x\to3} f(x)$ หาค่าได้ แสดงว่า $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} f(x)$

$$-\frac{2}{5}(3)+b = 3^2-6(3)+11$$
$$b = \frac{16}{5}$$

แทนใน (1) จะได้ $a=\frac{20}{5}-2=2$ ดังนั้น $|a+5b|=|2+16|=18$

18. 3

จัดรูปจะได้ $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}}=\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(x-1)}=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}=1-\frac{1}{\sqrt{x}}=1-x^{-\frac{1}{2}}$

ดึง $\sqrt{x}$ เป็นตัวร่วม — คูณคอนจูเกต

ดังนั้น $\int_1^b \frac{x-1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_1^b 1-x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \left(x-2x^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^b = \left(b-2b^{\frac{1}{2}}\right)-(1-2) = b-2\sqrt{b}+1$

แต่โจทย์บอกว่าอินทิเกรตได้ 4 ดังนั้น

$$b-2\sqrt{b}+1 = 4$$
$$b-2\sqrt{b}-3 = 0$$
$$\left(\sqrt{b}-3\right)\left(\sqrt{b}+1\right) = 0$$
$$\sqrt{b} = 3,-1$$

แต่รูทเป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $\sqrt{b}=3$ จะได้ $b=9$ ดังนั้น $1+b+b^2 = 1+9+81 = 91$

19. 2

จาก $f(1)=0$ จะได้ $f(1) = a(1^2)+b(1)+c = a+b+c = 0$ ...(1)

และจะได้ $f'(x)=2ax+b$ จะเห็นว่า $f'(x)=0$ เมื่อ $x=-\frac{b}{2a}$

แต่โจทย์บอกว่า f มีค่าสูงสุดที่ $x=\frac{1}{3}$ ดังนั้น $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$ จัดรูป จะได้ $2a+3b=0$ ...(2)

จาก $F(0,t)=F(1,t)+1$ จะได้ $\int_0^t f(x)\,dx = \int_1^t f(x)\,dx + 1$

$$\int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^t f(x)\,dx = \int_1^t f(x)\,dx + 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

แต่ $\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+cx\Big|_0^1 = \left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c\right)-(0) = \frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c$

ดังนั้น $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+c = 1$ คูณ 6 ตลอด ได้ $2a+3b+6c = 6$ ...(3)

จาก (1), (2), (3) จะแก้หา a,b,c ได้ : (3) – (2) จะเหลือ $6c=6 \rightarrow c=1$

(2) – 2(1) และแทน $c=1$ จะได้ $b=2c=2$

แทน b,c ใน (1) จะได้ $a=-2-1=-3$

ดังนั้น $f(x)=-3x^2+2x+1$

(ก) $F(1,2)=-x^3+x^2+x\Big|_1^2 = (-8+4+2)-(-1+1+1) = -3$

$F(2,3)=-x^3+x^2+x\Big|_2^3 = (-27+9+3)-(-8+4+2) = -13 \rightarrow$ น้อยกว่าอยู่ 10 $\rightarrow$ ก. ถูก

(ข) $\frac{f(x)}{x^2} = -3+2x^{-1}+x^{-2} \rightarrow$ ดิฟ ได้ $0-2x^{-2}-2x^{-3} \neq \frac{-3x^2-2x-2}{x^3} \rightarrow$ ข. ผิด

20. 4

จัดรูป a_n ทำเทเลสโคปิค : $\frac{n^2}{16n^2-4} = \frac{n^2}{4(4n^2-1)} = \frac{n^2}{4(2n-1)(2n+1)} = \frac{n^2}{4}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)$

ดังนั้น $a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n = \frac{1}{8}\left[\left(\frac{1^2}{1}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{2^2}{5}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{3^2}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right)\right]$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1^2}{1}+\left(\frac{2^2}{3}-\frac{1^2}{3}\right)+\left(\frac{3^2}{5}-\frac{2^2}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{n^2}{2n-1}-\frac{(n-1)^2}{2n-1}\right)-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\frac{1^2}{1}+\frac{(2+1)(2-1)}{3}+\frac{(3+2)(3-2)}{5}+\cdots+\frac{(n+(n-1))(n-(n-1))}{2n-1}-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\underbrace{1+\ 1\ +\ 1\ +\cdots+\ 1}_{n}-\frac{n^2}{2n+1}\right]$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+a_3+\ \ldots\ +a_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{8n}\left[n-\frac{n^2}{2n+1}\right] = \frac{1}{8}\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{n}{2n+1}\right] = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$

ดังนั้น $a=1$, $b=16$ จะได้ $a^2+b^2 = 1+256 = 257$

21. 4

ให้ $z=a+b\mathrm{i}$ จะได้ $\bar{z} = a-b\mathrm{i}$ แทนในสมการ จะได้ $a-b\mathrm{i}-1-4\mathrm{i} = 3\mathrm{i}(a+b\mathrm{i}-\mathrm{i})$

$$(a-1)+(-b-4)\mathrm{i} = 3a\mathrm{i}-3b+3$$

$$= (-3b+3)+3a\mathrm{i}$$

จะได้ $a-1=-3b+3$ ...(1) และ $-b-4=3a$ ...(2)

จาก (1) จะได้ $a=-3b+4$ แทนใน (2) จะได้ $-b-4 = 3(-3b+4)$

$$8b = 16$$

$$b = 2$$

แทนใน (1) จะได้ $a-1=-3(2)+3$ จะได้ $a=-2$ ดังนั้น $z=-2+2\mathrm{i}$

(1) $(-2+2\mathrm{i})+(-2-2\mathrm{i}) = \mathrm{i}((-2+2\mathrm{i})-(-2-2\mathrm{i}))$

$-4 = \mathrm{i}(4\mathrm{i})$ → ถูกต้อง

(2) $|-2+2\mathrm{i}+2| = |2\mathrm{i}| = 2$ → ถูกต้อง

(3) ฝั่งซ้าย $= (-2-2\mathrm{i})^2 - 8\mathrm{i} = (4+8\mathrm{i}-4) - 8\mathrm{i} = 0$ → ถูกต้อง

(4) ฝั่งซ้าย $= (-2+2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^3 - 8\mathrm{i}$

$= -2(1-\mathrm{i})(1-\mathrm{i})^3 - 8\mathrm{i}$

$= -2(1-\mathrm{i})^4 - 8\mathrm{i}$

$= -2((1-\mathrm{i})^2)^2 - 8\mathrm{i}$

$= -2(1-2\mathrm{i}-1)^2 - 8\mathrm{i}$

$= -2(-2\mathrm{i})^2 - 8\mathrm{i}$

$= 8 - 8\mathrm{i} \neq 0$ → ผิด

22. 1

ระบบสมการคือ $\sum y = a\sum x + bn$ และ $\sum xy = a\sum x^2 + b\sum x$

โดย $\sum y = 1+0.8+0.8+0.6 = 3.2$

$\sum x = 0+1+2+3 = 6$

$n = 4$

$\sum xy = 0+0.8+1.6+1.8 = 4.2$

$\sum x^2 = 0+1+4+9 = 14$

แทนระบบสมการ จะได้ $3.2 = 6a + 4b$ ...(1) และ $4.2 = 14a + 6b$ ...(2)

$(2) - \frac{3}{2}(1)$ จะได้ $6b$ ตัดกัน เหลือ $-0.6 = 5a$ จะได้ $a = -0.12$

แทนใน (1) จะได้ $3.2 = -0.72 + 4b$ จะได้ $b = \frac{3.92}{4} = 0.98$

(ก) จะได้ $a + 11 = -0.12 + 1.1 = 0.98 = b$ → ถูก

(ข) ถ้า $x = 8$ จะได้ $y = -0.12(8) + 0.98 = -0.96 + 0.98 = 0.02$ → ถูก

23. 1

(ก) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x + \log_{16} x - 2\log_{64} x = 7$

$\log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x + \frac{1}{3}\log_2 x + \frac{1}{4}\log_2 x - \frac{2}{6}\log_2 x = 7$

$(\log_2 x)\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{2}{6}\right) = 7$

$(\log_2 x)\left(\frac{7}{4}\right) = 7$

$\log_2 x = 4$

$x = 16$

แทน $x = 16$ ในอีกสมการ จะได้ $16 - 3\sqrt{16} = 4$ → ถูกต้อง

(ข) สมการแรก คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 3$ จะได้ $1 - a = 2\log_2 3 - \log_2 5$

$a = 1 - 2\log_2 3 + \log_2 5$

สมการสอง คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 5$ จะได้ $3 + b = 2\log_2 5 - \log_2 3$

$b = -3 + 2\log_2 5 - \log_2 3$

สมการสาม คูณสองฝั่งด้วย $\log_2 7$ จะได้ $3 + c = 4\log_2 3 - \log_2 5$

$c = -3 + 4\log_2 3 - \log_2 5$

ดังนั้น $2a + b - c$

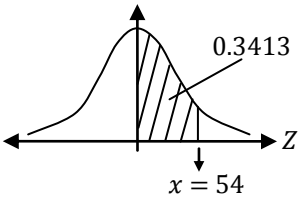
$= 2(1 - 2\log_2 3 + \log_2 5) + (-3 + 2\log_2 5 - \log_2 3) - (-3 + 4\log_2 3 - \log_2 5)$

$= 2 - 4\log_2 3 + 2\log_2 5 - 3 + 2\log_2 5 - \log_2 3 + 3 - 4\log_2 3 + \log_2 5$

$= 2 - 9\log_2 3 + 5\log_2 5$ → ถูกต้อง

24. 3

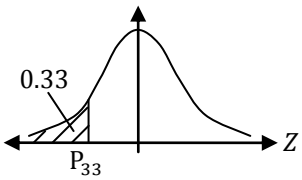
แจกแจงปกติ $\rightarrow \bar{x}$ = มัธยฐาน = ฐานนิยม $\rightarrow \bar{x} = 45$



โจทย์บอกว่า มี 34.13% อยู่ระหว่างมัธยฐาน กับ 54 จะวาดได้ดังรูป

เอา $A = 0.3413$ ไปเปิดตาราง จะได้ $Z = 1.0$ ดังนั้น $x = 54$ จะได้ $Z = 1.0$

จากสูตร $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ จะได้ $1.0 = \frac{54-45}{s} \rightarrow s = 9$



ถัดมา หา P_{33} จากรูป เนื่องจากพื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง

ดังนั้น ต้องเอา $A = 0.5 - 0.33 = 0.17$ ไปเปิดตาราง จะได้ $Z = 0.44$

และ P_{33} อยู่ทางฝั่งซ้าย จะมี Z เป็นลบ ดังนั้น P_{33} จะมี $Z = -0.44$

จากสูตร $Z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ จะได้ $-0.44 = \frac{P_{33}-45}{9} \rightarrow P_{33} = -3.96 + 45 = 41.04$

ดังนั้น นักเรียนคนนี้ได้ $\frac{5}{3} \times 41.04 = 68.4$ เต็ม 100 $= 68.4\%$

25. 4

เรียงข้อมูลก่อน จะได้ $28 \quad 30 \quad 32 \quad 35 \quad 40 \quad 42 \quad 45 \quad 48 \quad 50 \quad 65$

(ก) D_7 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{7(10+1)}{10} = 7.7 \rightarrow$ จะได้ D_7 = ตัวที่ $7 + 0.7$(ตัวที่ 8 – ตัวที่ 7)

$= 45 + 0.7(48 - 45) = 45 + 2.1 = 47.1$

มัธยฐาน = ตัวที่ $\frac{10+1}{2} = 5.5 \rightarrow$ จะได้ $M = \frac{\text{ตัวที่ } 5 + \text{ตัวที่ } 6}{2} = \frac{40+42}{2} = 41$

จะได้ $D_7 - M = 47.1 - 41 = 6.1 \rightarrow$ ก. ผิด

(ข) ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Q_3 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{3(10+1)}{4} = 8.25 \rightarrow$ จะได้ Q_3 = ตัวที่ $8 + 0.25$(ตัวที่ $9 -$ ตัวที่ 8)

$= 48 + 0.25(50 - 48) = 48 + 0.5 = 48.5$

Q_1 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{1(10+1)}{4} = 2.75 \rightarrow$ จะได้ Q_1 = ตัวที่ $2 + 0.75$(ตัวที่ $3 -$ ตัวที่ 2)

$= 30 + 0.75(32 - 30) = 30 + 1.5 = 31.5$

ดังนั้น ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ $= \frac{48.5-31.5}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \rightarrow$ ข. ผิด

26. 4

$\bar{u} \times \bar{j} = \begin{bmatrix} a \\ 2 \\ b \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-b \\ 0-0 \\ a-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b \\ 0 \\ a \end{bmatrix}$ ดังนั้น $|\bar{u} \times \bar{j}| = \sqrt{(-b)^2 + 0^2 + a^2} = 2$

$b^2 + a^2 = 4$

ดังนั้น $|\bar{u}|^2 = a^2 + 2^2 + b^2 = (a^2 + b^2) + 2^2 = 4 + 4 = 8$

27. 2

(ก) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ac & 0 \\ 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^2 + A + I = \begin{bmatrix} 1 & ac & a \\ b & 1 & ab \\ bc & c & 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น $\det(A^2 + A + I) = (1 + (abc)^2 + abc) - (abc + abc + abc)$

$= (1 + 1 + 1) - (1 + 1 + 1) = 0 \rightarrow$ ก. ถูก

(ข) จะเห็นว่า B เกิดจากการนำ A ทำ (1). $R_1 + 2R_2 - 3R_3$, (2). $2R_2$ และ (3). $3R_3$

จากสมบัติ det จะได้ว่า (1). จะไม่มีผลกับ det แต่ (2). กับ (3). จะทำให้ det เพิ่มเป็น 2 เท่า และ 3 เท่า ตามลำดับ

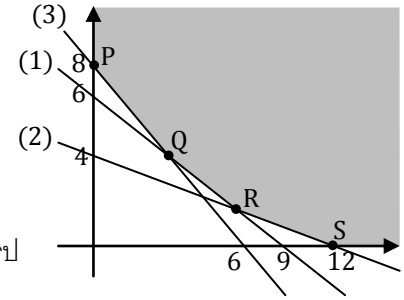
ดังนั้น ถ้า $\det(A) = 3$ แล้ว จะได้ $\det(B)$ เพิ่มเป็น $(2)(3)(3) = 18 \rightarrow$ ข. ผิด

28. 2

ให้ผสมปุ๋ย A จำนวน x ถุง และ ปุ๋ย B จำนวน y ถุง

ดังนั้น จะได้ $\mathrm{N} = 2x + 3y$, $\mathrm{P} = x + 3y$, $\mathrm{K} = 80x + 60y$ และค่าใช้จ่าย $= 10x + 12y$

จะได้เงื่อนไขคือ $2x + 3y \geq 18$ ...(1)
$x + 3y \geq 12$ ...(2)
$80x + 60y \geq 480$ ...(3)



โดยวัตถุประสงค์คือ ต้องทำให้ $C = 10x + 12y$ ต่ำสุด

วาดอสมการเงื่อนไขจากจุดตัดแกน และแรเงาพื้นที่ที่สอดคล้อง

จำนวนถุงต้องไม่ติดลบ จึงเอาเฉพาะพื้นที่ใน Q_1 จะได้บริเวณที่ซ้อนทับกันดังรูป

ต้องการหาค่าน้อยสุด จะมีจุดมุมที่ต้องสงสัย 4 จุด คือ P, Q, R, S

หาพิกัดจุด Q จากการแก้ (1) กับ (3) $\rightarrow$ (3) – 20(1) : $40x = 120 \rightarrow x = 3$ แทนใน (1) ได้ $y = 4$

หาพิกัดจุด R จากการแก้ (1) กับ (2) $\rightarrow$ (1) – (2) : $x = 6 \rightarrow$ แทนใน (2) ได้ $y = 2$

แทน P, Q, R, S หาจุดที่ C ต่ำสุด
$\mathrm{P}(0,8) \ : C = 10(0) + 12(8) = 96$
$\mathrm{Q}(3,4) \ : C = 10(3) + 12(4) = 78 \ \rightarrow \min$
$\mathrm{R}(6,2) \ : C = 10(6) + 12(2) = 84$
$\mathrm{S}(12,0) \ : C = 10(12) + 12(0) = 120$

ดังนั้น เสียค่าใช้จ่ายน้อยสุด $= 78$ บาท

29. 3

ให้ $m = 2a + 3b$ และ $n = 3a + 2b$ แทนใน ก. และ ข. จะได้ดังนี้

ก. $\frac{m+4c}{n+3c} > \frac{m}{n}$

$mn + 4nc > mn + 3mc$
$4n > 3m$
$4(3a + 2b) > 3(2a + 3b)$
$12a + 8b > 6a + 9b$
$6a > b$

โจทย์ให้ $a < b$ ซึ่งจะเห็นว่า $6a > b$ อาจจะไม่จริง

เช่น ถ้า $a = 1, b = 7$ และ c เป็นอะไรก็ได้ ประโยคนี้จะผิด

เช่น ถ้า $a = 1, b = 7, c = 1$ จะได้ ก. คือ $\frac{27}{20} > \frac{23}{17}$ ซึ่งไม่จริง

ข. $\frac{n+c}{m+c} > \frac{n}{m}$

$mn + mc > mn + nc$
$m > n$
$2a + 3b > 3a + 2b$
$b > a$

โจทย์ให้ $a < b \rightarrow$ ข. จริง

30. 4

แทน $y = 0$ จะได้ $f(\underbrace{x + g(0)}_{k}) = 2x + 15$ เราจะใช้เทคนิคเปลี่ยนตัวแปร เพื่อหา $f(x)$

ให้ $x + g(0) = k$ $\quad = 2(k - g(0)) + 15$
$\quad = 2k - 2g(0) + 15$
$x = k - g(0)$

ดังนั้น $f(k) = 2k - 2g(0) + 15$ ...(1)

ถัดมา แทน $x = 0$ ใน $f(x + g(y))$ ที่โจทย์ให้ จะได้ $f(g(y)) = y + 15$

แต่ถ้าแทน k ใน (1) ด้วย $g(y)$ จะได้ $f\big(g(y)\big) = 2g(y) - 2g(0) + 15$

ใช้ $f\big(g(y)\big)$ เป็นตัวเชื่อม จะได้ $2g(y) - 2g(0) + 15 = y + 15$

$$g(y) = \tfrac{y+2g(0)}{2} \quad ...(2)$$

ก. แทน f และ g จาก (1) และ (2) จะได้ $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x - 2g(0) + 15)$

$$= \tfrac{2x-2g(0)+15+2g(0)}{2}$$

$$= \tfrac{2x+15}{2} \rightarrow \text{ก. ผิด}$$

ข. $g\big(25 + f(57)\big) = g(25 + 114 - 2g(0) + 15) = g\big(154 - 2g(0)\big)$

$$= \tfrac{154-2g(0)+2g(0)}{2} = 77 \rightarrow \text{ข. ผิด}$$

31. 5

$$\begin{aligned}
2\log_2(x+7) + 4\log_{2^2}(x-3) &= 3\log_{2^3} 64(x^2-4x+4) \\
2\log_2(x+7) + \tfrac{4}{2}\log_2(x-3) &= \tfrac{3}{3}\log_2\big(8(x-2)\big)^2 \\
2\log_2(x+7) + 2\log_2(x-3) &= 2\log_2\big(8(x-2)\big) \\
\log_2(x+7) + \log_2(x-3) &= \log_2\big(8(x-2)\big) \\
\log_2(x+7)(x-3) &= \log_2\big(8(x-2)\big) \\
x^2 + 4x - 21 &= 8x - 16
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x^2 - 4x - 5 &= 0 \\
(x-5)(x+1) &= 0 \\
x &= 5, -1
\end{aligned}$$

แต่จะเห็นว่า -1 ใช้ไม่ได้ เพราะทำให้ หลัง $\log_4(x-3)$ เป็นลบ $\rightarrow$ เหลือ 5 ตัวเดียว $\rightarrow$ ตอบ 5

32. 54

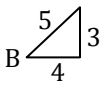
แก้หา cos B และ cos C ก่อน $25\cos B - 13\cos C = 15$ ...(1)

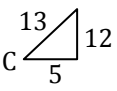
$65\cos B + 65\cos C = 77$ ...(2)

$5(1) + (2)$: $190\cos B = 152 \rightarrow \cos B = \frac{4}{5}$ แทนใน (1) ได้ $\cos C = \frac{20-15}{13} = \frac{5}{13}$

จะหา sin ของทุกมุม เพื่อใช้กฎของ sin

$\cos = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} \rightarrow$ วาดรูป + หาด้านที่เหลือ ได้ดังรูป





เนื่องจาก B, C เป็นมุมแหลม จะได้ sin เป็นบวก ดังนั้น $\sin B = \frac{3}{5}$, $\sin C = \frac{12}{13}$

และ $\sin A = \sin(180° - (B+C)) = \sin(B+C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C$

$$= \tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{5}{13} + \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{12}{13} = \tfrac{63}{65}$$

จากกฎของ sin จะได้ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ แทนค่าต่างๆที่รู้ จะได้ $\frac{a}{\frac{63}{65}} = \frac{b}{\frac{3}{5}} = \frac{20}{\frac{12}{13}}$

ดังนั้น $a = \frac{20}{\frac{12}{13}} \times \frac{63}{65} = 20 \times \frac{13}{12} \times \frac{63}{65} = 21$ และ $b = \frac{20}{\frac{12}{13}} \times \frac{3}{5} = 20 \times \frac{13}{12} \times \frac{3}{5} = 13$

จะได้ความยาวรอบรูป $= a + b + c = 21 + 13 + 20 = 54$

33. 681

ข้อนี้ ทำได้หลายวิธี จะกระจาย $\cos(2\theta + 3\theta)$ ก็ได้ หรือจะใช้ $(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$ ก็ได้

ผมคิดว่า ใช้วิธีแทน θ สามมุมลงไป แล้วแก้ระบบสมการ น่าจะง่ายที่สุด โดยต้องเลือก θ ที่ cos แล้วได้เลขน้อยๆ

$\theta = 0°$: $1 = a + b + c \quad \rightarrow \quad 1 = a + b + c \quad ...(1)$

$\theta = 60°$: $\frac{1}{2} = \frac{a}{2^5} + \frac{b}{2^3} + \frac{c}{2} \quad \rightarrow \quad 16 = a + 4b + 16c \quad ...(2)$

$\theta = 45°$: $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}^5} + \frac{b}{\sqrt{2}^3} + \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad -4 = a + 2b + 4c \quad ...(3)$

(2) – (1) : $15 = 3b + 15c$

(3) – (1) : $-5 = b + 5c \quad ...(5)$ } (4) – (5) : $10 = 2c \quad \rightarrow \quad c = 5$

$5 = b + 5c \quad ...(4)$

แทน c ใน (5) จะได้ $b = -5 - 15 = -20$

แทน b, c ใน (1) จะได้ $a = 1 + 20 - 5 = 16$

ดังนั้น $a^2 + b^2 + c^2 = 256 + 400 + 25 = 681$

34. 3

A : จากสมบัติ log จะได้ $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 6^{x+\log_6 5}$

$3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 6^x \cdot 6^{\log_6 5}$

$3 \cdot 2^{2x} + 2 \cdot 3^{2x} = 2^x 3^x \cdot 5$ ให้ $m = 2^x$, $n = 3^x$

$3 \cdot m^2 + 2 \cdot n^2 = mn(5)$

$3m^2 - 5mn + 2n^2 = 0$

$(3m - 2n)(m - n) = 0$

ดังนั้น $3m = 2n$ หรือ $m = n$

$3(2^x) = 2(3^x)$ $2^x = 3^x$

$2^{x-1} = 3^{x-1}$ จะได้ $x = 0$

จะได้ $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ $\rightarrow A = \{1, 0\}$

B : ต้องสังเกตว่า ฝั่งซ้ายยกกำลังสอง $= \left(x + \sqrt{1 - x^2}\right)^2 = x^2 + 2x\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2$

$= 2x\sqrt{1 - x^2} + 1 =$ ฝั่งขวา พอดีเป๊ะ

ดังนั้น ถ้าให้ $k = x + \sqrt{1 - x^2}$ จะได้สมการกลายเป็น $k = k^2$

$0 = k^2 - k$

$0 = k(k - 1)$

$k = 0 , 1$

ดังนั้น $x + \sqrt{1 - x^2} = 0$ หรือ $x + \sqrt{1 - x^2} = 1$

$\sqrt{1 - x^2} = -x$ $\sqrt{1 - x^2} = 1 - x$

$1 - x^2 = (-x)^2 \quad ; -x \geq 0$ $1 - x^2 = (1 - x)^2 \quad ; 1 - x \geq 0$

$1 = 2x^2$ $1 - x^2 = 1 - 2x + x^2$

$\pm\frac{1}{\sqrt{2}} = x$ $0 = 2x^2 - 2x$

แต่จาก $-x \geq 0$ จะเหลือ $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ $0 = 2x(x - 1)$

$x = 0 , 1$

สอดคล้องกับ $1 - x \geq 0$ ทุกตัว จะได้ $x = 0, 1$

ดังนั้น $A \cup B = \{ 0, 1, -\frac{1}{\sqrt{2}} \} \rightarrow$ มีสมาชิก 3 ตัว

35. 9

จาก $(f^{-1}\circ g^{-1})(1) = 1$

$f^{-1}\big(g^{-1}(1)\big) = 1$

$g^{-1}(1) = f(1)$ ...(∗)

จะหา $g^{-1}(1)$ ต้องหา x ที่ $g(x)=1$ นั่นคือ $x^3-3x(x-1) = 1$

$x^3-3x^2+3x-1 = 0$

$(x-1)^3 = 0$

$x = 1$ → จะได้ $g^{-1}(1)=1$

และ $f(1)=a(1)+2=a+2$ แทนใน (∗) จะได้ $1=a+2 \rightarrow a=-1$

ดังนั้น $(g\circ f)(a) = g\big(f(-1)\big) = g\big((-1)(-1)+2\big) = g(3) = 3^3-3(3)(3-1) = 9$

36. 500

เอา $\frac{a_1}{a_1+2}=\frac{a_2}{a_2+3}=\ldots=\frac{a_{1000}}{a_{1000}+1001}$ มากลับเศษส่วน จะได้ $\frac{a_1+2}{a_1} = \frac{a_2+3}{a_2} = \frac{a_3+4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{1000}+1001}{a_{1000}}$

$1+\frac{2}{a_1}=1+\frac{3}{a_2}=1+\frac{4}{a_3}=\ldots=1+\frac{1001}{a_{1000}}$

$\frac{2}{a_1}=\frac{3}{a_2}=\frac{4}{a_3}=\ldots=\frac{1001}{a_{1000}}$

จับ $\frac{2}{a_1}$ เท่ากับแต่ละตัว เพื่อเขียน a_n ในรูป a_1 :

จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{3}{a_2}$ จะได้ $a_2=\frac{3a_1}{2}$

จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{4}{a_3}$ จะได้ $a_3=\frac{4a_1}{2}$

$\vdots$

จาก $\frac{2}{a_1}=\frac{1001}{a_{1000}}$ จะได้ $a_{1000}=\frac{1001a_1}{2}$

} $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต (เพิ่มทีละ $\frac{a_1}{2}$)

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิต และโจทย์ถาม a_1+a_{1000} → หาได้จากสูตร $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

นั่นคือ $a_1+a_2+\ldots+a_{1000} = \frac{1000}{2}(a_1+a_{1000})$

$250000 = \frac{1000}{2}(a_1+a_{1000})$

$500 = a_1+a_{1000}$

37. 1704

จะใช้วิธีเอาสมการมาหักด้วยตัวมันเอง → จาก $a_k+a_{k+1}+a_{k+2} = 2576-k$ ...(1)

เพิ่ม 1 ตำแหน่ง โดยแทน k ด้วย $k+1$ จะได้ $a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+3} = 2576-(k+1)$ ...(2)

(1) – (2) จะได้ $a_k-a_{k+3}=1$ นั่นคือ ตัวที่ห่างกัน 3 ตำแหน่ง ค่าจะน้อยลง 1

เช่น $a_1=12 \rightarrow a_4=11 \rightarrow a_7=10 \rightarrow a_{10}=9 \rightarrow \ldots$ (กลุ่ม ÷ 3 เหลือเศษ 1)

$a_2=2556 \rightarrow a_5=2555 \rightarrow a_8=2554 \rightarrow a_{11}=2553 \rightarrow \ldots$ (กลุ่ม ÷ 3 เหลือเศษ 2)

$a_3=7 \rightarrow a_6=6 \rightarrow a_9=5 \rightarrow a_{12}=4 \rightarrow \ldots$ (กลุ่ม ÷ 3 ลงตัว)

เนื่องจาก 2558 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2

ดังนั้น จะเอากลุ่ม ÷ 3 เหลือเศษ 2 มาคิด ดังตาราง

n	2	5	8	11	...	2558
a_n	2556	2555	2554	2553	...	x

สองแถวนี้ ต้องมีจำนวนตัวเท่ากัน ใช้สูตร จำนวนตัว $=\frac{\text{ปลาย}-\text{ต้น}}{\text{ห่าง}}+1$ จะได้ $\frac{2558-2}{3}+1 = \frac{x-2556}{-1}+1$

$852 = \frac{x-2556}{-1}$

$1704 = x$

38. 340

ก่อนอื่น จะเอา A ทั้งสามตัวมาวางเป็นหลักไว้ก่อน จะได้ __ A __ A __ A __

จากนั้น เอา T มาแทรก (ในขั้นนี้ T ยังติดกันได้อยู่ เพราะยังเอา P มาแทรกให้มันแยกกันตอนสุดท้ายได้)

กรณีที่ T ทั้งสามตัวติดกัน : เราจะมัด T ทั้งสามตัวเป็นตัวใหม่ 1 ตัว ได้เป็น $\boxed{\text{TTT}}$

มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง ดังนั้น จะเลือกใส่ $\boxed{\text{TTT}}$ ได้ 4 แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องที่ 2 จะได้เป็น A T T T A A

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ P สองตัวไประหว่าง TTT เพื่อไม่ให้ T ติดกัน

ได้เป็น A T P T P T A A ส่วน P อีกตัวที่เหลือ ห้ามเสียบติดกับ P สองตัวแรก

จะเหลือช่อง __ A __ T P T P T __ A __ A __ ให้เสียบได้ 5 ช่อง เลือกได้ 5 แบบ

$\rightarrow$ รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $4 \times 5 = 20$ แบบ

กรณีที่ T สองตัวติดกัน และ T อีกตัวแยกออกไป : ต้องเอา $\boxed{\text{TT}}$ กับ T มาเสียบ

มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง จะเลือกช่องให้ $\boxed{\text{TT}}$ และ T ได้ $4 \times 3 = 12$ แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องแรก กับช่องสุดท้าย จะได้เป็น TT A A A T

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเห็นว่าจำเป็นต้องเสียบ P หนึ่งตัวไประหว่าง TT เพื่อไม่ให้ T ติดกัน

ได้เป็น T P T A A A T ส่วน P อีกสองตัวที่เหลือ ห้ามเสียบติดกับ P ตัวแรก

จะเหลือช่อง __ T P T __ A __ A __ A __ T __ ให้เสียบ P สองตัวได้ 6 ช่อง เลือกได้ $\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ แบบ

$\rightarrow$ รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $12 \times 15 = 180$ แบบ

กรณีที่ T ไม่ติดกันเลย : มีช่องระหว่าง A อยู่ 4 ช่อง จะเลือกให้ T ทั้งสามตัวได้ $\binom{4}{3} = 4$ แบบ

เช่น ถ้าเลือกได้ช่องแรก กับ 2 ช่องหลัง จะได้ T A A T A T

จากนั้น เอา P มาเสียบ จะเหลือช่อง _ T _ A _ A _ T _ A _ T _ ให้เสียบ P สามตัวได้ 7 ช่อง

เลือกได้ $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ แบบ $\rightarrow$ รวมทุกขั้นตอนของกรณีนี้ จะได้ $4 \times 35 = 140$

รวมทุกกรณี ได้ $20 + 180 + 140 = 340$ แบบ

39. 109

จากสมบัติของค่าเฉลี่ย จะได้ $\bar{y} = a\bar{x} + b = 6a + b$

ดังนั้น ค่าเฉลี่ยรวม $= \frac{N_x\bar{x} + N_y\bar{y}}{N_x + N_y} = \frac{n(6) + n(6a+b)}{n+n} = \frac{6a+b+6}{2} \rightarrow$ โจทย์ให้ $= 7 \rightarrow \frac{6a+b+6}{2} = 7$

$b = 8 - 6a \quad ...(*)$

ถัดมา จากสูตรความแปรปรวน $s_x^2 = \frac{\sum x^2}{N} - \bar{x}^2$ จะได้ $2^2 = \frac{\sum x^2}{n} - 6^2$

$40n = \sum x^2$

และจากสมบัติของ s จะได้ $s_y = |a| s_x = 2a$ ($a > 0$) ดังนั้น $(2a)^2 = \frac{\sum y^2}{n} - (6a+b)^2$

(b ที่มาบวก จะไม่มีผลกับค่า s)

$4a^2 + (6a+b)^2 = \frac{\sum y^2}{n}$

$(40a^2 + 12ab + b^2)n = \sum y^2$

จะได้ ความแปรปรวนรวม $= \frac{\sum x^2 + \sum y^2}{n+n} - 7^2 = \frac{40n + (40a^2 + 12ab + b^2)n}{2n} - 49 = \frac{40 + 40a^2 + 12ab + b^2}{2} - 49$

โดยให้ ความแปรปรวนรวม $= 21$ ดังนั้น $\frac{40+40a^2+12ab+b^2}{2} - 49 = 21$

$$40a^2 + 12ab + b^2 = 100$$

แทน b จาก $(*)$

$$\begin{aligned} 40a^2 + 12a(8-6a) + (8-6a)^2 &= 100 \\ 10a^2 + 3a(8-6a) + (4-3a)^2 &= 25 \\ 10a^2 + 24a - 18a^2 + 16 - 24a + 9a^2 &= 25 \\ a^2 &= 9 \end{aligned}$$

โจทย์ให้ $a > 0$ ดังนั้น $a = 3$ แทนใน $(*)$ จะได้ $b = 8 - 6(3) = -10$ ดังนั้น $a^2 + b^2 = 9 + 100 = 109$

40. 7

เอาความถี่สะสมช่องที่ติดกันมาลบกัน จะได้ช่องความถี่ปกติ (แบบไม่สะสม) ดังตาราง

โดยช่อง ร้อยละความถี่สัมพัทธ์นี้ สามารถใช้แทนความถี่ในการหาค่ากลางและการกระจายข้อมูลได้เลย

ค่าสังเกต (x)	ร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์	ร้อยละของความถี่สัมพัทธ์
1	20	20
2	40	20
a	70	30
6	90	20
10	100	10

โดยต้องเทียบให้จำนวนข้อมูลทั้งหมด มี 100 จำนวน

จะได้ $\bar{x} = \frac{20(1)+20(2)+30a+20(6)+10(10)}{100} = \frac{280+30a}{100}$

แต่โจทย์ให้ $\bar{x} = 4$ ดังนั้น $\frac{280+30a}{100} = 4 \rightarrow$ แก้ได้ $a = 4$

ดังนั้น ความแปรปรวน $= \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$

$$= \frac{20(1-4)^2+20(2-4)^2+30(4-4)^2+20(6-4)^2+10(10-4)^2}{100} = \frac{180+80+0+80+360}{100} = 7$$

41. 38

จัดรูปเส้นตรง จะได้ $y = 5x + 13 \rightarrow$ เทียบกับรูป $y = mx + c$ จะได้ ความชัน $= 5$ ดังนั้น $f'(1) = 5$ ด้วย

จาก $f'(x) = b + 3x^2$ จะได้ $f'(1) = b + 3(1^2) = 5 \rightarrow$ แก้สมการ จะได้ $b = 2$

และจุดที่เส้นตรงสัมผัส f จะต้องอยู่ทั้งบน เส้นตรงและ $f \rightarrow$ แทน $x = 1$ ในเส้นตรง $y = 5x + 13$ ได้ $y = 18$

ดังนั้น จุด $(1, 18)$ ต้องอยู่บน f ด้วย $\rightarrow (1, 18)$ ต้องแทนใน $f(x) = a + bx + x^3$ แล้วเป็นจริง

จะได้ $18 = a + 2(1) + 1^3 \rightarrow$ แก้ได้ $a = 15 \rightarrow$ จะได้ $f(x) = 15 + 2x + x^3$

ดังนั้น $\int_0^2 f(x)\,dx = 15x + x^2 + \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = (30 + 4 + 4) - (0) = 38$

42. 634

อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x ขณะที่ $x = 3$ ก็คือ $f'(3)$ นั่นเอง

เนื่องจากตัวส่วน $\lim_{x\to3} x - 3 = 0$ แต่ $\lim_{x\to3} \frac{xf(x)-333}{x-3}$ หาค่าได้ ดังนั้น $\lim_{x\to3} \frac{xf(x)-333}{x-3}$ ต้องอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

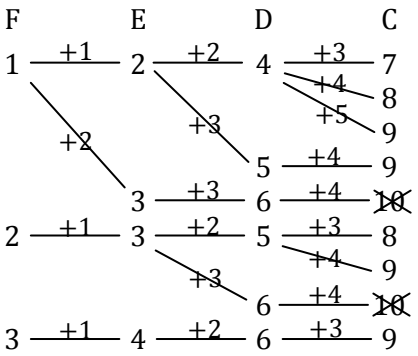
ใช้โลปิตาล จะได้ $\lim_{x\to3} \frac{xf(x)-333}{x-3} = \lim_{x\to3} \frac{\text{ดิ๊ฟบน}}{\text{ดิ๊ฟล่าง}} = \lim_{x\to3} \frac{xf'(x)+f(x)}{1} = 3f'(3) + f(3) = 3f'(3) + 111$

แต่โจทย์ให้ $\lim_{x\to3} \frac{xf(x)-333}{x-3} = 2013$ ดังนั้น $3f'(3) + 111 = 2013 \rightarrow$ แก้ได้ $f'(3) = \frac{1902}{3} = 634$

43. 35

ขั้น 1 เลือก A, B : เขียนนับจำนวนที่บวกกันเป็น 14 จะมี $(9,5), (8,6), (7,7), (6,8), (5,9) \rightarrow 5$ แบบ

ขั้น 2 เลือก C, D, E, F จาก $C - D > D - E > E - F > 0$
แสดงว่า จาก $F \to E \to D \to C$ จะมีผลลบของแต่ละคู่เพิ่มขึ้นเรื่อยๆ
โดย F จะเป็นค่าที่น้อยที่สุด ถ้าไล่นับดู จะได้ 7 วิธี ดังรูป



ดังนั้น จะได้จำนวนแบบ $= 5 \times 7 = 35$ แบบ

44. 2750

แยกเทเลสโคปิค ได้ $A = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2015} - \frac{1}{2016}$

$= \frac{1}{1} + \frac{1-2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1-2}{4} + \ldots + \frac{1}{2015} + \frac{1-2}{2016}$ ⟩ เปลี่ยน -1 เป็น $1-2$

$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2016}\right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{2}{2016}\right)$ ⟩ แยกตัวที่เป็นลบไปไว้ข้างหลัง

$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2016}\right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{1008}\right)$ ⟩ ตัด 1008 พจน์แรกได้

$= \frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \ldots + \frac{1}{2016}$

ถัดมา หา B สังเกตว่าตัวเลขทุกคู่ รวมกันได้ 3025 ดังนั้น เราจะคูณ $\frac{3025}{3025}$ แล้วกระจาย 3025 เข้าไป

$$\begin{aligned}
B &= \frac{3025}{3025}\left(\frac{1}{(1009)(2016)} + \frac{1}{(1010)(2015)} + \ldots + \frac{1}{(2016)(1009)}\right) \\
&= \frac{1}{3025}\left(\frac{3025}{(1009)(2016)} + \frac{3025}{(1010)(2015)} + \ldots + \frac{3025}{(2016)(1009)}\right) \\
&= \frac{1}{3025}\left(\frac{1009+2016}{(1009)(2016)} + \frac{1010+2015}{(1010)(2015)} + \ldots + \frac{2016+1009}{(2016)(1009)}\right) \\
&= \frac{1}{3025}\left(\frac{1}{2016} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{2015} + \frac{1}{1010} + \cdots + \frac{1}{1009} + \frac{1}{2016}\right) \\
&= \frac{2}{3025}\left(\frac{1}{1009} + \frac{1}{1010} + \cdots + \frac{1}{2016}\right)
\end{aligned}$$

⟩ มี $\frac{1}{1009}, \frac{1}{1010}, \ldots, \frac{1}{3025}$ ตัวละ 2 ครั้ง

จะเห็นว่า $B = \frac{2}{3025}A$ จะได้ $\frac{A}{B} = \frac{3025}{2}$ ดังนั้น $\frac{20A}{11B} = \frac{20}{11} \cdot \frac{3025}{2} = 2750$

45. 384

ก่อนอื่น เราจะจัดสมการที่โจทย์ให้ ให้อยู่ในรูปง่ายที่สุดเท่าที่จะจัดได้ก่อน

(ก) $a = b + d$ ง่ายอยู่แล้ว

(ข) $(a + c + (b + d))b = (a - c)d$ ⟩ จาก (ก)

$(a + c + a)b = (a - c)d$

$(2a + c)b = (a - c)d$

$2ab + bc = ad - cd$

$2ab + bc + cd = ad$

$2ab + c(b + d) = ad$ ⟩ จาก (ก)

$2ab + ca = ad$ ⟩ $\div a$ ตลอดได้ (เพราะ $a \neq 0$)

$2b + c = d$ ...(1)

(ค) $2 + cd = a(c - 1)$ ⟩ จาก (ก)

$2 + cd = (b + d)(c - 1)$

$2 + cd = bc - b + cd - d$

$2 = bc - b - d$

$2 = bc - b - (2b + c)$ ⟩ จาก (1)

$2 = bc - 3b - c$ ...(2)

หลักทั่วไปในแก้สมการจำนวนเต็ม คือ ต้องจัดฝั่งหนึ่งให้เป็นตัวเลข แล้ว แยกตัวประกอบอีกฝั่ง
แล้วอ้างว่า ฝั่งที่เป็นตัวเลข จะแยกตัวประกอบได้แค่ไม่กี่แบบ
จะเห็นว่าสมการ (2) มีฝั่งซ้ายเป็นตัวเลขแล้ว ส่วนฝั่งขวา ถ้าเติม $+3$ เข้าไป จะสามารถจัดกลุ่มดึงตัวร่วมได้

$$\begin{aligned}(2): \quad 2 &= bc-3b-c \\ 2+3 &= bc-3b-c+3 \\ 5 &= b(c-3)-(c-3) \\ 5 &= (b-1)(c-3)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า 5 ทางฝั่งซ้าย แยกเป็น 2 ตัวคูณกันได้แค่ 2 แบบ
คือ 5×1 กับ 1×5

<u>กรณี</u> 5×1 : จะได้ $b-1=5$ และ $c-3=1$ จะได้ $b=6\,,c=4$
แทนใน (1) จะได้ $d=2(6)+4=16\,,$ แทนใน (ก) ได้ $a=6+16=22$
จะได้ $a^2+b^2+c^2+d^2 = 484+36+16+256 = 792$
<u>กรณี</u> 1×5 : จะได้ $b-1=1$ และ $c-3=5$ จะได้ $b=2\,,c=8$
แทนใน (1) จะได้ $d=2(2)+8=12\,,$ แทนใน (ก) ได้ $a=2+12=14$
จะได้ $a^2+b^2+c^2+d^2 = 196+4+64+144 = 408$
เนื่องจาก $a^2+b^2+c^2+d^2$ เป็นได้แค่ 792 กับ 408 ดังนั้น $M=792$ และ $m=408$
ดังนั้น $M-m = 792-408 = 384$

<u>เครดิต</u>
ขอบคุณ คุณ nitrogen synthesis และ คุณ Gtr Ping and his friends สำหรับข้อสอบนะครับ
ขอบคุณ คุณ Pol Celona ที่ช่วยคิดเฉลยข้อ 38 ครับ
ขอบคุณ คุณ Piyapan Sujarittham และคุณ P'Wit Tutor ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเฉลยให้นะครับ