

PAT 1 (ธ.ค. 54)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

24 - 27 ธันวาคม 2554

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 25 ข้อละ 5 คะแนน

1. กำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ โดยที่ $\sim p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $(p \leftrightarrow r) \rightarrow [(p \vee r) \rightarrow q]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ข. $(p \rightarrow r) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. ก. ถูก ข. ถูก

2. ก. ถูก ข. ผิด

3. ก. ผิด ข. ถูก

4. ก. ผิด ข. ผิด

2. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า $\forall x[P(x)] \wedge \forall x[\sim Q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว ประพจน์ในข้อใดมีค่าความจริงเป็นเท็จ

1. $\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)]$

2. $\exists x[\sim P(x) \vee \sim Q(x)]$

3. $\exists x[P(x) \wedge \sim Q(x)]$

4. $\forall x[P(x) \rightarrow \sim Q(x)]$

3. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ จำนวนสมาชิกของ $P(A)$ เป็นสองเท่าของจำนวนสมาชิกของ $P(B)$
 จำนวนสมาชิกของ $P(A \cap B) = 8$ และจำนวนสมาชิกของ $P(A \cup B) = 256$

จงหาจำนวนสมาชิกของ $P(A - B)$

1. 2 2. 4 3. 8 4. 16

4. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{2x} - 2^{x+2} > 2^{x+\frac{1}{2}} - \sqrt{32}\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง
 จงหาจำนวนสมาชิกที่เป็นจำนวนเต็มของ $\mathbb{R} - A$

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

5. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{\sqrt{5-|3-x|}}\}$ เมื่อ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง จงหาโดเมนของ r

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 8\}$ 2. $\{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x < 3\}$
 3. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$ 4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$

6. ให้ P เป็นจุดบนวงกลม $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 15 = 0$ ที่อยู่ใกล้จุด A(1, 3) มากที่สุด
จงหาระยะระหว่างจุด P กับเส้นตรง $3y - 4x = 15$

1. 3 2. 3.2 3. 3.4 4. 3.5

7. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีสมบัติสอดคล้องกับ $f(x) = \begin{cases} 0 & , x = -1 \\ \frac{x-1}{x+1} & , x \neq -1 \end{cases}$
ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (f \circ f)(x) = \cot 75^\circ\}$ แล้วข้อใดไม่เป็นเซตว่าง
1. $A \cap (-3, -2)$ 2. $A \cap (-4, -3)$ 3. $A \cap (2, 3)$ 4. $A \cap (3, 4)$

8. กำหนดให้ $180^\circ < \theta < 270^\circ$

ถ้า $3(2)^{\sin \theta} \left(\frac{4}{9}\right)^{\cos^2 \theta} = 2(3)^{\sin \theta}$ แล้วจงหาค่าของ $3 \tan^2 \theta - 2 \sin 3\theta$

1. 1 2. 3 3. 7 4. 9

9. กำหนดให้พาราโบลาที่มีจุดยอดที่ $(-3, -2)$ ผ่านจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $5x^2 - 4y^2 - 16y + 4 = 0$ จงหาสมการไดเรคตริกซ์ของพาราโบลา

1. $4y + 15 = 0$ 2. $4y + 9 = 0$ 3. $4x + 9 = 0$ 4. $4x + 15 = 0$

10. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix}$, $a \leq 0$ B เป็นเมทริกซ์มิติ 2×2 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ มิติ 2×2 ถ้า $A^2B = I$ และ $2A^{-1} - 3B = I$ แล้ว จงหาค่าของ $2a + 3b$

1. 4 2. 3 3. 2 4. 1

11. ร้านค้าผลิตถุงแบบ A วันละ x ชิ้น และแบบ B วันละ y ชิ้น โดยที่ $40 \leq 2x + y \leq 60$

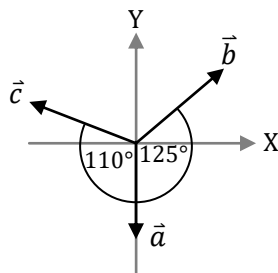
$$105 \leq 2x + 3y \leq 150$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

ถ้าถุง A ขายชิ้นละ 40 บาท ในแต่ละวันขายถุงทั้ง 2 แบบ ได้เงินมากที่สุด 750 บาท แล้ว ขายถุง B ชิ้นละกี่บาท

1. 5 2. 10 3. 15 4. 20

12. จากรูป $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$



ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|---|---|
| 1. $ \vec{a} \operatorname{cosec} 35^\circ = \vec{c} \left(1 + \frac{\cot 20^\circ}{\cot 35^\circ}\right)$ | 2. $ \vec{a} \operatorname{cosec} 20^\circ = \vec{c} \left(1 + \frac{\cot 35^\circ}{\cot 20^\circ}\right)$ |
| 3. $ \vec{a} \operatorname{cosec} 35^\circ = \vec{c} \left(1 + \frac{\tan 20^\circ}{\tan 35^\circ}\right)$ | 4. $ \vec{a} \operatorname{cosec} 20^\circ = \vec{c} \left(1 + \frac{\tan 35^\circ}{\tan 20^\circ}\right)$ |

13. กำหนดให้ A, B, C เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม P เป็นจุดกึ่งกลางของ AC Q อยู่บน AB ทำให้ $AQ : QB = 1 : 2$

ถ้า $\vec{AB} = 6\vec{i} - 3\vec{j}$ และ $\vec{BC} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ จงหา $\vec{PQ}$

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| 1. $-\vec{i} - 2\vec{j}$ | 2. $2\vec{i} + \vec{j}$ | 3. $-2\vec{i} - \vec{j}$ | 4. $\vec{i} + 2\vec{j}$ |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|

14. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(z + 2i)^3 = 8i$ จงหาค่าของ $|z_1| + |z_2| + |z_3|$

- | | | | |
|------|------|--------------------|-------|
| 1. 6 | 2. 8 | 3. $6 + 2\sqrt{3}$ | 4. 24 |
|------|------|--------------------|-------|

15. กำหนดอนุกรมเลขคณิต $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{201}$ ถ้า $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{201} = 303$

แล้วจงหาค่าของ $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{200}$

1. 287 2. 290 3. 297 4. 300

16. กำหนดให้ $c = \arcsin \frac{3}{5} + \operatorname{arccot} \frac{5}{3} - \arctan \frac{8}{19}$

ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\operatorname{arccot} \frac{1}{2x} + \operatorname{arccot} \frac{1}{3x} = c$ จงหาผลคูณของสมาชิกใน A

1. $-\frac{1}{4}$ 2. $\frac{1}{4}$ 3. $-\frac{1}{6}$ 4. $\frac{1}{6}$

17. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

ถ้า N เป็นเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นสัมผัสกราฟของ $f(x)$ ที่จุด $(a, f(a))$, $a > 0$

และ N มีระยะตัดแกน y เท่ากับ $\frac{5}{2}$ หน่วย แล้ว ข้อใดเป็นพิกัดของจุดบนเส้นตรง N

1. $(-2, 7)$ 2. $(-1, 4)$ 3. $(2, -4)$ 4. $(3, -5)$

18. กำหนดให้ $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ และ $C(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC

ถ้ากราฟของ $f(x) = ax^2 + bx + c$ ผ่านจุด $A(0, 0)$, $B(1, 0)$

โดยที่ AC และ BC เป็นเส้นสัมผัสกราฟของ f ที่จุด $A(0, 0)$, $B(1, 0)$ ตามลำดับ

แล้วพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f และเส้นตรง AB มีค่าเท่าใด

1. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 2. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

19. ในการจัดคน 12 คน (มี GAT และ PAT รวมอยู่ด้วย) นั่งรับประทานอาหารรอบโต๊ะกลม จงหาความน่าจะเป็นที่ GAT และ PAT ไม่ได้นั่งติดกัน

1. $\frac{1}{11}$ 2. $\frac{2}{11}$ 3. $\frac{9}{11}$ 4. $\frac{10}{11}$

20. กำหนดให้ A และ B เป็นเหตุการณ์ในปริภูมิตัวอย่าง

ถ้า $P(B - A) = 0.2$, $P(B) = 0.6$ และ $P(A' \cup B) = 0.8$ แล้ว จงหา $P(A \cup B')$

1. 0.2 2. 0.4 3. 0.6 4. 0.8

21. จากตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่
10 - 14	2
15 - 19	5
20 - 24	8
25 - 29	6
30 - 34	4

ถ้า a เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบ และ b เป็น P_{88}

จงหาค่าของ $|a - b|$

1. 8.50

2. 7.75

3. 6.50

4. 6.25

22. กำหนด $\sum_{i=1}^N x_i = 1125$, $N = 45$ $\bar{x}$ เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต และ ความแปรปรวนเท่ากับ 6.25

ถ้า A และ B เป็นนักเรียนของห้องนี้ A ได้ 30 คะแนน มีค่ามาตรฐาน มากกว่าค่ามาตรฐานของ B อยู่ 0.8 แล้ว B ได้กี่คะแนน

1. 26

2. 27

3. 28

4. 30

23. กำหนดให้ $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $(x - 1) * (x + 1) = (x * x) - 1$

2. $x * (y + 2) = (x * y) + (x * 2)$

3. $x * (y * 2) = (x * y) * 2$

4. $x * (x * y) = (x + 1)(x * y) + x$

24. กำหนดให้ S เป็นเซตของ (a, b, c) โดยที่ $a, b, c \in \mathbb{I}^+$ ที่มีสมบัติสอดคล้องกับ

$$a + 2b + 3c \leq 50$$

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} + 1 = 10\left(\frac{b}{c} + \frac{b}{a} + 1\right)$$

จงหาจำนวนสมาชิกของ S

1. 24 2. 26 3. 29 4. 30

25. กำหนดให้ $M(x, y) = \begin{cases} x & , x \geq y \\ y & , y > x \end{cases}$ และ $m(x, y) = -M(-x, -y)$

ถ้า $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$, $c = \sin 54^\circ$ และ $d = \frac{2(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{3\sqrt{2} + \sqrt{3}}$

แล้ว $M(M(c, m(d, b)), m(a, m(c, b)))$ เท่ากับเท่าใด

1. a 2. b 3. c 4. d

ตอนที่ 2 ข้อ 26 - 50 ข้อละ 7 คะแนน

26. กำหนดให้ $A, B, C \neq \emptyset$

$$n(U) = 44, n(B) = 19, n(A \cap B \cap C) = 2, n[(A \cap C) - B] = 3,$$

$$n[A \cap (B \cup C)'] = 6 \text{ และ } n(A' \cap B' \cap C') = 9 \text{ จงหา } n[(A \cup C) - B]$$

27. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{3x+1} - 17(2^{2x}) + 2^{x+3} = 0\}$

และ $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 - 3x - 8| = x^2 + 3x\}$ จงหาผลบวกของสมาชิกใน $A \cup B$

28. ฟังก์ชัน f, g, h มีสมบัติว่า $(f \circ g)(x) = 3x - 14$

$f\left(\frac{x+6}{3}\right) = x - 2$, $h(2x - 1) = 6g(x) + 12$ จงหาค่าของ $h'(0)$

29. กำหนด $f(x) = |1 - 3x|$ และ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $(f \circ f)(x) = x$
 จงหาผลบวกของสมาชิกใน S

30. กำหนดให้ $M(a, b)$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุดตัดไฮเพอร์โบลา $xy = 6$ กับเส้นตรง $x - y - 1 = 0$
จงหาระยะระหว่างจุด M กับเส้นตรง $6x - 8y + 13 = 0$

31. จงหาค่าของ $\frac{\tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}$

32. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix}$ และ $\det(I - A^{-1}) = 0, x > 0$
จงหาค่าของ $\det\left[\frac{1}{2}A^{-1}(3I - 2A^t)\right]$

33. กำหนดจุด $A(3, 0)$, $B(3 + \sqrt{3}, 1)$ และ $C(a, b)$ โดยที่ C อยู่ในจุดภาคที่ 4 $\overrightarrow{AB}$ กับ $\overrightarrow{AC}$ ทำมุมกัน 60° และ $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{3} |\overrightarrow{AB}|$ จงหาค่าของ $a^2 + b^2$

34. กำหนดให้ $z = \left(i - \frac{1}{i+2}\right)^{-1}$ จงหาค่าของ $|16z^2 - 8z + 3 - 8i|$

35. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวน มีมัธยฐาน = ฐานนิยม = 15 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16 ควอไทล์ที่ 1 เท่ากับ 14 และพิสัยเท่ากับ 7 จงหาความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้

36. จงหาค่า $x > 0$ ที่ทำให้ $1 + \frac{6}{1+x} + \frac{15}{(1+x)^2} + \frac{28}{(1+x)^3} + \dots = \frac{27}{4}$

37. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$a_1 = 1 \text{ และ } a_n = (-1)^n \left(\log_n \frac{1}{2} \right) \left(\log_{n-1} \frac{1}{3} \right) \dots \left(\log_2 \frac{1}{n} \right), n > 1$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} \right) \quad \text{จงหาค่า } c \text{ ที่ทำให้ } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + cb_n) = 4$$

38. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f''(x) = 0$ ทุกๆจำนวนจริง

$$\text{ถ้า } f(0) = 23 \text{ และ } f(1) = 103 \text{ แล้ว จงหาค่าของ } \int_0^1 f(x) dx$$

39. ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, 10)$ และมีความชันมากกว่า -1 แต่น้อยกว่า 0

ถ้าพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง L กับแกน x จาก $x = 0$ ถึง $x = 6$ มีค่าเท่ากับ 51 ตารางหน่วย แล้ว จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ถูกปิดล้อมด้วยเส้นตรง L กับแกน x จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$

40. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+8} + \sqrt[3]{x-8}}$

41. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}^+$ และ $\tan \theta = \frac{a}{b}$

ถ้า $\left(\frac{\cos \theta}{a}\right)^4 + \left(\frac{\sin \theta}{b}\right)^4 = \frac{\sin 2\theta}{ab(a^2+b^2)}$ แล้ว จงหาค่าของ $\left(\frac{3a}{b}\right)^3 + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$

42. กำหนดให้ $\frac{1^2+2^2+3^2+\dots+n^2}{1(2)+2(3)+3(4)+\dots+(n-1)n} = \frac{231}{228}$ จงหาค่าของ n

43. กำหนดให้รูปสามเหลี่ยม ABC มีด้านตรงข้ามมุม A, B, C ยาว a, b, c ตามลำดับ
และ $(\sin A - \sin B + \sin C)(\sin A + \sin B + \sin C) = 3 \sin A \sin C$
จงหาค่าของ $\sqrt{3 \operatorname{cosec}^2 B + 3 \sec^2 B}$

44. สุ่มเลือกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 15 มา 5 จำนวน
จงหาจำนวนวิธีที่จะได้จำนวนซึ่งมีผลรวมของทั้ง 5 จำนวนหารด้วย 3 ลงตัว

45. บัตร 8 ใบ ได้แก่ $\boxed{1}, \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{3}, \boxed{4}, \boxed{4}$

เลือกมา 4 ใบ เพื่อสร้างจำนวนเต็ม 4 หลัก จะสร้างได้กี่จำนวน

46. สำหรับ $0 \leq x \leq 2\pi$ กำหนดให้ $A = \{x \mid \log_2(-3 \cos x) = 1 + 2 \log_2 \sin x\}$

และ $B = \{\sec 3x - \cos 2x \mid x \in A\}$ จงหาค่าของผลบวกของสมาชิกทั้งหมดที่อยู่ใน B

47. คะแนนสอบของนักเรียน 500 คน กลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 60 และ 6 คะแนน ตามลำดับ จงหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 51 คะแนน แต่น้อยกว่า 66 คะแนน กำหนด

z	0.5	1.0	1.5	2.0
A	0.191	0.341	0.433	0.477

48. ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีมัธยฐานเท่ากับ 12

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เท่ากับ 8 และ $\sum_{i=1}^N (x_i - 10)^2 = 5440$ จงหาค่าของ N

49. กำหนดให้ $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ สอดคล้องกับสมการ $f(x + y) = f(x) + f(y) + 4xy$
โดยที่ $f(1) = 4$ จงหาค่าของ $f(20)$

50. กำหนดให้ $a(n, m) = a(n, m - 1) + a(n - 1, m - 1)$
 $a(1, 1) = 10$, $a(2, 1) = 5$, $a(4, 1) = 4$ และ $a(4, 4) = 50$ จงหา $a(3, 1)$

เฉลย

1. 4	11. (1.25)	21. 2	31. 8	41. 27.25
2. 1	12. 4	22. 3	32. 5	42. 115
3. 3	13. 3	23. 2	33. 93	43. 4
4. 2	14. 2	24. 1	34. 5	44. 1001
5. 1	15. 4	25. 4	35. 5.6	45. 204
6. 1	16. 4	26. 16	36. 2	46. 1.5
7. 2	17. 2	27. 4	37. 10	47. 387
8. 2	18. 1	28. 3	38. 63	48. 80
9. 4	19. 3	29. 1.35	39. 27.75	49. 840
10. 1	20. 4	30. 2	40. 6	50. 7

แนวคิด

1. 4

ได้ p, q เป็นเท็จ ก. ได้ $\sim r \rightarrow \sim r$ ข. ได้ $T \rightarrow F$

2. 1

 x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ เป็นจริง และ $Q(x)$ เป็นเท็จ

3. 3

 A มีมากกว่า B 1 ตัว, $A \cap B$ มี 3 ตัว, $A \cup B$ มี 8 ตัว $\rightarrow A - B$ มี 3 ตัว, $B - A$ มี 2 ตัว

4. 2

จัดรูปได้ $(2^x - 4)(2^x - \sqrt{2}) > 0$ ได้ $A = (-\infty, \frac{1}{2}) \cup (2, \infty) \rightarrow \{1, 2\}$

5. 1

 $5 - |3 - x| > 0$

6. 1

หาจุดตัดวงกลม กับเส้นตรงที่ผ่าน ศก กับ $(1,3) : x - 2y + 5 = 0 \rightarrow (3,4), (-5,0)$ หรือ ใช้สามเหลี่ยมคล้าย $\frac{CA}{CP}$ ก็ได้

7. 2

 $(f \circ f)(x) = -\frac{1}{x}, x = -\tan 75^\circ = -\tan(45^\circ + 30^\circ) = -(2 + \sqrt{3})$

8. 2

จัดรูปได้ $3^{2\sin^2\theta - \sin\theta - 1} = 2^{2\sin^2\theta - \sin\theta - 1} \rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}, 1 \rightarrow \theta = \pi + \frac{\pi}{6}$

9. 4

จัดรูปได้ $\frac{(y+2)^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$ ได้ $F(0, 1), (0, -5) \rightarrow c = \frac{3}{4} \rightarrow x = -3 - \frac{3}{4}$

10. 1

คูณ A^2 ทางซ้าย : $2A - 3A^2B = A^2 \rightarrow 2 \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ a & b \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ ab & 3a + b^2 \end{bmatrix} \rightarrow a = -1, b = 2$

11. (1.25)

วาดรูป แรกขา ระบบสมการ หาจุดมุม ได้ $(0, 50), (0, 40), (3.75, 32.5), (7.5, 45), (18.75, 22.5)$

ตัด $(0, 40)$ ที่ เพราะ แพ้ $(0, 50)$ อยู่แล้ว และ ตัด $(3.75, 32.5)$ ที่ เพราะ แพ้ $(7.5, 45)$ อยู่แล้ว

จำนวนจุดต้องเป็นจำนวนเต็ม จุด $(3.75, 32.5)$ กับ $(18.75, 22.5)$ จะต้องถูกตัดให้เป็นจำนวนเต็มตอนหลัง

แต่ตอนนี้ จะหา ก่อน ว่าค่ามากที่สุด จะเกิด “แถวๆจุดมุมไหน” จะยอมให้มันเป็นทศนิยมได้ ไปก่อน

$$(0, 50) = (0)(40) + 50B = 50B$$

$$(7.5, 45) = (7.5)(40) + 45B = 300 + 45B$$

$$(18.75, 22.5) = (18.75)(40) + 22.5B = 750 + 22.5B$$

- สมมติให้ค่ามากที่สุด 750 เกิดที่ $(0, 50) \rightarrow 50B = 750$ ได้ $B = 15$

แต่ $B = 15$ จะทำให้ $50B$ แพ้ $300 + 45B$ ขัดแย้งกับที่สมมติให้ ค่ามากที่สุดเกิดที่ $(0, 50)$

- สมมติให้ค่ามากที่สุด 750 เกิดแถวๆ $(7.5, 45) \rightarrow 300 + 45B \sim 750$ ได้ $B \sim 10$

แต่ $B \sim 10$ จะทำให้ $300 + 45B$ แพ้ $750 + 22.5B$ ขัดแย้งกับที่สมมติให้ ค่ามากที่สุดเกิดแถวๆ $(7.5, 45)$

- สมมติให้ค่ามากที่สุด 750 เกิดแถวๆ $(18.75, 22.5) \rightarrow 750 + 22.5B \sim 750$ ได้ $B \sim 0$

จะเห็นว่า ถ้า $B \sim 0$ จะได้ว่า $750 + 22.5B$ ชนะ $300 + 45B$ และ $50B$ จึงไม่ขัดแย้ง

ดังนั้น ค่ามากที่สุด จะเกิด “แถวๆ” $(18.75, 22.5)$

จุดแถวๆ $(18.75, 22.5)$ ที่เป็นจำนวนเต็ม และยังสอดคล้องกับสมการเงื่อนไขทั้งหมด คือ $(18, 24), (18, 23)$

หมายเหตุ $(18, 24)$ อยู่บนเส้น $2x + y = 60$ แล้ว จึงไม่ต้องคิด $(17, ?)$ อีก

ตัด $(18, 23)$ ที่ เพราะ แพ้ $(18, 24)$ อยู่แล้ว สุดท้าย แก้สมการ $(18)(40) + 24B = 750$ ได้ $B = 1.25$

12. 4

แนวราบ : $|\vec{c}| \cos 20^\circ = |\vec{b}| \cos 35^\circ$; แนวตั้ง $|\vec{a}| = |\vec{c}| \sin 20^\circ + |\vec{b}| \sin 35^\circ$

หาร $\sin 20^\circ$ ตลอด แล้วแทน $|\vec{b}| = \frac{|\vec{c}| \cos 20^\circ}{\cos 35^\circ}$

13. 3

$$= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) + \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BC} - \frac{1}{6} \overrightarrow{AB}$$

14. 2

$$8i = 8 \angle 90^\circ \rightarrow z + 2i = 2 \angle 30^\circ, 150^\circ, 270^\circ = \sqrt{3} - i, -\sqrt{3} - i, -2i$$

15. 4

$$a_1 + a_3 + \dots + a_{201} = \frac{101}{2} (a_1 + a_{201}) = 303 \rightarrow a_1 + a_{201} = 6$$

$$\text{อนุกรมเลขคณิต จะมี } a_1 + a_{201} = a_2 + a_{200} \rightarrow a_2 + a_4 + \dots + a_{200} = \frac{100}{2} (a_2 + a_{200}) = \frac{100}{2} (6) = 300$$

16. 4

$$\cot\left(\arcsin\frac{3}{5} + \operatorname{arccot}\frac{5}{3}\right) = \frac{\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3} - 1}{\frac{5}{3} + \frac{4}{3}} = \frac{11}{27} \rightarrow \cot\left(\arcsin\frac{3}{5} + \operatorname{arccot}\frac{5}{3} - \arctan\frac{8}{19}\right) = \frac{\frac{19}{8} \cdot \frac{11}{27} + 1}{\frac{19}{8} - \frac{11}{27}} = \frac{425}{425} = 1$$

ใส่ $\cot$ สองข้าง : $\frac{\frac{1}{6x^2}-1}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3x+2x}} = 1 \rightarrow x = \frac{1}{6}, -1$ แต่ -1 ไม่ได้ เพราะ $\operatorname{arccot}-\frac{1}{2} + \operatorname{arccot}-\frac{1}{3} > 180^\circ$

แต่ $\arcsin\frac{3}{5} + \operatorname{arccot}\frac{5}{3} - \arctan\frac{8}{19}$ ไม่มีทาง $> 180^\circ$

17. 2

$$f \text{ ขึ้น } \frac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}} \rightarrow N \text{ ขึ้น } -\frac{3}{2}a^{\frac{1}{3}} = \frac{f(a)-\frac{5}{2}}{a-0} \rightarrow \dots \rightarrow (3a^{\frac{2}{3}}+5)(a^{\frac{2}{3}}-1) = 0 \rightarrow a = 1 \rightarrow N : y = -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

18. 1

$$\text{ผ่าน } (0, 0), (1, 0) \rightarrow f(x) = a(x)(x-1) = ax^2 - ax \rightarrow f'(x) = 2ax - a \rightarrow f'(0) = \frac{\sqrt{3}}{2} - 0$$

$$\rightarrow a = -\sqrt{3} \rightarrow f(x) = -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x \rightarrow \text{พท} = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

19. 3

$$= 1 - \frac{(2)(11-1)!}{(12-1)!}$$

20. 4

$$A \cup B' \text{ กับ } B - A \text{ เป็นส่วนตรงข้ามกัน} \rightarrow P(A \cup B') = 1 - P(B - A) = 0.8$$

21. 2

$$\text{ลดทอนข้อมูล } \bar{d} = \frac{5}{25} = 0.2 \rightarrow \bar{x} = (0.2)(5) + 22 = 23 ; P_{88} = 29.5 + \left(\frac{\frac{88(25)}{100}-21}{4}\right)(5) = 30.75$$

22. 3

$$s = \sqrt{6.25} = 2.5 \rightarrow \frac{30-\bar{x}}{2.5} - \frac{B-\bar{x}}{2.5} = 0.8$$

23. 2

$$x * (y + 2) = (x + 1)(y + 3) - 1 = xy + 3x + y + 2$$

$$(x * y) + (x * 2) = (x + 1)(y + 1) - 1 + (x + 1)(3) - 1 = xy + 4x + y + 2$$

24. 1

$$\frac{ac+ab+bc}{bc} = 10\left(\frac{ab+bc+ac}{ac}\right) \rightarrow a = 10b \rightarrow 10b + 2b + 3c \leq 50 \rightarrow c \leq 16 - 4b$$

$$= (10, 1, 1.12), (20, 2, 1.8), (30, 3, 1.4)$$

25. 4

$$M = \text{ตัวมาก}, m = \text{ตัวน้อย}; d \sim \frac{2(1.4+(1.4)(1.7))}{3(1.4)+1.7} \sim \frac{7.6}{5.9} \sim 1.2 \rightarrow a > b > d > c$$

$$= M(M(c, m(d, b)), m(a, m(c, b)))$$

$$= M(M(c, d), m(a, c))$$

$$= M(d, c) = d$$

26. 16

$$= 44 - 9 - 19$$

27. 4

$$A: 2^x(2 \cdot 2^x - 1)(2^x - 8) = 0 \rightarrow x = -1, 3$$

$$B: x^2 - 3x - 8 = \pm(x^2 + 3x) \rightarrow x = 2, -2, -\frac{4}{3}$$

28. 3

$$f(x) = 3x - 8; g(x) = x - 2; h(x) = 3x + 3$$

29. 1.35

$$|1 - 3|1 - 3x|| = x \rightarrow 1 - 3|1 - 3x| = \pm x \rightarrow 3|1 - 3x| = 1 \pm x \rightarrow 3 - 9x = \pm(1 \pm x)$$

$$\text{แก้ 4 สมการ + ตรวจคำตอบ ได้ } x = \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}$$

30. 2

$$\text{แก้ระบบสมการ หาจุดตัด } xy = 6 \text{ กับ } x - y - 1 = 0 \text{ จะได้ } x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow \text{ได้จุดตัด } (3, 2), (-2, -3)$$

$$\text{จะได้ } M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \text{ ดังนั้น ระยะ} = \frac{\left|6\left(\frac{1}{2}\right) - 8\left(-\frac{1}{2}\right) + 13\right|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{20}{10} = 2$$

31. 8

$$\begin{aligned} \tan 20^\circ + 4 \sin 20^\circ &= \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 20^\circ + \sin 40^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{\sin 80^\circ + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{2 \sin 60^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ &= -\frac{1}{2}(\cos 60^\circ - \cos 20^\circ) \sin 80^\circ = -\frac{1}{4} \sin 80^\circ + \frac{1}{2} \sin 80^\circ \cos 20^\circ \\ &= -\frac{1}{4} \sin 80^\circ + \frac{1}{4}(\sin 100^\circ + \sin 60^\circ) = -\frac{1}{4} \sin 80^\circ + \frac{1}{4} \sin 100^\circ + \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

32. 5

$$\text{ได้ } \det(A(I - A^{-1})) = \det(A - I) = 0 \text{ ด้วย } \rightarrow (2x - 1)(-2)(-x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}, -1$$

$$\det A = 2 \left(\frac{1}{2}\right)(-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}; \det(3I - 2A^t) = \left(3 - 2\left(2\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right)\left(3 - 2(-1)\right)\left(3 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 20$$

$$\det\left[\frac{1}{2}A^{-1}(3I - 2A^t)\right] = \left(\frac{1}{2^3}\right)\left(\frac{2}{1}\right)(20) = 5$$

33. 93

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, |\overrightarrow{AB}| = 2, |\overrightarrow{AC}| = 4\sqrt{3}, \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2)(4\sqrt{3}) \cos 60^\circ = 4\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} a-3 \\ b \end{bmatrix}, |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(a-3)^2 + b^2} = 4\sqrt{3} \dots (1)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \sqrt{3}(a-3) + b = 4\sqrt{3} \dots (2) \rightarrow (3, 4\sqrt{3}), (9, -2\sqrt{3})$$

34. 5

$$z = \frac{1+3i}{-4} \rightarrow = |-3 + 4i|$$

35. 5.6

แบ่ง 2 กรณี : $a, b, 15, 15, c$ กับ $a, 15, 15, b, c$ กรณีแรกได้ $a + b = 28 \rightarrow c = 22 \rightarrow a = 15$ ขัดแย้ง
กรณีหลังได้ $a = 13 \rightarrow c = 20 \rightarrow b = 17$

36. 2

ให้ $r = \frac{1}{1+x}$ เอาสมการคูณ r ตลอด ลบตัวเอง สองรอบ ได้ $1 + \frac{4r}{1-r} = (1-r)^2 \left(\frac{27}{4}\right)$
กระจาย ได้ $27r^3 - 81r^2 + 93r - 23$ แทน $r = \pm 1, \pm \frac{1}{3}, \dots$ ได้ $r = \frac{1}{3}$

37. 10

$$a_n = (-1)^n (-1)^{n-1} = -1; b_n \text{ ใช้เทเลโลคป} \rightarrow \frac{k}{(k^2-k+1)(k^2+k+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2-k+1} - \frac{1}{k^2+k+1} \right) \rightarrow = \frac{1}{2}$$

38. 63

$$f(x) = 80x + 23 \rightarrow (40)(1)^2 + 23(1)$$

39. 27.75

$$L: y = mx + 10 \rightarrow \frac{m}{2}(6^2) + 10(6) = 51 \rightarrow m = -\frac{1}{2} \rightarrow \text{พหุ} = -\frac{1}{4}(3^2) + 10(3)$$

40. 6

$$\text{คูณเศษส่วนด้วย } (x+8)^{\frac{2}{3}} - (x+8)^{\frac{1}{3}}(x-8)^{\frac{1}{3}} + (x-8)^{\frac{2}{3}}$$

41. 27.25

$$\text{แทน } \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ ได้ } \left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{a}\right)^4 = 2 \rightarrow \frac{a}{b} = 1$$

42. 115

$$\text{เศษ} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}; \text{ส่วนเต็ม } (0)(1) \text{ ให้ครบ } n \text{ ตัว} = \sum_{i=1}^n (i-1)i = \sum i^2 - \sum i = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{คูณ } \frac{6}{n(n+1)} \text{ ทั้งเศษส่วน} \rightarrow \frac{2n+1}{2n+1-3} = \frac{2n+1}{2n-2} = \frac{231}{223} \rightarrow n = 115$$

43. 4

$$\text{แทน } \sin A = \frac{a \sin B}{b}, \sin C = \frac{c \sin B}{b} \text{ แล้วคูณตลอดด้วย } \frac{b^2}{\sin^2 B} \text{ ได้ } (a-b+c)(a+b+c) = 3ac$$

$$\text{กระจาย จัดรูป ได้ } b^2 = a^2 + c^2 - ac \text{ แต่ } b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \text{ ได้ } \cos B = \frac{1}{2}$$

44. 1001

$$1-15 \text{ มีตัวหารด้วย 3 เหลือเศษ } 0, 1, 2 \text{ อย่างละ 5 ตัว} \rightarrow \text{แบ่ง 7 กรณี}$$

$$= \binom{5}{5}\binom{5}{0}\binom{5}{0} + \binom{5}{3}\binom{5}{1}\binom{5}{1} + \binom{5}{2}\binom{5}{3}\binom{5}{0} + \binom{5}{2}\binom{5}{0}\binom{5}{3} + \binom{5}{1}\binom{5}{2}\binom{5}{2} + \binom{5}{0}\binom{5}{4}\binom{5}{1} + \binom{5}{0}\binom{5}{1}\binom{5}{4}$$

45. 204

$$\text{แบ่ง 3 กรณี : ซ้ำสองคู่, ซ้ำ 1 ต่าง 2, ต่างหมด} = \binom{4}{2} \frac{4!}{2!2!} + \binom{4}{1}\binom{3}{2} \frac{4!}{2!} + \binom{4}{4}4!$$

46. 1.5

$$\log_2(-3 \cos x) = \log_2 2 + \log_2 \sin^2 x \rightarrow -3 \cos x = 2 \sin^2 x = 2(1 - \cos^2 x) \rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \text{X}$$

$$\text{หลัง } \log \text{ ต้องเป็นบวก} \rightarrow x \text{ อยู่ } Q_2 = \frac{2\pi}{3} \rightarrow = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)$$

47. 387

$$51 \text{ มี } z = -1.5, 66 \text{ มี } z = 1 \rightarrow \text{พท} = 0.433 + 0.341 = 0.774 = 387$$

48. 80

แจกแจงปกติ จะมี $\bar{x}$ = มัธยฐาน = ฐานนิยม ดังนั้น $\bar{x} = 12$ ด้วย

$$\text{จากสูตร } s = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2} \text{ จะได้ } \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{N} - 12^2} = 8 \text{ จัดรูป จะได้ } \sum x_i^2 = 208N$$

$$\text{กระจาย } \sum (x_i - 10)^2 \text{ ได้ } \sum (x_i^2 - 20x_i + 100) = \sum x_i^2 - 20 \sum x_i + \sum 100 \dots (*)$$

$$\text{จาก } \bar{x} = 12 \text{ จะได้ } \frac{\sum x_i}{N} = 12 \text{ ดังนั้น } \sum x_i = 12N \text{ และ } \sum 100 \text{ คือ } 100 \text{ บวกกัน } N \text{ ครั้ง จะเท่ากับ } 100N$$

$$\text{แทนค่าต่างๆใน } (*) \text{ จะได้ } \begin{array}{ccc} \sum (x_i - 10)^2 & = & \sum x_i^2 - 20 \sum x_i + \sum 100 \\ 5440 & = & 208N - 20(12N) + 100N \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น } N = \frac{5440}{68} = 80$$

49. 840

$$\text{แทน } (1, 1) \text{ ได้ } f(2) = 12 \rightarrow \text{แทน } (2, 2) \text{ ได้ } f(4) = 40 \rightarrow \text{แทน } (4, 4) \text{ ได้ } f(8) = 144 \rightarrow \text{แทน } (8, 8) \text{ ได้ } f(16) = 544 \rightarrow \text{แทน } (4, 16) \text{ ได้ } f(20) = 840$$

50. 7

$$a(n, m) = a(n, m-1) + a(n-1, m-1) \text{ แปลว่า ช่องทางขวา} = 2 \text{ ช่องซ้ายบวกกัน}$$

$n \backslash m$	1	2	3	4
1	10			
2	5	15		
3	x	$x+5$	$x+20$	
4	4	$x+4$	$2x+9$	50

$$x + 20 + 2x + 9 = 50$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Anop CiCi

และ คุณ Prapapen Dolbundalchok ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเฉลยครับ