วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ (ม.ค. 58)

วันอาทิตย์ที่ 18 มกราคม 2558 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้ $P(x) = ax^2 + 9x - 5$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 6 แล้วรากที่เป็นจำนวนจริงบวกของสมการ $P(x) = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. กำหนดให้ $m, n \in \{100, 101, \dots, 200\}$
ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ m, n คือ 35 และ 525 ตามลำดับ แล้ว $m + n$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. วงรีรูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่ $F_1(2, 1)$ และ $F_2(2, 9)$
ถ้า P เป็นจุดบนวงรีโดยที่ $PF_1 + PF_2 = 10$ แล้วความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$
ถ้า $\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{3}$ และ $|\bar{u} \times \bar{v}| = 1$ แล้ว $\sin^2 \theta$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. จำนวนจริง x ที่สอดคล้องกับสมการ $\log_4 x = \log_9 3 + \log_3 9$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่ง $A = [a_{ij}]$ และ $\det(A) = 10$
ถ้า $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A + B)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ถ้า $2, 5, 8, 10, 12, 15, 18$ เป็นข้อมูลของกลุ่มตัวอย่างหนึ่งของประชากร
ความแปรปรวนของตัวอย่างนี้เท่ากับเท่าใด

8. ร้านขายไอศกรีมแห่งหนึ่ง มีไอศกรีม 10 รส โดยมีรสกะทิเป็น 1 ใน 10 รส ในวันเด็ก ร้านนี้ได้แจกไอศกรีมฟรีให้แก่เด็กคนละ 1 ถ้วย ถ้วยละ 2 รส ถ้าสุ่มเด็กที่ได้รับแจกไอศกรีมมาหนึ่งคน ความน่าจะเป็นที่ถ้วยไอศกรีมของเด็กคนนี้ไม่มีรสกะทิเท่ากับเท่าใด

9. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + 3ax^2 - 9a^2x + 5a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวก
ถ้า f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับ 0 แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

10. ถ้า a_n เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} a_n$ หาค่าได้ และ $a_n = \sqrt{\frac{1+2n}{n} + a_n}$
แล้ว $\lim_{n\to\infty} a_n$ เท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. เศษเหลือที่ได้จากการหาร $(995)^{16} + (996)^8 + (997)^4 + (998)^2 + 999$ ด้วย 7 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1
2. 2
3. 4
4. 5
5. 6

12. จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับอสมการ $\big||100+x|-|100-x|\big| < 100$
มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 49 2. 50 3. 51
4. 99 5. 100

13. ถ้า A และ B เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $A = \{\, z \mid z^{12} = 1 \,\}$
และ $B = \{\, z \mid z^{18} - z^{9} - 2 = 0 \,\}$
แล้ว จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3
4. 6 5. 8

14. ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใน 3 มิติ โดย $(\bar{u}+\bar{v}) \times (\bar{u}-\bar{v}) = 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + \sqrt{5}\bar{k}$
แล้ว $|3\bar{u} \times 3\bar{v}|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{15}{4}$ 2. $\frac{15}{2}$ 3. $\frac{25}{3}$
4. $\frac{35}{4}$ 5. $\frac{45}{2}$

15. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{2}=1$ และ P เป็นจุดบน H พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ผลคูณของความชันของเส้นกำกับทั้งสองของ H มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{4}$

(ข) $(PF_1-PF_2)^2=32$ เมื่อ $F_1=(\sqrt{10},0)$ และ $F_2=(-\sqrt{10},0)$

(ค) จุด P ไม่เป็นสมาชิกของเซต $\{(x,y)\mid x>0$ และ $y>\frac{x}{2}\}$

(ง) ผลคูณของระยะทางจาก P ไปยังเส้นกำกับทั้งสองของ H มีค่าคงตัวเท่ากับ $\frac{8}{5}$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้าน AB และ AC ยาวเท่ากับ 3 หน่วย และ 5 หน่วยตามลำดับ ถ้า $\arccos\left(-\frac{1}{15}\right)=B+C$ แล้ว ด้าน BC ยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $4\sqrt{2}$ หน่วย
2. $4\sqrt{3}$ หน่วย
3. $4\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5\sqrt{2}$ หน่วย
5. $5\sqrt{3}$ หน่วย

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^{(\log_2 x+1)} = 64$

1. $\frac{33}{8}$ 2. $\frac{31}{4}$ 3. $\frac{33}{4}$
4. 4 5. 8

18. ในระบบสมการเชิงเส้นที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร x, y, z

ถ้าหา z ได้เท่ากับ $\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}$ จากการใช้กฎของคราเมอร์ แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -4 2. -2 3. 2
4. 4 5. 6

19. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์จตุรัส และ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ โดยที่ A, B, C และ I มีมิติเท่ากัน พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $AB = AC$ แล้ว $B = C$

ข. ถ้า $A^2 = I$ แล้ว $A^{-1} = A$

ค. ถ้า $AB = I$ และ $CA = I$ แล้ว $B = C$

ง. ถ้า $AB = I$ แล้ว $\mathrm{adj}(B) = [\det(A)]A$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

20. จำนวนนับที่มีค่ามากกว่าเจ็ดแสนที่ได้จากการนำเลขโดด $0\ ,\ 7\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 8\ ,\ 9$ มาจัดเรียง มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120
2. 150
3. 250
4. 350
5. 550

21. คะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ โดยมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน ถ้านักเรียนที่สอบได้น้อยกว่า 40 คะแนน มี 33% แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนที่สอบได้ระหว่าง 50 และ 60 คะแนนเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

z	0.44	0.56	1.44	1.56	1.7	2.44
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.17	0.2123	0.4251	0.4406	0.4554	0.4927

1. 6.76%
2. 22.83%
3. 25.51%
4. 35.51%
5. 45.83%

22. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x\ ,\ 3.5\ ,\ 12\ ,\ 7\ ,\ 8.5\ ,\ 8\ ,\ 5$ โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับมัธยฐานและไม่มีฐานนิยม ถ้า R คือพิสัยของข้อมูลชุดนี้ แล้ว $R - x$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{7}{6}$
2. $\frac{5}{2}$
3. 3
4. $\frac{7}{2}$
5. 4

23. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งเส้นตรง $2y = 3x + 2$ สัมผัสกราฟของ $y = f(x)$ ที่จุด $(0, 1)$
แล้ว $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{3}{2}$
2. $-\frac{1}{2}$
3. $\frac{3}{2}$
4. 2
5. $\frac{5}{2}$

24. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยที่ $a_1 = 4$, $a_2 = 7$, $a_n = 121$
ถ้า $f(x) = (x + a_1 x) + (x^2 + a_2 x) + \dots + (x^n + a_n x)$ แล้ว $f'(-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2400
2. 2420
3. 2440
4. 2460
5. 2480

25. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{20}$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วมเท่ากับ $\frac{2}{21}$
แล้วผลรวม $\frac{1}{21(a_{20}-a_1)} + \frac{1}{19(a_{19}-a_2)} + \frac{1}{17(a_{18}-a_3)} + \dots + \frac{1}{5(a_{12}-a_9)} + \frac{1}{3(a_{11}-a_{10})}$
มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{5}$
2. $\frac{1}{2}$
3. 1
4. 2
5. 5

26. กำหนดให้ $S = \left\{ \left[a_{ij}\right]_{3\times 3} \,\middle|\, a_{ij} \in \{-1, 1\} \right\}$ ถ้าสุ่มหยิบเมทริกซ์จากเซต S มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ซึ่งผลรวมของสมาชิกทั้งหมดเท่ากับ 3 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{23}{2^9}$
2. $\frac{21}{2^8}$
3. $\frac{21}{2^7}$
4. $\frac{19}{2^6}$
5. $\frac{23}{2^6}$

27. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $A = \{ z \mid \mathrm{Im}(z - 2\mathrm{i}) + [\mathrm{Re}(z)]^2 \le 0 \}$

และ $B = \{ z \mid \mathrm{Im}(z) \ge 0 \}$

พื้นที่ของบริเวณ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ ตารางหน่วย
2. $\frac{10\sqrt{2}}{3}$ ตารางหน่วย
3. $\frac{11\sqrt{2}}{3}$ ตารางหน่วย
4. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย
5. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย

28. ถ้า $x - 1$ หารพหุนาม $P(x)$ แล้วเหลือเศษ -1 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $x - 1$ หาร $-P(x)$ เหลือเศษ -1

ข. $x - 1$ หาร $P^2(x)$ เหลือเศษ 1

ค. $x + 1$ หาร $P(-x)$ เหลือเศษ 1

ง. $x + 1$ หาร $-P(-x)$ เหลือเศษ 1

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

29. กำหนดให้ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมี r เป็นอัตราส่วนร่วม เมื่อ $0 < r < 1$

ถ้า $G_n = (a_1 a_2 \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} G_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{a_1}{1-r^{\frac{1}{2}}}$
2. $\frac{a_1}{\sqrt{1-r}}$
3. $\frac{a_1}{1-r^2}$
4. $\frac{a_1}{\sqrt{1-r^{\frac{1}{2}}}}$
5. $\frac{a_1}{\sqrt{1-r^2}}$

30. ถ้า $S_n = \sum_{k=1}^{n} i^k$ เมื่อ i แทนจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $i^2 = -1$

แล้วจำนวนนับ $n \in \{10, 11, \ldots, 100\}$ ที่ทำให้ $S_n = -1$ มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 21
2. 23
3. 25
4. 31
5. 33

เฉลย

1. 0.5	7. 31	13. 3	19. 3	25. 5
2. 280	8. 0.8	14. 5	20. 2	26. 3
3. 0.8	9. 1	15. 5	21. 2	27. 1
4. 0.25	10. 2	16. 1	22. 1	28. 3
5. 32	11. 2	17. 1	23. 3	29. 1
6. 20	12. 4	18. 4	24. 5	30. 2

แนวคิด

1. 0.5

จากทฤษฎีเศษ $x-1$ หาร $P(x)$ จะเหลือเศษ $P(1)$ ดังนั้น $P(1)=6$

แต่ $P(1) = a(1^2)+9(1)-5 = a+4$ ดังนั้น จะได้ $a+4=6$ → จะได้ $a=2$

แทนค่า a ในสมการ $P(x)=0$ จะได้ $2x^2+9x-5=0$

$$(2x-1)(x+5)=0$$

$$x = \frac{1}{2}, -5$$

จะได้คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวก คือ $\frac{1}{2}$

2. 280

เนื่องจาก ห.ร.ม. $= 35 = 5\cdot 7$ ดังนั้น m และ n ต้องมีทั้ง 5 และ 7 เป็นตัวประกอบ

เนื่องจาก ค.ร.น. $= 525 = 3\cdot 5^2\cdot 7$ → มี 3 กับ 5 เกินมาจาก ห.ร.ม. อย่างละตัว

ต้องหาว่า 3 กับ 5 ที่เกินมานี้ จะไปอยู่ที่ m หรือ n

เนื่องจาก m และ n มีทั้ง 5 และ 7 เป็นตัวประกอบอยู่แล้ว ถ้า 3 และ 5 ที่เกินมา ไปอยู่ที่ m ทั้งคู่ หรือ อยู่ที่ n ทั้งคู่ จะทำให้ค่า $(5\cdot 7)(3\cdot 5)$ เกิน 200 ดังนั้น 3 และ 5 ที่เกินมา ต้องแยกไปอยู่ที่ m หนึ่งตัว และอยู่ที่ n หนึ่งตัว

ดังนั้น $m+n = (5\cdot 7)(3)+(5\cdot 7)(5) = (5\cdot 7)(3+5) = (35)(8) = 280$

3. 0.8

จากสมบัติวงรี จะได้ $\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=2a$ ดังนั้น $2a=10$ → $a=5$

จากพิกัด $\mathrm{F_1}(2, 1)$ และ $\mathrm{F_2}(2, 9)$ จะได้ $\mathrm{F_1F_2} = 9 - 1 = 8$

จาก $\mathrm{F_1F_2}=2c$ ดังนั้น $2c=8$ → $c=4$

ดังนั้น ความเยื้องศูนย์กลาง $= \frac{c}{a} = \frac{4}{5} = 0.8$

4. 0.25

จากสูตร จะได้ $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta = \sqrt{3}$ ...(1)

$|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta = 1$ ...(2)

$(2)\div(1)$ จะได้ $\frac{|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta}{|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ → $\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจาก มุมระหว่างเวกเตอร์ จะอยู่ในช่วง 0° ถึง $180°$ จะได้ $\theta = 30°$

ดังนั้น $\sin^2\theta = (\sin 30°)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0.25$

5. 32

หาค่าฝั่งขวา จะได้ $= \log_{3^2} 3 + \log_3 3^2 = \frac{1}{2}\log_3 3 + 2\log_3 3 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

จะได้สมการคือ $\log_4 x = \frac{5}{2}$ → จากสมบัติ log จะได้ $x = 4^{5/2} = \sqrt{4^5} = \sqrt{4}^5 = 2^5 = 32$

6. 20

จะได้ $A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + 2a_{11} & a_{22} + 2a_{12} & a_{23} + 2a_{13} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า $A + B$ คือเมทริกซ์ที่ได้จากการนำ A มาดำเนินการตามแถว $R_2 + 2R_1$ และ $2R_3$ นั่นเอง

การดำเนินการ $R_2 + 2R_1$ จะไม่ทำให้ det เปลี่ยน แต่ การดำเนินการ $2R_3$ จะทำให้ค่า det เพิ่มเป็น 2 เท่า

ดังนั้น $\det(A + B) = 2\det A = 2(10) = 20$

7. 31

หากลุ่มตัวอย่าง ต้องหารด้วย $N - 1$ จะได้ ความแปรปรวน $= \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N-1}$

หา $\bar{x}$ ก่อน จะได้ $\bar{x} = \frac{2+5+8+10+12+15+18}{7} = \frac{70}{7} = 10$

ดังนั้น ความแปรปรวน $= \frac{(2-10)^2+(5-10)^2+(8-10)^2+(10-10)^2+(12-10)^2+(15-10)^2+(18-10)^2}{7-1}$

$= \frac{64+25+4+0+4+25+64}{6} = \frac{186}{6} = 31$

8. 0.8

มี 10 รส ได้คนละ 2 รส ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= \binom{10}{2} = \frac{(10)(9)}{2} = 45$ แบบ

จำนวนแบบที่<u>ไม่มี</u>รสกะทิ = เลือก 2 รส จาก 9 รสที่เหลือ $= \binom{9}{2} = \frac{(9)(8)}{2} = 36$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่<u>ไม่มี</u>รสกะทิ $= \frac{36}{45} = \frac{4}{5} = 0.8$

9. 1

จุด<u>ต่ำ</u>สุดสัมพัทธ์ จะมีสมบัติคือ $f'(x) = 0$ และ $f''(x) > 0$

จาก $f(x)$ ที่โจทย์ให้ จะได้ $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2 = 0$

$$x^2 + 2ax - 3a^2 = 0$$
$$(x + 3a)(x - a) = 0$$
$$x = -3a\,,\ a$$

ถัดมา เช็คเงื่อนไข $f''(x) > 0$

จาก $f'(x) = 3x^2 + 6ax - 9a^2$ ดิฟต่อ จะได้ $f''(x) = 6x + 6a$

ดังนั้น $f''(-3a) = 6(-3a) + 6a = -18a + 6a = -12a < 0$ ใช้<u>ไม่ได้</u> (เพราะ a เป็นบวก)

$f''(a) = 6a + 6a = 12a > 0$ ใช้ได้

ดังนั้น จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดที่ $x = a$

แต่ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ $= 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a^3 + 3a(a^2) - 9a^2(a) + 5a &= 0 \\ a^3 + 3a^3 - 9a^3 + 5a &= 0 \\ -5a^3 + 5a &= 0 \\ -5a(a^2-1) &= 0 \\ -5a(a-1)(a+1) &= 0 \\ a &= 0\,,\ 1\,,\ -1 \end{aligned}$$

แต่ a เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $a = 1$

10. 2

ใส่ $\lim\limits_{n\to\infty}$ ตลอด จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+2n}{n} + a_n} = \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2n}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} a_n}$

ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ จะได้ $A = \sqrt{2 + A}$

ยกกำลังสอง และแก้สมการ จะได้

$$\begin{aligned} A^2 &= 2 + A \\ A^2 - A - 2 &= 0 \\ (A-2)(A+1) &= 0 \\ A &= 2\,,\ -1 \end{aligned}$$

จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\,,\ -1$

แต่ a_n เป็นลำดับของจำนวนบวก ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ต้องเป็นบวกด้วย ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

11. 2

เนื่องจาก การหาเศษ สามารถกระจายเข้าไปทำก่อนการ บวก ลบ คูณ หาร และ ฐานของการยกกำลังได้

ดังนั้น เศษของ $(995)^{16} + (996)^8 + (997)^4 + (998)^2 + 999$

จะเท่ากับ (เศษของ $995)^{16}$ + (เศษของ $996)^8$ + (เศษของ $997)^4$ + (เศษของ $998)^2$ + เศษของ 999

เนื่องจาก 995 หารด้วย 7 เหลือเศษ 1 ดังนั้นเศษ $= 1^{16} + 2^8 + 3^4 + 4^2 + 5$

$= 1 + 256 + 81 + 16 + 5 = 359 \rightarrow$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 2

12. 4

จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายภายในค่าสัมบูรณ์ แล้วใช้สมบัติ |บวกหรือศูนย์| = เท่าเดิม

|ลบ| = เปลี่ยนเป็นบวก โดยการคูณลบเข้าไป

$100 + x$ จะเปลี่ยนค่าบวกลบที่ $x = -100$

$100 - x$ จะเปลี่ยนค่าบวกลบที่ $x = 100$

ดังนั้น ต้องแบ่งกรณีที่ -100 และ 100 ดังรูป

$100 + x$	ลบ	บวก	บวก
$100 - x$	บวก	บวก	ลบ
	-100		100

<u>กรณี</u> $x < -100$: $|100 + x| = $ |ลบ| = เปลี่ยนเป็นบวก โดยการคูณลบเข้าไป $= -(100 + x)$

$|100 - x| = $ |บวก| = เท่าเดิม $= 100 - x$

จะได้อสมการคือ

$$\begin{aligned} |-(100 + x) - (100 - x)| &< 100 \\ |-100 - x - 100 + x| &< 100 \\ |-200| &< 100 \\ 200 &< 100 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ เป็นเท็จเสมอ $\rightarrow$ ไม่มีคำตอบ

<u>กรณี</u> $-100 \le x \le 100$: $|100 + x| = $ |บวกหรือศูนย์| = เท่าเดิม $= 100 + x$

$|100 - x| = $ |บวกหรือศูนย์| = เท่าเดิม $= 100 - x$

จะได้อสมการคือ $|(100+x)-(100-x)| < 100$

$| \ 100+x \ -100+x| < 100$

$| \ 2x \ | < 100$

$-100 < 2x < 100$

$-50 < x < 50$

จะได้ $x = -49, -48, -47, \dots, -1, 0, 1, \dots, 47, 48, 49$ มีทั้งหมด $49+1+49 = 99$ ตัว

<u>กรณี</u> $x > 100$: $|100+x| = |$บวก$| =$ เท่าเดิม $= 100+x$

$|100-x| = |$ลบ$| =$ เปลี่ยนเป็นบวก โดยการคูณลบเข้าไป $= -(100-x)$

จะได้อสมการคือ $\left|(100+x)-\left(-(100-x)\right)\right| < 100$

$| \ 100+x \ +100-x| < 100$

$| \ 200 \ | < 100$

$200 < 100$ → เป็นเท็จเสมอ → ไม่มีคำตอบ

รวมทั้งสามกรณี จะมีคำตอบทั้งหมด 99 ตัว

13. 3

จะหาจำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ ต้องหาว่า A กับ B ซ้ำกันกี่ตัว

หา A ได้โดยการหารากที่ 12 ของ 1 → แปลง 1 เป็นรูปเชิงขั้ว ได้ $1 \text{ cis } 0°$

→ ได้รากตัวแรก คือ $\sqrt[12]{1} \text{ cis } \frac{0°}{12} = 1 \text{ cis } 0°$

→ รากที่เหลืออีก 11 ตัว จะได้จากการเพิ่มมุมของรากตัวแรกไปทีละ $\frac{360°}{12} = 30°$

จะได้ $A = \{1 \text{ cis } 0°, 1 \text{ cis } 30°, 1 \text{ cis } 60°, \dots, 1 \text{ cis } 330°\}$ (มุมจะหารด้วย 30 ลงตัว)

หา B ต้องแยกตัวประกอบ จะได้ $(z^9-2)(z^9+1) = 0$

$z^9 = 2, -1$

จะเห็นว่า B ประกอบด้วย รากที่ 9 ของ 2 กับ รากที่ 9 ของ -1 นั่นเอง

รากที่ 9 ของ -1 อาจจะซ้ำกับ A ได้ แต่รากที่ 9 ของ 2 จะอยู่ในรูป $\sqrt[9]{2} \text{ cis } \theta$ จะไม่มีทางซ้ำ A ได้ (เพราะ A อยู่ในรูป $1 \text{ cis } \theta$) ถ้าหารากที่ 9 ของ -1 จะได้ → แปลง -1 เป็นรูปเชิงขั้ว ได้ $1 \text{ cis } 180°$

→ ได้รากตัวแรก คือ $\sqrt[9]{1} \text{ cis } \frac{180°}{9} = 1 \text{ cis } 20°$

→ รากที่เหลืออีก 8 ตัว จะได้จากการเพิ่มมุมไปทีละ $\frac{360°}{9} = 40°$

จะได้ $1 \text{ cis } 20°, 1 \text{ cis } 60°, 1 \text{ cis } 100°, 1 \text{ cis } 140°, 1 \text{ cis } 180°, 1 \text{ cis } 220°, 1 \text{ cis } 260°, 1 \text{ cis } 300°, 1 \text{ cis } 340°$ → หาตัวซ้ำกับ A (มุมหารด้วย 30 ลงตัว) จะมี $1 \text{ cis } 60°, 1 \text{ cis } 180°, 1 \text{ cis } 300°$ ทั้งหมด 3 ตัว

14. 5

× จะกระจายในการบวกลบได้ ดังนั้น $(\bar{u}+\bar{v}) \times (\bar{u}-\bar{v})$

$= (\bar{u}\times\bar{u}) - (\bar{u}\times\bar{v}) + (\bar{v}\times\bar{u}) - (\bar{v}\times\bar{v})$

$= \bar{0} - (\bar{u}\times\bar{v}) - (\bar{u}\times\bar{v}) - \bar{0}$

$= -2(\bar{u}\times\bar{v})$

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{u}\times\bar{u} &= \bar{0} \\ \bar{v}\times\bar{u} &= -(\bar{u}\times\bar{v}) \end{aligned}}$$

ดังนั้น $-2(\bar{u}\times\bar{v}) = 2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + \sqrt{5}\bar{k}$

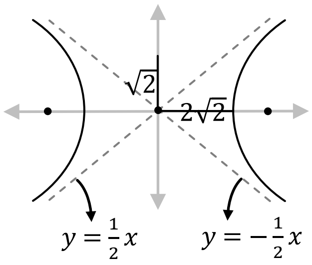
$|-2(\bar{u}\times\bar{v})| = |2\bar{\imath} - 4\bar{\jmath} + \sqrt{5}\bar{k}|$

$2|\bar{u}\times\bar{v}| = \sqrt{2^2+(-4)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2} = \sqrt{4+16+5} = \sqrt{25} = 5$

$|\bar{u}\times\bar{v}| = \frac{5}{2}$

ดังนั้น $|3\bar{u} \times 3\bar{v}| = |(3)(3)(\bar{u} \times \bar{v})| = 9|\bar{u} \times \bar{v}| = 9\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{45}{2}$

15. 5



สมการอยู่ในรูป $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ → เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และ $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ และ $b = \sqrt{2}$

วาดได้ดังรูป

(ก) จะได้สมการเส้นกำกับ คือ $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$ → $\frac{x}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{y}{\sqrt{2}}$

ตัด $\sqrt{2}$ + ย้ายข้าง จัดรูปสมการเส้นตรง จะได้ $y = \pm\frac{1}{2}x$

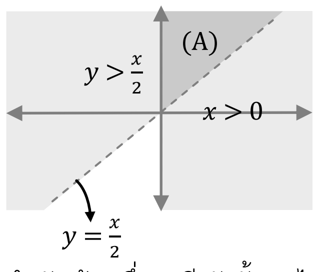
ดังนั้น ความชันของเส้นกำกับ คือ $\frac{1}{2}$ และ $-\frac{1}{2}$ → คูณกันได้ $-\frac{1}{4}$ → (ก) ถูก

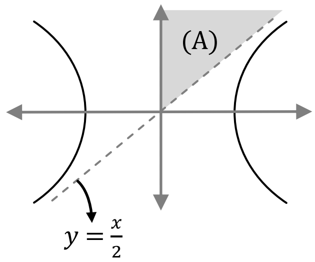
(ข) $(PF_1 - PF_2)^2 = 32$ จะเป็นจริงเมื่อ F_1 และ F_2 คือจุดโฟกัส และ แกนตามขวาง ยาว $\sqrt{32}$

จะได้ ระยะโฟกัส $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8 + 2} = \sqrt{10}$ ดังนั้น จุดโฟกัส คือ $(\sqrt{10}, 0)$ และ $(-\sqrt{10}, 0)$

แกนตามขวาง $= 2a = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2} = \sqrt{16(2)} = \sqrt{32}$ → (ข) ถูก

(ค) วาดกราฟของ $x > 0$ (ได้พื้นที่ครึ่งขวา) และ $y > \frac{x}{2}$ (ได้พื้นที่ฝั่งซ้ายบน) ได้ส่วนที่ซ้อนทับกันคือบริเวณ (A) ดังรูป





เนื่องจาก $y = \frac{x}{2}$ เป็นเส้นกำกับเส้นหนึ่งพอดี ดังนั้น จะไม่มีส่วนไหนของไฮเพอร์โบลาที่อยู่ใน (A) → (ค) ถูก

(ง) สมการเส้นกำกับ คือ $y = \frac{1}{2}x$ และ $y = -\frac{1}{2}x$ → จัดเป็นรูปทั่วไป (คูณ 2 ตลอด แล้วย้ายข้าง)

จะได้สมการเส้นกำกับ คือ $2y - x = 0$ และ $2y + x = 0$

ให้พิกัดของ P คือ (m, n) จากสูตรระยะจากจุดไปเส้นตรง $\frac{|Ax+By+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ จะได้ระยะจาก (m, n) ไปยังเส้นกำกับ คือ $\frac{|2n-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$ และ $\frac{|2n+m|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ ดังนั้น ผลคูณของระยะทางจาก P ไปยังเส้นกำกับ $= \frac{|2n-m|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} \cdot \frac{|2n+m|}{\sqrt{2^2+1^2}}$

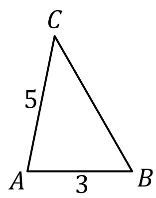
$= \frac{|(2n)^2-m^2|}{(\sqrt{5})(\sqrt{5})} = \frac{|4n^2-m^2|}{5}$ ...(∗)

แต่เนื่องจาก P อยู่บนไฮเพอร์โบลา ดังนั้น (m, n) ต้องแทนในสมการไฮเพอร์โบลาแล้วเป็นจริง จะได้ $\frac{m^2}{8} - \frac{n^2}{2} = 1$

คูณ 8 ตลอด จะได้ $m^2 - 4n^2 = 8$ → คูณ -1 ตลอด (ให้แทนใน (∗) ได้) ได้ $4n^2 - m^2 = -8$

แทนใน (∗) จะได้ผลคูณระยะไปเส้นกำกับ $= \frac{|-8|}{5} = \frac{8}{5}$ → (ง) ถูก

16. 1



วาดได้ดังรูป ถ้าจะหา BC ต้องใช้กฎของ cos ที่ A → ต้องหา $\cos A$

จาก $\arccos\left(-\frac{1}{15}\right) = B + C$ จะได้ $-\frac{1}{15} = \cos(B + C)$

เนื่องจาก A กับ $B + C$ รวมกันได้ $180°$ ดังนั้น cos จะเป็นลบซึ่งกันและกัน

ดังนั้น $\cos A = -\cos(B + C) = -\left(-\frac{1}{15}\right) = \frac{1}{15}$

จาก กฎของ cos จะได้ $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2(AC)(AB)\cos A$

$= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3)\left(\frac{1}{15}\right) = 25 + 9 - 2 = 32$

ถอดรูท จะได้ $BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

17. 1

ใส่ $\log_2$ ตลอด จะได้ $\log_2 x^{(\log_2 x+1)} = \log_2 64$

เปลี่ยน $\log_2 x$ เป็น A

$$\begin{aligned} (\log_2 x+1)(\log_2 x) &= \log_2 2^6 \\ (A+1)(A) &= 6 \\ A^2+A-6 &= 0 \\ (A+3)(A-2) &= 0 \\ A &= -3\ ,\ 2 \end{aligned}$$

เปลี่ยน A กลับเป็น $\log_2 x$

$$\begin{aligned} \log_2 x &= -3\ ,\ 2 \\ x &= 2^{-3}\ ,\ 2^2 \\ x &= \tfrac{1}{8}\ ,\ 4 \end{aligned}$$

จะได้ผลบวกคำตอบ $= \frac{1}{8} + 4 = \frac{33}{8}$

18. 4

จาก z ที่โจทย์กำหนด ย้อนกฎคราเมอร์จะได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์คือ $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ และส่วนค่าคงที่คือ $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

ดังนั้น จะได้ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{(-24+8+0)-(-3+0-4)}{(-6+8+0)-(-3+0+8)} = \dfrac{-16+7}{2-5} = \dfrac{-9}{-3} = 3$

$$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}} = \dfrac{(-2+16+2)-(-1+4+16)}{-3} = \dfrac{16-19}{-3} = \dfrac{-3}{-3} = 1$$

ตัวส่วน ใช้ค่าที่เคยคิดมาแทนได้เลย

ดังนั้น $x + y = 3 + 1 = 4$

19. 3

ก. จาก $AB = AC$ ต้องเอา A^{-1} คูณทางซ้ายทั้งสองฝั่ง ถึงจะเหลือ $B = C$ แต่เนื่องจากไม่รู้ว่า A^{-1} หาค่าได้หรือไม่ (ถ้า $\det A = 0$ แล้วจะหา A^{-1} ไม่ได้) ดังนั้น จึงสรุป ก. ไม่ได้

ข. A^{-1} คือ เมทริกซ์ที่มีสมบัติว่า $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

จาก $A^2 = I$ และ $A^2 = A \cdot A$ ดังนั้น $A \cdot A = A \cdot A = I$

จะเห็นว่า A เทียบได้กับ A^{-1} ในบรรทัดบน ดังนั้น $A = A^{-1}$ → ข. ถูก

ค. จาก $AB = I$ ใส่ det ทั้งสองฝั่ง จะได้

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(I) \\ (\det A)(\det B) &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\det A \neq 0$ (เพราะถ้า $= 0$ จะคูณกับ $\det B$ แล้วเป็น $0 \neq 1$) ดังนั้น A^{-1} หาค่าได้

จาก $AB = I$ → คูณ A^{-1} ทางซ้ายทั้งสองฝั่ง จะได้ $B = A^{-1}$

จาก $CA = I$ → คูณ A^{-1} ทางขวาทั้งสองฝั่ง จะได้ $C = A^{-1}$ → ดังนั้น $B = C = A^{-1}$ → ค. ถูก

ง. จาก $AB = I$ ทำคล้ายๆข้อ ค. จะสรุปได้ว่า $A = B^{-1}$ แต่จากสูตรอินเวอร์ส จะได้ $B^{-1} = \frac{1}{\det(B)} \cdot \mathrm{adj}(B)$

ใช้ B^{-1} เป็นตัวเชื่อม จะสรุปได้ว่า

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\det(B)} \cdot \mathrm{adj}(B) \\ [\det(B)]A &= \mathrm{adj}(B) \end{aligned}$$

แต่โจทย์บอกว่า $\mathrm{adj}(B) = [\det(A)]A$ และเราไม่รู้ว่า $\det(A) = \det(B)$ หรือเปล่า → ง. ผิด

20. 2

มากกว่าเจ็ดแสน $\rightarrow$ หลักแรกเป็นได้ทุกตัว ยกเว้น 0 $\rightarrow$ เอาจำนวนแบบทั้งหมด – จำนวนแบบที่หลักแรกเป็น 0

จำนวนแบบทั้งหมด : มี 6 เลข โดย 7 กับ 8 ซ้ำอย่างละสองตัว จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= \frac{6!}{2!2!}$

จำนวนแบบที่หลักแรกเป็น 0 : เหลือให้เรียง 5 ตัว จะได้จำนวนแบบ $= \frac{5!}{2!2!}$

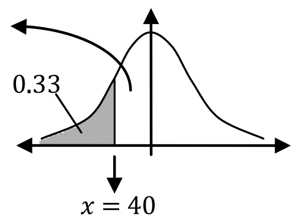
จะได้คำตอบ $= \frac{6!}{2!2!} - \frac{5!}{2!2!} = \frac{5!}{2!2!}(6-1) = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot5}{2\cdot2} = 150$

21. 2

น้อยกว่า 40 คะแนน มี 33% $\rightarrow$ เนื่องจาก 33% น้อยกว่าครึ่ง (50%) จะวาดได้ $x = 40$ อยู่ทางซ้ายดังรูป

เอาพื้นที่ไปเปิดตาราง $\rightarrow$ ต้องใช้พื้นที่ที่วัดจากแกนกลาง $= 0.5 - 0.33 = 0.17$

พื้นที่ $= 0.17$ เปิดตารางจะได้ $z = 0.44$ แต่เนื่องจากเป็นพื้นที่ฝั่งซ้าย z ต้องเป็นลบ ดังนั้น $x = 40$ จะตรงกับ $z = -0.44$



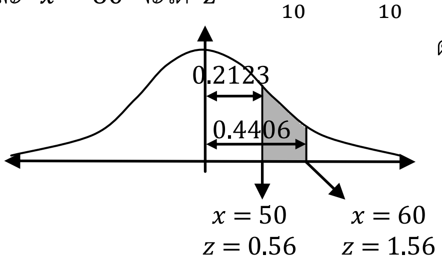
แทนในสูตร $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ (โดยแทน $s = 10$ จากโจทย์) จะได้ $-0.44 = \frac{40-\bar{x}}{10}$

$$-4.4 = 40 - \bar{x}$$
$$\bar{x} = 44.4$$

โจทย์ถาม % นักเรียน ระหว่าง $x = 50$ กับ 60 $\rightarrow$ แปลงเป็น z ด้วยสูตร $z = \frac{x-\bar{x}}{s}$ แล้วเปิดตารางดูพื้นที่

$x = 50$ จะได้ $z = \frac{50-44.4}{10} = \frac{5.6}{10} = 0.56$ เปิดตารางได้ พื้นที่ $= 0.2123$

และ $x = 60$ จะได้ $z = \frac{60-44.4}{10} = \frac{15.6}{10} = 1.56$ เปิดตารางได้ พื้นที่ $= 0.4406$ วาดได้ดังรูป



ดังนั้น ระหว่าง $x = 50$ กับ 60 มีพื้นที่ที่แรเงา $= 0.4406 - 0.2123$
$= 0.2283$
$= 22.83\%$

22. 1

ไม่มีฐานนิยม แสดงว่าข้อมูลไม่ซ้ำกัน

และจะได้ $\bar{x} = \frac{x+3.5+12+7+8.5+8+5}{7} = \frac{x+44}{7}$ และโจทย์ให้ $\bar{x} =$ มัธยฐาน ดังนั้น มัธยฐาน $= \frac{x+44}{7}$ ด้วย ...$(*)$

หามัธยฐาน ต้องเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วตอบตัวตรงกลาง แต่เรายังไม่รู้ค่า x จึงยังเรียงลำดับทุกตัวไม่ได้

เรียงตัวที่รู้ค่าก่อน จะได้ 3.5 , 5 , 7 , 8 , 8.5 , 12 จะเห็นว่า ตัวตรงกลางขึ้นกับว่า “x อยู่ตรงไหน เทียบกับ 7 และ 8”

<u>กรณี</u> $x < 7$ (เช่น 3.5 , x , 5 , 7 , 8 , 8.5 , 12) จะได้ตัวตรงกลาง $= 7 =$ มัธยฐาน

จาก $(*)$ จะได้ $\frac{x+44}{7} = 7$ แก้สมการ จะได้ $x = 49 - 44 = 5$ $\rightarrow$ ซ้ำกับ 5 ที่มีอยู่ก่อนแล้วอีกตัว จึงใช้ไม่ได้

<u>กรณี</u> $7 < x < 8$ (เช่น 3.5 , 5 , 7 , x , 8 , 8.5 , 12) จะได้ตัวตรงกลาง $= x =$ มัธยฐาน

จาก $(*)$ จะได้ $\frac{x+44}{7} = x$ แก้สมการ จะได้ $x + 44 = 7x$

$44 = 6x$ $\rightarrow$ $x = \frac{44}{6} = \frac{22}{3}$ $\rightarrow$ อยู่ระหว่าง 7 กับ 8 และไม่ซ้ำ
$\rightarrow$ ใช้ได้

<u>กรณี</u> $8 < x$ (เช่น 3.5 , 5 , 7 , 8 , x , 8.5 , 12) จะได้ตัวตรงกลาง $= 8 =$ มัธยฐาน

จาก $(*)$ จะได้ $\frac{x+44}{7} = 8$ แก้สมการ จะได้ $x = 56 - 44 = 12$ $\rightarrow$ ซ้ำกับ 12 ที่มีอยู่ก่อนแล้วอีกตัว จึงใช้ไม่ได้

จากทุกกรณี จะมีกรณีที่สองเท่านั้นที่ใช้ได้ และจะได้ $x = \frac{22}{3}$

และจะได้ R = พิสัย = มากสุด – น้อยสุด = $12 - 3.5 = 8.5$

ดังนั้น $R - x = 8.5 - \frac{22}{3} = \frac{25.5-22}{3} = \frac{3.5}{3} \rightarrow$ คูณ 2 ทั้งเศษและส่วน ได้ $\frac{7}{6}$

23. 3

จัดรูปเส้นตรง หาความชัน เอา 2 หารตลอด จะได้ $y = \frac{3}{2}x + 1 \rightarrow$ ความชันเส้นตรง $= \frac{3}{2}$

เส้นตรงสัมผัส f ที่ $(0, 1)$ จะสรุปได้ 2 อย่างคือ $\rightarrow$ f ผ่านจุด $(0, 1) \rightarrow$ จะได้ $f(0) = 1$

$\rightarrow$ ความชันของ f ที่ $(0, 1) =$ ความชันเส้นตรง $= \frac{3}{2}$

แต่ความชันของ f คือ $f'(x) \rightarrow$ จะได้ $f'(0) = \frac{3}{2}$

แต่จากนิยาม จะได้ $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$

แทน $f'(0) = \frac{3}{2}$, $f(0) = 1$ และเปลี่ยนชื่อตัวแปร h เป็น x จะได้ $\frac{3}{2} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x}$ ตรงกับตัวที่โจทย์ถามพอดี

24. 5

จะได้ $d = a_2 - a_1 = 7 - 4 = 3$

จากสูตร $a_n = a_1 + (n-1)d$ จะได้

$$\begin{aligned} 121 &= 4 + (n-1)(3) \\ 117 &= (n-1)(3) \\ 39 &= n - 1 \\ 40 &= n \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= (x + a_1x) + (x^2 + a_2x) + (x^3 + a_3x) + \ldots + (x^{40} + a_{40}x) \\ f'(x) &= (1 + a_1) + (2x + a_2) + (3x^2 + a_3) + \ldots + (40x^{39} + a_{40}) \\ f'(-1) &= (1 + a_1) + (-2 + a_2) + (3 + a_3) + \ldots + (-40 + a_{40}) \\ &= (1 - 2 + 3 - 4 + \ldots - 40) + (a_1 + a_2 + \cdots + a_{40}) \\ &= \overbrace{(1-2) + (3-4) + \cdots + (39-40)}^{20\text{ วงเล็บ}} + \frac{40}{2}(a_1 + a_{40}) \\ &= (\quad (-1)(20) \quad) + 20(4 + 121) = -20 + 2500 = 2480 \end{aligned}$$

ดิฟ

แทน $x = -1$

ย้ายตัวหน้าไปไว้ด้วยกัน
ย้ายตัวหลังไปไว้ด้วยกัน

ใช้สูตร $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

25. 5

ลำดับเลขคณิต แต่ละพจน์จะเพิ่มขึ้น $= d$ ดังนั้น

a_{20} กับ a_1 ห่างกัน $= 20 - 1 = 19$ พจน์ ดังนั้น $a_{20} - a_1 = 19d$

a_{19} กับ a_2 ห่างกัน $= 19 - 2 = 17$ พจน์ ดังนั้น $a_{19} - a_2 = 17d$

a_{18} กับ a_3 ห่างกัน $= 18 - 3 = 15$ พจน์ ดังนั้น $a_{18} - a_3 = 15d$

$\vdots$

a_{12} กับ a_9 ห่างกัน $= 12 - 9 = 3$ พจน์ ดังนั้น $a_{12} - a_9 = 3d$

a_{11} กับ a_{10} ห่างกัน $= 11 - 10 = 1$ พจน์ ดังนั้น $a_{11} - a_{10} = 1d$

แทนในโจทย์ จะได้ $= \frac{1}{21\cdot19d}+\frac{1}{19\cdot17d}+\frac{1}{17\cdot15d}+\cdots+\frac{1}{5\cdot3d}+\frac{1}{3\cdot1d}$ ดึงตัวร่วม $\frac{1}{d}$

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{21\cdot19}+\frac{1}{19\cdot17}+\frac{1}{17\cdot15}+\cdots+\frac{1}{5\cdot3}+\frac{1}{3\cdot1}\right)$

เทเลสโคปิก

$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{19}\right)+\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{19}-\frac{1}{17}\right)+\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{17}-\frac{1}{15}\right)+\cdots+\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{-2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)\right)$

ดึงตัวร่วม $\frac{1}{-2}$

$= \frac{1}{-2d}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{19}+\frac{1}{19}-\frac{1}{17}+\frac{1}{17}-\frac{1}{15}+\cdots+\frac{1}{5}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)$

$= \frac{1}{-2d}\left(\frac{1}{21}-\frac{1}{1}\right)$

แทน $d=\frac{2}{21}$

$= \frac{1}{-2\left(\frac{2}{21}\right)}\left(\frac{1-21}{21}\right) \quad = \frac{21}{-4}\left(\frac{-20}{21}\right) \quad = 5$

26. 3

มิติ 3×3 จะมีสมาชิกทั้งหมด 9 ตัว แต่ละตัวเป็นได้ 2 แบบ (คือ -1 หรือ 1) $\rightarrow$ จำนวนแบบทั้งหมด $= 2^9$

ถ้าต้องการให้ทั้ง 9 ตัว รวมกันได้ 3 แปลว่าต้องมี 1 อยู่ 6 ตัว และมี -1 อยู่ 3 ตัว

เอา 1 ทั้ง 6 ตัว และ -1 ทั้ง 3 ตัว มาเรียงลงเมทริกซ์ โดยใช้สูตรการเรียงของซ้ำ จะเรียงได้ $\frac{9!}{6!3!}=\frac{9\cdot8\cdot7}{3\cdot2}=3\cdot4\cdot7$

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $= \frac{3\cdot4\cdot7}{2^9} = \frac{21}{2^7}$

27. 1

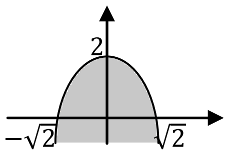
ให้ $z=x+y\mathrm{i}$ แทนในเงื่อนไขของ A จะได้

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(x+y\mathrm{i}-2\mathrm{i})+[\mathrm{Re}(x+y\mathrm{i})]^2 &\le 0 \\ y-2 + x^2 &\le 0 \\ y &\le -x^2+2 \end{aligned}$$

เนื่องจากกราฟ $y=-x^2+2$ เป็นพาราโบลาคว่ำ

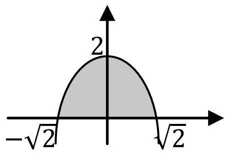
หาจุดตัดแกนเพื่อใช้วาดกราฟ จะได้ $(0,2)$ และ $(\pm\sqrt{2}, 0)$

จะได้ $y\le -x^2+2$ เป็นพื้นที่ในพาราโบลา ดังรูป



แทน $z=x+y\mathrm{i}$ ในเงื่อนไขของ B จะได้ $y\ge0$ ได้เป็นบริเวณเหนือแกน x

เนื่องจาก $A\cap B$ คือพื้นที่ที่ซ้อนทับกัน จะได้พื้นที่ $A\cap B$ ดังรูป



ซึ่งจะหาพื้นที่ได้โดยการอินทิเกรต $y=-x^2+2$

จะอินทิเกรต จาก $-\sqrt{2}$ ถึง $\sqrt{2}$ ก็ได้ แต่เนื่องจากพื้นที่สมมาตรซ้ายขวา จะหาพื้นที่จาก 0 ถึง $\sqrt{2}$ แล้วเอามาคูณ 2

จะได้พื้นที่จาก 0 ถึง $\sqrt{2}$ $= \int_0^{\sqrt{2}} -x^2+2\,dx = -\frac{x^3}{3}+2x\Big|_0^{\sqrt{2}}$

$= \left(-\frac{\sqrt{2}^3}{3}+2\sqrt{2}\right)-0$

$= -\frac{2\sqrt{2}}{3}+2\sqrt{2} \quad = \frac{-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{3} \quad = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

ดังนั้น พื้นที่ที่แรเงา $= 2\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

28. 3

จากทฤษฎีเศษ $x-c$ หาร $P(x)$ จะเหลือเศษ $= P(c)$

ดังนั้น $x-1$ หาร $P(x)$ $\rightarrow$ $c=1$ $\rightarrow$ เหลือเศษ $= P(1)$ $\rightarrow$ แต่โจทย์ให้เศษ $=-1$ ดังนั้น $P(1)=-1$

ก. $x-1$ หาร $-P(x)$ $\rightarrow$ $c=1$ $\rightarrow$ เหลือเศษ $= -P(1) = -(-1) = 1$ $\rightarrow$ ก. ผิด

ข. $x-1$ หาร $P^2(x)$ $\rightarrow$ $c=1$ $\rightarrow$ เหลือเศษ $= P^2(1) = \left(P(1)\right)^2 = (-1)^2 = 1$ $\rightarrow$ ข. ถูก

ค. $x+1$ หาร $P(-x)$ $\rightarrow$ $c=-1$ $\rightarrow$ เหลือเศษ $= P\big(-(-1)\big) = P(1)=-1$ $\rightarrow$ ค. ผิด

ง. $x+1$ หาร $-P(-x) \rightarrow c=-1 \rightarrow$ เหลือเศษ $= -P\big(-(-1)\big) = -P(1) = -(-1) = 1 \rightarrow$ ง. ถูก

29. 1

จากสูตรลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 r^0 \\ a_2 &= a_1 r^1 \\ a_3 &= a_1 r^2 \\ &\vdots \\ a_n &= a_1 r^{n-1} \end{aligned}$$

จับทุกแถวคูณกัน จะได้

$$\begin{aligned} a_1 a_2 \ldots a_n &= (a_1^n)(r^0 \cdot r^1 \cdot r^2 \cdot \ldots \cdot r^{n-1}) \\ &= (a_1^n)\left(r^{0+1+2+\ldots+(n-1)}\right) \\ &= (a_1^n)\left(r^{\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}}\right) \quad 1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2} \\ &= a_1^n r^{\frac{(n-1)(n)}{2}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $G_n = \left(a_1^n r^{\frac{(n-1)(n)}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = a_1 r^{\frac{n-1}{2}}$

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} G_n = a_1 r^{\frac{1-1}{2}} + a_1 r^{\frac{2-1}{2}} + a_1 r^{\frac{3-1}{2}} + a_1 r^{\frac{4-1}{2}} + \ldots$

$$\begin{aligned} &= a_1 + a_1 r^{\frac{1}{2}} + a_1 r^{\frac{2}{2}} + a_1 r^{\frac{3}{2}} + \ldots \\ &= \frac{a_1}{1-r^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

30. 2

จากความรู้ในเรื่องจำนวนเชิงซ้อน จะได้ลำดับของ i^k (เมื่อ $k = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$) วนซ้ำทุกๆ 4 ตัว คือ $i, -1, -i, 1$ เนื่องจาก 4 ตัวนี้ บวกกัน จะหักกันหมดเป็น 0 พอดี ดังนั้น S_n ที่เกิดจากลำดับนี้ จะวนซ้ำทุกๆ 4 ตัวด้วย

กล่าวคือ

$$\begin{aligned} S_1 &= i && = i \\ S_2 &= i + (-1) && = i - 1 \\ S_3 &= i + (-1) + (-i) && = -1 \\ S_4 &= i + (-1) + (-i) + 1 && = 0 \\ S_5 &= i + (-1) + (-i) + 1 + i \\ &= 0 + i && = i \end{aligned}$$

วนกลับไป $= S_1$

จะเห็นว่า ค่าของ S_n จะวนซ้ำทุกๆ 4 ตัว คือ i, $i-1$, -1, 0 โดย S_n จะเท่ากับ -1 เมื่อ n หารด้วย 4 เหลือเศษ 3

ตัวเลขใน 10, 11, … , 100 ที่หารด้วย 4 เหลือเศษ 3 จะมี 11, 15, 19, … , 99

ซึ่งจะมีจำนวนตัว $= \frac{\text{ปลาย}-\text{ต้น}}{\text{ห่าง}} + 1 = \frac{99-11}{4} + 1 = \frac{88}{4} + 1 = 22 + 1 = 23$

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยคำตอบ จาก GTRmath และ อาจารย์ศิลา สุขรัศมี

ขอบคุณ คุณ Pakapol Chanchaipattana ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของข้อสอบ

ขอบคุณ คุณ Tae PotaeView ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเฉลย

ขอบคุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490 ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเฉลยครับ