

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 62)

วันอาทิตย์ที่ 24 พฤศจิกายน 2562 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ S เป็นเซตของประพจน์ทั้งหมด นิยาม $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ โดยกำหนดให้สำหรับประพจน์ s ใดๆ

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นจริง} \\ 0 & \text{เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นเท็จ} \end{cases}$$

ถ้าประพจน์ p, q และ r สอดคล้องเงื่อนไข $f(p \vee q \vee r) = f(p)f(q)f(r)$ และ $f(p \wedge \sim q) = f(q)$

จงหาค่าของ $\frac{f(r)+f(\sim p)}{2} + f((\sim p) \rightarrow [q \rightarrow (r \wedge p)])$

2. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{10}(2^x + x - 17) = x - x \log_{10} 5$

3. กำหนดให้วงรี $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$

แนบในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ จุดยอด A, B และ C อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

ถ้าจุดยอด A มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ แล้ว วงรีนี้สัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุดใดบ้าง

4. กำหนดให้คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมดของสมการ $\tan x = x$ ถูกแทนด้วยลำดับเพิ่มแท้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$
 จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$

5. สำหรับความสัมพันธ์ r บน A ใดๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์**สมมูล** ถ้า r มีสมบัติทุกข้อดังต่อไปนี้

(i) $(a, a) \in r$ ทุก $a \in A$

(ii) ถ้า $(a, b) \in r$ แล้ว $(b, a) \in r$

(iii) ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว $(a, c) \in r$

จงหาจำนวนของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบนเซต $A = \{1, 2, 3\}$

6. สุ่มหยิบจำนวนมาหนึ่งจำนวนจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มมานี้มี
 ผลบวกของเลขโดดทั้งหมดเท่ากับ 8

7. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $|\vec{b}| = \sqrt{673}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2019$
 จงหาจำนวนจริง λ ทั้งหมดซึ่งทำให้มีเวกเตอร์ $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$
8. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2019 โดยที่ $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ และ $P(2020) = 2$
 จงหาจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $P(2019 + r) = 2019 + r$
9. จำนวนเชิงซ้อน z และ w สอดคล้องสมการ $|z - 1 + 3i| \leq 1$ และ $|w - 4 - i| \leq 1$
 จงหาค่าต่ำสุดของ $|z - w|$

10. จงหาจำนวนจริง x_0 ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ และให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้

$$t^3 A \operatorname{adj} \left(A - \frac{1}{t} I \right) = \operatorname{adj}(tA - I)$$

ในที่นี้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดใน S

12. สำหรับจำนวนจริง a กำหนดให้ $[a]$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $[x^2 - 3x + 2] = 3x - 7$

13. มีฉลากอยู่ $n + 1$ ใบอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ฉลากแต่ละใบมีหมายเลข $0, 1, 2, \dots, n$ กำกับอยู่ สุ่มหยิบฉลากมาครั้งละ 1 ใบ 4 ครั้ง แบบหยิบแล้วใส่คืน ถ้าความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขบนฉลากที่หยิบได้ในสองครั้งแรก และสองครั้งหลังมีค่าเท่ากัน มีค่าเท่ากับ $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จงหาค่าของ a, b และ c

14. กำหนดให้ $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ โดยที่ $f(x) = g(x)h(x)$ และ $h(x) > 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ ถ้าสมมติว่า $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2562}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$ $f(7) = 8$ และ $g'(7) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{h'(7)}{(h(7))^2}$

15. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a < b < c$ และ $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 16$ จงหาค่าของ $ac - b^2$

16. จงหาคู่อันดับ (m, n) มาหนึ่งคู่อันดับโดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่างกันซึ่งทำให้ $\frac{2}{109} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

17. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

18. จงหาค่าสูงสุดของดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม 1 หรือ -1 เท่านั้น

19. เกมเดินหมุดทอดลูกเต๋า มีกติกาคือ ให้เดินหมุดไปที่ละช่อง ตามจำนวนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 6 หน้าหนึ่งครั้ง โดยเมื่อเริ่มต้นเกม ให้หมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 0 และเกมจบลงเมื่อหมุดมาหยุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 7 หากตำแหน่งรวมเกิน 7 ให้เดินหมุดย้อนกลับหลัง เช่น ถ้าหมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 4 และทอดลูกเต๋าได้ตัวเลข 5 เมื่อเดินเสร็จสิ้น หมุดจะมาอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 5

0	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

จงหาความน่าจะเป็นที่เกมจะจบลงภายใน 5 ตา

20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = \sum_{k=0}^{2562} (k - 2562x)^2 \binom{2562}{k} x^k (1-x)^{2562-k}$

ตอนที่ 3 มี 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน

21. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ จุด E และ F แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน
 ดังนี้ $|AE| = |EF| = |FD|$ ถ้า $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$ และ $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$ แล้ว
 จงหาค่าของ $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

22. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{15} + 3^{15} + 5^{15} + \dots + (2n-1)^{15}}{n^{16}}$

23. สำหรับเมทริกซ์ X, Y และ Z ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า

X, Y, Z เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง a, b, c ถ้า $aX + bY + cZ = 0$ แล้ว $a = b = c = 0$

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และ

$$\begin{aligned} \text{สอดคล้องกับระบบสมการ} \quad AB - BA &= A + B \\ AC - CA &= \alpha A + C \\ BC - CB &= B + \beta C \end{aligned}$$

เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง จงหาค่า α และ β

24. จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $\left(\frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9} - 1} \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{27}}{2 \cos \frac{2\pi}{27} - 1} \right) + \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{81}}{2 \cos \frac{2\pi}{81} - 1} \right) + \dots$

25. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน a, b และ c เป็นรากของพหุนาม $p(z) = z^3 + 21z - 2562$

ให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมในระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดยอดอยู่ที่ a, b และ c ตามลำดับ และ

ให้ $\mathcal{E}$ เป็นวงรีที่แนบในสามเหลี่ยม ABC และสัมผัสกับจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เป็นโฟกัสของวงรี $\mathcal{E}$ แล้ว จงหาค่าของ $z_1^2 + z_2^2$

เฉลย

- | | | | |
|--|---|------------------------|---------------------------|
| 1. 1.5 | 8. 2 | 15. -4 | 22. 2048 |
| 2. 17 | 9. 3 | 16. (55, 5995) | 23. 1, -1 |
| 3. $(-\frac{1}{4}, 0), (\frac{7}{12}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12})$ | 10. $\frac{1}{3}, 1$ | 17. 16 | 24. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ |
| 4. π | 11. $\frac{17}{12}$ | 18. 4 | 25. -14 |
| 5. 5 | 12. $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$ | 19. $\frac{671}{1296}$ | |
| 6. 0.045 | 13. $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$ | 20. 640.5 | |
| 7. 3 | 14. -0.5 | 21. 21 | |

แนวคิด

1. กำหนดให้ S เป็นเซตของประพจน์ทั้งหมด นิยาม $f : S \rightarrow \{0, 1\}$ โดยกำหนดให้สำหรับประพจน์ s ใดๆ

$$f(s) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นจริง} \\ 0 & \text{เมื่อ } s \text{ มีค่าความจริงเป็นเท็จ} \end{cases}$$

ถ้าประพจน์ p, q และ r สอดคล้องเงื่อนไข $f(p \vee q \vee r) = f(p)f(q)f(r)$ และ $f(p \wedge \sim q) = f(q)$

จงหาค่าของ $\frac{f(r)+f(\sim p)}{2} + f((\sim p) \rightarrow [q \rightarrow (r \wedge p)])$

ตอบ 1.5

เนื่องจาก f จะได้ผลลัพธ์เป็น 0 หรือ 1 ดังนั้น $f(p)f(q)f(r)$ คือการคูณกันของ 0 หรือ 1

ซึ่งผลคูณนี้ จะเป็น 1 เมื่อ ทุกตัวเป็น 1 และจะเป็น 0 เมื่อมีตัวใดตัวหนึ่งเป็น 0

จะตรงกับการ “และ” ที่เป็นจริงเมื่อทุกตัวเป็นจริง และเป็นเท็จเมื่อมีตัวใดตัวหนึ่งเป็นเท็จ

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(p)f(q)f(r) &= f(p \wedge q \wedge r) \\ f(p \vee q \vee r) &= f(p \wedge q \wedge r) \\ p \vee q \vee r &\equiv p \wedge q \wedge r \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{โจทย์กำหนด} \\ f \text{ จับคู่จริง} \rightarrow 1 \text{ และ เท็จ} \rightarrow 0 \text{ แบบ 1 ต่อ 1} \end{array} \right\}$$

จะเห็นว่า $p \vee q \vee r$ สมมูลกับ $p \wedge q \wedge r$ ได้ 2 แบบ คือ p, q, r เป็นจริงทุกตัว กับ p, q, r เป็นเท็จทุกตัว

โจทย์กำหนดให้ $f(p \wedge \sim q) = f(q) \rightarrow$ จะลองแทนทั้งสองแบบ แล้วดูว่าใช้ได้หรือไม่

กรณี p, q, r เป็นจริงทุกตัว

$$\begin{aligned} f(T \wedge \sim T) &= f(T) \\ f(\text{ F }) &= f(T) \\ 0 &= 1 \quad \times \end{aligned}$$

กรณี p, q, r เป็นเท็จทุกตัว

$$\begin{aligned} f(F \wedge \sim F) &= f(F) \\ f(\text{ F }) &= f(F) \\ 0 &= 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

ดังนั้น สรุปได้ว่า p, q, r เป็นเท็จทุกตัว

$$\begin{aligned} \text{แทนในค่าที่โจทย์ถามจะได้} \quad & \frac{f(F)+f(\sim F)}{2} + f((\sim F) \rightarrow [F \rightarrow (F \wedge F)]) \\ &= \frac{f(F)+f(T)}{2} + f(T \rightarrow [T \quad]) \\ &= \frac{f(F)+f(T)}{2} + f(T \quad) \\ &= \frac{0+1}{2} + 1 = 1.5 \end{aligned}$$

2. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{10}(2^x + x - 17) = x - x \log_{10} 5$

ตอบ 17

$$\begin{aligned}\log_{10}(2^x + x - 17) &= x - x \log_{10} 5 \\ \log_{10}(2^x + x - 17) &= x(1 - \log_{10} 5) \\ \log_{10}(2^x + x - 17) &= x(\log_{10} 10 - \log_{10} 5) \\ \log_{10}(2^x + x - 17) &= x \left(\log_{10} \frac{10}{5} \right) \\ \log_{10}(2^x + x - 17) &= x(\log_{10} 2) \\ 2^x + x - 17 &= 10^{x(\log_{10} 2)} \\ 2^x + x - 17 &= (10^{\log_{10} 2})^x \\ 2^x + x - 17 &= \left(\frac{2}{10} \right)^x \\ x &= 17\end{aligned}$$

จะเห็นว่า $x = 17$ ทำให้ค่า $2^x + x - 17$ ที่อยู่หลัง $\log$ เป็นบวก จึงเป็นคำตอบได้

3. กำหนดให้วงรี $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$

แนบในสามเหลี่ยม ABC โดยที่ จุดยอด A, B และ C อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $x^2 + y^2 = 1$

ถ้าจุดยอด A มีพิกัดเป็น $(1, 0)$ แล้ว วงรีสัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุดใดบ้าง

ตอบ $\left(-\frac{1}{4}, 0\right), \left(\frac{7}{12}, \pm \frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

จัดรูปวงรี จะได้ $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$

$$\frac{\left(x - \frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = 1$$

นำวงรีไปวาดร่วมกับวงกลมหนึ่งหน่วย

กำหนดให้วงรีสัมผัสสามเหลี่ยม ABC ที่จุด D, E, F จะวาดได้ดังรูป

จุด D คือจุดยอดวงรีฝั่งซ้าย $\rightarrow$ จะมีพิกัดคือ $D\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}, 0\right) = D\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$

B กับ D อยู่ในแนวตั้งเดียวกัน จะมีพิกัด x เท่ากัน $\rightarrow$ จะได้พิกัด x ของจุด $B = -\frac{1}{4}$ ด้วย

B อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย $\rightarrow$ แทน $x = -\frac{1}{4}$ ในสมการวงกลมหนึ่งหน่วย เพื่อหาพิกัด y : $x^2 + y^2 = 1$

$$\begin{aligned}\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + y^2 &= 1 \\ y &= \pm \frac{\sqrt{15}}{4}\end{aligned}$$

แต่ B อยู่ใน $Q_2 \rightarrow$ จะได้พิกัด B คือ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$

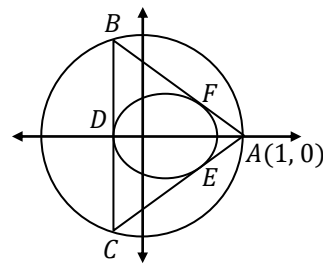
จุด $F(a, b)$ อยู่บนแนวเส้นตรง $A(1, 0)$ และ $B\left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}\right)$ ดังนั้น $\frac{b-0}{a-1} = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}-0}{-\frac{1}{4}-1}$

$$b = -\frac{\sqrt{15}}{5}(a-1) \quad \dots(*)$$

และ $F(a, b)$ อยู่บนวงรี $4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}y^2 = 1$

$$4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}b^2 = 1$$

$$4\left(a - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{16}{3}\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}(a-1)\right)^2 = 1$$



$$\begin{aligned}
 4\left(a^2 - \frac{a}{2} + \frac{1}{16}\right) + \frac{16}{5}(a^2 - 2a + 1) &= 1 \\
 80a^2 - 40a + 5 + 64a^2 - 128a + 64 &= 20 \\
 144a^2 - 168a + 49 &= 0 \\
 (12a - 7)^2 &= 0 \\
 a &= \frac{7}{12}
 \end{aligned}$$

↪ คูณ 20 ตลอด

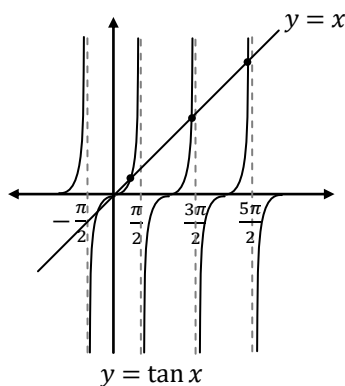
แทนใน (*) จะได้ $b = -\frac{\sqrt{15}}{5}\left(\frac{7}{12} - 1\right) = \frac{\sqrt{15}}{12} \rightarrow$ จะได้พิกัด F คือ $\left(\frac{7}{12}, \frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

และจากความสมมาตร จะได้พิกัด E คือ $\left(\frac{7}{12}, -\frac{\sqrt{15}}{12}\right)$

4. กำหนดให้คำตอบที่เป็นจำนวนจริงบวกทั้งหมดของสมการ $\tan x = x$ ถูกแทนด้วยลำดับเพิ่มแท้ $(a_n)_{n=1}^\infty$

จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n)$

ตอบ π



จะหาคำตอบของสมการ $\tan x = x$

โดยการวาดกราฟ $y = \tan x$ และ $y = x$ บนแกนคู่เดียวกัน

แล้วดูว่ากราฟตัดกันตรงไหน ดังรูป

จะเห็นว่าจุดตัดของกราฟทั้งสอง เข้าใกล้เส้นกำกับ $x = \frac{(2n+1)\pi}{2}$ ขึ้นเรื่อยๆ

$$\begin{aligned}
 \text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) &= \frac{(2(n+1)+1)\pi}{2} - \frac{(2n+1)\pi}{2} \\
 &= \frac{2n\pi + 3\pi - 2n\pi - \pi}{2} = \pi
 \end{aligned}$$

5. สำหรับความสัมพันธ์ r บน A ใดๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์สมมูล ถ้า r มีสมบัติทุกข้อดังต่อไปนี้

(i) $(a, a) \in r$ ทุก $a \in A$

(ii) ถ้า $(a, b) \in r$ แล้ว $(b, a) \in r$

(iii) ถ้า $(a, b) \in r$ และ $(b, c) \in r$ แล้ว $(a, c) \in r$

จงหาจำนวนของความสัมพันธ์สมมูลทั้งหมดบนเซต $A = \{1, 2, 3\}$

ตอบ 5

ต้องการว่ามีวิธีสร้าง r ได้กี่แบบ จาก $A \times A = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) \}$

จาก (i) จะได้ว่า $(1,1), (2,2), (3,3)$ ต้องอยู่ใน r เลือกไม่ได้

จาก (ii) จะแบ่งคู่อันดับที่เหลือเป็น 3 คู่ คือ $(1,2) \& (2,1)$ และ $(1,3) \& (3,1)$ และ $(2,3) \& (3,2)$

แต่ละคู่ ต้องอยู่ใน r ทั้งคู่ หรือไม่ก็ไม่ต้องอยู่ใน r ทั้งคู่ $\rightarrow$ จะแบ่งกรณีตามการมีอยู่ของ 3 คู่นี้

กรณีไม่มีเลยสักคู่: จะได้ $r = \{ (1,1), (2,2), (3,3) \}$ สอดคล้องกับ (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ มี 1 แบบ

กรณีมี 1 คู่: จะได้ $r = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1) \}$ ซึ่งสอดคล้องกับ (i), (ii), (iii) $\rightarrow$ มี 3 แบบ
 $r = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (1,3), (3,1) \}$
 $r = \{ (1,1), (2,2), (3,3), (2,3), (3,2) \}$

กรณีมี 2 คู่: จะเห็นว่า (iii) ไม่จริง เช่น ถ้ามี $(1,2) \& (2,1)$ กับ $(1,3) \& (3,1)$ แต่ไม่มี $(2,3) \& (3,2)$

การมี $(2,1)$ กับ $(1,3)$ จะบีบให้ต้องมี $(2,3) \rightarrow$ กรณีนี้จะเป็นไปไม่ได้

กรณีมี 3 คู่: คือทุกตัวสัมพันธ์กันหมด $\rightarrow$ (i), (ii), (iii) จะจริง $\rightarrow$ มี 1 แบบ

รวมทุกกรณี จะมี $1 + 3 + 1 = 5$ แบบ

6. สุ่มหยิบจำนวนมาหนึ่งจำนวนจากเซต $\{1, 2, 3, \dots, 999, 1000\}$ จงหาความน่าจะเป็นที่จำนวนที่สุ่มมานี้มีผลบวกของเลขโดดทั้งหมดเท่ากับ 8

ตอบ 0.045

จะนับเฉพาะเลขที่ไม่เกิน 3 หลัก (1 - 999) เพราะ 1000 มีผลบวกเลขโดดไม่เท่ากับ 8

จำนวนแบบที่สนใจ จะเท่ากับการแจกของเหมือนกัน 8 ชิ้นให้คน 3 คน (แต่ละคนแทนแต่ละหลัก) โดยที่แต่ละคนอาจไม่ได้ของ (มีบางหลักเป็น 0 ได้)

ใช้ Stars & Bars จะได้จำนวนแบบ $= \binom{8+3-1}{3-1} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{45}{1000} = 0.045$

7. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $|\vec{b}| = \sqrt{673}$ และ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2019$

จงหาจำนวนจริง λ ทั้งหมดซึ่งทำให้มีเวกเตอร์ $\vec{c} \in \mathbb{R}^3$ ที่ทำให้ $\vec{a} - \lambda \vec{b} = \vec{c} \times \vec{b}$

ตอบ 3

$$\begin{aligned} \vec{a} - \lambda \vec{b} &= \vec{c} \times \vec{b} \\ (\vec{a} - \lambda \vec{b}) \cdot \vec{b} &= (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} && \begin{cases} \text{ดอท } \vec{b} \text{ ทั้งสองฝั่ง} \\ \vec{c} \times \vec{b} \text{ ตั้งฉากกับ } \vec{b} \text{ เสมอ} \rightarrow \text{จะดอทกันได้ } 0 \end{cases} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} - \lambda \vec{b} \cdot \vec{b} &= 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} &= \lambda |\vec{b}|^2 \\ 2019 &= \lambda \sqrt{673}^2 \\ 3 &= \lambda \end{aligned}$$

8. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2019 โดยที่ $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ และ $P(2020) = 2$

จงหาจำนวนเต็มบวก r ที่ทำให้ $P(2019 + r) = 2019 + r$

ตอบ 2

จาก $P(1) = P(2) = \dots = P(2019) = 1$ จะได้สมการ $P(x) = 1$ มีรากคือ $1, 2, \dots, 2019$

$$P(x) - 1 = 0$$

ดังนั้น $P(x) - 1 = a(x-1)(x-2)\dots(x-2019) \dots (*)$

แทน $x = 2020$: $P(2020) - 1 = a(2020-1)(2020-2)\dots(2020-2019)$

$$2 - 1 = a(2019)(2018)\dots(1)$$

$$\frac{1}{2019!} = a$$

แทน $x = 2019 + r$ และ $a = \frac{1}{2019!}$ ใน $(*)$:

$$P(2019 + r) - 1 = \frac{1}{2019!} (2019 + r - 1)(2019 + r - 2) \dots (2019 + r - 2019)$$

$$2019 + r - 1 = \frac{1}{2019!} (2018 + r)(2017 + r) \dots (r)$$

$$\frac{(2018 + r) 2019!}{2019!} = \frac{(2018 + r)(2017 + r)(2016 + r) \dots (r)}{(2017 + r)(2016 + r) \dots (r)}$$

จะเห็นว่า ถ้า $r = 2$ จะได้ฝั่งขวา เท่ากับ $2019!$ พอดี

ถ้า $r < 2$ ฝั่งขวาจะน้อยลง และ ถ้า $r > 2$ ฝั่งขวาจะมากขึ้น $\rightarrow$ จะไม่มีคำตอบอื่นนอกจาก $r = 2$

9. จำนวนเชิงซ้อน z และ w สอดคล้องสมการ $|z - 1 + 3i| \leq 1$ และ $|w - 4 - i| \leq 1$

จงหาค่าต่ำสุดของ $|z - w|$

ตอบ 3

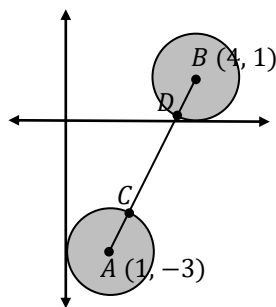
ให้ $z = x_1 + y_1i$ และ $w = x_2 + y_2i \rightarrow$ จะวาดกราฟของทั้งสองสมการ เพื่อหาบริเวณที่เป็นไปได้ของ z และ w

$$\begin{array}{rcl} |z - 1 + 3i| & \leq & 1 \\ |x_1 + y_1i - 1 + 3i| & \leq & 1 \\ (x_1 - 1)^2 + (y_1 + 3)^2 & \leq & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \quad \begin{array}{rcl} |w - 4 - i| & \leq & 1 \\ |x_2 + y_2i - 4 - i| & \leq & 1 \\ (x_2 - 4)^2 + (y_2 - 1)^2 & \leq & 1 \end{array}$$

ฝั่งขวาเป็น $\leq 1 \rightarrow$ จะได้ (x_1, y_1) คือจุดในวงกลม (รวมเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลาง $(1, -3)$ และรัศมี = 1

(x_2, y_2) คือจุดในวงกลม (รวมเส้นรอบวง) ที่มีจุดศูนย์กลาง $(4, 1)$ และรัศมี = 1

จะวาดได้ดังรูป



$$\begin{aligned} |z - w| &= |(x_1 + y_1i) - (x_2 + y_2i)| \\ &= |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i| \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \text{ระยะทางจาก } (x_1, y_1) \text{ ไปยัง } (x_2, y_2) \\ &= \text{ระยะทางระหว่างจุดในวงกลมทั้งสองวง} \end{aligned}$$

จากรูป จะเห็นว่า ระยะทางระหว่างจุดในวงกลมทั้งสองที่สั้นที่สุด คือ $CD = AB - AC - DB$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 - (-3))^2} - 1 - 1 \\ &= \sqrt{5} - 1 - 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

10. จงหาจำนวนจริง x_0 ทั้งหมดที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$

มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $x = x_0$

ตอบ $\frac{1}{3}, 1$

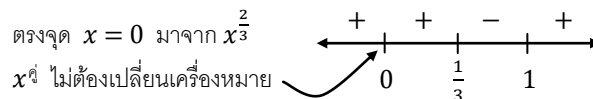
ค่าสูงสุด-ต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดตรงจุดที่ f' เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบ หรือ ลบเป็นบวก

$$f(x) = x^{1/3}(1 - x)^{2/3}$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{3}} \left(\frac{2}{3}(1 - x)^{-\frac{1}{3}}(-1) \right) + (1 - x)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$= -\frac{2x^{\frac{1}{3}}}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}} + \frac{(1-x)^{\frac{2}{3}}}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{-2x + (1-x)}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1-3x}{3(1-x)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}} = \frac{3x-1}{3(x-1)^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}}$$



จากเส้นจำนวน จะเห็นว่า $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมายที่ $x = \frac{1}{3}, 1$

เนื่องจาก $f(x)$ ต่อเนื่อง (เพราะ f มีแต่ $\sqrt[3]{}$ และไม่มีตัวส่วน) ดังนั้น ค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิดที่ $x = \frac{1}{3}, 1$

หมายเหตุ : $f'(x)$ จะหาค่าไม่ได้เมื่อ $x = 1$ แต่ก็ยังเกิดจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ เพราะ $f'(x)$ เปลี่ยนจากลบ (ขาด) เป็นบวก (ขาด) และ f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

11. ให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ และให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้

$$t^3 A \operatorname{adj} \left(A - \frac{1}{t} I \right) = \operatorname{adj}(tA - I)$$

ในที่นี้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3 จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดใน S

ตอบ $\frac{17}{12}$

ให้ $B = tA - I$ แทนในสมการ $t^3 A \operatorname{adj} \left(A - \frac{1}{t} I \right) = \operatorname{adj}(tA - I)$

$$\frac{1}{t} B = A - \frac{1}{t} I \quad t^3 A \operatorname{adj} \left(\frac{1}{t} B \right) = \operatorname{adj} B$$

$$t^3 A \det \left(\frac{1}{t} B \right) \left(\frac{1}{t} B \right)^{-1} = \operatorname{adj} B \quad \triangleright \operatorname{adj} A = \det A \cdot A^{-1}$$

$$t^3 A \frac{1}{t^3} \det B \quad t B^{-1} = \operatorname{adj} B \quad \triangleright \det(kA) = k^n \det A$$

$$t A \det B \quad B^{-1} = \operatorname{adj} B$$

$$t A \operatorname{adj} B = \operatorname{adj} B$$

$$tA \operatorname{adj} B - \operatorname{adj} B = \underline{0}$$

$$(tA - I) \operatorname{adj} B = \underline{0}$$

$$B \operatorname{adj} B = \underline{0}$$

$$\det B \quad I = \underline{0}$$

$$\det(tA - I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} t-1 & 2t & 3t \\ 0 & 4t-1 & 5t \\ 0 & 0 & 6t-1 \end{bmatrix} = 0$$

$$(t-1)(4t-1)(6t-1) = 0$$

$$t = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{6} \rightarrow \text{จะได้ผลรวม} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{12+3+2}{12} = \frac{17}{12}$$

12. สำหรับจำนวนจริง a กำหนดให้ $[a]$ เป็นจำนวนเต็มที่ยกที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ a

จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $[x^2 - 3x + 2] = 3x - 7$

ตอบ $\frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$

สมการจะเป็นจริง เมื่อ $3x - 7$ เป็นจำนวนเต็ม และ $x^2 - 3x + 2$ มากกว่า $3x - 7$ อยู่ไม่ถึง 1

แสดงว่า $3x$ ต้องเป็นจำนวนเต็ม

ให้ $3x = n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$$\rightarrow x = \frac{n}{3}$$

$$0 \leq (x^2 - 3x + 2) - (3x - 7) < 1$$

$$0 \leq x^2 - 6x + 9 < 1$$

$$0 \leq (x - 3)^2 < 1$$

$$\downarrow$$

$$\text{จริงเสมอ (เพราะผล} \quad -1 < x - 3 < 1$$

$$\text{กำลังสอง เป็นลบไม่ได้)} \quad 2 < x < 4$$

$$2 < \frac{n}{3} < 4$$

$$6 < n < 12$$

$$\text{แทนค่า } n \text{ จะได้ } x = \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{9}{3}, \frac{10}{3}, \frac{11}{3}$$

13. มีผลบวกอยู่ $n + 1$ ใบอยู่ในกล่องใบหนึ่ง ผลบวกแต่ละใบมีหมายเลข $0, 1, 2, \dots, n$ กำกับอยู่ สุ่มหยิบผลบวกมาครั้งละ 1 ใบ 4 ครั้ง แบบหยิบแล้วใส่คืน ถ้าความน่าจะเป็นที่ผลบวกของเลขบนผลบวกที่หยิบได้ในสองครั้งแรก และสองครั้งหลังมีค่าเท่ากัน มีค่าเท่ากับ $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จงหาค่าของ a, b และ c

ตอบ $\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1$

ผลบวกของผลบวก 2 ใบ จะมีค่าได้ตั้งแต่ $0 + 0 = 0$ ไปจนถึง $n + n = 2n$

จะแบ่งกรณีนับตามค่าผลบวกแต่ละค่าที่เป็นไปได้ ตั้งแต่ 0 ไปถึง $2n$

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = 0 : ผลบวกได้ 0 จะมี $(0, 0)$ แบบเดียว

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 1 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 1 แบบ → ได้จำนวนแบบ = $1 \times 1 = 1^2$ แบบ

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = 1 : ผลบวกได้ 1 จะมี $(0, 1), (1, 0)$ รวม 2 แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 2 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 2 แบบ → ได้จำนวนแบบ = $2 \times 2 = 2^2$ แบบ

:

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = n : ผลบวกได้ n จะมี $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$ รวม $n + 1$ แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ $n + 1$ แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ $n + 1$ แบบ → ได้จำนวนแบบ = $(n + 1)^2$ แบบ

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = $n + 1$: กรณีนี้จะเริ่มเปลี่ยนไป เพราะตัวเลขบนผลบวกมีถึงแค่ n

ผลบวกได้ $n + 1$ จะเหลือแค่ $(1, n), (2, n-1), \dots, (n, 1)$ รวม n แบบ

→ สองครั้งแรกเลือกได้ n แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ n แบบ → ได้จำนวนแบบ = n^2 แบบ

:

กรณีผลบวกสองครั้งแรก = สองครั้งหลัง = $2n$: ผลบวกได้ $2n$ จะมี (n, n) แค่แบบเดียว

→ สองครั้งแรกเลือกได้ 1 แบบ สองครั้งหลังเลือกได้ 1 แบบ → ได้จำนวนแบบ = $1 \times 1 = 1^2$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ = $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n + 1)^2 + n^2 + \dots + 2^2 + 1^2$

$$= 2(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) + (n + 1)^2$$

$$= 2\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) + (n + 1)^2 \quad \text{ดังตัวรวม } n + 1$$

$$= (n + 1)\left(\frac{n(2n+1)}{3} + n + 1\right)$$

$$= (n + 1)\left(\frac{2n^2+n+3n+3}{3}\right) = (n + 1)\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right)$$

และมีผลบวก $n + 1$ ใบ → หยิบ 4 ครั้ง จะหยิบได้ $(n + 1)^4$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{(n+1)\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right)}{(n+1)^4} = \frac{\left(\frac{2n^2+4n+3}{3}\right)}{(n+1)^3} \rightarrow$ เทียบกับรูป $\frac{an^2+bn+c}{(n+1)^3}$ จะได้ $a = \frac{2}{3}, b = \frac{4}{3}, c = 1$

14. กำหนดให้ $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ โดยที่ $f(x) = g(x)h(x)$ และ $h(x) > 0$ ทุก $x \in \mathbb{R}$

ถ้าสมมติว่า $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2562}$ สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{R}$

$f(7) = 8$ และ $g'(7) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $\frac{h'(7)}{(h(7))^2}$

ตอบ -0.5

$\frac{h'(7)}{(h(7))^2}$ จะมีส่วนคล้ายกับดิฟเฟอเรนเชียล $\frac{\text{ส่วนบน} - \text{ส่วนล่าง}}{\text{ส่วน}^2} \rightarrow$ จะพยายามจัดรูปให้ $h(x)$ เป็นตัวหาร

$$f(x) = g(x)h(x)$$

$$\frac{f(x)}{h(x)} = g(x)$$

$$\frac{h(x)f'(x) - f(x)h'(x)}{(h(x))^2} = g'(x)$$

$$\frac{h(7)f'(7)-f(7)h'(7)}{(h(7))^2} = g'(7)$$

$$\frac{h(7)f'(7)-8h'(7)}{(h(7))^2} = 4 \dots (*)$$

จะหา $f'(7)$ มาแทนใน (*) โดยพยายามใช้ $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{2562}$ ที่โจทย์กำหนดให้

จากนิยามของอนุพันธ์ จะได้ $f'(7) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+h)-f(7)}{h}$

$$|f'(7)| = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(7+h)-f(7)|}{|h|}$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|7+h-7|^{2562}}{|h|}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|^{2562}}{|h|}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} |h|^{2561} = 0 \rightarrow \text{จะสรุปได้ว่า } f'(7) = 0$$

แทน $f'(7) = 0$ ใน (*) จะได้ $\frac{h(7)(0) - 8h'(7)}{(h(7))^2} = 4$

$$\frac{-8h'(7)}{(h(7))^2} = 4$$

$$\frac{h'(7)}{(h(7))^2} = \frac{4}{-8} = -0.5$$

15. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $a < b < c$ และ $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 16$

จงหาค่าของ $ac - b^2$

ตอบ -4

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix} = 16$$

$$\begin{aligned} bc^2 + ca^2 + ab^2 - a^2b - b^2c - c^2a &= 16 \\ bc^2 - c^2a + ca^2 - b^2c + ab^2 - a^2b &= 16 \end{aligned} \rightarrow \text{เรียงพจน์ตามเลขชี้กำลังของ } c$$

$$\begin{aligned} (b-a)c^2 + (a^2-b^2)c + ab^2 - a^2b &= 16 \\ (b-a)c^2 + (a-b)(a+b)c + ab(b-a) &= 16 \\ (b-a)c^2 - (b-a)(a+b)c + ab(b-a) &= 16 \\ (b-a)(c^2 - (a+b)c + ab) &= 16 \\ (b-a)(c-a)(c-b) &= 16 \end{aligned}$$

เนื่องจาก $a < b < c$ ดังนั้น ทุกวงเล็บทางซ้ายจะเป็นจำนวนเต็มบวกทั้งหมด

และจะเห็นว่าฝั่งซ้าย วงเล็บแรก บวก วงเล็บที่สาม จะได้วงเล็บที่สองพอดี ($b-a + c-b = c-a$)

แยกตัวประกอบ 16 ตามเงื่อนไขดังกล่าว จะได้แบบเดียว คือ $2 \times 4 \times 2$

จะได้ $b-a = 2$ และ $c-a = 4$

$$b = a+2 \quad c = a+4$$

ดังนั้น $ac - b^2 = a(a+4) - (a+2)^2$

$$= a^2 + 4a - (a^2 + 4a + 4) = -4$$

16. จงหาคู่อันดับ (m, n) มาหนึ่งคู่อันดับโดยที่ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่างกันซึ่งทำให้ $\frac{2}{109} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$

ตอบ (55, 5995)

$$\begin{aligned}\frac{2}{109} &= \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \\ \frac{2}{109} &= \frac{n+m}{mn} \\ 2mn &= 109n + 109m \\ 2mn - 109n - 109m &= 0 \\ n(2m - 109) - 109m &= 0 \\ n(2m - 109) - 109m + \frac{109^2}{2} &= \frac{109^2}{2} \quad \text{บวก } \frac{109^2}{2} \text{ เพื่อให้เกิด } 2m - 109 \\ n(2m - 109) - \frac{109}{2}(2m - 109) &= \frac{109^2}{2} \\ (2m - 109)\left(n - \frac{109}{2}\right) &= \frac{109^2}{2} \\ (2m - 109)(2n - 109) &= 109^2\end{aligned}$$

เนื่องจาก m กับ n ต่างกัน ดังนั้น $2m - 109 \neq 2n - 109$

109 เป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น 109^2 จะแยกเป็นผลคูณของสองจำนวนที่ต่างกันได้แบบเดียว คือ 1×109^2

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2m - 109 & = & 1 & & 2n - 109 & = & 109^2 \\ m & = & 55 & & 2n & = & 109(110) = 11990 \\ & & & & n & = & 5995\end{array}$$

(หรือถ้าสลับตัวประกอบกัน ก็จะได้ $m = 5995$, $n = 55$)

17. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$

ตอบ 16

$$\begin{aligned}\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x &= 2 \\ \log_{2^2} \log_2 x + \log_2 \log_{2^2} x &= 2 \\ \frac{1}{2} \log_2 \log_2 x + \log_2 \left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) &= 2 \\ \log_2 (\log_2 x)^{\frac{1}{2}} + \log_2 \left(\frac{1}{2} \log_2 x\right) &= 2 \\ \log_2 \left((\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \log_2 x\right) &= 2 \\ (\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \log_2 x &= 2^2 = 4 \\ (\log_2 x)^{\frac{1}{2}} \cdot \log_2 x &= 8 \\ (\log_2 x)^{\frac{1}{2} + 1} &= 8 \\ \log_2 x &= 8^{\frac{2}{3}} = 4 \\ x &= 2^4 = 16\end{aligned}$$

18. จงหาค่าสูงสุดของดีเทอร์มิแนนต์ของเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม 1 หรือ -1 เท่านั้น

ตอบ 4

$$\det \text{ของเมทริกซ์ } 3 \times 3 \text{ คือ } \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei + bfg + cdh - gec - hfa - idb$$

เนื่องจากสมาชิกทุกตัวเป็น 1 หรือ -1 ดังนั้น aei , bfg , cdh , gec , hfa , idb จะเป็นได้แค่ 1 หรือ -1

ดังนั้น ค่า **det** จะมากที่สุดเมื่อ aei, bfg, cdh มีค่าเป็น 1 และ gec, hfa, idb มีค่าเป็น -1

ถ้าลองพยายามแทนค่า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ให้ได้ตามเงื่อนไขนี้ดู จะพบว่าแทนยังไงก็ไม่ได้

$$\begin{array}{ll}
 aei = 1 & \\
 \text{นั่นเป็นเพราะ } bfg = 1 & \text{คูณ 3 สมการนี้จะได้ } (aei)(bfg)(cdh) = (1)(1)(1) \\
 cdh = 1 & abcdefghi = 1 \\
 gec = -1 & \\
 \text{แต่ } hfa = -1 & \text{คูณ 3 สมการนี้จะได้ } (gec)(hfa)(idb) = (-1)(-1)(-1) \\
 idb = -1 & abcdefghi = -1
 \end{array}$$

↻ ขัดแย้งกันเอง

ดังนั้น จึงเป็นไปได้ที่จะได้ **det** จะมีค่าเท่ากับ 6

แต่ถ้ายอมให้เครื่องหมายผิดได้ 1 พจน์ แล้วลองแทนค่า $a, b, c, d, e, f, g, h, i$ ดู จะพบว่าแทนได้

เช่น ให้ทุกตัวเป็น 1 หก ยกเว้น a กับ e ให้เป็น -1

จะได้ aei, bfg, cdh เป็น 1 และ gec, hfa เป็น -1 แต่ idb ไม่ได้ -1

จะได้ **det** สูงสุดคือ $1 + 1 + 1 - (-1) - (-1) - 1 = 4$

19. เกมเดินหมุดทอดลูกเต๋า มีกติกาคือ ให้เดินหมุดไปที่ช่อง ตามจำนวนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 6 หน้าหนึ่งครั้ง โดยเมื่อเริ่มต้นเกม ให้หมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 0 และเกมจบลงเมื่อหมุดมาหยุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 7 หากตำแหน่งรวมเกิน 7 ให้เดินหมุดย้อนกลับหลัง เช่น ถ้าหมุดอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 4 และทอดลูกเต๋าได้ตัวเลข 5 เมื่อเดินเสร็จสิ้น หมุดจะมาอยู่ที่ตำแหน่งหมายเลข 5

0	1	2	3	4	5	6	7
---	---	---	---	---	---	---	---

จงหาความน่าจะเป็นที่เกมจะจบลงภายใน 5 ตา

ตอบ $\frac{671}{1296}$

จะใช้วิธีหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ตรงข้าม คือ หาความน่าจะเป็นที่เกมจะไม่จบใน 5 ตา แล้วเอา 1 ตั้งลบ

$$\begin{aligned}
 P(\text{ไม่จบใน 5 ตา}) &= P(\text{ไม่จบในตาที่ 1 และ ไม่จบในตาที่ 2 และ ... และ ไม่จบในตาที่ 5}) \\
 &= P(\text{ไม่จบในตาที่ 1}) \times P(\text{ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ}) \times P(\text{ไม่จบในตาที่ 3 เมื่อตาที่ 2 ไม่จบ}) \times \dots \times P(\text{ไม่จบในตาที่ 5 เมื่อตาที่ 4 ไม่จบ})
 \end{aligned}$$

ตาแรก ยังไงก็ไม่จบ เพราะห่างจุดหมาย 7 ช่อง แต่แต้มลูกเต๋าส่งสุดคือ 6 $\rightarrow P(\text{ไม่จบในตาที่ 1}) = 1$

เมื่อตาแรกไม่จบ หมุดจะเดินไปหยุดที่ช่อง 1 ถึง 6 ช่องใดช่องหนึ่ง ซึ่งไม่ว่าหยุดที่ช่องไหน จะมีแต้มลูกเต๋ารูปแบบเดียวที่จะทำให้จบเกมได้ในครั้งถัดไป (เช่น ถ้าหยุดที่ช่อง 1 ต้องโยนได้แต้ม 6 ถ้าหยุดที่ช่อง 2 ต้องโยนได้แต้ม 5 ...)

นั่นคือ จะมีแต้มลูกเต๋า 5 แบบ ที่จะทำให้ไม่จบในตาที่ 2 $\rightarrow P(\text{ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ}) = \frac{5}{6}$

เมื่อตาที่สองไม่จบ หมุดจะเดินไปหยุดที่ช่อง 2 ถึง 6 ช่องใดช่องหนึ่ง (เดินกลับได้อย่างมาก 5 ช่อง) แต่ไม่ว่าอยู่ที่ช่องไหน ก็จะมีแต้มลูกเต๋ารูปแบบเดียวที่จะทำให้จบเกมได้ในครั้งถัดไป (เช่น ถ้าหยุดที่ช่อง 2 ต้องโยนได้แต้ม 5 ถ้าหยุดในช่องที่ 3 ต้องโยนได้แต้ม 6 ...) $\rightarrow$ คิดแบบเดิม จะได้ $P(\text{ไม่จบในตาที่ 2 เมื่อตาที่ 1 ไม่จบ}) = \frac{5}{6}$

จะเห็นว่า ความน่าจะเป็นที่เกมจะไม่จบในตาถัดไป เมื่อกำหนดให้ตาที่แล้วไม่จบ $= \frac{5}{6}$ เสมอ

$$\text{ดังนั้น } P(\text{ไม่จบใน 5 ตา}) = 1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{625}{1296} \rightarrow P(\text{จบใน 5 ตา}) = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296}$$

20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(x) = \sum_{k=0}^{2562} (k - 2562x)^2 \binom{2562}{k} x^k (1-x)^{2562-k}$

ตอบ 640.5

ให้ $n = 2562$ และ เขียนย่อ $\sum_{k=0}^{2562}$ ด้วย $\sum$ เฉยๆ จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \sum (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k \frac{(1-x)^n}{(1-x)^k} \\ &= (1-x)^n \sum (k - nx)^2 \binom{n}{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \\ &= (1-x)^n \sum (k^2 - 2knx + n^2x^2) \binom{n}{k} a^k \quad \left. \begin{array}{l} \text{ให้ } a = \frac{x}{1-x} \end{array} \right\} \\ &= (1-x)^n (\sum k^2 \binom{n}{k} a^k - 2nx \sum k \binom{n}{k} a^k + n^2x^2 \sum \binom{n}{k} a^k) \dots (*) \end{aligned}$$

จะหา $\sum \binom{n}{k} a^k$, $\sum k \binom{n}{k} a^k$ และ $\sum k^2 \binom{n}{k} a^k$ ใน (*) โดยเอาทฤษฎีบททวินามมาดิฟไปเรื่อยๆ ดังนี้

$$\text{จากทวินาม} \quad \sum \binom{n}{k} a^k = (a+1)^n$$

$$\text{ดิฟ จะได้} \quad \sum k \binom{n}{k} a^{k-1} = n(a+1)^{n-1} \rightarrow \text{คูณ } a \text{ ทั้งสองข้าง จะได้ } \sum k \binom{n}{k} a^k = na(a+1)^{n-1}$$

$$\text{ดิฟ จะได้} \quad \sum k(k-1) \binom{n}{k} a^{k-2} = n(n-1)(a+1)^{n-2}$$

$$\sum k(k-1) \binom{n}{k} a^k = n(n-1)a^2(a+1)^{n-2}$$

$$\sum k^2 \binom{n}{k} a^k - \sum k \binom{n}{k} a^k = n(n-1)a^2(a+1)^{n-2}$$

$$\sum k^2 \binom{n}{k} a^k = n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} + na(a+1)^{n-1}$$

แทนทั้ง 3 สูตรใน (*) จะได้

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^n (n(n-1)a^2(a+1)^{n-2} + na(a+1)^{n-1} - 2n^2xa(a+1)^{n-1} + n^2x^2(a+1)^n) \\ &= (1-x)^n \left(n(n-1) \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-2} + n \left(\frac{x}{1-x}\right) \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} - \right. \\ &\quad \left. 2n^2x \left(\frac{x}{1-x}\right) \left(\frac{1}{1-x}\right)^{n-1} + n^2x^2 \left(\frac{1}{1-x}\right)^n \right) \quad \left. \begin{array}{l} a = \frac{x}{1-x} \rightarrow a+1 = \frac{1}{1-x} \end{array} \right\} \\ &= n(n-1)x^2 + nx - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\ &= -nx^2 + nx \end{aligned}$$

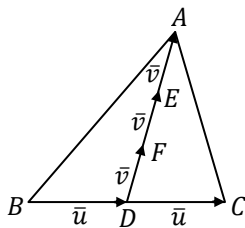
$$\text{ใช้สูตร } \frac{4ac-b^2}{4a} \text{ จะได้ค่าสูงสุดคือ } \frac{4(-n)(0)-n^2}{4(-n)} = \frac{n}{4} = \frac{2562}{4} = 640.5$$

21. ในรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ จุด E และ F แบ่ง AD ออกเป็นสามส่วนเท่าๆ กัน

ดังนี้ $|AE| = |EF| = |FD|$ ถ้า $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 4$ และ $\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} = -1$ แล้ว

จงหาค่าของ $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2$

ตอบ 21



ให้ $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} = \vec{u}$ และให้ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{EA} = \vec{v}$

$$\begin{array}{lcl} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} & = & 4 \\ (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) & = & 4 \\ (\vec{u} + 3\vec{v}) \cdot (-\vec{u} + 3\vec{v}) & = & 4 \\ -|\vec{u}|^2 + 9|\vec{v}|^2 & = & 4 \quad \dots(1) \end{array} \quad \begin{array}{lcl} \overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{CF} & = & -1 \\ (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}) \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}) & = & -1 \\ (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v}) & = & -1 \\ -|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 & = & -1 \quad \dots(2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} (1) - (2) : 8|\vec{v}|^2 & = & 5 \\ |\vec{v}|^2 & = & \frac{5}{8} \end{array} \quad \begin{array}{lcl} (2) : -|\vec{u}|^2 + \frac{5}{8} & = & -1 \\ \frac{13}{8} & = & |\vec{u}|^2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CA}|^2 &= |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}|^2 \\
 &= |-3\vec{v} - \vec{u}|^2 + |2\vec{u}|^2 + |-\vec{u} + 3\vec{v}|^2 \\
 &= 9|\vec{v}|^2 + 6\vec{v} \cdot \vec{u} + |\vec{u}|^2 + 4|\vec{u}|^2 + |\vec{u}|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9|\vec{v}|^2 \\
 &= 18|\vec{v}|^2 + 6|\vec{u}|^2 \\
 &= 18 \cdot \frac{5}{8} + 6 \cdot \frac{13}{8} = \frac{45+39}{4} = 21
 \end{aligned}$$

22. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{15} + 3^{15} + 5^{15} + \dots + (2n-1)^{15}}{n^{16}}$

ตอบ 2048

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^{15} + 3^{15} + 5^{15} + \dots + (2n-1)^{15}}{n^{16}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{เขียนย่อ } \sum_{i=1}^n \text{ ด้วย } \sum \text{ เฉยๆ} \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum (2i-1)^{15}}{n^{16}} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \left(\binom{15}{0} (2i)^{15} - \binom{15}{1} (2i)^{14} + \binom{15}{2} (2i)^{13} - \dots - \binom{15}{15} \right)}{n^{16}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ทฤษฎีบททวินาม} \end{array} \right\} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\binom{15}{0} 2^{15} \sum i^{15}}{n^{16}} - \frac{\binom{15}{1} 2^{14} \sum i^{14}}{n^{16}} + \frac{\binom{15}{2} 2^{13} \sum i^{13}}{n^{16}} - \dots - \frac{\binom{15}{15} \sum 1}{n^{16}} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{15}{0} 2^{15} \sum i^{15}}{n^{16}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{พจน์ที่ 2 เป็นต้นไป ดีกรีเศษจะน้อยกว่าส่วน} \\ \text{เช่น } \frac{\sum i^{14}}{n^{16}} \leq \frac{\sum n^{14}}{n^{16}} = \frac{n^{15}}{n^{16}} \text{ ทำให้ลิมิตเป็น 0} \end{array} \right\} \\
 &= 2^{15} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum i^{15}}{n^{16}} \quad \dots (*)
 \end{aligned}$$

หมายเหตุ : ถ้าดูแนวโน้มจากสูตรผลบวกดีกรีต่ำๆ

$$\begin{aligned}
 \sum i &= \frac{n(n+1)}{2} \rightarrow \text{พจน์ดีกรีสูงสุดคือ } \frac{n^2}{2} \\
 \sum i^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rightarrow \text{พจน์ดีกรีสูงสุดคือ } \frac{2n^3}{6} = \frac{n^3}{3} \\
 \sum i^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 \rightarrow \text{พจน์ดีกรีสูงสุดคือ } \left(\frac{n^2}{2} \right)^2 = \frac{n^4}{4}
 \end{aligned}$$

จะพอเดาได้ว่า พจน์ดีกรีสูงสุดของ $\sum i^{15}$ คือ $\frac{n^{16}}{16}$ เอาไปแทนใน (*) ก็จะได้คำตอบ

หรือจะหา $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum i^{15}}{n^{16}}$ อีกแบบได้ดังนี้ :

$$\begin{aligned}
 (i+1)^{16} &= \binom{16}{0} i^{16} + \binom{16}{1} i^{15} + \binom{16}{2} i^{14} + \dots + 1 \\
 (i+1)^{16} - i^{16} &= \binom{16}{1} i^{15} + \binom{16}{2} i^{14} + \dots + 1 \\
 \sum ((i+1)^{16} - i^{16}) &= \sum \left(\binom{16}{1} i^{15} + \binom{16}{2} i^{14} + \dots + 1 \right) \\
 (n+1)^{16} - 1^{16} &= \sum \left(\binom{16}{1} i^{15} + \binom{16}{2} i^{14} + \dots + 1 \right) \\
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{16} - 1}{n^{16}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum \binom{16}{1} i^{15}}{n^{16}} + \underbrace{\frac{\sum \binom{16}{2} i^{14}}{n^{16}} + \dots + \frac{\sum 1}{n^{16}}}_{\text{ลิมิตเป็น 0}} \right) \\
 1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum \binom{16}{1} i^{15}}{n^{16}} \\
 \frac{1}{16} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum i^{15}}{n^{16}}
 \end{aligned}$$

แทนใน (*) จะได้คำตอบคือ $2^{15} \cdot \frac{1}{16} = 2^{11} = 2048$

23. สำหรับเมทริกซ์ X, Y และ Z ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ จะกล่าวว่า

X, Y, Z เป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน ก็ต่อเมื่อ ทุกจำนวนจริง a, b, c ถ้า $aX + bY + cZ = 0$ แล้ว

$$a = b = c = 0$$

กำหนดให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด $n \times n$ ซึ่งเป็นอิสระเชิงเส้นต่อกัน และ

$$\begin{aligned} \text{สอดคล้องกับระบบสมการ} \quad AB - BA &= A + B \\ AC - CA &= \alpha A + C \\ BC - CB &= B + \beta C \end{aligned}$$

เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริง จงหาค่า α และ β

ตอบ 1, -1

$$\begin{aligned} \text{จาก } AB - BA &= A + B \quad \dots(1) & \rightarrow \text{จะเอา 3 สมการ มาหาทางหักล้างกัน เพื่อให้พจน์ที่เป็นเมทริกซ์คูณกัน} \\ AC - CA &= \alpha A + C \quad \dots(2) & (AB, BA, AC, CA, BC, CB) \text{ ตัดกันให้หมด} \\ BC - CB &= B + \beta C \quad \dots(3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) + (3): \quad AC - CA + BC - CB &= \alpha A + C + B + \beta C \\ AC + BC - CA - CB &= \alpha A + C + B + \beta C \\ \text{จาก (1)} \quad \begin{cases} (A + B)C - C(A + B) &= \alpha A + B + C + \beta C \\ (AB - BA)C - C(AB - BA) &= \alpha A + B + C + \beta C \\ ABC - BAC - CAB + CBA &= \alpha A + B + C + \beta C \quad \dots(4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) + \beta(2): \quad AB - BA + \beta(AC - CA) &= A + B + \beta(\alpha A + C) \\ AB + \beta AC - BA - \beta CA &= A + B + \alpha\beta A + \beta C \\ \text{จาก (3)} \quad \begin{cases} A(B + \beta C) - (B + \beta C)A &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ A(BC - CB) - (BC - CB)A &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ ABC - ACB - BCA + CBA &= A + \alpha\beta A + B + \beta C \\ -ABC + ACB + BCA - CBA &= -A - \alpha\beta A - B - \beta C \quad \dots(5) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(1) - (3): \quad \alpha(AB - BA) - (BC - CB) &= \alpha(A + B) - (B + \beta C) \\ \alpha AB + CB - \alpha BA - BC &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ \text{จาก (2)} \quad \begin{cases} (\alpha A + C)B - B(\alpha A + C) &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ (AC - CA)B - B(AC - CA) &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ ACB - CAB - BAC + BCA &= \alpha A + \alpha B - B - \beta C \\ -ACB + CAB + BAC - BCA &= -\alpha A - \alpha B + B + \beta C \quad \dots(6) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) + (5) + (6) \text{ ผังซ้ายจะตัดกันหมด: } 0 &= -A - \alpha\beta A - \alpha B + B + C + \beta C \\ 0 &= -(1 + \alpha\beta)A - (\alpha - 1)B + (1 + \beta)C \end{aligned}$$

แต่ A, B, C เป็นอิสระเชิงเส้นกัน ดังนั้น $1 + \alpha\beta = 0$ และ $\alpha - 1 = 0$ และ $1 + \beta = 0$

ซึ่งจะได้ $\alpha = 1$ และ $\beta = -1$

$$24. \text{ จงหาผลบวกของอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ } \left(\frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9} - 1} \right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{27}}{2 \cos \frac{2\pi}{27} - 1} \right) + \left(\frac{1}{9} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{81}}{2 \cos \frac{2\pi}{81} - 1} \right) + \dots$$

$$\text{ตอบ } \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

จะแยกแต่ละพจน์เป็นผลลบ ที่ตัวตั้งมีมุมเป็นสามเท่าของตัวลบ เพื่อทำเทเลสโคปิก

$$\begin{aligned} \text{ให้ } \theta = \frac{\pi}{9} \text{ จะได้ } \frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9} - 1} &= \frac{\sin 2\theta}{2 \cos 2\theta - 1} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - 3 \sin^2 \theta} \quad \text{ } \div \cos^2 \theta \text{ ทั้งเศษและส่วน} \\ &= \frac{2 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \quad \dots(*) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า (*) มีบางส่วนคล้ายกับสูตร $\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$

$$\begin{aligned} \tan 3\theta &= \frac{\tan \theta (3 - \tan^2 \theta)}{1 - 3 \tan^2 \theta} \quad \rightarrow \times 3 \text{ ให้ฝั่งขวามี } 3 \tan^2 \theta \text{ เหมือนตัวส่วน} \\ 3 \tan 3\theta &= \frac{\tan \theta (9 - 3 \tan^2 \theta)}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\ 3 \tan 3\theta &= \frac{\tan \theta (8 + 1 - 3 \tan^2 \theta)}{1 - 3 \tan^2 \theta} \\ 3 \tan 3\theta &= \tan \theta \left(\frac{8}{1 - 3 \tan^2 \theta} + 1 \right) \\ 3 \tan 3\theta &= \frac{8 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} + \tan \theta \\ \frac{3 \tan 3\theta}{4} - \frac{\tan \theta}{4} &= \frac{2 \tan \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} \end{aligned}$$

รวมกับ (*) จะสรุปได้ว่า $\frac{\sin 2\theta}{2 \cos 2\theta - 1} = \frac{3 \tan 3\theta}{4} - \frac{\tan \theta}{4}$

ดังนั้น $\frac{\sin \frac{2\pi}{9}}{2 \cos \frac{2\pi}{9} - 1} = \frac{3 \tan \frac{3\pi}{9}}{4} - \frac{\tan \frac{\pi}{9}}{4} = \frac{3 \tan \frac{\pi}{3}}{4} - \frac{\tan \frac{\pi}{9}}{4}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{27}}{2 \cos \frac{2\pi}{27} - 1} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3 \tan \frac{3\pi}{27}}{4} - \frac{\tan \frac{\pi}{27}}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{9}}{4} - \frac{\tan \frac{\pi}{27}}{3 \cdot 4} \\ \frac{1}{9} \cdot \frac{\sin \frac{2\pi}{81}}{2 \cos \frac{2\pi}{81} - 1} &= \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{3 \tan \frac{3\pi}{81}}{4} - \frac{\tan \frac{\pi}{81}}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{27}}{3 \cdot 4} - \frac{\tan \frac{\pi}{81}}{9 \cdot 4} \\ &\vdots \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ตัวลบของพจน์หน้า หักกับตัวตั้งของพจน์ถัดไปได้เสมอ

และพจน์หลังๆ มุมจะเข้าใกล้ศูนย์ ในขณะที่ตัวส่วนเข้าใกล้ $\infty \rightarrow$ ตัวหลังๆ จะเข้าใกล้ 0

$\rightarrow$ ผลบวกอนุกรมอนันต์ จะเข้าใกล้ตัวตั้งของพจน์แรก $= \frac{3 \tan \frac{\pi}{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$

25. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน a, b และ c เป็นรากของพหุนาม $p(z) = z^3 + 21z - 2562$

ให้ สามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมในระนาบเชิงซ้อนที่มีจุดยอดอยู่ที่ a, b และ c ตามลำดับ และ

ให้ ε เป็นวงรีที่แนบในสามเหลี่ยม ABC และสัมผัสกับจุดกึ่งกลางของด้านทั้งสามของสามเหลี่ยม ABC

ถ้าจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 เป็นโฟกัสของวงรี ε แล้ว จงหาค่าของ $z_1^2 + z_2^2$

ตอบ -14

จะหาก่อน ว่า a, b, c มีจำนวนจริงกี่ตัว

ให้ x เป็นจำนวนจริง จะได้ $p(x) = x^3 + 21x - 2562 \rightarrow \begin{cases} \text{เมื่อ } x = 0 \text{ จะได้ } p(0) = -2562 \\ \text{เมื่อ } x \rightarrow \infty \text{ จะได้ } p(x) \rightarrow \infty \\ \text{เมื่อ } x \rightarrow -\infty \text{ จะได้ } p(x) \rightarrow -\infty \end{cases}$

$p'(x) = 3x^2 + 21$

$\rightarrow$ อนุพันธ์เป็นบวกเสมอ $\rightarrow$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มตลอดทั้งเส้น (ไม่มีจุดวกกลับ)

นำข้อมูลที่ได้ทั้งหมด มาวาดกราฟแบบคร่าวๆ จะสรุปได้ว่า $y = p(x)$ ตัดแกน x ฝั่งบวก เพียง

จุดเดียวแน่นอน $\rightarrow$ ดังนั้น a, b และ c จะเป็นจำนวนจริงบวก 1 ตัว

ส่วนอีก 2 รากที่เหลือ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นสังยุคกัน (เพราะ $p(z)$ มี สปส เป็นจำนวนจริง)

จากสูตรผลบวกผลคูณราก จะได้ ผลบวกรากทั้ง 3 ตัว $= -\frac{0}{1} = 0 \quad \dots(*)$

ผลบวกราก 2 ตัวคู่กัน $= +\frac{21}{1} = 21 \quad \dots(**)$

ผลคูณรากทั้ง 3 ตัว $= -\frac{-2562}{1} = 2562$



จากข้อมูลที่มี รวมกับ (*) รากทั้ง 3 ตัว จะอยู่ในรูป $2m, -m + ni, -m - ni$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนจริงบวก

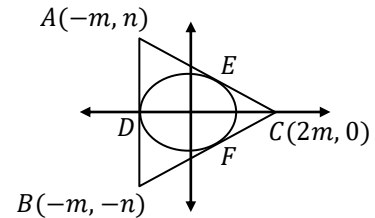
$$\begin{aligned} \text{และจาก (**)} \text{ จะได้ } 2m(-m + ni) + 2m(-m - ni) + (-m + ni)(-m - ni) &= 21 \\ -2m^2 + 2mni - 2m^2 - 2mni + m^2 + n^2 &= 21 \\ n^2 - 3m^2 &= 21 \quad \dots (***) \end{aligned}$$

นำรากทั้ง 3 ตัวไปวาด Δ และวงรี จะได้ดังรูป

Δ และวงรี สมมาตรรอบแกน x ดังนั้น จุด ศก วงรี จะอยู่บนแกน x

ให้จุด ศก วงรี คือ $(h, 0) \rightarrow$ สมการวงรีต้องอยู่ในรูป $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(ยังไม่รู้ว่า a มากกว่า b หรือไม่)

จะได้พิกัด x ของจุด D คือ $h - a \rightarrow$ จาก $\overline{AB}$ จะได้ $h - a = -m$
 $h + m = a \quad \dots (1)$



E คือจุดกึ่งกลาง $\overline{AC}$ จะได้พิกัด E คือ $\left(\frac{-m+2m}{2}, \frac{n+0}{2}\right) = \left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right)$

E อยู่บนวงรี ดังนั้น $\frac{\left(\frac{m}{2} - h\right)^2}{a^2} + \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} = 1 \quad \dots (2)$

$$\begin{aligned} \text{ดิฟสมการวงรี จะได้ } \frac{2(x-h)}{a^2} + \frac{2y \cdot y'}{b^2} &= 0 \\ \frac{2\left(\frac{m}{2} - h\right)}{a^2} + \frac{2\left(\frac{n}{2}\right)\left(-\frac{n}{3m}\right)}{b^2} &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{แทนค่าที่จุด } E \text{ จะได้ } y' = \text{ความชัน } \overline{AC} = \frac{0-n}{2m-(-m)} = -\frac{n}{3m} \\ \text{คูณ } \frac{3m}{4} \text{ ตลอด ให้หักกับ (2) ได้} \end{array} \right\} \\ \frac{\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2} - h\right)}{a^2} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} &= 0 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) + (3) : \quad \frac{\left(\frac{m}{2} - h\right)^2}{a^2} + \frac{\frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2} - h\right)}{a^2} &= 1 \\ \left(\frac{m}{2} - h\right)^2 + \frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2} - h\right) &= a^2 \\ \left(\frac{m}{2} - h\right)^2 + \frac{3m}{2}\left(\frac{m}{2} - h\right) &= (h+m)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (1)} \end{array} \right\} \\ \frac{m^2}{4} - mh + h^2 + \frac{3m^2}{4} - \frac{3mh}{2} &= h^2 + 2mh + m^2 \\ 0 &= \frac{9mh}{2} \end{aligned}$$

แต่ m เป็นจำนวนจริงบวก $\rightarrow$ จะสรุปได้ว่า $h = 0$ นั่นคือ วงรีมีจุด ศก อยู่ที่ $(0, 0)$

$$\begin{aligned} \rightarrow \text{แทน } h = 0 \text{ ใน (1) จะได้ } m = a \rightarrow \text{แทนต่อใน (3) จะได้ } \frac{\frac{3a}{2}\left(\frac{a}{2} - 0\right)}{a^2} - \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{b^2} &= 0 \\ \frac{3}{4} &= \frac{n^2}{4b^2} \\ b^2 &= \frac{n^2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } a^2 - b^2 = m^2 - \frac{n^2}{3} = \frac{3m^2 - n^2}{3} = \frac{-(n^2 - 3m^2)}{3} = \frac{-21}{3} = -7 \quad (\text{จาก (***)})$$

จะเห็นว่า $a^2 - b^2$ เป็นค่าติดลบ ดังนั้น $a < b \rightarrow$ เป็นวงรีแนวนอน $\rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{7}$

จะได้จุดโฟกัสคือ $(0, \pm\sqrt{7})$ ดังนั้น $z_1^2 + z_2^2 = (0 + \sqrt{7}i)^2 + (0 - \sqrt{7}i)^2 = -14$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สันธยา เสนามนตรี

และ คุณ Wasanont TeacherPomme Pongsawat

และ เพจ ทำใจหทัยคณิตกันเถอะ สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ เพจคณิตบ้านอาบุญย์ สำหรับเฉลยวิธีทำ

ขอบคุณ คุณ TangMo Noi

และ คุณ Lim Wannaphahoon

และ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร