

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (มี.ค. 61)

วันอาทิตย์ที่ 18 มีนาคม 2561 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบบรรยายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -6 2. -1 3. 1 4. 4 5. 6

2. ให้ $i^2 = -1$ ค่าของ $i^{101} + i^{101!}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. 2 3. $1 + i$ 4. $1 - i$ 5. $2i$

3. ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ เวกเตอร์ \vec{v} ในข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องกับสมการ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

1. $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ 2. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ 3. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$
4. $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ 5. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$

4. ถ้า $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x - 1) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{3}$

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -98 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 98

6. $\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{2}$

7. ในกลุ่มคน 10 คน มีอยู่ 60% ที่มีเลือดกรุ๊ป A ถ้าสุ่มมา 2 คน พร้อมกันจากกลุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนนี้ไม่มีเลือดกรุ๊ป A ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{5}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{10}{15}$

8. กำหนดแผนภาพต้นไม้ ของข้อมูลชุดหนึ่ง ดังนี้

4	2	4	5	6				
5	1	1	2	3	5	8		
6	0	0	0	2	3	4	x	
7	0	1	1	2				
8	1	2	3					

ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 70 มีค่าเท่ากับ 69 แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 9

9. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{6}{x+1}$ ที่จุด $(1, 3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $x + y = 4$ 2. $3x - 2y = -3$ 3. $3x + 2y = 9$
 4. $2x - 3y = -7$ 5. $2x + 3y = 11$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 2 4. $1 + \sqrt{3}$ 5. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้อง จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับสมการ $|2x^2 + 1| - |-x^2 + 2x - 1| \leq 15$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 7 2. 9 3. 11 4. 13 5. 15

12. ให้ S เป็นเซตจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n < 100$ และ n มีตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก 12 จำนวน

ถ้า n_1 คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดใน S ถ้า n_2 คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน S

แล้ว $n_2 - n_1$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 12 2. 20 3. 36 4. 38 5. 40

13. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $|z^2 - 1| = iz + 3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. $3 - i$ 3. $-i$ 4. i 5. $3 + i$

14. ให้ r และ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $P(2, 2)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{(x+2)^2}{r^2} + \frac{(y-2)^2}{s^2} = 1$ ซึ่งมีจุด F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี และ $PF_1 + PF_2 = 12$ แล้วระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 หน่วย 2. 5 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5\sqrt{2}$ หน่วย 5. $4\sqrt{5}$ หน่วย

15. กำหนดให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

- ก. \vec{u} ไม่ขนานกับ \vec{v}
ข. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$
และ ค. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ \vec{u} และ \vec{v} แล้ว $\cos \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{2}{3}$

16. เซตของจำนวนเต็มสามจำนวนในข้อใดต่อไปนี้ ที่เป็นความยาวด้านของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

- | | | |
|------------------|------------------|------------------|
| 1. $\{1, 2, 3\}$ | 2. $\{2, 3, 4\}$ | 3. $\{3, 4, 5\}$ |
| 4. $\{4, 5, 6\}$ | 5. $\{5, 6, 7\}$ | |

17. ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 และ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์การคูณมิติ 3×3

ถ้า $AB^t = I$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- | | |
|-------------------|-------------------------|
| ก. $AB^t = B^tA$ | ข. $A^{-1} = B^t$ |
| ค. $B^{-1} = A^t$ | ง. $(AB)^{-1} = (BA)^t$ |

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------------|------|------|
| 1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) | 2. 1 | 3. 2 |
| 4. 3 | 5. 4 | |

18. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก ที่สอดคล้องกับสมการ $6^{\frac{1}{x}} = (12 \cdot 3^y)^{\frac{1}{x+2}}$

แล้ว $x + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | | |
|------|------|------|------|------|
| 1. 2 | 2. 3 | 3. 5 | 4. 6 | 5. 8 |
|------|------|------|------|------|

19. ผลบวกของคำตอบของสมการ $\log_2(\log_2(7x - 10)) \cdot \log_x 16 = 3$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 9 3. 10 4. 12 5. 16

20. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 5$ และ $a_{50} = 103$

แล้ว $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5,400 2. -5,000 3. 108 4. 5,000 5. 5,400

21. ให้ $f(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$ และ $g(x) = [f(x)]^2$

ถ้า $g'(c) = -8$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. $-\frac{5}{4}$ 3. 1 4. $\frac{7}{4}$ 5. 2

22. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยที่กราฟของ $y = f(x)$ มีจุดต่ำสุดที่ $(0, -9)$ และตัดแกน x ที่จุด $(x_1, 0)$ และ $(x_2, 0)$ ถ้าพื้นที่ซึ่งปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ และแกน x จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ 18 ตารางหน่วย แล้ว $f(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5 2. -3 3. 0 4. 3 5. 7

23. คะแนนสอบคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีการแจกแจงปกติ

โดยที่ คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 60 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8 คะแนน

คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 65 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน

ถ้านายมนัส มีคะแนนมาตรฐานของคะแนนสอบทั้งสองวิชาเท่ากัน แต่คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์มากกว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์อยู่ 2 คะแนน แล้วมนัสสอบได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 72 คะแนน 2. 74 คะแนน 3. 76 คะแนน
4. 83 คะแนน 5. 86 คะแนน

24. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 48 คน โดยให้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วพบว่ามัธยฐานอยู่ในช่วง 50 – 59 ถ้ามีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 50 คะแนน อยู่ 20 คน และมีนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไปอยู่ 20 คน แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 53 คะแนน 2. 53.5 คะแนน 3. 54 คะแนน
4. 54.5 คะแนน 5. 55 คะแนน

25. ให้ $S = \{-10, -9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9, 10\}$ สุ่มหยิบคู่อันดับ $(a, b) \in S \times S$

มา 1 คู่อันดับ ความน่าจะเป็นที่ $|a| + b = 0$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10}{441}$ 2. $\frac{20}{441}$ 3. $\frac{1}{21}$ 4. $\frac{1}{20}$ 5. $\frac{1}{10}$

26. ข้อมูล 20 จำนวน เรียงจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$

โดยมีฐานนิยมมีค่าไม่เท่ากับ x_1 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ \bar{x} , มัธยฐานเท่ากับ m และพิสัยเท่ากับ R

ถ้าตัด x_1 ออกจะได้ข้อมูลชุดใหม่คือ x_2, x_3, \dots, x_{20} จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับ ฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า
- ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ \bar{x}
- ค. มัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ m
- ง. พิสัยของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่า R

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

27. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{51}$ เป็นข้อมูลในลำดับเรขาคณิต โดยมี $a_1 = 1$ และอัตราส่วนร่วมของลำดับ

เท่ากับ $-\frac{5}{4}$ แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{25}$ 2. $\left(-\frac{5}{4}\right)^{23}$ 3. $-\frac{5}{4}$ 4. 1 5. $\left(\frac{5}{4}\right)^{26}$

28. ถ้าสมการ $y = f(x)$ มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งผ่านจุด $(0, \frac{1}{2})$ และ $-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ สำหรับ
 ทุกๆ จำนวนจริง x แล้วพาราโบลา $y = f(x)$ ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้
1. $(-1, 0)$
 2. $(-1, -1)$
 3. $(-2, 0)$
 4. $(-2, -2)$
 5. $(3, -2)$

29. ให้ $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$
 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ และ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$
 ถ้าสุ่มหยิบ 1 เมทริกซ์จากเซต M แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $\det(A+B) = \det A + \det B$
 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{1}{100}$
 2. $\frac{3}{100}$
 3. $\frac{1}{20}$
 4. $\frac{1}{10}$
 5. $\frac{11}{100}$

30. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = \frac{\pi}{12}$ และ $d = \frac{\pi}{3}$
 แล้ว $\sum_{n=1}^{65} \sin(a_n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $-\sqrt{2}$
 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$
 3. 0
 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$
 5. $\sqrt{2}$

เฉลย

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 5 | 7. 1 | 13. 3 | 19. 1 | 25. 3 |
| 2. 3 | 8. 4 | 14. 5 | 20. 1 | 26. 4 |
| 3. 3 | 9. 3 | 15. 1 | 21. 4 | 27. 4 |
| 4. 5 | 10. 2 | 16. 2 | 22. 5 | 28. 2 |
| 5. 2 | 11. 2 | 17. 5 | 23. 1 | 29. 4 |
| 6. 5 | 12. 3 | 18. 2 | 24. 4 | 30. 4 |

แนวคิด

1. ให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง
 ถ้ากราฟของ $y = f(x)$ ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แล้ว $f(-1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- | | | | | |
|-------|-------|------|------|------|
| 1. -6 | 2. -1 | 3. 1 | 4. 4 | 5. 6 |
|-------|-------|------|------|------|

ตอบ 5

ตัดแกน x ที่จุด $(-3, 0)$, $(0, 0)$ และ $(2, 0)$ แสดงว่า $f(-3) = 0$, $f(0) = 0$ และ $f(2) = 0$

จะได้ว่า $-3, 0$ และ 2 เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$

เนื่องจาก $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เป็นพหุนามดีกรี 3 \rightarrow สร้างสมการจากคำตอบ $-3, 0$ และ 2 จะได้สมการคือ $k(x + 3)(x - 0)(x - 2) = 0$ เมื่อ k เป็นค่าคงที่อะไรก็ได้

จะได้ $f(x) = k(x + 3)(x - 0)(x - 2)$

เนื่องจาก สปส ของ x^3 ใน $f(x)$ เท่ากับ 1 จึงสรุปได้ว่า $k = 1$ ทำให้ได้ว่า $f(x) = (x + 3)(x - 0)(x - 2)$

แทน $x = -1$ จะได้ $f(-1) = (-1 + 3)(-1 - 0)(-1 - 2) = 6$

2. ให้ $i^2 = -1$ ค่าของ $i^{101} + i^{101!}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- | | | | | |
|-------|------|------------|------------|---------|
| 1. -2 | 2. 2 | 3. $1 + i$ | 4. $1 - i$ | 5. $2i$ |
|-------|------|------------|------------|---------|

ตอบ 3

i^n จะวนซ้ำทุกๆ 4 ตัว คือ $i^n = \begin{cases} i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 1} \\ -1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 2} \\ -i & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 เหลือเศษ 3} \\ 1 & \text{เมื่อ } n \text{ หารด้วย 4 ลงตัว} \end{cases}$

101 หารด้วย 4 เหลือเศษ 1 ดังนั้น $i^{101} = i$

$101! = 101 \times 100 \times 99 \times \dots \times 4 \times \dots \times 1$ จะหารด้วย 4 ลงตัว ดังนั้น $i^{101!} = 1$

ดังนั้น $i^{101} + i^{101!} = i + 1$

3. ให้ $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ เวกเตอร์ \vec{v} ในข้อใดต่อไปนี้สอดคล้องกับสมการ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
- | | | |
|---|---|---|
| 1. $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ | 2. $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ | 3. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ |
| 4. $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ | 5. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ | |

ตอบ 3

$\vec{u} \times \vec{v}$ จะเป็น $\vec{0}$ เมื่อ \vec{u} กับ \vec{v} ขนานกัน ซึ่งจะขนานกันเมื่อ $\vec{v} = k\vec{u}$ สำหรับ k บางค่า

จะเห็นว่าข้อ 3. $\vec{v} = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} = -(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = -\vec{u} \rightarrow$ ขนาน $\rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

ส่วนข้ออื่น จะเห็นว่า \vec{u} กับ \vec{v} ไม่เป็นสัดส่วนกัน จึงไม่ขนาน และ $\vec{u} \times \vec{v} \neq \vec{0}$

4. ถ้า $\arccos(9x^2) + \arcsin(6x - 1) = \frac{\pi}{2}$ แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. $\frac{1}{12}$ 3. $\frac{1}{8}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{3}$

ตอบ 5

จากกฎโคฟังก์ชัน เมื่อ $A + B = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\cos A = \sin B$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ถ้า } \arccos(9x^2) + \arcsin(6x - 1) = \frac{\pi}{2} \text{ จะได้ } \cos(\arccos(9x^2)) &= \sin(\arcsin(6x - 1)) \\ 9x^2 &= 6x - 1 \\ 9x^2 - 6x + 1 &= 0 \\ (3x - 1)^2 &= 0 \\ x &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ลองแทน $x = \frac{1}{3}$ จะเห็นว่า $9x^2 = 9\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$ } อยู่ในโดเมน \arccos, \arcsin (คือ $[-1, 1]$) ทั้งคู่
 และ $6x - 1 = 6\left(\frac{1}{3}\right) - 1 = 1$ } \rightarrow ใช้เป็นคำตอบได้

5. ถ้า $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(AB^{-1})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -98 2. $\frac{1}{2}$ 3. 1 4. 2 5. 98

ตอบ 2

$$\begin{aligned} \det \text{ กระจายในการคูณ และอินเวอร์สได้ } \rightarrow \det(AB^{-1}) &= \det(A) \det(B)^{-1} \\ &= \frac{\det(A)}{\det(B)} \\ &= \frac{(2)(5) - (3)(1)}{(4)(2) - (-2)(3)} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

6. $\frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{1}{10}$ 3. $\frac{1}{5}$ 4. $\frac{1}{4}$ 5. $\frac{1}{2}$

ตอบ 5

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log_2 100} + \frac{1}{\log_5 100} &= \log_{100} 2 + \log_{100} 5 \\ &= \log_{100}(2 \times 5) \\ &= \log_{100} 10 \\ &= \log_{10^2} 10 \\ &= \frac{1}{2} \log_{10} 10 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_N M &= \frac{1}{\log_M N} \\ \log_a M + \log_a N &= \log_a MN \\ \log_{(a^b)}(M^N) &= \frac{N}{b} \log_a M \end{aligned}$$

7. ในกลุ่มคน 10 คน มีอยู่ 60% ที่มีเลือดกรุ๊ป A ถ้าสุ่มมา 2 คน พร้อมกันจากกลุ่ม แล้วความน่าจะเป็นที่ทั้งสองคนนี้ไม่มีเลือดกรุ๊ป A ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{15}$ 2. $\frac{3}{15}$ 3. $\frac{5}{15}$ 4. $\frac{8}{15}$ 5. $\frac{10}{15}$

ตอบ 1

หาจำนวนแบบทั้งหมด : มีคน 10 คน สุ่มมา 2 คนพร้อมกัน จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= \binom{10}{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$ แบบ

หาจำนวนแบบที่สนใจ : มีกรุ๊ป A อยู่ 60% จะคิดเป็น $\frac{60}{100} \times 10 = 6$ คน \rightarrow มีคนที่ไม่ใช่กรุ๊ป A อยู่ $10 - 6 = 4$ คน

สุ่มมา 2 คน จะได้จำนวนแบบที่ทั้งสองคนไม่ใช่กรุ๊ป A $= \binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{6}{45} = \frac{2}{15}$

8. กำหนดแผนภาพต้นไม้ ของข้อมูลชุดหนึ่ง ดังนี้

4	2	4	5	6			
5	1	1	2	3	5	8	
6	0	0	0	2	3	4	x
7	0	1	1	2			
8	1	2	3				

ถ้าเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 70 มีค่าเท่ากับ 69 แล้ว x มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. 5 2. 6 3. 7 4. 8 5. 9

ตอบ 4

จำนวนข้อมูลทั้งหมด = จำนวนตัวเลขทางฝั่งขวา = 24 จำนวน

จะได้เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 70 อยู่ตำแหน่งที่ $\frac{70}{100} \cdot (N + 1) = \frac{70}{100} \cdot (24 + 1) = 17.5$

จะได้ $P_{70} = \frac{\text{ตัวที่ } 17 + \text{ตัวที่ } 18}{2} \rightarrow$ นับหาตัวที่ 17 และตัวที่ 18 จะได้ดังรูป

$\begin{array}{c cccccc} 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 4 & x \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 2 & & & \end{array}$	<p>ตัวที่ 17 หลักสิบคือ 6 หลักหน่วยคือ x คิดเป็นค่า = $60 + x$</p>	<p>ดังนั้น $P_{70} = \frac{(60+x)+70}{2}$ $69 = \frac{130+x}{2}$ $8 = x$</p>
<p>ตัวที่ 18 หลักสิบคือ 7 หลักหน่วยคือ 0 คิดเป็นค่า = 70</p>		

9. สมการของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \frac{6}{x+1}$ ที่จุด $(1, 3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี

1. $x + y = 4$ 2. $3x - 2y = -3$ 3. $3x + 2y = 9$
4. $2x - 3y = -7$ 5. $2x + 3y = 11$

ตอบ 3

หาความชันที่จุด $(1, 3) \rightarrow$ ต้องหา y' : $y = \frac{6}{x+1} = 6(x+1)^{-1}$
 $y' = (-1)6(x+1)^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(x+1)$
 $= -6(x+1)^{-2}$

ที่จุด $(1, 3) \rightarrow$ แทน $x = 1$ จะได้ $y' = -6(1+1)^{-2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

จะได้สมการเส้นตรงที่ผ่าน $(1, 3)$ และมีความชัน $-\frac{3}{2}$

คือ $\frac{y-3}{x-1} = -\frac{3}{2}$
 $2y - 6 = -3x + 3$
 $3x + 2y = 9$

สมการกราฟเส้นตรงที่ผ่านจุด (a, b)
และมีความชัน = m คือ $\frac{y-b}{x-a} = m$

10. $\sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{2}{3}$ 3. 2 4. $1 + \sqrt{3}$ 5. $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

ตอบ 2

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \cos^n\left(\frac{\pi}{3} + n\pi\right) &= \cos^0\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^1\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi\right) + \cos^3\left(\frac{\pi}{3} + 3\pi\right) + \dots \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \dots \end{aligned}$$

เป็นอนุกรมอนันต์ ที่มี $a_1 = 1$ และ $r = -\frac{1}{2} \rightarrow$ จะได้ผลบวก = $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{3}$

11. จำนวนเต็ม x ที่สอดคล้องกับสมการ $|2x^2 + 1| - |-x^2 + 2x - 1| \leq 15$ มีทั้งหมดกี่จำนวน

1. 7 2. 9 3. 11 4. 13 5. 15

ตอบ 2

ถ้ารู้เครื่องหมายของตัวที่อยู่ในค่าสัมบูรณ์ จะถอดค่าสัมบูรณ์ได้ด้วยสมบัติ $|a| = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a \geq 0 \\ -a & \text{เมื่อ } a < 0 \end{cases}$

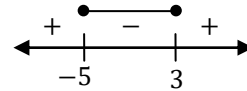
(หมายเหตุ : เมื่อ $a = 0$ จะใช้ a หรือ $-a$ ก็ได้ เพราะเป็น 0 เหมือนกัน)

เนื่องจาก $x^2 \geq 0$ เสมอ ดังนั้น $2x^2 + 1$ เป็นบวกเสมอ ดังนั้น $|2x^2 + 1| = 2x^2 + 1$

และ $-x^2 + 2x - 1 = -(x^2 - 2x + 1) = -\underbrace{(x - 1)^2}$ จะเป็นลบหรือศูนย์เสมอ
ผลกำลังสอง ≥ 0 เสมอ

ดังนั้น $|-x^2 + 2x - 1| = -(-x^2 + 2x - 1) = x^2 - 2x + 1$

$$\begin{aligned} \text{แทนในสมการโจทย์จะได้} \quad & |2x^2 + 1| - |-x^2 + 2x - 1| \leq 15 \\ & (2x^2 + 1) - (x^2 - 2x + 1) \leq 15 \\ & 2x^2 + 1 - x^2 + 2x - 1 \leq 15 \\ & x^2 + 2x - 15 \leq 0 \\ & (x + 5)(x - 3) \leq 0 \end{aligned}$$



จะได้จำนวนเต็มในช่วง $[-5, 3]$ จะมี $3 - (-5) + 1 = 9$ จำนวน

12. ให้ S เป็นเซตจำนวนเต็มบวก n โดยที่ $n < 100$ และ n มีตัวหารเป็นจำนวนเต็มบวก 12 จำนวน

ถ้า n_1 คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดใน S ถ้า n_2 คือจำนวนเต็มที่มากที่สุดใน S

แล้ว $n_2 - n_1$ มีค่าเท่ากับข้อใด

1. 12 2. 20 3. 36 4. 38 5. 40

ตอบ 3

จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ n จะหาได้โดยการแยกตัวประกอบ แล้วเอา “เลขชี้กำลัง + 1” มาคูณกัน

(เช่น $48 = 2^4 \times 3^1$ จะได้จำนวนตัวหารที่เป็นบวกของ 48 คือ $(4 + 1)(1 + 1) = 10$ จำนวน)

ถ้า n มีตัวหารที่เป็นบวก 12 จำนวน \rightarrow ต้องดูว่า 12 มาจากการคูณกันของ “เลขชี้กำลัง + 1” ได้กี่แบบ

$$\begin{array}{ccccccc} 12 & , & 2 \times 6 & , & 3 \times 4 & \text{และ} & 2 \times 2 \times 3 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 11+1 & & (1+1)(5+1) & & (2+1)(3+1) & & (1+1)(1+1)(2+1) \end{array}$$

ดังนั้น n ต้องอยู่ในรูป p^{11}, p^1q^5, p^2q^3 หรือ $p^1q^1r^2$ เมื่อ p, q, r เป็นจำนวนเฉพาะ

หา n ที่น้อยที่สุด \rightarrow ต้องเลือกให้เลขชี้กำลังน้อยๆ (ได้แก่ $p^1q^1r^2$) และเลือกให้จำนวนเฉพาะน้อยๆ ยกกำลังเยอะๆ

จะได้ n ที่น้อยที่สุด คือ $n_1 = 3^15^12^2 = 60$

หา n ที่มากที่สุด \rightarrow จะยากหน่อย เพราะต้องมากที่สุด แต่น้อยกว่า 100

p^{11} เกิน 100 แน่แน่นอน

p^1q^5 จะน้อยกว่า 100 ได้แบบเดียว คือ $3^12^5 = 96$

และจะเห็นว่า 97, 98, 99 แยกตัวประกอบแล้วไม่อยู่ในรูป p^2q^3 หรือ $p^1q^1r^2$

ดังนั้น จะได้ n ที่มากที่สุด คือ $n_2 = 96$

จะได้ $n_2 - n_1 = 96 - 60 = 36$

13. ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน z ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $|z^2 - 1| = iz + 3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 2. $3 - i$ 3. $-i$ 4. i 5. $3 + i$

ตอบ 3

ฝั่งซ้ายของสมการ $|z^2 - 1|$ คือ "ขนาด" ของจำนวนเชิงซ้อน \rightarrow ขนาด จะเป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้นฝั่งขวา $iz + 3$ ต้องเป็นจำนวนจริงด้วย $\rightarrow iz$ ต้องเป็นจำนวนจริง

ดังนั้น z ต้องเป็นจำนวนจินตภาพแท้ ($z = ki$) ถึงจะคูณ i แล้วกลายเป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} \text{แทน } z = ki \text{ ในสมการ จะได้ } & |z^2 - 1| = iz + 3 \\ & |(ki)^2 - 1| = i(ki) + 3 \\ \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงลบ } & \left(\begin{aligned} & |-k^2 - 1| = -k + 3 \\ \text{จะได้ } |a| = -a & \left(\begin{aligned} & -(-k^2 - 1) = -k + 3 \\ & k^2 + k - 2 = 0 \\ & (k + 2)(k - 1) = 0 \\ & k = -2, 1 \end{aligned} \right. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

จะได้ $z = -2i$ และ $1i \rightarrow$ ผลบวกของ z ทั้งหมด $= -2i + 1i = -i$

14. ให้ r และ s เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $P(2, 2)$ เป็นจุดบนวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{(x+2)^2}{r^2} + \frac{(y-2)^2}{s^2} = 1$

ซึ่งมีจุด F_1 และ F_2 เป็นโฟกัสของวงรี และ $PF_1 + PF_2 = 12$ แล้วระยะห่างระหว่าง F_1 และ F_2 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 4 หน่วย 2. 5 หน่วย 3. $2\sqrt{5}$ หน่วย
4. $5\sqrt{2}$ หน่วย 5. $4\sqrt{5}$ หน่วย

ตอบ 5

$$\begin{aligned} P(2, 2) \text{ อยู่บนวงรี } \rightarrow \text{ ต้องแทนในสมการวงรีแล้วเป็นจริง } & \frac{(2+2)^2}{r^2} + \frac{(2-2)^2}{s^2} = 1 \\ & \frac{4^2}{r^2} + 0 = 1 \\ & 4 = r \end{aligned}$$

จาก $PF_1 + PF_2 = 12 \rightarrow$ จะได้ความยาวแกนเอก $= 12$

ถ้าเป็นวงรีแนวนอน จะได้ความยาวแกนเอก $= 2r = 2(4) = 8 \neq 12 \rightarrow$ ขัดแย้ง

ดังนั้น ต้องเป็นวงรีแนวตั้ง ซึ่งจะได้ความยาวแกนเอก $= 2s$ และจะสรุปได้ว่า $2s = 12$
 $s = 6$

จะได้ระยะโฟกัส $c = \sqrt{s^2 - r^2} = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

จะได้ระยะระหว่าง F_1 และ $F_2 = 2c = 2(2\sqrt{5}) = 4\sqrt{5}$

15. กำหนดให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

ก. \vec{u} ไม่ขนานกับ \vec{v}

ข. $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$

และ ค. $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

ถ้า θ เป็นมุมระหว่างเวกเตอร์ \vec{u} และ \vec{v} แล้ว $\cos \theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{3}$

2. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. $\frac{1}{2}$

5. $\frac{2}{3}$

ตอบ 1

$$\begin{aligned} \text{จาก ค. } |\vec{u} + \vec{v}|^2 &= 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} &= 3|\vec{u} \times \vec{v}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta &= 3(|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)^2 \quad \text{จาก ข.} \\ 1 + 1 + 2\cos\theta &= 3\sin^2\theta \\ 2 + 2\cos\theta &= 3(1 - \cos^2\theta) \\ 3\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 &= 0 \\ (3\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) &= 0 \\ \cos\theta &= \frac{1}{3}, -1 \end{aligned}$$

แต่จาก ก. จะได้ $\theta \neq 0^\circ, 180^\circ$ ทำให้ $\cos\theta = -1$ ไม่ได้ \rightarrow เหลือคำตอบเดียว คือ $\frac{1}{3}$

16. เซตของจำนวนเต็มสามจำนวนในข้อใดต่อไปนี้ ที่เป็นความยาวด้านของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมป้านได้

1. $\{1, 2, 3\}$

2. $\{2, 3, 4\}$

3. $\{3, 4, 5\}$

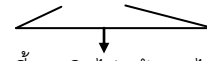
4. $\{4, 5, 6\}$

5. $\{5, 6, 7\}$

ตอบ 2

จะ “เป็น Δ ” ได้ ด้านที่ยาวที่สุด ต้องไม่ยาวเกินไป

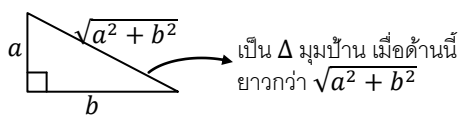
คือ ต้อง “สั้นกว่า” อีกสองด้านรวมกัน ไม่งั้นอีกสองด้านจะบรรจบกันไม่ถึง



ด้านนี้ยาวเกินไป สร้าง Δ ไม่ได้

จะเห็นว่าข้อ 1. ด้านที่ยาวที่สุด คือ 3 ยาวเท่ากับอีกสองด้านรวมกันพอดี $1 + 2 \rightarrow$ ไม่ได้สั้นกว่า จะไม่เป็น Δ

และจะ “เป็น Δ มุมป้าน” ได้ ด้านที่ยาวที่สุด ต้องยาวกว่า “ด้านตรงข้ามมุมฉากของ Δ มุมฉาก”



นั่นคือ จะเป็น Δ มุมป้าน เมื่อ $c > \sqrt{a^2 + b^2}$
 $c^2 > a^2 + b^2$

2. $4^2 > 2^2 + 3^2 \checkmark$

3. $5^2 > 3^2 + 4^2 \times$

4. $6^2 > 4^2 + 5^2 \times$

5. $7^2 > 5^2 + 6^2 \times$

จะเห็นว่าข้อ 2 เท่านั้น ที่ $c^2 > a^2 + b^2$

19. ผลบวกของคำตอบของสมการ $\log_2(\log_2(7x - 10) \cdot \log_x 16) = 3$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 9 3. 10 4. 12 5. 16

ตอบ 1

$$\begin{aligned} \log_2(\log_2(7x - 10) \cdot \log_x 16) &= 3 \\ \log_2(7x - 10) \cdot \log_x 16 &= 2^3 \\ \frac{\log(7x-10)}{\log 2} \cdot \frac{\log 16}{\log x} &= 8 \\ \frac{\log(7x-10)}{\log x} \cdot \frac{\log 16}{\log 2} &= 8 \\ \log_x(7x - 10) \cdot \log_2 16 &= 8 \\ \log_x(7x - 10) \cdot 4 &= 8 \\ \log_x(7x - 10) &= 2 \\ 7x - 10 &= x^2 \\ 0 &= x^2 - 7x + 10 \\ 0 &= (x - 2)(x - 5) \\ x &= 2, 5 \end{aligned}$$

คำตอบต้องแทนแล้ว หาค่า log ได้ (หลัง log และฐาน เป็นบวก และฐาน $\neq 1$)

$$x = 2 : \log_2(\log_2(7(2) - 10) \cdot \log_2 16) \qquad x = 5 : \log_2(\log_2(7(5) - 10) \cdot \log_5 16)$$

$$\log_2\left(\frac{2}{2} \cdot 4\right) \qquad \log_2(\log_2 25 \cdot \log_5 16)$$

ใช้ได้ทั้ง 2 คำตอบ \rightarrow ผลบวก = $2 + 5 = 7$

20. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50}$ เป็นลำดับเลขคณิต ถ้า $a_1 = 5$ และ $a_{50} = 103$

แล้ว $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5,400 2. -5,000 3. 108 4. 5,000 5. 5,400

ตอบ 1

จากสูตร $a_n = a_1 + (n - 1)d \rightarrow$ แทน $n = 50$ จะได้ $a_{50} = a_1 + (50 - 1)d$

$$\begin{aligned} 103 &= 5 + 49d \\ 98 &= 49d \\ 2 &= d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{49}^2 - a_{50}^2 &= (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots + (a_{49} - a_{50})(a_{49} + a_{50}) \\ &= -(a_2 - a_1)(a_1 + a_2) - (a_4 - a_3)(a_3 + a_4) - \dots - (a_{50} - a_{49})(a_{49} + a_{50}) \\ &= -(d)(a_1 + a_2) - (d)(a_3 + a_4) - \dots - (d)(a_{49} + a_{50}) \\ &= -d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{49} + a_{50}) \\ &= -d\left(\frac{50}{2}(a_1 + a_{50})\right) \\ &= -2\left(\frac{50}{2}(5 + 103)\right) \\ &= -5400 \end{aligned}$$

21. ให้ $f(x) = \begin{cases} 4x - 8 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$ และ $g(x) = [f(x)]^2$

ถ้า $g'(c) = -8$ แล้ว c มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2 2. $-\frac{5}{4}$ 3. 1 4. $\frac{7}{4}$ 5. 2

ตอบ 4

จาก $g(x) = [f(x)]^2$ จะได้ $g(x) = \begin{cases} (4x - 8)^2 & \text{เมื่อ } x < 2 \\ (x^2 - 4)^2 & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

หา $g'(x) \rightarrow$ ต้องดิฟทั้งสองสูตร

เมื่อ $x < 2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(4x - 8)^2 &= 2(4x - 8) \frac{d}{dx}(4x - 8) \\ &= 2(4x - 8) \cdot 4 \\ &= 8(4x - 8) \end{aligned}$$

เมื่อ $x > 2$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 - 4)^2 &= 2(x^2 - 4) \frac{d}{dx}(x^2 - 4) \\ &= 2(x^2 - 4) \cdot 2x \\ &= 4x(x^2 - 4) \end{aligned}$$

และตรงรอยต่อ $x = 2$ จะได้ฝั่งซ้ายเป็น $8(4(2) - 8) = 0$ และฝั่งขวา $4(2)(2^2 - 4) = 0 \rightarrow$ เท่ากัน

ดังนั้น $g'(2)$ หาได้ และจะเขียนได้เป็น $g'(x) = \begin{cases} 8(4x - 8) & \text{เมื่อ } x < 2 \\ 4x(x^2 - 4) & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$

โจทย์ให้ $g'(c) = -8$ แต่จะเห็นว่า -8 มาจาก $4x(x^2 - 4)$ ไม่ได้

เพราะเมื่อ $x \geq 2$ จะได้ $g'(x) \geq 4(2)(2^2 - 4) \geq 0$ แต่ $-8 < 0$

ดังนั้น -8 ต้องมาจาก $8(4x - 8) \rightarrow$

$$\begin{aligned} -8 &= 8(4c - 8) \\ -1 &= 4c - 8 \\ \frac{7}{4} &= c \end{aligned}$$

22. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันกำลังสอง โดยที่กราฟของ $y = f(x)$ มีจุดต่ำสุดที่ $(0, -9)$ และตัดแกน x ที่จุด $(x_1, 0)$ และ $(x_2, 0)$ ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ $y = f(x)$ และแกน x จาก x_1 ถึง x_2 เท่ากับ 18 ตารางหน่วย แล้ว $f(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -5 2. -3 3. 0 4. 3 5. 7

ตอบ 5

จุดต่ำสุดของฟังก์ชันกำลังสอง คือจุดยอดของพาราโบลาหงายนั่นเอง \rightarrow จะได้จุดยอดคือ $(h, k) = (0, -9)$

จะได้ $f(x) = a(x - h)^2 + k = a(x - 0)^2 - 9 = ax^2 - 9$

หาจุดตัดแกน x ต้องแทน $y = 0 \rightarrow ax^2 - 9 = 0$

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{9}{a} \\ x &= \pm \frac{3}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

พาราโบลาหงาย $\rightarrow a$ เป็นบวก

หาพื้นที่ $\rightarrow \int_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}} (ax^2 - 9) dx = \left(\frac{a}{3}x^3 - 9x \right) \Big|_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}}$

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{a}{3} \left(\frac{3}{\sqrt{a}} \right)^3 - 9 \left(\frac{3}{\sqrt{a}} \right) \right] - \left[\frac{a}{3} \left(-\frac{3}{\sqrt{a}} \right)^3 - 9 \left(-\frac{3}{\sqrt{a}} \right) \right] \\ &= \frac{9}{\sqrt{a}} - \frac{27}{\sqrt{a}} + \frac{9}{\sqrt{a}} - \frac{27}{\sqrt{a}} = -\frac{36}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{โจทย์ให้พื้นที่} = 18 \rightarrow \text{ดังนั้น } \left| -\frac{36}{\sqrt{a}} \right| &= 18 \\ \frac{36}{\sqrt{a}} &= 18 \\ 2 &= \sqrt{a} \\ 4 &= a \end{aligned}$$

แทนค่า a ใน $f(x)$ จะได้ $f(x) = 4x^2 - 9$
 $f(2) = 4(2^2) - 9 = 7$

23. คะแนนสอบคณิตศาสตร์และวิทยาศาสตร์ มีการแจกแจงปกติ

โดยที่ คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 60 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8 คะแนน

คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต เท่ากับ 65 คะแนน

และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 6 คะแนน

ถ้านายมนัส มีคะแนนมาตรฐานของคะแนนสอบทั้งสองวิชาเท่ากัน แต่คะแนนสอบวิชาวิทยาศาสตร์มากกว่าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์อยู่ 2 คะแนน แล้วมนัสสอบได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 72 คะแนน
2. 74 คะแนน
3. 76 คะแนน
4. 83 คะแนน
5. 86 คะแนน

ตอบ 1

สมมติให้คะแนนคณิต เท่ากับ x คะแนน

โจทย์ให้ $\bar{x}_{\text{คณิต}} = 60$ และ $s_{\text{คณิต}} = 8 \rightarrow$ จะได้คะแนนมาตรฐานคณิต $z_{\text{คณิต}} = \frac{x-60}{8}$

$$z = \frac{x - \bar{x}}{s}$$

ได้วิทย์มากกว่าคณิต 2 คะแนน \rightarrow ได้วิทย์ $x + 2$ คะแนน

โจทย์ให้ $\bar{x}_{\text{วิทย์}} = 65$ และ $s_{\text{วิทย์}} = 6 \rightarrow$ จะได้คะแนนมาตรฐานวิทย์ $z_{\text{วิทย์}} = \frac{x+2-65}{6}$

โจทย์ให้ $z_{\text{คณิต}} = z_{\text{วิทย์}}$ ดังนั้น $\frac{x-60}{8} = \frac{x+2-65}{6}$
 $3x - 180 = 4x - 252$
 $72 = x$

24. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 48 คน โดยให้ความกว้างของแต่ละ

อันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วพบว่ามัธยฐานอยู่ในช่วง 50 - 59 ถ้ามีนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 50 คะแนน

อยู่ 20 คน และมีนักเรียนได้คะแนนตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไปอยู่ 20 คน แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 53 คะแนน
2. 53.5 คะแนน
3. 54 คะแนน
4. 54.5 คะแนน
5. 55 คะแนน

ตอบ 4

มัธยฐาน หาได้จากสูตร $L + \frac{\frac{N}{2} - \sum f_L}{f_m} \cdot I$

โจทย์ให้ความกว้างชั้น $I = 10$ แสดงว่าขอบชั้นขยายออกไปฝั่งละ 0.5 \rightarrow จะได้ขอบล่าง $L = 49.5$

$\sum f_L =$ ผลรวมความถี่ในชั้นต่ำกว่า \rightarrow มี 20 คนได้ต่ำกว่า 50 คะแนน ดังนั้น $\sum f_L = 20$

(ข้อนี้ ต้องสมมติให้คะแนนสอบเป็นจำนวนเต็ม \rightarrow ต่ำกว่า 50 คะแนน คือ ต่ำกว่า 49.5 คะแนน)

$f_m =$ ความถี่ในชั้นมัธยฐาน \rightarrow ทั้งหมด 48 คน มี 20 คนต่ำกว่า 50 คะแนน และมี 20 คนได้ตั้งแต่ 60 คะแนนขึ้นไป

ดังนั้น จะเหลือนักเรียน $48 - 20 - 20 = 8$ คน ได้คะแนนในช่วง 50 - 59 คะแนน $\rightarrow f_m = 8$

แทนในสูตร จะได้ มัธยฐาน $= 49.5 + \frac{48-20}{8} \cdot 10 = 54.5$

25. ให้ $S = \{-10, -9, -8, \dots, -1, 0, 1, \dots, 8, 9, 10\}$ สุ่มหยิบคู่อันดับ $(a, b) \in S \times S$

มา 1 คู่อันดับ ความน่าจะเป็นที่ $|a| + b = 0$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{10}{441}$ 2. $\frac{20}{441}$ 3. $\frac{1}{21}$ 4. $\frac{1}{20}$ 5. $\frac{1}{10}$

ตอบ 3

จำนวนแบบทั้งหมด : S มีสมาชิก $10 - (-10) + 1 = 21$ จำนวน \rightarrow เลือก a, b ได้ทั้งหมด 21^2 แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ : จะเห็นว่า a เป็นอะไรก็ได้ แต่ต้องเลือก b เป็นจำนวนตรงข้ามกับ $|a|$ (คือ $b = -|a|$)

(สังเกตว่า ถ้า $a \in S$ แล้ว $-|a| \in S$ เสมอ)

เช่น ถ้า $a = -10$ จะได้ $b = -|-10| = -10$

ถ้า $a = 10$ จะได้ $b = -|10| = -10$ เป็นต้น

ดังนั้น จะเลือก a ได้ 21 แบบ (a เป็นอะไรก็ได้ใน S) และ b จะถูกบังคับค่าให้สอดคล้องกับ a

จะได้จำนวนแบบที่ $|a| + b = 0$ ทั้งหมด 21 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{21}{21^2} = \frac{1}{21}$

26. ข้อมูล 20 จำนวน เรียงจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{20}$

โดยมีฐานนิยมมีค่าไม่เท่ากับ x_1 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ \bar{x} , มัธยฐานเท่ากับ m และพิสัยเท่ากับ R

ถ้าตัด x_1 ออกจะได้ข้อมูลชุดใหม่คือ x_2, x_3, \dots, x_{20} จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. ฐานนิยมของข้อมูลชุดใหม่ เท่ากับ ฐานนิยมของข้อมูลชุดเก่า
- ข. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ \bar{x}
- ค. มัธยฐานของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่าหรือเท่ากับ m
- ง. พิสัยของข้อมูลชุดใหม่ มากกว่า R

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

ตอบ 4

ก. ฐานนิยม คือ ข้อมูลที่ซ้ำมากที่สุด

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่ "ไม่เท่ากับฐานนิยม" ออก จะไม่มีผลกับการซ้ำมากที่สุดของฐานนิยมของข้อมูลตั้งต้น

เนื่องจาก x_1 ไม่เท่ากับฐานนิยม ดังนั้น หลังตัด x_1 ออก ฐานนิยมก็จะมีค่าเท่าเดิม \rightarrow ก. ถูก

ข. \bar{x} คือ ตัวกลางทาง "ค่าข้อมูล"

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก จะทำให้ข้อมูลที่เหลือมีค่าเฉลี่ยมากขึ้น

เนื่องจาก x_1 อยู่ตัวแรกในข้อมูลที่เรียงจากน้อยไปมากแล้ว ดังนั้น x_1 เป็นข้อมูลที่น้อยกว่าหรือเท่ากับข้อมูลตัวอื่นๆ

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ \bar{x} มากกว่าหรือเท่ากับของเดิม \rightarrow ข. ถูก

(จริงๆ จะบอกว่า "มากกว่า" ของเดิมเลยก็ได้ เพราะ x_1 จะน้อยกว่าฐานนิยม)

ค. มัธยฐาน คือ ตัวกลางทาง "ตำแหน่ง"

ดังนั้น การตัดข้อมูลที่มีตำแหน่งน้อยที่สุดออก จะทำให้ "ตำแหน่งตรงกลาง" ของข้อมูลชุดใหม่ "เลื่อนไปทางค่ามาก"

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ m มากกว่าหรือเท่ากับของเดิม \rightarrow ค. ถูก

ง. พิสัย = ข้อมูลมากที่สุด - ข้อมูลน้อยสุด

การตัดข้อมูลที้น้อยที่สุดออก จะทำให้ "น้อยสุดตัวใหม่" มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับของเดิม

ในขณะที่ ข้อมูลมากที่สุด มีค่าเหมือนเดิม \rightarrow พิสัยจะมีค่าน้อยลงหรือเท่าเดิม ("เท่าเดิม" ลบ "มากขึ้น" จะได้อ่าน้อยลง)

ดังนั้น การตัด x_1 ออก จะทำให้ R น้อยกว่าหรือเท่ากับของเดิม \rightarrow ง. ผิด

27. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{51}$ เป็นข้อมูลในลำดับเรขาคณิต โดยมี $a_1 = 1$ และอัตราส่วนร่วมของลำดับเท่ากับ $-\frac{5}{4}$ แล้วมัธยฐานเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\frac{5}{4})^{25}$ 2. $(-\frac{5}{4})^{23}$ 3. $-\frac{5}{4}$ 4. 1 5. $(\frac{5}{4})^{26}$

ตอบ 4

เนื่องจากลำดับนี้ ยังไม่ได้เรียงจากน้อยไปมาก จึงยังเอามาหามัธยฐานทันทีไม่ได้

แทน $a_1 = 1, r = -\frac{5}{4}$ จะได้ลำดับนี้คือ $1, (-\frac{5}{4})^1, (-\frac{5}{4})^2, (-\frac{5}{4})^3, (-\frac{5}{4})^4, \dots$

จะเห็นว่าในลำดับนี้มีพจน์แรก = 1 หลังจากนั้น ลำดับจะสลับระหว่าง $(-\frac{5}{4})^{\text{คี่}}$ และ $(-\frac{5}{4})^{\text{คู่}}$ (เมื่อ คี่, คู่ ≥ 1)

เนื่องจากลำดับนี้มี 51 ตัว ดังนั้น ลำดับนี้จะมี 1 อยู่ 1 พจน์, มี $(-\frac{5}{4})^{\text{คี่}}$ อยู่ 25 พจน์ และมี $(-\frac{5}{4})^{\text{คู่}}$ อยู่ 25 พจน์

$(-\frac{5}{4})^{\text{คี่}}$ จะเป็นลบ ซึ่งจะน้อยกว่า 1

$(-\frac{5}{4})^{\text{คู่}}$ จะเป็นบวก และเนื่องจาก $\frac{5}{4} > 1$ ยิ่งยกกำลังจะยิ่งมาก ดังนั้น $(-\frac{5}{4})^{\text{คู่}}$ จะมากกว่า 1

$$\underbrace{\left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}, \dots, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}, 1, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คี่}}, \dots, \left(-\frac{5}{4}\right)^{\text{คู่}}}_{\substack{25 \text{ พจน์ น้อยกว่า } 1 \\ \text{ตรงกลาง} \\ 25 \text{ พจน์ มากกว่า } 1}}$$

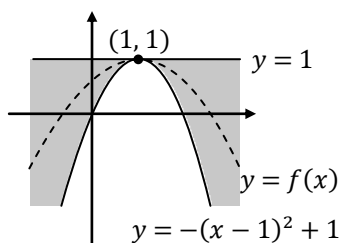
ดังนั้น เมื่อเรียงจากน้อยไปมาก จะได้ 1 อยู่ตำแหน่งตรงกลาง จะได้ มัธยฐาน = 1

28. ถ้าสมการ $y = f(x)$ มีกราฟเป็นพาราโบลาซึ่งผ่านจุด $(0, \frac{1}{2})$ และ $-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x แล้วพาราโบลา $y = f(x)$ ผ่านจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-1, 0)$ 2. $(-1, -1)$ 3. $(-2, 0)$
4. $(-2, -2)$ 5. $(3, -2)$

ตอบ 2

$-(x-1)^2 + 1 \leq f(x) \leq 1$ แสดงว่ากราฟของ $y = f(x)$ ต้องอยู่ในช่วง $y = -(x-1)^2 + 1$ และ $y = 1$ คือ ต้องอยู่ในบริเวณที่แรเงา ดังรูป



จะเห็นว่า $y = -(x-1)^2 + 1$ และ $y = 1$ สัมผัสกันที่ $(1, 1)$ พอดี

ดังนั้น $y = f(x)$ ต้องมีจุดยอด (h, k) ที่ $(1, 1)$ ตามเส้นประในรูปเท่านั้น

แทนในสูตร $a(x-h)^2 + k$ จะได้ $f(x) = a(x-1)^2 + 1$

$y = f(x)$ ผ่านจุด $(0, \frac{1}{2}) \rightarrow \frac{1}{2} = a(0-1)^2 + 1$

$-\frac{1}{2} = a$

จะได้ $y = -\frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1 \rightarrow$ ดูว่าตัวเลือกไหนแทนแล้วจริง

แทน $x = -1$ จะได้ $y = -\frac{1}{2}(-1 - 1)^2 + 1 = -1 \rightarrow$ 1. ผิด 2. ถูก \rightarrow ตอบ 2

แทน $x = -2$ จะได้ $y = -\frac{1}{2}(-2 - 1)^2 + 1 = -\frac{7}{2} \rightarrow$ 3. ผิด 4. ผิด

แทน $x = 3$ จะได้ $y = -\frac{1}{2}(3 - 1)^2 + 1 = -1 \rightarrow$ 5. ผิด

29. ให้ $S = \{-5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$$

ถ้าสุ่มหยิบ 1 เมทริกซ์จากเซต M แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $\det(A + B) = \det A + \det B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{100}$ 2. $\frac{3}{100}$ 3. $\frac{1}{20}$ 4. $\frac{1}{10}$ 5. $\frac{11}{100}$

ตอบ 4

จำนวนแบบทั้งหมด : นับดูจะเห็นว่า S มีสมาชิก 10 จำนวน (ไม่มี 0) ดังนั้น a, b, c, d เลือกได้ตัวละ 10 แบบ
จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = 10^4 แบบ

จำนวนแบบที่สนใจ : ให้ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ จะได้ $\det(A + B) = \det A + \det B$

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b+1 \\ c-1 & d \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} ad - (b+1)(c-1) &= (0)(0) - (-1)(1) + ad - bc \\ ad - bc + b - c + 1 &= 1 + ad - bc \\ b &= c \end{aligned}$$

ดังนั้น a, b, d เป็นอะไรก็ได้ (เลือกได้ตัวละ 10 แบบ) แต่ c ต้องเหมือนกับ b (เลือกไม่ได้) \rightarrow เลือกได้ 10^3 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{10^3}{10^4} = \frac{1}{10}$

30. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = \frac{\pi}{12}$ และ $d = \frac{\pi}{3}$

แล้ว $\sum_{n=1}^{65} \sin(a_n)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\sqrt{2}$ 2. $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 3. 0 4. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 5. $\sqrt{2}$

ตอบ 4

จาก $\sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$

$\sin \theta + \sin(\pi + \theta) = 0$ จะได้ว่า ถ้ามุมห่างกัน π แล้ว ผลรวมค่า \sin จะเป็น 0

โจทย์ให้ $d = \frac{\pi}{3}$ แปลว่า พจน์ถัดไปเพิ่มทีละ $\frac{\pi}{3} \rightarrow$ ถ้าถัดไป 3 พจน์ จะเพิ่ม = $3d = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$

เช่น a_4 อยู่ถัดจาก a_1 ไป 3 พจน์ \rightarrow ค่าเพิ่ม = $\pi \rightarrow \sin a_1 + \sin a_4 = 0 \dots(1)$

a_5 อยู่ถัดจาก a_2 ไป 3 พจน์ \rightarrow ค่าเพิ่ม = $\pi \rightarrow \sin a_2 + \sin a_5 = 0 \dots(2)$

a_6 อยู่ถัดจาก a_3 ไป 3 พจน์ \rightarrow ค่าเพิ่ม = $\pi \rightarrow \sin a_3 + \sin a_6 = 0 \dots(3)$

(1) + (2) + (3) จะได้ ผลบวก \sin ของ 6 พจน์แรก = 0

ทำแบบเดียวกันกับ 6 พจน์ถัดไป (a_7 คู่กับ a_{10} , a_8 คู่กับ a_{11} , a_9 คู่กับ a_{12}) ก็จะได้ผลบวก = 0 ด้วย
นั่นคือ 6 พจน์ ที่อยู่ติดกัน จะมีผลบวกค่า \sin เป็น 0 เสมอ

โจทย์ถามผลบวก \sin ของ 65 พจน์แรก \rightarrow แบ่งเป็น กลุ่มละ 6 พจน์ไม่ลงตัว

จะหาผลบวก \sin ของ 66 พจน์แรก แทน (ให้แบ่งกลุ่มละ 6 พจน์ลงตัว) แล้วค่อยหัก $\sin(a_{66})$ ที่เกินมาออกไป

เนื่องจาก 66 พจน์แรก แบ่งเป็นกลุ่มละ 6 พจน์ได้พอดี และทุกกลุ่มมีผลบวก \sin เป็น 0

ดังนั้น ผลบวก \sin ของ 66 พจน์แรก = 0

และ $\sin(a_{66}) = \sin(a_1 + (66 - 1)d)$

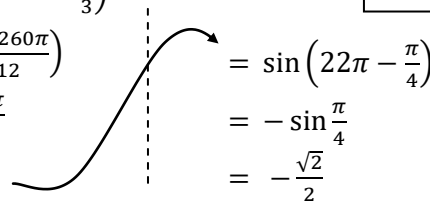
$$= \sin\left(\frac{\pi}{12} + 65 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{\pi + 260\pi}{12}\right)$$

$$= \sin\frac{261\pi}{12}$$

$$= \sin\frac{87\pi}{4}$$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$



$$= \sin\left(22\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -\sin\frac{\pi}{4}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

จะได้ ผลบวก \sin ของ 65 พจน์แรก = ผลบวก \sin ของ 66 พจน์แรก - $\sin(a_{66})$

$$= 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยละเอียด จาก อ.ป๋อง GTRmath

ขอบคุณ เฉลยละเอียดจาก คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นาย) ผู้เขียน Math E-book

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร