

PAT 1 (มี.ค. 56)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 2 มีนาคม 2556 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 25 ข้อละ 5 คะแนน

1. กำหนดให้ P แทน ประพจน์ “ถ้า $A \cup C \subset B \cup C$ แล้ว $A \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ”
 และให้ Q แทน ประพจน์ “ถ้า $C \subset A \cup B$ แล้ว $C \subset A$ และ $C \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ”
 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge \sim Q] \Leftrightarrow P$ มีค่าความจริงเป็น จริง(ข) ประพจน์ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

2. กำหนดให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆใน $\mathcal{U}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A - [(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C)] = A - B$ (ข) เพาเวอร์เซตของเซต $A - (B \cup C)$ เท่ากับเพาเวอร์เซตของเซต $(A - B) - C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

3. กำหนดให้ $P(x)$ แทน $\left| \frac{x-2}{x+2} \right| < 2$ และให้ $Q(x)$ แทน $|2x+1| > x-1$
 เอกภพสัมพัทธ์ในข้อต่อไปนี้จะทำให้ $\forall x[Q(x)] \Rightarrow \exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $(-\infty, -4)$ 2. $(-5, -1)$ 3. $(-3, 2)$ 4. $(-1, \infty)$

4. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid |2x-5| + |x| \leq 7 \}$ และ
 $B = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 12 + |x| \}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A \cap B \subset \{ x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x < 4 \}$

(ข) $A - B$ เป็นเซตจำกัด (finite set)

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in R \times R \mid \sqrt{12 - |x|} + \sqrt{y + 1} = 3 \}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $D_r \cap R_r \subset (-1, 8)$

(ข) $D_r - R_r = \{ x \in R \mid 8 < x \leq 12 \}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

6. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต A และ B เท่ากับ 4 และ 5 ตามลำดับ
และจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับ 7 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ใน $A \cap B$ มี 4 ความสัมพันธ์

(ข) ความสัมพันธ์จาก $A - B$ ไป $B - A$ มี 64 ความสัมพันธ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

7. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4, xy > 0\}$ เป็นฟังก์ชัน

(ข) ถ้า $f(x) = \begin{cases} x-2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$ และ $g(3x-1) = 2x^2 + 3x$ สำหรับ $x \in \mathbb{R}$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(25) = 14$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

8. ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$ ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 2y - 6 = 0$ ณ จุด $(4, 3)$ แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$

2. $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$

3. $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$

4. $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$

(ข) $\sqrt{3} \cot 20^\circ = 1 + 4 \cos 20^\circ$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

10. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่ $0 < x < 1$ และสอดคล้องกับ

$$\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)} \text{ แล้ว ค่าของ } \cos \pi x \text{ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้}$$

- | | | | |
|---------|--------|------------------|-------------------------|
| 1. -1 | 2. 0 | 3. $\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|---------|--------|------------------|-------------------------|

11. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x} & , |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ค่าของ $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|---------|--------|---------|--------|
| 1. -6 | 2. 6 | 3. -3 | 4. 3 |
|---------|--------|---------|--------|

12. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_x \left(\frac{2}{x-1} \right) \geq 1$ แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 5| > 9\}$
3. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |x + 3| \leq 5\}$
4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 3x^2\}$

13. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็น

จำนวนจริง ถ้า $AB + 3A = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. -1
3. -2
4. -2.5

14. กำหนดให้ $P = a(x + y) + 6y$ เป็นฟังก์ชันจุดประสงค์ โดยมีสมการข้อจำกัดดังนี้

$$3x + 4y \leq 48, \quad x + 2y \leq 22, \quad 3x + 2y \leq 42, \quad x \geq 0 \text{ และ } y \geq 0$$

ถ้า P มีค่ามากที่สุดเท่ากับ 288 แล้ว ค่ามากที่สุดของ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 20 2. 18 3. 16 4. 14

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ให้เวกเตอร์ $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงและให้เวกเตอร์ $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ถ้าเวกเตอร์ $\vec{w}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{u}$ และเวกเตอร์ $\vec{v}$ แล้ว $a + b + c = 1$

(ข) ให้เวกเตอร์ $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$ และ $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ ถ้า $|\vec{v}| = \frac{3}{\sqrt{5}}$ และ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ แล้วเวกเตอร์ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับเวกเตอร์ $\vec{v}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถัด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วยและ $3 \sin B = 5 \sin C$ แล้ว $\sin 2A$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. กำหนดให้ $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานแกน y ตัดแกน x ที่จุด $(1, 0)$ และผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนพาราโบลา

1. $(2, \frac{1}{8})$ 2. $(-1, \frac{1}{2})$ 3. $(3, \frac{1}{2})$ 4. $(4, \frac{1}{4})$

18. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n = \frac{1}{4+8+12+\dots+4n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ผลบวกของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

19. ค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x-1)} - x + 2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0

2. $\frac{1}{2}$

3. 1

4. $\frac{3}{2}$

20. กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้ง $y = \frac{3x^4-2}{x^3}$ เมื่อ $x > 0$ และให้ L เป็นเส้นตรงที่สัมผัสกับเส้นโค้ง C ที่จุด (1, 1)

ถ้าเส้นตรง L ตัดกับพาราโบลา $x(x-1) = y-1$ ที่จุด A และจุด B

แล้วระยะห่างระหว่างจุด A และจุด B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4\sqrt{82}$

2. $8\sqrt{82}$

3. $4\sqrt{41}$

4. $8\sqrt{41}$

21. กำหนดให้ $P(E)$ แทนความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ E ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์ใดๆ ในแซมเปิลสเปซ

โดยที่ $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{5}{8}$ และ $P(A' \cap B') = \frac{1}{4}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $P(A' \cup B) = \frac{5}{8}$

(ข) $P(A \cup B') = \frac{3}{4}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก

2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด

3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก

4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

22. ในการโยนลูกเต๋าสองลูกจำนวนหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทันสอง หารด้วย 4 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{6}{36}$

2. $\frac{11}{36}$

3. $\frac{15}{36}$

4. $\frac{27}{36}$

23. ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิก 6 คน มีอายุเฉลี่ย 34 ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเท่ากับ 8 ปี อีก 6 ปีต่อมามีญาติสองคนมาขออยู่อาศัยด้วย โดยที่ญาติทั้งสองคนนี้มีอายุเท่ากัน เท่ากับอายุเฉลี่ยของคนทั้ง 6 คนในครอบครัวนี้พอดี สัมประสิทธิ์การแปรผันของอายุของคนทั้ง 8 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

2. $\frac{10}{\sqrt{3}}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{20}$

4. $\frac{20}{\sqrt{3}}$

24. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีดังนี้ 2, 4, 3, 5, 12, 5, 18, 6, 4, 2, 9, 4
ข้อใดต่อไปนีถูกต้อง

1. มัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากกว่ามัธยฐาน

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับมัธยฐาน

4. ฐานนิยมมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต

25. กำหนดให้ $A = \sqrt{7\sqrt{5}}$, $B = \sqrt{5\sqrt{7}}$, $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ และ $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. $D > C > A > B$
 2. $A > C > B > D$
 3. $A > B > D > C$
 4. $C > A > D > B$

ตอนที่ 2 ข้อ 26 - 50 ข้อละ 7 คะแนน

26. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $A \cap B \neq \emptyset$

สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 10 เซต และสับเซตของ B ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 6 เซต

ถ้า จำนวนสมาชิกของ $P(P(A \cap B))$ เท่ากับ 16 เมื่อ $P(S)$ แทน เพาเวอร์เซตของ S

แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

27. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $5^{(x-2^A)}2^{y^A} = (16)^{64}$ เมื่อ $A = \frac{\log y}{\log x}$
แล้ว ค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด

28. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$

ถ้า $(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

29. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in R \mid \log_{\sqrt{3}}(x-1) - \log_{\sqrt[3]{3}}(x-1) = 1\}$ และ

$$B = \{x \in R \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$

แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต $A \cup B$ ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

30. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $5^{(1+\sqrt{x^2-4x-1})} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และมีโฟกัส F_1 และ F_2 อยู่บนแกน x จุด $A(4, 1)$ เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด $A(4, 1)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ $6\sqrt{2}$ ให้เส้นตรง L ตัดแกน x ที่จุด $(4.5, 0)$ และสัมผัสกับวงรีที่จุด $A(4, 1)$ ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด $(0, 0)$ กับเส้นตรง L แล้ว ค่าของ $d^2|AF_1||AF_2|$ เท่ากับเท่าใด

32. กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ โดยที่ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right) - \arctan(\sqrt{x})$ เมื่อ $0 < x < 1$ ค่าของ $\tan \theta + \cot \theta$ เท่ากับเท่าใด

33. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S ถ้า $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ $\det((A^t)^{-1})^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม และ

$$\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4} + \frac{a_3+a_5}{a_4+a_6} + \frac{a_5+a_7}{a_6+a_8} + \dots + \frac{a_{2011}+a_{2013}}{a_{2012}+a_{2014}} = 2012$$

ค่าของ $1 + 5r + 12r^2 + 22r^3 + \dots$ เท่ากับเท่าใด

35. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในควอดรนต์ (quadrant) ที่หนึ่งบนระนาบเชิงซ้อน

โดยที่ $\left| \frac{(z+1)(1+i)}{z(1+i)+5+i} \right| = 1$ และ $|z| = \sqrt{65}$ แล้วผลบวกของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก

โดยที่ $a_1 = b_2$, $a_5 = b_5$ และ $a_1 \neq a_5$ ถ้า $\frac{(b_6-b_4)+(b_6-b_1)}{a_4-a_2} = \frac{x}{y}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ x กับ y เท่ากับ 1 แล้ว $x^2 + y^2$ เท่ากับเท่าใด

37. สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ ให้ $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \dots a_n}{(a_2 - 1)(a_3 - 1)(a_4 - 1) \dots (a_n - 1)}$ เท่ากับเท่าใด

38. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} & , x < 4 \\ \frac{kx}{3} & , x \geq 4 \end{cases}$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ แล้ว $f(k+1)$ เท่ากับเท่าใด

39. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x เท่ากับ $ax^3 + bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ $g(x) = (x^3 + 2x)f(x)$ ถ้า $f'(1) = 18$, $f''(0) = 6$ และ $f(2) = f(1) + f(0)$ แล้วค่าของ $g'(-1)$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$

$5 + 2i$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ และ $f(0) = 58$ ค่าของ $\int_0^2 [f(x) - f(-x)]dx$ เท่ากับเท่าใด

41. ต้องการนำเลขโดด 1, 1, 2, 2, 3, 3 ทั้ง 6 ตัวมาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 6 หลัก จะสร้างจำนวนที่มี 6 หลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ เลข 1 ทั้งสองตัวไม่ติดกันและเลข 3 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน

42. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a < 2b$, $b < 5c$, $c < 6d$ และ $d < 100$
ค่าของ a มีค่ามากที่สุดเท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ จงหาจำนวน 3 หลัก abc ที่มีค่ามากที่สุด
โดยที่สอดคล้องกับสมการ $abc = ab + ba + ac + ca + bc + cb$
(หมายเหตุ abc แทนจำนวน 3 หลัก และ ab, ba, ac, ca, bc, cb แทนจำนวน 2 หลัก)
44. จังหวัดแห่งหนึ่งมีอำเภอ 6 อำเภอ แต่ละอำเภอส่งผู้แทนอำเภอละ 2 คนเป็นชาย 1 คนและเป็นหญิง 1 คน ถ้า
ต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จากตัวแทนทั้ง 12 คน โดยในบรรดากรรมการ 4 คน
นี้จะต้องเป็นชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากอำเภอเดียวกัน จะมีวิธีการคัดเลือกกี่วิธี
45. กำหนดให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบซึ่งกำหนดโดย $\vec{a} = x\vec{i} + \frac{12}{5}\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + y\vec{j}$ และ $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$
เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $|\vec{b} - \vec{c}| = 5$, เวกเตอร์ $\vec{a}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{b}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$
แล้วค่าของ $|5\vec{a} + \vec{b}|^2$ เท่ากับเท่าใด

46. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ นาย ก. และนาย ข. เป็นนักเรียนในห้องนี้ ถ้ามีนักเรียนในห้องนี้ ร้อยละ 9.48 สอบได้คะแนนมากกว่าคะแนนสอบของ นาย ก. มีนักเรียนร้อยละ 10.64 สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของ นาย ข. และ นาย ข. สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของนาย ก. อยู่ 51 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับเท่าใด
- เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

z	0.24	0.27	1.24	1.31
พื้นที่	0.0948	0.1064	0.3936	0.4052

47. จากการสำรวจคะแนนสอบของนักเรียน 6 คน ที่มีคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (x_i) และคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (y_i) ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์เท่ากับ 9 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 6 คะแนน และ $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 428$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 694$ และ $\sum_{i=1}^6 y_i^2 = 268$
- ถ้าคะแนนสอบวิชาทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง และนักเรียนคนหนึ่งที่มีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 7.5 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์โดยประมาณควรจะมีค่าเท่ากับเท่าใด

48. สำหรับ $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ กำหนดให้ $F(x, y)$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x, y) = \begin{cases} F(1, y-1) & , \quad x=0, y \neq 0 \\ x+1 & , \quad y=0 \\ F(F(x-1, y), y-1) & , \quad x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ $F(1, 2) + F(3, 1)$ เท่ากับเท่าใด

49. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$

(2) $x * (1 * x) = 1 * x$

(3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

50. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ

$$(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x)) \quad \text{สำหรับทุกจำนวนจริง } x \quad \text{แล้วค่าของ } f(4) \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

เฉลย

1. 2	11. 2	21. 1	31. 162	41. 42
2. 1	12. 3	22. 3	32. 2	42. 5927
3. 2	13. 4	23. 1	33. 2	43. 396
4. 3	14. 2	24. 2	34. 16	44. 135
5. 4	15. 4	25. 3	35. 11	45. 200
6. 3	16. 2	26. 7	36. 205	46. 20
7. 1	17. 4	27. 20	37. 3	47. 12
8. 4	18. 1	28. 373	38. 24	48. 10
9. 1	19. 4	29. 5	39. 354	49. 6
10. 3	20. 2	30. 4	40. 168	50. 4

แนวคิด

1. 2

P เป็นเท็จ เช่น $C = \{1\}$, $A = \{1\}$, $B = \{\}$ และ Q ก็เป็นเท็จ เช่น $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$
จะได้ (ก) คือ $[(F) \wedge T] \Leftrightarrow F \equiv T$ ถูกต้อง และ (ข) คือ $(T) \Rightarrow (T) \equiv T$ ผิด

2. 1

ก. เนื่องจาก $A \cap B \subset A \cup B \cup C$ ดังนั้น $(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C) = A \cap B$

ดังนั้น $A - [(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C)] = A - (A \cap B) = A - B \rightarrow$ ก. ถูก

ข. $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap B' \cap C' = (A - B) - C \rightarrow$ ข. ถูก

3. 2

เป็นเท็จ เมื่อ $T \rightarrow F$

ข้างหน้า จะได้ $2x + 1 > x - 1$ หรือ $2x + 1 < -(x - 1)$ หรือ $x - 1 \leq 0$

ได้ $(-2, \infty) \cup (-\infty, 0) \cup (-\infty, 1] = \mathbb{R}$ ดังนั้น $\forall x[|2x + 1| > x - 1]$ ยังไงก็จริง

ข้างหลัง ยกกำลังสองได้ (เพราะเป็นบวกทั้งสองข้าง) ได้ $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 < 2^2$ ตัวหารห้ามเป็น 0 $\rightarrow x \neq -2$

คูณ $(x + 2)^2$ ตลอดได้ (เป็นบวก ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย) แล้วย้ายข้าง ได้ $(x - 2)^2 - (2x + 4)^2 < 0$

$\rightarrow (3x + 2)(-x - 6) < 0$ ได้คำตอบคือ $(-\infty, -6) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$

ดังนั้น เอกภพสัมพัทธ์ที่จะทำให้ข้างหลังเป็นเท็จ ต้องไม่มีส่วนไหนอยู่ในช่วง $(-\infty, -6) \cup (-\frac{2}{3}, \infty) \rightarrow$ ตอบ 2

4. 3

A แบ่งกรณี กรณี $(-\infty, 0)$ ได้ $-3x \leq 2 \rightarrow x \geq -\frac{2}{3} \rightarrow [-\frac{2}{3}, 0)$

กรณี $[0, \frac{5}{2})$ ได้ $-x \leq 2 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow [0, \frac{5}{2})$

กรณี $[\frac{5}{2}, \infty)$ ได้ $3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow [\frac{5}{2}, 4]$ รวมทุกกรณีได้ $A = [-\frac{2}{3}, 4]$

B แบ่งกรณี กรณี $(-\infty, 0)$ ได้ $x^2 + x - 12 < 0 \rightarrow (x + 4)(x - 3) < 0 \rightarrow x \in (-4, 3) \rightarrow (-4, 0)$

กรณี $[0, \infty)$ ได้ $x^2 - x - 12 < 0 \rightarrow (x - 4)(x + 3) < 0 \rightarrow x \in (-3, 4) \rightarrow [0, 4)$

รวมทุกกรณีได้ $B = (-4, 4)$

$A \cap B = [-\frac{2}{3}, 4) \rightarrow$ ก ผิด , $A - B = \{4\} \rightarrow$ ข ถูก

5. 4

หา D_r : เนื่องจาก ผลลัพธ์ ≥ 0 ดังนั้น $\sqrt{12 - |x|} = 3 - \sqrt{y + 1} \leq 3$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง และเนื่องจาก ในรูท ≥ 0 จะได้ $0 \leq 12 - |x| \leq 9$

ลบ 12 แล้วคูณ -1 ได้ $3 \leq |x| \leq 12$ จะได้ $D_r = [-12, -3] \cup [3, 12]$

หา R_r : ทำแบบเดียวกัน จะได้ $\sqrt{y + 1} = 3 - \sqrt{12 - |x|} \leq 3$

และจะได้ $0 \leq y + 1 \leq 9$ จะได้ $R_r = [-1, 8]$

$D_r \cap R_r = [3, 8]$ มี 8 ดังนั้น ก ผิด , $D_r - R_r = [-12, -3] \cup (8, 12]$ มีเลขลบด้วย ดังนั้น ข ผิด

6. 3

ก. $n(A \cap B) = 4 + 5 - 7 = 2 \rightarrow$ มี $2^{2 \times 2} = 16 \rightarrow$ ก ผิด

ข. $n(A - B) = 4 - 2 = 2$, $n(B - A) = 5 - 2 = 3 \rightarrow$ มี $2^{2 \times 3} = 64 \rightarrow$ ข ถูก

7. 1

ก. เป็นวงกลมที่เอียงเฉพาะเส้นภายใน Q_1 กับ Q_3 ลากแนวตั้งตัดไม่เกิน 1 จุด $\rightarrow$ ก. ถูก

ข. หา $f^{-1}(25)$ ให้ $x - 2 = 25$ ได้ $x = 27$ ซัดกับเงื่อนไข $x \leq 0$

ให้ $x^2 = 25$ ได้ $x = \pm 5$ ถ้าจะให้ตรงกับเงื่อนไข $x > 0$ จะได้ $x = 5$ ดังนั้น $f^{-1}(25) = 5$

หา $g(5)$ ให้ $3x - 1 = 5$ ได้ $x = 2$ แทนใน $2x^2 + 3x$ จะได้ 14 $\rightarrow$ ข. ถูก

8. 4

พาราโบลา คือ $(y - 1)^2 = -6\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow F = \left(-\frac{1}{2} - \frac{6}{4}, 1\right) = (-2, 1)$

ลองเอา $(-2, 1)$ แทน จะได้ $28 + 7 \pm (-8) \pm 82 \pm 55 = 0$ ต้องเป็น $28 + 7 + (-8) - 82 + 55 \rightarrow$ ข้อ 4

ถ้าไม่เช็คตัวเลือก ให้วงกลมมี ศก ที่ (a, b) ดังนั้น $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b - 3)^2$

$\rightarrow a^2 + 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 8a + 16 + b^2 - 6b + 9$

$\rightarrow 12a + 4b = 20 \rightarrow 3a + b = 5 \dots(1)$

และจากความชัน จะได้ $\frac{b-3}{a-4} = -\frac{2}{3} \rightarrow 3b - 9 = -2a + 8 \rightarrow 2a + 3b = 17 \dots(2)$

$3(1) - (2) : 7a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{7} \rightarrow b = \frac{41}{7}$ ได้ $r^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7}\right)^2$

ได้สมการวงกลมคือ $\left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7}\right)^2$

จัดรูปได้ $x^2 + y^2 + \frac{4x}{7} - \frac{82y}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{41}{7}\right)^2 - \left(\frac{12}{7}\right)^2 - \left(\frac{34}{7}\right)^2 = 0$

$\rightarrow 7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y - \left(\frac{14 \cdot 10}{7}\right) + \left(\frac{75 \cdot 7}{7}\right) = 0$

$\rightarrow 7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$

9. 1

ก) $\frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} \cdot \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ - 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ} = \frac{1 - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ \rightarrow$ ถูก

ข) $\sqrt{3} \cot 20^\circ = \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$
 $= \frac{2\left(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\sin 40^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 \cos 20^\circ + 1 \rightarrow \text{ถูก}$$

10. 3

$$\text{ใส่ } \tan \text{ ตลอด ได้ } \frac{1-x+2x}{1-(1-x)(2x)} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x(1-x)} \rightarrow 1+x = 2\sqrt{2x(1-x)} \rightarrow 1+2x+x^2 = 8x-8x^2$$

$$\rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

11. 2

$$\left| -\frac{1}{3} \right| < \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right) = f(f(-3))$$

$$|-3| \geq \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-3}\right) = f\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\left| \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f\left(\frac{1}{6}\right) = 6$$

12. 3

$$\text{หลัง } \log \text{ เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น } x > 1 \text{ จะได้ } \frac{2}{x-1} \geq x$$

$$\text{คูณ } x-1 \text{ ทั้งสองข้างได้ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะ } x > 1 \text{ ทำให้ } x-1 \text{ เป็นบวก } \rightarrow 2 \geq x^2 - x$$

$$\rightarrow 0 \geq (x-2)(x+1) \rightarrow x \in [-1, 2] \rightarrow \text{แต่ } x > 1 \text{ ดังนั้น คำตอบคือ } (1, 2]$$

ลองเอา $x = 2$ แทนดู ข้อ 1. ได้ฝั่งขวาติดลบ ไม่จริงแน่นอน ข้อ 2. ได้ $9 > 9$ ไม่จริง ข้อ 3. ได้ $0 \leq 5 \leq 5$ จริง

ข้อ 4. ได้ $8 > 12$ ไม่จริง $\rightarrow$ ตอบข้อ 3

$$\text{หมายเหตุ ถ้าจะแก้ ข้อ 1. อยู่ในรูป } |A| = -A \text{ จะได้ } A \leq 0 \text{ ดังนั้น } x^2 + 2x - 3 \leq 0$$

$$\text{แยกได้ } (x+3)(x-1) \rightarrow [-3, 1]$$

13. 4

$$\text{ได้ } A(B+3I) = 2I \rightarrow 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & x \\ 0 & -2 & y+3 \end{vmatrix} = 2^3 \rightarrow (2)(8y+24+8x) = 8 \rightarrow x+y = -2.5$$

14. 2

จุดตัดอยู่ใกล้กัน ต้องหาทุกจุดตัด ไม่งั้นรูปจะไม่ถูก

$$3x + 4y = 48 \text{ กับ } x + 2y = 22 \text{ ตัดกันที่ } (4, 9)$$

$$x + 2y = 22 \text{ กับ } 3x + 2y = 42 \text{ ตัดกันที่ } (10, 6)$$

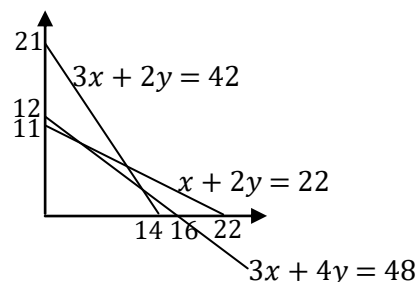
$$3x + 4y = 48 \text{ กับ } 3x + 2y = 42 \text{ ตัดกันที่ } (12, 3)$$

จุดมุม คือ $(0, 0), (0, 11), (4, 9), (12, 3), (14, 0)$

$$\text{ได้ } P = 0, 11a + 66, 13a + 54, 15a + 18, 14a$$

$$\text{จับแต่ละตัว } = 288 \text{ แล้วแก้หา } a \text{ ได้ } a = 18 \text{ จาก } 13a + 54 \text{ กับ } a = 18 \text{ จาก } 15a + 18$$

$$\text{ลองแทน } a = 18 \text{ จะได้ } 288 \text{ มากสุดในบรรดา } 11a + 66, 13a + 54, 15a + 18, 14a$$



15. 4

$$\text{ก. ตั้งฉาก} = \text{ดอทกันได้ } 0 \rightarrow a + 2b + c = 0 \text{ และ } a - b + c = 0 \text{ จับลบกันได้ } b = 0$$

$$\text{แทนกลับไป ได้ } a + c = 0 \text{ ดังนั้น } a + b + c = 0 \rightarrow \text{ก ผิด}$$

ข. $3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)} = 1 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \text{ข ผิด}$

16. 2

จากกฎของ $\sin$ ได้ $\frac{14}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{16-b}{\sin C}$ และจากที่โจทย์ให้ จะได้ $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{5}{3}$ ได้ $\frac{b}{16-b} = \frac{5}{3} \rightarrow 3b = 80 - 5b$
 $\rightarrow b = 10, c = 6 \rightarrow$ กฎของ $\cos$ ได้ $14^2 = 10^2 + 6^2 - 2(10)(6) \cos A \rightarrow \cos A = -\frac{1}{2}$
 มุมในสามเหลี่ยม มี $0^\circ < A < 180^\circ$ ได้ $A = 120^\circ \rightarrow \sin 2A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. 4

จัดรูปได้ $9(x-1)^2 - 16(y-2)^2 = 199 + 9 - 64 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1 \rightarrow V = (-3, 2), (5, 2)$
 ผ่าน $(-3, 2), (5, 2)$ แสดงว่าจุดยอด คือ $(1, ?)$ โจทย์บอกผ่าน $(1, 0)$ แสดงว่าจุดยอดคือ $(1, 0)$
 ได้สมการคือ $(x-1)^2 = 4cy \rightarrow$ แทน $(5, 2)$ ได้ $c = 2 \rightarrow (x-1)^2 = 8y \rightarrow$ ข้อ 4 แทนแล้วไม่จริง

18. 1

$a_n = \frac{1}{4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2n(n+1)} \rightarrow$ เทเลสโคป ได้ $a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \rightarrow$ ได้ผลบวก $= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$

19. 4

$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x(x-1)}-x)(\sqrt{x(x-1)}+x)}{\sqrt{x(x-1)}+x} + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x(x-1)}+x} + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$

20. 2

$y = 3x - 2x^{-3} \rightarrow y' = 3 + 6x^{-4} \rightarrow$ ที่ $(1, 1)$ ชัน 9 $\rightarrow$ ผ่าน $(1, 1)$ ได้ $L: y = 9x - 8$
 แก้หาจุดตัด $x^2 - x = 9x - 8 - 1 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow x = 9, 1 \rightarrow (9, 73), (1, 1)$
 ได้ระยะห่าง $= \sqrt{8^2 + 72^2} = 8\sqrt{1 + 9^2} = 8\sqrt{82}$

21. 1

จากแผนภาพ จะได้ $P(A) + P(B-A) + P(A' \cap B') = 1 \rightarrow P(B-A) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 จาก $P(B') = \frac{5}{8}$ ได้ $P(B) = \frac{3}{8}$ ได้ $P(A \cap B) = P(B) - P(B-A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
 และได้ $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
 ดังนั้น $P(A' \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \rightarrow$ ก ถูก และ $P(A \cup B') = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow$ ข ถูก

22. 3

กรณีลูกแรกออก 1, 3, 5 $\rightarrow$ ลูกหลังต้องออก 4 $\rightarrow$ 3 แบบ
 กรณีลูกแรกออก 2, 6 $\rightarrow$ ลูกหลังต้องออก 2, 4, 6 $\rightarrow$ 6 แบบ
 กรณีลูกแรกออก 4 $\rightarrow$ ลูกหลังออกอะไรก็ได้ $\rightarrow$ 6 แบบ $\rightarrow$ รวม 15 แบบ

23. 1

6 ปีต่อมา ทั้ง 6 คน อายุเฉลี่ยเพิ่มเป็น 40 ปี แต่ s เท่าเดิม = 8

ดังนั้น $\sqrt{\frac{\sum(x_i - 40)^2}{6}} = 8$ จะได้ $\sum(x_i - 40)^2 = 8^2 \cdot 6$

เนื่องจากอีก 2 คนใหม่ที่เพิ่มมา มีอายุ $= \bar{x} = 40$ ดังนั้น $\sum(x_i - 40)^2$ ของทั้ง 8 คน จะยังเท่าเดิม $= 8^2 \cdot 6$

ดังนั้น s ของทั้ง 8 คน คือ $= \sqrt{\frac{8^2 \cdot 6}{8}} = \sqrt{8 \cdot 6} = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{10}$

24. 2

เรียงได้ 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 12, 18 $\rightarrow$ Mode = 4, Med = 4.5, $\bar{x} = \frac{74}{12} = 6.17$

25. 3

ยกกำลัง 6 ตลอดได้ $7^3 \cdot 5, 5^3 \cdot 7, 5^2 \cdot 7, 7^2 \cdot 5$ เอา $5 \cdot 7$ หารตลอด เหลือ $7^2, 5^2, 5, 7$

26. 7

แก้มการ $\binom{a}{2} = 10$ ได้ $n(A) = 5$ กับ $\binom{b}{2} = 6$ ได้ $n(B) = 4$

ย้อนสูตร 2^n สองเที่ยว จะได้ $A \cap B$ มี 2 ตัว ดังนั้น $n(A \cup B) = 5 + 4 - 2 = 7$

27. 20

ข้อนี้ ถ้าจะคิดจริงๆ มีได้หลายคำตอบตอบ คนออกข้อสอบ น่าจะอยากให้เราทำ โดยการเทียบเลขชี้กำลัง

เนื่องจากทางขวา $16^{64} = 2^{256} = 5^0 2^{256}$ ดังนั้น $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ (ปกติทำแบบนี้ไม่ได้นะ --)

จาก $x - 2^A = 0$ จะได้ $x = 2^A$ ยกกำลัง A ทั้งสองข้าง ได้ $x^A = 2^{4^2} \dots (1)$

จาก $A = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y$ ดังนั้น $y = x^A$ แทนใน (1) ได้ $y = 2^{4^2}$ ยกกำลัง A อีก ได้ $y^A = 2^{4^3}$

แต่ $y^A = 256$ ดังนั้น $256 = 2^{4^3}$ ได้ $A^3 = 8$ ได้ $A = 2$

แทน $A = 2$ ใน $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ ได้ $x = 4, y = 16$ ดังนั้น คำตอบ $x + y$ คือ 20

(แต่จริงๆ ข้อนี้มีคำตอบอื่นอีก เช่น $x = 78.46162, y = 78.46162$)

28. 373

$$(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

เอาสมการ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ มายกกำลังสองสองข้าง จะได้ $1 + 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9}$ จะได้ $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{18}{7}$

จะได้ $a^2 + b^2 = 18^2 + 7^2 = 373$

29. 5

$A: \frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = 3 \rightarrow x = \frac{4}{3}, B: x + 1 = 4 + x - 1 - 4\sqrt{x-1} \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow$ ตอบ 5

30. 4

ให้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = k \rightarrow 5^{1+k} + 5^{\frac{4-k^2}{2+k}} = 126 \rightarrow 5^{1+k} + 5^{2-k} = 126 \rightarrow$ คูณ 5^k ตลอด
 ได้ $5(5^{2k}) - 126(5^k) + 25 = 0 \rightarrow (5(5^k) - 1)(5^k - 25) = 0 \rightarrow k = -1, 2$ แต่ k เป็นจำนวน ≥ 0
 ได้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -1, 5 \rightarrow$ ตอบ 4

31. 162

ได้แกนเอก $= 6\sqrt{2} \rightarrow a = 3\sqrt{2} \rightarrow$ ผ่าน $(4, 1)$ แสดงว่า $\frac{4^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \rightarrow b = 3$
 L ชั้น $\frac{1-0}{4-4.5} = -2$ ผ่านจุด $(4, 1)$ ได้ $y = -2x + 9 \rightarrow 2x + y - 9 = 0 \rightarrow d = \frac{|2(0)+0-9|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$
 วงรี มี $c = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3 \rightarrow$ โฟกัส $(3, 0), (-3, 0) \rightarrow |AF_1||AF_2| = (\sqrt{2})(\sqrt{50}) = 10$
 ได้ $d^2|AF_1||AF_2| = \left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 10 = 162$

32. 2

ใส่ $\tan$ ตลอด ได้ $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{1 + \left(\frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x})} = \frac{\frac{\sqrt{x}+1-\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}}{\frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = \frac{1+x}{1+x} = 1$ และ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 1$
 ดังนั้น $\tan \theta + \cot \theta = 1 + 1 = 2$

33. 2

จะได้ $-4x - 12 + 14 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$
 ดังนั้น $\det(((A^t)^{-1})^t)^{-1} = \det A = 1 + 1 = 2$

34. 16

ตั้ง r ออกจากตัวส่วน ได้ $\frac{a_1+a_3}{r(a_1+a_3)} + \frac{a_3+a_5}{r(a_3+a_5)} + \frac{a_5+a_7}{r(a_5+a_7)} + \dots + \frac{a_{2011}+a_{2013}}{r(a_{2011}+a_{2013})} = 2012$
 ฝั่งซ้ายได้ $\frac{1}{r}$ บวกกัน $= \frac{2011-1}{2} + 1 = 1006$ ตัว $\rightarrow r = \frac{1006}{2012} = \frac{1}{2}$
 ให้ $x = 1 + \frac{5}{2} + \frac{12}{2^2} + \frac{22}{2^3} + \dots$ (1) $\rightarrow$ ทหาร 2 จะได้ $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{12}{2^3} + \frac{22}{2^4} + \dots$ (2)
 (1) - (2): $\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \dots$ (3) $\rightarrow$ ทหาร 2 จะได้ $\frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \dots$ (4)
 (3) - (4): $\frac{x}{4} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4 \rightarrow x = 16$

35. 11

$\left| \frac{(z+1)(1+i)}{z(1+i)+5+i} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{5+i}{1+i}} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{6-4i}{2}} \right| = \left| \frac{z+1}{z+3-2i} \right| = \frac{\sqrt{(a+1)^2+b^2}}{\sqrt{(a+3)^2+(b-2)^2}} = 1$
 $\rightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2 \rightarrow 2a+1 = 6a+9-4b+4 \rightarrow b = a+3$
 จาก $|z| = \sqrt{65}$ จะได้ $a^2 + (a+3)^2 = 65 \rightarrow a^2 + 3a - 28 = 0 \rightarrow (a+7)(a-4) = 0$
 z อยู่ Q_1 ได้ $a = 4, b = 7 \rightarrow$ ตอบ $4 + 7 = 11$

36. 205

$$\text{จะได้ } a_5 - a_1 = b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{(b_6 - b_4) + (b_6 - b_1)}{a_4 - a_2} = \frac{2d_b + 5d_b}{2d_a} = \frac{7d_b}{2d_a} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \rightarrow 14^2 + 3^2 = 205$$

37. 3

$$\text{จะได้ } a_n = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ดังนั้น } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)}{2} - 1} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2+n-2}{2}} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{a_2 a_3 a_4 \dots a_n}{(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1) \dots (a_n-1)} = \frac{a_2}{a_2-1} \cdot \frac{a_3}{a_3-1} \cdot \frac{a_4}{a_4-1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_n-1}$$

$$= \frac{(2)(3)}{(4)(1)} \cdot \frac{(3)(4)}{(5)(2)} \cdot \frac{(4)(5)}{(6)(3)} \cdot \frac{(5)(6)}{(7)(4)} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \text{ จะตัดกันได้ เหลือ } \frac{3}{1} \cdot \frac{n}{n+2}$$

ดังนั้น ลิมิตของลำดับ = 3

38. 24

$$\frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}}{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}} = \frac{(2x-8)(2x+\sqrt{4x^2-3x+12})}{4x^2-4x^2+3x-12} = \frac{2(2x+\sqrt{4x^2-3x+12})}{3}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{2(2(4)+\sqrt{4(4)^2-3(4)+12})}{3} = k \cdot \frac{4}{3} \rightarrow k = 8 \rightarrow f(8+1) = \frac{8(9)}{3} = 24$$

39. 354

$$f'(x) = ax^3 + bx, f''(x) = 3ax^2 + b \text{ จาก } f''(0) = 6 \text{ จะได้ } b = 6$$

$$\text{จาก } f'(1) = 18 \text{ จะได้ } a + 6 = 18 \rightarrow a = 12 \rightarrow f(x) = 3x^4 + 3x^2 + c$$

$$\text{จาก } f(2) = f(1) + f(0) \text{ จะได้ } 48 + 12 + c = 3 + 3 + c + c \rightarrow c = 54$$

$$g'(x) = (x^3 + 2x)(12x^3 + 6x) + (3x^2 + 2)(3x^4 + 3x^2 + 54)$$

$$\text{จะได้ } g'(-1) = (-1 - 2)(-12 - 6) + (3 + 2)(3 + 3 + 54) = 354$$

40. 168

$$\text{จะได้ } 5 - 2i \text{ เป็นคำตอบด้วย } \rightarrow f(x) = k(x+1)(x-(5+2i))(x-(5-2i))$$

$$= k(x+1)(x^2 - 10x + 29) \text{ จาก } f(0) = 58 \text{ จะได้ } k(0+1)(0-0+29) = 58 \rightarrow k = 2$$

$$\text{ดังนั้น } f(x) = 2(x+1)(x^2 - 10x + 29) = 2x^3 - 18x^2 + 38x + 58$$

$$\text{จะได้ } f(-x) = -2x^3 - 18x^2 - 38x + 58 \text{ ดังนั้น } f(x) - f(-x) = 4x^3 + 76x$$

$$\text{อินทิเกรตได้ } x^4 + 38x^2 \rightarrow \text{ตอบ } (2^4 + 38(2^2)) - (0 + 0) = 168$$

41. 42

$$= \text{แบบทั้งหมด} - \text{แบบที่ 1 ติดกัน} - \text{แบบที่ 3 ติดกัน} + \text{แบบที่ 1 ติดกันและ 3 ติดกัน}$$

$$= \frac{6!}{2!2!2!} - \frac{5!}{2!2!} - \frac{5!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} = 90 - 30 - 30 + 12 = 42 \text{ แบบ}$$

42. 5927

$$d \text{ มากสุด } 99 \rightarrow c < 594 \rightarrow c \text{ มากสุด } 593 \rightarrow b < 2965 \rightarrow b \text{ มากสุด } 2964 \rightarrow a < 5928$$

43. 396

$$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b$$

$$78a = 12b + 21c \rightarrow 26a = 4b + 7c \leq 36 + 63 = 99 \rightarrow a \leq 3$$

$$a = 3 \text{ ได้ } 4b + 7c = 78 \text{ ให้แทน } b = 9 \text{ ลงมา จนกว่าจะเจอที่หารด้วย 7 ลงตัว ได้ } b = 9, c = 6$$

44. 135

= แบบทั้งหมด - แบบที่ไม่มีคู่ไหนมาจากอำเภอเดียวกัน

$$= \binom{6}{2} \binom{6}{2} - \binom{6}{2} \binom{4}{2} = 225 - 90 = 135$$

45. 200

$$|\bar{b} - \bar{c}| = \sqrt{4^2 + (y-1)^2} = 5 \rightarrow y = 4, -2 \text{ และจาก } \bar{a} \perp \bar{b} \text{ จะได้ } 6x + \frac{12y}{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\text{แต่ } \bar{a} \cdot \bar{c} > 0 \text{ จะได้ } 2x + \frac{12}{5} > 0 \rightarrow x > -\frac{6}{5} \rightarrow \text{เหลือ } x = \frac{4}{5} \text{ และ } y = -2$$

$$5\bar{a} + \bar{b} = (4\bar{i} + 12\bar{j}) + (6\bar{i} - 2\bar{j}) = 10\bar{i} + 10\bar{j} \rightarrow |5\bar{a} + \bar{b}|^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

46. 20

$$\text{จะได้พื้นที่ของนาย ก. คือ } 0.5 - 0.0948 = 0.4052 \rightarrow z_{\eta} = 1.31$$

$$\text{จะได้พื้นที่ของนาย ข. คือ } -(0.5 - 0.1064) = -0.3936 \rightarrow z_{\eta} = -1.24$$

$$z_{\eta} - z_{\eta} = 1.31 - (-1.24) = 2.55 = \frac{x_{\eta} - x_{\eta}}{s} = \frac{51}{s} \rightarrow s = \frac{51}{2.55} = 20$$

47. 12

$$\text{ทำนาย ฟิสิกส์ } (x_i) \text{ จาก คณิตศาสตร์ } (y_i) \text{ ต้องใช้ } \hat{X} = a + bY$$

$$\text{จะได้ } \sum x_i = 54 \text{ และ } \sum y_i = 36 \text{ จะได้ระบบสมการคือ } 54 = 6a + 36b \text{ และ } 428 = 36a + 268b$$

$$\text{ตัดเป็นอย่างต่ำ ได้ } 9 = a + 6b \text{ และ } 107 = 9a + 67b \text{ แทน } a \text{ จากสมการแรก ได้ } 107 = 9(9 - 6b) + 67b$$

$$\rightarrow 26 = 13b \rightarrow b = 2, a = -3 \rightarrow \text{ตอบ } -3 + 2(7.5) = 12$$

48. 10

ค่อยๆ หาไล่จาก y น้อยๆ เริ่มจากกลุ่ม $y = 0$ ใช้เงื่อนไขที่สอง

$$F(0,0) = 1, F(1,0) = 2, F(2,0) = 3, F(3,0) = 4, F(4,0) = 5$$

$$\text{พวกร } y = 1: F(0,1) = F(1,0) = 2$$

$$F(1,1) = F(F(0,1), 0) = F(2, 0) = 3$$

$$F(2,1) = F(F(1,1), 0) = F(3, 0) = 4$$

$$F(3,1) = F(F(2,1), 0) = F(4, 0) = 5$$

$$\text{พวกร } y = 2: F(0,2) = F(1,1) = 3$$

$$F(1,2) = F(F(0,2), 1) = F(3,1) = 5$$

$$\text{ดังนั้น } F(1, 2) + F(3, 1) = 5 + 5 = 10$$

49. 6

จาก (1) แทน $x = 1$ จะได้ $1 * y = (1 * 1)y = y$ เปลี่ยนชื่อ y เป็น x ได้ $1 * x = x$

แทน $1 * x = x$ ในข้อ (2) ได้เป็น $x * x = x$

แทน $x * x = x$ ในข้อ (1) ได้เป็น $x * (xy) = xy$

ถ้าจะหา $5 * 6$ ก็แทน $x = 5$, $y = \frac{6}{5}$ จะได้ $5 * 6 = 5 * \left(5 \cdot \frac{6}{5}\right) = 5 \cdot \frac{6}{5} = 6$

จะเห็นว่า เครื่องหมาย $*$ คือให้ตอบตัวหลังนั่นเอง ดังนั้น $2 * (5 * (5 * 6)) = 6$

50. 4

จะได้ $f(f(x)) = 4 + x(4 - f(x)) \dots(1)$

แทน x ด้วย 0 จะได้ $f(f(0)) = 4 + 0(4 - f(0)) = 4 \dots(2)$

จาก (2) ใส่ f ทั้งสองข้าง ได้ $f(f(f(0))) = f(4) \dots(3)$

แทน x ใน (1) ด้วย $f(0)$ จะได้ $f(f(f(0))) = 4 + f(0)(4 - f(f(0))) \dots(4)$

แต่จาก (2) จะได้ $f(f(0)) = 4$ ดังนั้น $f(f(f(0))) = 4 + f(0)(4 - 4) = 4 \dots(5)$

จาก (3) และ (5) จะได้ $f(4) = 4$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี

คุณ ณัฐสรณ์ เส็งเฝ้า

คุณ Quest Internal

คุณ Ntt Dks

คุณ Kue Kung สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ อาจารย์ Sila Sookrasamee

คุณ Weetip Tanarat

คุณ Nuttamon Vanichsetakul

คุณ Kanyarach Rattanaphan ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร