

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 61)

วันอาทิตย์ที่ 25 พฤศจิกายน 2561 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีเซต A, B, C ที่ $A \subset B \subset C$ และ $A \in B \subset C$

(2) กำหนดให้ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ $\mathbb{R}$

ให้ $\mathcal{F} \neq \emptyset$ เป็นสับเซตแท้ใดๆ ของ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ที่มีสมบัติว่า $X - Y \in \mathcal{F}$ สำหรับทุก $X, Y \in \mathcal{F}$

จะได้ว่า ถ้า $A, B \in \mathcal{F}$ แล้ว $A \cap B \in \mathcal{F}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- | | |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ |

2. ทุกวันอาทิตย์ เพชรรับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า เว้นแต่เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันรุ่งขึ้น
วันนี้เพชรไม่ได้รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า ข้อความต่อไปนี้สรุปได้จากข้อมูลข้างต้น

- ก. วันนี้ไม่ใช่วันอาทิตย์
- ข. เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
- ค. เพชรไม่รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่าในวันอาทิตย์ หรือเพชรไม่มีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
- ง. ข้อความ ก., ข. และ ค. ไม่มีข้อใดสรุปถูกต้อง

3. ให้ $\mathbb{I}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม n กำหนดให้ $n\mathbb{I} = \{nx : x \in \mathbb{I}\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n_1, n_2 จะมีจำนวนเต็ม m เพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้ $n_1\mathbb{I} \cap n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$

(2) สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n_1, n_2 จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $n_1\mathbb{I} \cup n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- | | |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ |

4. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ถ้า $a^x = x$ แล้ว $a^{(a^x)} = x$

(2) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ถ้า $a^{(a^x)} = x$ แล้ว $a^x = x$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- | | |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ |

5. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีสมบัติว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 1$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นข้อที่ถูกต้อง

ก. $f(1) = 0$

ข. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ค. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

ง. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ไม่มีค่า

6. กำหนดให้ X, Y, Z เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ และ $h: Z \rightarrow X$ ถ้า $h \circ g \circ f$ และ $g \circ f \circ h$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $f \circ h \circ g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วฟังก์ชันในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ก. f

ข. g

ค. h

ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

7. ลำดับฟีโบนัชชี (F_n) นิยามโดย $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ และ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ เศษเหลือที่ได้จากการหาร F_{2018} ด้วย 4 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

8. ในห้องเรียนวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนคนหนึ่งได้นิยาม การกระจายตัวของข้อมูล $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ เป็น

$$\frac{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{2018 \cdot 2017}$$

กำหนดให้ $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2018}$ และ $s^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2017}$ โดยที่ $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{2018}$

ค่าของการกระจายตัวของข้อมูล $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. $\frac{2017}{2018} \sigma^2$ ข. $\frac{2017}{2018} s^2$ ค. $2\sigma^2$ ง. $2s^2$

9. ลำดับอนันต์ (a_n) นิยามโดย $a_1 = 0$ และ $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

ถ้าลำดับ (a_n) เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ข้อใดต่อไปนี้นี้กล่าวถูกต้อง

- ก. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$
 ข. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$
 ค. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$
 ง. เป็นไปได้ทั้งสองกรณีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$

10. ค่าของ $\cos \frac{2\pi}{7}$ เป็นรากของพหุนามในข้อใดต่อไปนี้

ก. $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

ข. $8x^3 - 8x^2 - 2x + 1$

ค. $8x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

ง. $8x^3 + 8x^2 - 2x - 1$

11. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2 มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = 3$ และ $F(2x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(x)$
ถ้า $F'(2) = -5$ และ $F''(-2) = -4$ พื้นที่ปิดล้อมของ $y = f(x)$ กับแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$
ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 16.5

ข. 18

ค. 33

ง. 36

12. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $x = -3$ และ $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{x^2+4x+3} \right) = 4$

ถ้า $g(x) = xf(x)$ ค่าของ $g'(-3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. -15

ข. -13

ค. 2

ง. 5

13. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ต่างกันโดยที่ $|z|^2 w - |w|^2 z = z - w$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\bar{z}w = -1$

(2) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(w)} = \frac{1}{|z|^2}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

14. กำหนดให้ $x = \arctan \frac{1}{2018}$ และ $y = \arctan \frac{2017}{2019}$ ค่าของ $\frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x} + \frac{\cos y - \sin x}{\cos x + \sin y}$ ตรงกับข้อใด
- ก. $2(\sqrt{2} - 1)$ ข. $\sqrt{3} - 1$
- ค. $\frac{2018}{\sqrt{(2017)^2 + (2019)^2}}$ ง. $\frac{2017}{\sqrt{(2017)^2 + (2019)^2}}$

15. ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ A ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์, $I - A$ มีอินเวอร์สการคูณ และ $A^T + A$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ถ้า $B = (I + A)(I - A)^{-1}$ แล้ว จำนวนจริง k ที่ทำให้ $B^T B = kI$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- ก. 0 ข. 1 ค. $(-1)^{n+1}$ ง. n

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ในการสำรวจความนิยมของประชากรในการติดตามข่าวพบว่า 400 คนจาก 1000 คนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดีย และ 12% ของคนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดียฟังข่าวจากทางวิทยุด้วย ในขณะที่ 20% ของคนที่ไม่ติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียฟังข่าววิทยุ ก็เปอร์เซ็นต์ของผู้ติดตามข่าวทางวิทยุติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียด้วย (ตอบในรูปทศนิยมสองตำแหน่ง)

17. กำหนดให้ $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 \leq 1 \}$

นิยาม $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ สำหรับทุก $(x, y) \in A$ จงหาเรนจ์ของ f (ตอบในรูปของช่วง)

18. กำหนดจุด $A = (4, 3)$ บนระนาบ ถ้าจุด $B = (a, b)$ บนวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 85 = 0$ ทำให้ระยะทาง AB จากจุด A ไปยังจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมมีค่าน้อยที่สุด แล้ว จงหาค่าของ $3a + 2b$

19. เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 16x$ สัมผัสกับวงกลม $(x - 6)^2 + y^2 = 2$ ที่จุดใด

20. จ्ञหาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้ม้ผลเฉลยเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว

$$\log_3(x - 2) + \log_3(a - x) = 2$$

21. ใ้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 1, |\vec{w}| = 1$ และ $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0}$

จงหาค่าของ $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

22. ถ้าเขียนผลคูณ $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$ ในรูปของพหุนาม $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{11}x^{11}$ แล้วจงหาค่าของ $a_2 + a_3 + \cdots + a_{10}$

23. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2x_3}, \quad \dots, \quad x_{49} = 1 + \frac{1}{2x_{50}}, \quad x_{50} = 1 + \frac{1}{2x_1}$$

จงหาค่าของ x_{25}

24. จงเขียนเซตของจำนวนจริง k ทั้งหมดที่ทำให้ $\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = k \right\} = \emptyset$ ในรูปของช่วง

25. นิยามจำนวนต่างใจตรงกันว่าเป็นจำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนในรูปผลต่างกำลังสองของจำนวนเต็มบวกได้สองแบบ เช่น 64 เป็นจำนวนต่างใจตรงกันเนื่องจาก $64 = 10^2 - 6^2 = 17^2 - 15^2$ แต่ 3 ไม่เป็นจำนวนต่างใจตรงกันเนื่องจาก $3 = 2^2 - 1^2$ และไม่มีจำนวนเต็มบวก a และ b อื่นใดที่ $3 = a^2 - b^2$
จงหาจำนวนต่างใจตรงกันที่มีค่าน้อยที่สุด

ตอนที่ 3 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. เด็กแต่งงานจะทำงานเป็นขนมเค้กที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมซ้อนขึ้นไปเป็นชั้นๆ โดยที่แต่ละชั้นที่ซ้อนขึ้นไปมีรัศมีหน้าตัดลดลงครึ่งหนึ่ง และมีส่วนสูงเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของส่วนสูงชั้นก่อนหน้านั้น ถ้าปริมาตรของเนื้อเค้กที่ฐานชั้นล่างสุดเป็น 10 ลูกบาศก์หน่วย แล้ว ปริมาตรของเค้กแต่งงานชิ้นนี้เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

27. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 29$$

จงหาค่าของ $a + b + c$

28. นำจุด 16 จุด มาจัดเรียงบนระนาบ โดยแบ่งออกเป็น 4 แถว แต่ละแถวมี 4 จุด และระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกัน เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในหลักเดียวกัน ความน่าจะเป็น ที่เมื่อสุ่มเลือกจุด 3 จุดใดๆ มาจากระนาบนี้แล้วอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเท่ากับเท่าใด

29. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z| \leq 1$ และ $|w| \leq 1$ ถ้า $|z + iw| = |z - i\bar{w}| = 2$ แล้ว
จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $z^2 - zw + w^2$

30. กำหนดให้ $\alpha > 0$ จงหาจำนวนจริงบวก x และ y ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned}x^{x+y} &= y^\alpha \\ y^{x+y} &= x^{2\alpha} y^\alpha\end{aligned}$$

31. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และให้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ และ J แทนเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มี 1 เป็นสมาชิกในทุกตำแหน่ง ถ้าอินเวอร์สของเมทริกซ์ $29I - 3J$ คือ $\frac{1}{29}(I - 3J)$ แล้ว จงหาค่าของ n
32. มีฉลาก 10 ใบ โดยที่ฉลากแต่ละใบเขียนเลขจำนวนจาก 1 ถึง 10 โดยที่ฉลากแต่ละใบมีเพียงเลขจำนวนเดียวเท่านั้น สุ่มหยิบฉลากมา 10 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ผลต่างของจำนวนที่ปรากฏบนฉลากแต่ละคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2
33. กำหนดให้ $ABCDE$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม จุดศูนย์กลางที่ O และมีรัศมียาว 3 หน่วย ถ้า X เป็นจุดใดๆ ที่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง 4 หน่วย แล้ว $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 + |EX|^2$ มีค่าเท่าใด

34. รูปสามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเป็นจำนวนเต็ม และ $\angle A = 3\angle B$ ถ้าด้านที่ยาวที่สุดอยู่ตรงข้ามมุม A มีความยาว 10 หน่วยแล้ว ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมดังกล่าวเท่ากับเท่าใด

35. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - 2 \cos(2^{k-n}\pi) + 2 \cos(2^{k-n+1}\pi))$

โดยนิยามสัญลักษณ์ $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ สำหรับลำดับ $(a_k)_{k=0}^n$ ใดๆ

เฉลย

- | | | | |
|------|-------------------------------|----------------------------|--|
| 1. ก | 10. ก | 19. $(5, 1), (5, -1)$ | 28. $\frac{11}{140}$ |
| 2. ง | 11. ง | 20. 8 | 29. i |
| 3. ง | 12. ข | 21. $\frac{63}{16}$ | 30. $(1, 1),$
$(\frac{-1+\sqrt{8\alpha+1}}{2}, \frac{4\alpha+1-\sqrt{8\alpha+1}}{2})$ |
| 4. ก | 13. ง | 22. -3198 | 31. 10 |
| 5. ค | 14. ก | 23. $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ | 32. 0 |
| 6. ง | 15. ข | 24. $(-8, 0)$ | 33. 125 |
| 7. ข | 16. 28.57 | 25. 15 | 34. 21 |
| 8. ง | 17. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$ | 26. 12 | 35. 1 |
| 9. ก | 18. 40 | 27. 7 | |

แนวคิด

1. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีเซต A, B, C ที่ $A \subset B \subset C$ และ $A \in B \subset C$

(2) กำหนดให้ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ แทนเซตของสับเซตทั้งหมดของ $\mathbb{R}$

ให้ $\mathcal{F} \neq \emptyset$ เป็นสับเซตแท้ใดๆ ของ $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ ที่มีสมบัติว่า $X - Y \in \mathcal{F}$ สำหรับทุก $X, Y \in \mathcal{F}$

จะได้ว่า ถ้า $A, B \in \mathcal{F}$ แล้ว $A \cap B \in \mathcal{F}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- | | |
|---|---|
| ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง | ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ |
| ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง | ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ |

ตอบ ก

(1) $A \subset B$ และ $A \in B$ ถ้า $B = A \cup \{A\}$

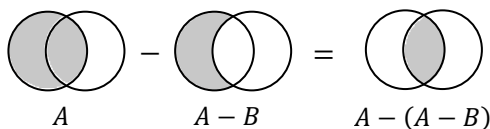
เช่นถ้าให้ $A = \emptyset$ จะได้ $B = A \cup \{A\} = \emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\}$

และ $C = B \cup \{B\} = \{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ดังนั้น จะมี $A = \emptyset, B = \{\emptyset\}$ และ $C = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\rightarrow$ (1) ถูก

(2) จากสมบัติของ $\mathcal{F}$ ถ้า $A, B \in \mathcal{F}$ จะสรุปได้ว่า $A - B \in \mathcal{F}$

และเนื่องจาก $A, A - B \in \mathcal{F}$ จะสรุปต่อด้วยสมบัติเดิมได้ว่า $A - (A - B) \in \mathcal{F}$



ซึ่ง $A - (A - B)$ ก็คือ $A \cap B$ นั่นเอง

จึงสรุปได้ว่า $A \cap B \in \mathcal{F} \rightarrow$ (2) ถูก

2. ทุกวันอาทิตย์ เพชรรับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า เว้นแต่เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันรุ่งขึ้น
วันนี้เพชรไม่ได้รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า ข้อความต่อไปนี้จะสรุปได้จากข้อมูลข้างต้น
- วันนี้ไม่ใช่วันอาทิตย์
 - เพชรมีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
 - เพชรไม่รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่าในวันอาทิตย์ หรือเพชรไม่มีสอบคณิตศาสตร์ในวันจันทร์
 - ข้อความ ก., ข. และ ค. ไม่มีข้อใดสรุปถูกต้อง

ตอบ ง

$$p \text{ เว้นแต่ } q \equiv p \text{ ถ้าไม่ } q \equiv \text{ถ้าไม่ } q \text{ แล้ว } p \equiv \sim q \rightarrow p \equiv q \vee p \equiv p \vee q$$

กิน เว้นแต่ มีสอบ

$\equiv$ กิน หรือ มีสอบ

ดังนั้น ประโยคแรกในโจทย์ จะเหมือนกับ “ทุกวันอาทิตย์ เพชรกินข้าวเย็นที่บ้านปู่ย่า หรือ เพชรมีสอบเลขวันรุ่งขึ้น”
ซึ่งจะเป็นจริงได้ 3 กรณี ดังนี้

1.

อา	จ
กิน	ไม่สอบ

2.

อา	จ
ไม่กิน	สอบ

3.

อา	จ
กิน	สอบ

- โจทย์กำหนดให้ วันนี้เพชรไม่ได้รับประทานอาหารเช้าที่บ้านคุณปู่คุณย่า
ซึ่งในกรณีที่ 2. เพชรไม่ได้กินข้าวเย็นที่บ้านปู่ย่า ในวันอาทิตย์ ดังนั้น วันนี้จึงอาจเป็นวันอาทิตย์ได้ $\rightarrow$ ก. ผิด
- โจทย์กำหนดให้ วันนี้เพชรไม่ได้กินข้าวเย็นที่บ้านปู่ย่า แต่เรายังไม่รู้ว่ วันนี้เป็นวันอาทิตย์หรือไม่
เช่น ถ้าวันนี้เป็นวันเสาร์ และวันที่เหลือเป็นกรณีที่ 1. ตามรูป
จะทำให้วันจันทร์ไม่มีสอบได้ $\rightarrow$ ข. ผิด
- ในกรณีที่ 3 จะทำให้ ค. ผิด

ส (วันนี้)	อา	จ
ไม่กิน	กิน	ไม่สอบ

3. ให้ $\mathbb{I}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม n กำหนดให้ $n\mathbb{I} = \{nx : x \in \mathbb{I}\}$
จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

- สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n_1, n_2 จะมีจำนวนเต็ม m เพียงหนึ่งเดียวที่ทำให้ $n_1\mathbb{I} \cap n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$
- สำหรับทุกๆ จำนวนเต็มบวก n_1, n_2 จะมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $n_1\mathbb{I} \cup n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I}$

ข้อใดต่อไปนี้จะถูกต้อง

- ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง
- ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ
- ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง
- ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ง

จำนวนที่อยู่ในรูป nx เมื่อ $x \in \mathbb{I}$ ก็คือจำนวนที่หารด้วย n ลงตัว

ดังนั้น $n\mathbb{I}$ ก็คือเซตของจำนวนที่หารด้วย n ลงตัวนั่นเอง

- พิจารณา $m\mathbb{I}$ ทางฝั่งขวา เนื่องจากโจทย์ไม่ได้บังคับว่า m ต้องเป็นบวก $\rightarrow$ จะมี m ที่เป็นลบ ก็ได้ผลเหมือนกัน
(เซตของจำนวนที่หารด้วย m ลงตัว จะเหมือนกับ เซตของจำนวนที่หารด้วย $-m$ ลงตัว)
เช่นถ้าให้ $n_1 = 1, n_2 = 1$ จะมี $m = 1$ และ -1 สองตัว ที่ทำให้ $n_1\mathbb{I} \cap n_2\mathbb{I} = m\mathbb{I} = \mathbb{I} \rightarrow$ (1) ผิด
- ถ้าให้ $n_1 = 2$ จะได้ $n_1\mathbb{I} =$ เซตของจำนวนที่หารด้วย 2 ลงตัว $= \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \dots\}$
ให้ $n_2 = 3$ จะได้ $n_2\mathbb{I} =$ เซตของจำนวนที่หารด้วย 3 ลงตัว $= \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots\}$

$$\text{จะได้ } n_1\mathbb{I} \cup n_2\mathbb{I} = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

$$\text{สมมติให้มี } m \text{ ที่ทำให้ } m\mathbb{I} = n_1\mathbb{I} \cup n_2\mathbb{I} = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \dots\}$$

แสดงว่า m ต้องหาร $0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \dots$ ลงตัว

แต่จำนวนที่หาร ± 2 และ ± 3 ลงตัว มีแค่ ± 1 เท่านั้น ซึ่งถ้า $m = \pm 1$ จะได้ว่า ± 1 ต้องอยู่ใน $m\mathbb{I}$ ด้วย

(เพราะ ± 1 หาร ± 1 ลงตัว) แต่จะเห็นว่า ± 1 ไม่อยู่ใน $\{0, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \dots\}$ จึงเกิดการขัดแย้ง

จึงไม่มี m ที่ทำให้ $2\mathbb{I} \cup 3\mathbb{I} = m\mathbb{I} \rightarrow (2)$ ผิด

4. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ถ้า $a^x = x$ แล้ว $a^{(a^x)} = x$

(2) สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ถ้า $a^{(a^x)} = x$ แล้ว $a^x = x$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ก

(1) สมมติให้ $a^x = x$ แสดงว่าเราสามารถแทน x ด้วย a^x ได้ (เพราะมันเท่ากัน)

จาก $a^x = x \rightarrow$ แทน x ที่เป็นเลขชี้กำลังทางขวา ด้วย a^x จะได้ $a^{(a^x)} = x \rightarrow (1)$ ถูก

(2) จะแสดงว่า ถ้า $a^x \neq x$ แล้ว $a^{(a^x)} \neq x$

สมมติให้ $a^x \neq x$ จะได้ว่า $a^x > x$ หรือ $a^x < x$

$$\begin{array}{l} \text{กรณี } a^x > x \quad \dots(1) \\ a^{(a^x)} > a^x \\ a^{(a^x)} > a^x > x \\ a^{(a^x)} > x \\ a^{(a^x)} \neq x \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{ยกกำลังฐาน } a \text{ ทั้งสองฝั่ง} \\ \text{จาก (1)} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \text{กรณี } a^x < x \quad \dots(2) \\ a^{(a^x)} < a^x \\ a^{(a^x)} < a^x < x \\ a^{(a^x)} < x \\ a^{(a^x)} \neq x \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (2)} \end{array} \right\}$$

(ตอนยกกำลังฐาน a ทั้งสองฝั่ง จะไม่ต้องกลับเครื่องหมายมากกว่าน้อยกว่า เพราะ $a > 1$)

ดังนั้น ถ้า $a^x \neq x$ แล้ว $a^{(a^x)} \neq x$

จาก $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ จะสรุปได้ว่า ถ้า $a^{(a^x)} = x$ แล้ว $a^x = x \rightarrow (2)$ ถูก

5. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันมีสมบัติว่า $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1} = 1$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $f(1) = 0$

ข. f ต่อเนื่องที่ $x = 1$

ค. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

ง. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ไม่มีค่า

ตอบ ค

ก. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2-1}$ คือค่าประมาณของ $\frac{f(x)}{x^2-1}$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ซึ่งเป็นคนละอย่างกับ ค่าของ $\frac{f(x)}{x^2-1}$ เมื่อ $x = 1$

(ถึงแม้ว่าส่วนใหญ่มันจะเท่ากัน แต่ก็มีส่วนที่สองค่านี้อาจไม่เท่ากันได้)

จึงสรุปอะไรเกี่ยวกับ $f(1)$ ไม่ได้ (เนื่องจาก $f(1)$ คือค่าของ $f(x)$ เมื่อ $x = 1$) $\rightarrow$ ก. ผิด

ข. ต่อเนื่องเมื่อ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ แต่เราไม่รู้เกี่ยวกับ $f(1)$ จึงไม่รู้ว่าจะต่อเนื่องหรือไม่ $\rightarrow$ ข. ผิด

ค. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จะทำให้ตัวส่วน $x^2 - 1$ เข้าใกล้ $1^2 - 1 = 0$

นั่นคือ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ต้องเป็น 0 $\rightarrow$ ค. ถูก

ง. เนื่องจาก ค. ถูก จึงทำให้ ง. ผิด

6. กำหนดให้ X, Y, Z เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ และ $h: Z \rightarrow X$ ถ้า $h \circ g \circ f$ และ $g \circ f \circ h$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $f \circ h \circ g$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้วฟังก์ชันในข้อต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง

ก. f ข. g ค. h ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ตอบ ง

$h \circ g \circ f$ คือการใช้ฟังก์ชัน f g และ h ตามลำดับ

ถ้า $h \circ g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แสดงว่า h ที่ถูกใช้เป็นฟังก์ชันสุดท้าย ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึงด้วย

(เพราะถ้ามีค่าที่ไม่อยู่ในเรนจ์ของ h ค่านั้นจะไม่มีทางอยู่ในเรนจ์ของอะไรก็ตามที่มี h ประกอบเป็นฟังก์ชันสุดท้าย)

ทำนองเดียวกัน โจทย์ให้ $g \circ f \circ h$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะทำให้สรุปได้ว่า g ต้องเป็นฟังก์ชันทั่วถึงด้วย

และจาก $f \circ h \circ g$ เป็น 1-1

$f \circ h \circ g$ คือการใช้ฟังก์ชัน g h และ f ตามลำดับ

เนื่องจาก g และ h เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ดังนั้น ทั้ง gh และ f ต้องเป็น 1-1 ทั้งหมด จึงจะทำให้ $f \circ h \circ g$ เป็น 1-1 ได้

(ถ้า g ไม่ทั่วถึง แล้ว h อาจไม่ใช่ 1-1 ตรงส่วนที่ g ไม่ได้โยงไป ซึ่งอาจทำให้ $f \circ h \circ g$ ยังเป็น 1-1 ได้อยู่)

และสุดท้าย จาก $g \circ f \circ h$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ g เป็น 1-1 จะสรุปได้ว่า f ต้องทั่วถึง

(ถ้า f ไม่ทั่วถึง แล้ว g จะโยงตัวอื่นมาแทนตัวที่ f ไม่โยงไปไม่ได้เพราะ g เป็น 1-1 ซึ่งจะทำให้ $g \circ f \circ h$ ไม่ทั่วถึง)

ดังนั้น ทั้ง f g และ h เป็น 1-1 และทั่วถึง

7. ลำดับฟีโบนัชชี (F_n) นิยามโดย $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ และ $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

เศษเหลือที่ได้จากการหาร F_{2018} ด้วย 4 มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3

ตอบ ข

เนื่องจากเราหาเศษเหลือกระจายในการบวกได้ $\rightarrow$ นำเศษเหลือของพจน์ก่อนหน้า มาหาเศษเหลือของพจน์ถัดไปได้เลย

$F_0 = 0 \rightarrow$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 0

$F_1 = 1 \rightarrow$ หาวด้วย 4 เหลือเศษ 1

F_2 หาวด้วย 4 เหลี่ยมเศษ = เศษเหลือของ F_1 + เศษเหลือของ $F_0 = 1 + 0 = 1$

F_3 หาวด้วย 4 เหลี่ยมเศษ = เศษเหลือของ F_2 + เศษเหลือของ $F_1 = 1 + 1 = 2$

F_4 หารด้วย 4 เหลือเศษ = เศษเหลือของ F_3 + เศษเหลือของ $F_2 = 2 + 1 = 3$

F_5 หารด้วย 4 เหลือเศษ = เศษเหลือของ F_4 + เศษเหลือของ $F_3 = 3 + 2 = 5 \rightarrow$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 1

F_6 หารด้วย 4 เหลือเศษ = เศษเหลือของ F_5 + เศษเหลือของ $F_4 = 1 + 3 = 4 \rightarrow$ หารด้วย 4 เหลือเศษ 0

⋮

จะได้ลำดับของเศษเหลือจากการหาร F_n ด้วย 4 คือ $0, 1, 1, 2, 3, 5 \rightarrow 1, 4 \rightarrow 0, 1, 1, 2, 3, \dots$

จะเห็นว่าเศษเหลือ วนซ้ำทุกๆ 6 ตัว ในรูป $0, 1, 1, 2, 3, 1$

เนื่องจาก 2018 หารด้วย 6 เหลือเศษ 2 ดังนั้น เศษเหลือของ F_{2018} จะเท่ากับเศษเหลือของ F_2 ซึ่งเท่ากับ 1

8. ในห้องเรียนวิชาคณิตศาสตร์นักเรียนคนหนึ่งได้นิยาม การกระจายตัวของข้อมูล $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ เป็น

$$\frac{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{2018 \cdot 2017}$$

กำหนดให้ $\sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2018}$ และ $s^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2017}$ โดยที่ $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{2018}}{2018}$

ค่าของการกระจายตัวของข้อมูล $x_1, x_2, \dots, x_{2018}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{2017}{2018} \sigma^2$ ข. $\frac{2017}{2018} s^2$ ค. $2\sigma^2$ ง. $2s^2$

ตอบ ง

ถ้า $i = j$ จะได้ $(x_i - x_j)^2 = 0$ ดังนั้น สามารถรวมกรณี $i = j$ ใน $\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2$ ได้โดยไม่ทำให้ค่าเปลี่ยน

$$\begin{aligned} \text{นั่นคือ } \sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2 &= \sum_{i=1}^{2018} \sum_{j=1}^{2018} (x_i - x_j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{2018} \sum_{j=1}^{2018} (x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2) \\ &= \sum_{i=1}^{2018} (2018x_i^2 - 2x_i \sum_{j=1}^{2018} x_j + \sum_{j=1}^{2018} x_j^2) \quad \begin{array}{l} \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2 = \sigma^2 \\ \sum x^2 = n(\sigma^2 + \bar{x}^2) \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^{2018} (2018x_i^2 - 2x_i(2018\bar{x}) + 2018(\sigma^2 + \bar{x}^2)) \\ &= 2018 \sum_{i=1}^{2018} (x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2 + \sigma^2) \\ &= 2018 \sum_{i=1}^{2018} ((x_i - \bar{x})^2 + \sigma^2) \\ &= 2018 \left(\sum_{i=1}^{2018} (x_i - \bar{x})^2 + 2018\sigma^2 \right) \\ &\quad \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ &= 2018 \left(2017s^2 + 2017s^2 \right) \quad \begin{array}{l} \sigma^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2018} \quad \text{และ} \quad s^2 = \sum_{j=1}^n \frac{(x_j - \bar{x})^2}{2017} \\ 2018\sigma^2 = 2017s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \end{array} \\ &= 2018 \cdot 2017 \cdot 2s^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{\sum_{i \neq j} (x_i - x_j)^2}{2018 \cdot 2017} = \frac{2018 \cdot 2017 \cdot 2s^2}{2018 \cdot 2017} = 2s^2$

9. ลำดับอนันต์ (a_n) นิยามโดย $a_1 = 0$ และ $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n}$ สำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$

ถ้าลำดับ (a_n) เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$

ข. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$

ค. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

ง. เป็นไปได้ทั้งสองกรณีว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 1$ หรือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 1$

ตอบ ก

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_{n+1} &= \frac{1}{2} + \sqrt{a_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{a_n} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{กระจาย } \lim \text{ ได้ เพราะ } a_n \text{ ลู่เข้า} \\ \text{เมื่อ } n \rightarrow \infty \text{ จะได้ } n+1 \rightarrow \infty \text{ ด้วย} \end{array} \right\} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} &= \frac{1}{2} + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \frac{1}{2} + \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n} \\ k &= \frac{1}{2} + \sqrt{k} \\ 2k &= 1 + 2\sqrt{k} \\ 2\sqrt{k}^2 - 2\sqrt{k} - 1 &= 0 \\ \sqrt{k} &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(2)} \\ \sqrt{k} &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2} = \frac{1+1.414}{2} > 1 \\ k &> 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &> 1 \end{aligned}$$

10. ค่าของ $\cos \frac{2\pi}{7}$ เป็นรากของพหุนามในข้อใดต่อไปนี้

ก. $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1$

ข. $8x^3 - 8x^2 - 2x + 1$

ค. $8x^3 - 4x^2 + 4x - 1$

ง. $8x^3 + 8x^2 - 2x - 1$

ตอบ ก

$$\begin{aligned} \text{ให้ } a &= \text{cis } \frac{2\pi}{7} \text{ จะได้ } a^7 = \left(\text{cis } \frac{2\pi}{7} \right)^7 = \text{cis } 2\pi = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1 \\ a^7 - 1 &= 0 \\ (a-1)(a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1) &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} a = \text{cis } \frac{2\pi}{7} \neq 1 \\ \rightarrow \text{หารตลอดด้วย } a-1 \text{ ได้} \end{array} \right\} \\ a^6 + a^5 + a^4 + a^3 + a^2 + a + 1 &= 0 \\ \text{cis } \frac{6(2\pi)}{7} + \text{cis } \frac{5(2\pi)}{7} + \text{cis } \frac{4(2\pi)}{7} + \text{cis } \frac{3(2\pi)}{7} + \text{cis } \frac{2(2\pi)}{7} + \text{cis } \frac{1(2\pi)}{7} + 1 &= 0 \\ \cos \frac{6(2\pi)}{7} + \cos \frac{5(2\pi)}{7} + \cos \frac{4(2\pi)}{7} + \cos \frac{3(2\pi)}{7} + \cos \frac{2(2\pi)}{7} + \cos \frac{1(2\pi)}{7} + 1 &= 0 \\ \cos \frac{1(2\pi)}{7} + \cos \frac{2(2\pi)}{7} + \cos \frac{3(2\pi)}{7} + \cos \frac{3(2\pi)}{7} + \cos \frac{2(2\pi)}{7} + \cos \frac{1(2\pi)}{7} + 1 &= 0 \\ 2 \cos 3\theta + 2 \cos 2\theta + 2 \cos \theta + 1 &= 0 \\ 2(4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + 2(2 \cos^2 \theta - 1) + 2 \cos \theta + 1 &= 0 \\ 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 &= 0 \end{aligned}$$

11. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรี 2 มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = 3$ และ $F(2x)$ เป็นปริยานุพันธ์ของ $f(x)$
 ถ้า $F'(2) = -5$ และ $F''(-2) = -4$ พื้นที่ปิดล้อมของ $y = f(x)$ กับแกน X จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$
 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 16.5

ข. 18

ค. 33

ง. 36

ตอบ ง

ให้ $f(x) = ax^2 + bx + c \rightarrow$ จากสมบัติของฟังก์ชันกำลังสอง ค่าสูงสุด/ต่ำสุด จะเกิดเมื่อ $x = -\frac{b}{2a}$
 โจทย์ให้ f มีค่าต่ำสุดเมื่อ $x = 3$ ดังนั้น $-\frac{b}{2a} = 3 \rightarrow b = -6a \rightarrow$ จะได้ $f(x) = ax^2 - 6ax + c \dots (*)$

จะได้ $F(2x) =$ ปริยานุพันธ์ของ $f(x) = \frac{a}{3}x^3 - 3ax^2 + cx + d$ เมื่อ d เป็นค่าคงที่ใดๆ

$$\begin{aligned} \text{แทน } x \text{ ด้วย } \frac{k}{2} \text{ จะได้ } F\left(2\left(\frac{k}{2}\right)\right) &= \frac{a}{3}\left(\frac{k}{2}\right)^3 - 3a\left(\frac{k}{2}\right)^2 + c\left(\frac{k}{2}\right) + d \\ F(k) &= \frac{a}{24}k^3 - \frac{3a}{4}k^2 + \frac{c}{2}k + d \\ F'(k) &= \frac{a}{8}k^2 - \frac{3a}{2}k + \frac{c}{2} \\ F''(k) &= \frac{a}{4}k - \frac{3a}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{จาก } F''(-2) = -4 & \text{และจาก } F'(2) = -5 & \\ \frac{a}{4}(-2) - \frac{3a}{2} = -4 & \frac{a}{8}(2^2) - \frac{3a}{2}(2) + \frac{c}{2} = -5 & \\ -2a - \frac{3a}{2} = -4 & 1 - 6 + \frac{c}{2} = -5 & \\ a = 2 & c = 0 & \end{array}$$

แทนค่า $a = 2, c = 0$ ใน $(*)$ จะได้ $f(x) = 2x^2 - 12x \rightarrow$ ตัดแกน x ที่ $2x^2 - 12x = 0$
 $2x(x - 6) = 0$
 $x = 0, 6$

ดังนั้น จาก $x = 0$ ถึง $x = 3$ ไม่ผ่านจุดตัดแกน x

$$\begin{aligned} \int_0^3 2x^2 - 12x \, dx &= \left. \frac{2}{3}x^3 - 6x^2 \right|_0^3 \\ &= \left(\frac{2}{3}(3^3) - 6(3^2) \right) - \left(\frac{2}{3}(0^3) - 6(0^2) \right) = -36 \rightarrow \text{จะได้พื้นที่} = |-36| = 36 \end{aligned}$$

12. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $x = -3$ และ $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{x^2+4x+3} \right) = 4$

ถ้า $g(x) = xf(x)$ ค่าของ $g'(-3)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. -15

ข. -13

ค. 2

ง. 5

ตอบ ข

$$\begin{aligned} \text{จาก } \lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{x^2+4x+3} \right) &= 4 \rightarrow \text{จัดรูป } \frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{x^2+4x+3} = \frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{(x+1)(x+3)} = \frac{(x+1)f(x) + 4}{(x+1)(x+3)} \\ \text{จะเห็นว่าเมื่อแทน } x = -3 \text{ จะได้ } \frac{(-3+1)f(-3)+4}{(-3+1)(-3+3)} &= \frac{-2f(-3)+4}{0} \rightarrow \text{ลิมิตหาค่าได้} = 4 \text{ แสดงว่าเศษต้อง} = 0 \\ \text{จะได้ } -2f(-3) + 4 &= 0 \\ f(-3) &= 2 \dots (1) \end{aligned}$$

$$\text{ลิมิตอยู่ในรูป } \frac{0}{0} \rightarrow \text{ใช้โลปีตาล จะได้ } \frac{\text{ดิฟบน}}{\text{ดิฟล่าง}} = \frac{(x+1)f'(x) + f(x)}{2x+4}$$

$$\text{เมื่อแทน } x = -3 \text{ จะได้ } \frac{(-3+1)f'(-3) + f(-3)}{2(-3)+4} = \frac{-2f'(-3) + 2}{-2} \text{ จะเห็นว่าส่วน } \neq 0 \text{ แล้ว}$$

จาก $\lim_{x \rightarrow -3} \left(\frac{f(x)}{x+3} + \frac{4}{x^2+4x+3} \right) = 4$ จะสรุปได้ว่า $\frac{-2f'(-3)+2}{-2} = 4$
 $f'(-3) = 5 \dots (2)$

จาก $g(x) = xf(x)$
 $g'(x) = xf'(x) + f(x)$
 $g'(-3) = (-3)f'(-3) + f(-3)$ จาก (1) และ (2)
 $g'(-3) = (-3)(5) + 2 = -13$

13. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ต่างกันโดยที่ $|z|^2w - |w|^2z = z - w$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\bar{z}w = -1$

(2) $\frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(w)} = \frac{1}{|z|^2}$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

- ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ
 ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ง

จาก $|z|^2w - |w|^2z = z - w$ $\rightarrow u \cdot \bar{u} = |u|^2$
 $z\bar{z}w - w\bar{w}z = z - w$
 $wz(\bar{z} - \bar{w}) = z - w$
 $wz(\bar{z} - \bar{w}) = z - w$
 $|w||z||\bar{z} - \bar{w}| = |z - w|$ $\rightarrow |u| = |\bar{u}|$
 $|w||z| = 1$
 $|w| = \frac{1}{|z|}$

$|z|^2w - |w|^2z = z - w$
 $|z|^2w + w = |w|^2z + z$
 $w(|z|^2 + 1) = z(|w|^2 + 1)$
 $w(|z|^2 + 1) = z\left(\frac{1}{|z|^2} + 1\right)$
 $w(|z|^2 + 1) = z\left(\frac{1 + |z|^2}{|z|^2}\right)$
 $w = \frac{z}{|z|^2}$

(1) $\bar{z}w = \bar{z}\left(\frac{z}{|z|^2}\right) = \frac{z\bar{z}}{|z|^2} = 1 \rightarrow$ ผิด

(2) $\operatorname{Re}(w) = \operatorname{Re}\left(\frac{z}{|z|^2}\right)$

$\operatorname{Re}(w) = \frac{\operatorname{Re}(z)}{|z|^2}$

$|z|^2 = \frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Re}(w)} \rightarrow$ ผิด

14. กำหนดให้ $x = \arctan \frac{1}{2018}$ และ $y = \arctan \frac{2017}{2019}$ ค่าของ $\frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x} + \frac{\cos y - \sin x}{\cos x + \sin y}$ ตรงกับข้อใด

ก. $2(\sqrt{2} - 1)$

ข. $\sqrt{3} - 1$

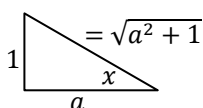
ค. $\frac{2018}{\sqrt{(2017)^2 + (2019)^2}}$

ง. $\frac{2017}{\sqrt{(2017)^2 + (2019)^2}}$

ตอบ ก

ให้ $a = 2018$ จะได้ $a - 1 = 2017$ และ $a + 1 = 2019$

จาก $x = \arctan \frac{1}{2018}$ และ $y = \arctan \frac{2017}{2019}$ จะวาดได้ดังรูป



$a - 1$
 $= \sqrt{(a+1)^2 + (a-1)^2} = \sqrt{a^2 + 2a + 1 + a^2 - 2a + 1}$
 $= \sqrt{2a^2 + 2}$
 $= \sqrt{2} \sqrt{a^2 + 1}$

จะได้ $\cos x - \sin y = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} - \frac{a-1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}$
 $= \frac{\sqrt{2}a - a + 1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}$

และ $\cos x + \sin y = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} + \frac{a-1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}$
 $= \frac{\sqrt{2}a + a - 1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}}$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \cos y + \sin x &= \frac{a+1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} & \text{และ } \cos y - \sin x &= \frac{a+1}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} \\ &= \frac{a+1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} & &= \frac{a+1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{a^2+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{\cos x - \sin y}{\cos y + \sin x} + \frac{\cos y - \sin x}{\cos x + \sin y} &= \frac{\sqrt{2}a - a + 1}{a + 1 + \sqrt{2}} + \frac{a + 1 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}a + a - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)a + 1}{a + (\sqrt{2}+1)} + \frac{a - (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)a - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(a + \frac{1}{\sqrt{2}-1})}{a + (\sqrt{2}+1)} + \frac{(\sqrt{2}-1)(\frac{a}{\sqrt{2}-1} - 1)}{(\sqrt{2}+1)a - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{2}-1)(a + \sqrt{2}+1)}{a + (\sqrt{2}+1)} + \frac{(\sqrt{2}-1)((\sqrt{2}+1)a - 1)}{(\sqrt{2}+1)a - 1} \\ &= \sqrt{2} - 1 + \sqrt{2} - 1 \\ &= 2(\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

15. ให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ โดยที่ A ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์, $I - A$ มีอินเวอร์สการคูณ และ $A^T + A$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ ถ้า $B = (I + A)(I - A)^{-1}$ แล้ว จำนวนจริง k ที่ทำให้ $B^T B = kI$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 0 ข. 1 ค. $(-1)^{n+1}$ ง. n

ตอบ ข

$$\begin{aligned} B^T B &= ((I + A)(I - A)^{-1})^T (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= ((I - A)^{-1})^T (I + A)^T (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= ((I - A)^T)^{-1} (I + A)^T (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= (I^T - A^T)^{-1} (I^T + A^T) (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= (I + A)^{-1} (I - A) (I + A)(I - A)^{-1} \\ &= (I + A)^{-1} (I + A) (I - A)(I - A)^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \\ & I \end{pmatrix} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก } A^T + A = 0 \text{ จะได้ } A^T = -A \\ (I - A)(I + A) = (I + A)(I - A) \\ \text{เพราะกระจายแล้วได้ } I - A^2 \text{ ทั้งคู่} \end{array} \right\}$$

16. ในการสำรวจความนิยมของประชากรในการติดตามข่าวพบว่า 400 คนจาก 1000 คนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดีย และ 12% ของคนติดตามข่าวจากโซเชียลมีเดียฟังข่าวจากทางวิทยุด้วย ในขณะที่ 20% ของคนที่ไม่ติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียฟังข่าววิทยุ ก็ไปอร์เซ็นของผู้ติดตามข่าวทางวิทยุติดตามข่าวทางโซเชียลมีเดียด้วย (ตอบในรูปทศนิยมสองตำแหน่ง)

ตอบ 28.57

ทั้งหมด 1000 คน มีโซเชียล 400 คน $\rightarrow$ ไม่โซเชียล $1000 - 400 = 600$ คน

$$12\% \text{ ของโซเชียล ฟังวิทยุ } = \frac{12}{100} \cdot 400 = 48 \text{ คน}$$

$$20\% \text{ ของไม่โซเชียล ฟังวิทยุ } = \frac{20}{100} \cdot 600 = 120 \text{ คน}$$

$$\text{ดังนั้น ฟังวิทยุทั้งหมด} = 48 \text{ (โซเชียล)} + 120 \text{ (ไม่โซเชียล)} = 168 \text{ คน}$$

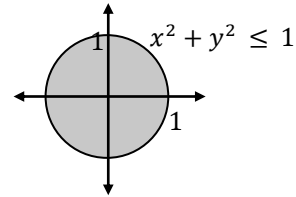
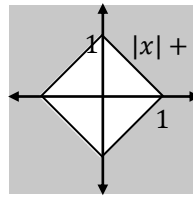
$$\text{ดังนั้น ในคนฟังวิทยุ 168 คน จะมีโซเชียล } \frac{48}{168} \cdot 100 = \frac{2}{7} \cdot 100 = 28.571\ldots$$

17. กำหนดให้ $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \geq 1 \text{ และ } x^2 + y^2 \leq 1 \}$

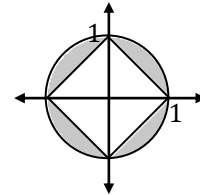
นิยาม $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ โดย $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ สำหรับทุก $(x, y) \in A$ จงหาเรนจ์ของ f (ตอบในรูปของช่วง)

ตอบ $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

จากความรู้ในเรื่องรูปกราฟพื้นฐานที่ควรจำได้ และการสัณฐานในอสมการ เพื่อแรกเราจะได้กราฟของอสมการเป็นดังรูป

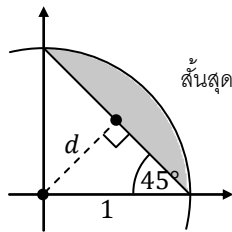


ดังนั้น $|x| + |y| \geq 1$ และ $x^2 + y^2 \leq 1$ จะหมายถึงบริเวณที่ซ้อนทับกัน ดังรูป

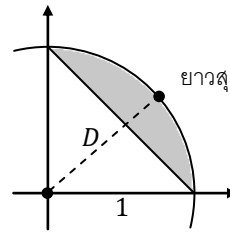


$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = \text{ระยะจาก } (0, 0) \text{ ไปยัง } (x, y)$$

ดังนั้น จะหาเรนจ์ของ $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ต้องหาว่าระยะจาก $(0, 0)$ ไปยังจุดในส่วนที่แรเงา มีค่าเท่าไรได้บ้าง



$$\begin{aligned} \text{สั้นสุด} &= \text{ระยะตั้งฉากไปยังเส้นตรง} \\ &= 1 \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{ยาวสุด} &= \text{ระยะไปยังเส้นรอบวง} \\ &= \text{รัศมีวงกลม} \\ &= 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าของ $\sqrt{x^2 + y^2}$ จะมีค่าอยู่ในช่วง $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$

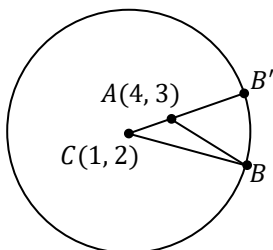
18. กำหนดจุด $A = (4, 3)$ บนระนาบ ถ้าจุด $B = (a, b)$ บนวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 85 = 0$ ทำให้

ระยะทาง AB จากจุด A ไปยังจุดบนเส้นรอบวงของวงกลมมีค่าน้อยที่สุด แล้ว จงหาค่าของ $3a + 2b$

ตอบ 40

$$\text{จัดรูปวงกลม } x^2 + y^2 - 2x - 4y - 85 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 90 \rightarrow \text{ศก} = C(1, 2) \text{ และ รัศมี} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$



ต่อ CA ออกไปตัดวงกลมที่ B' ดังรูป

$$\begin{aligned} \text{จากสมบัติของสามเหลี่ยม จะได้ } & \begin{aligned} CA + AB &\geq CB \\ CA + AB &\geq CB' \end{aligned} \rightarrow CB = CB' = r \\ & \begin{aligned} CA + AB &\geq CA + AB' \\ AB &\geq AB' \end{aligned} \end{aligned}$$

นั่นคือ AB จะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ B อยู่ที่ B'

จะใช้ความรู้เรื่องเวกเตอร์มาหาพิกัดของ B' → สังเกตว่า $\overrightarrow{CB'}$ คือเวกเตอร์ในทิศ $\overrightarrow{CA}$ ที่ยาว $= r = 3\sqrt{10}$

$$\overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} 4-1 \\ 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{จะได้ } |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \rightarrow \text{เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศ } \overrightarrow{CA} \text{ คือ } \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{ดังนั้น } \overrightarrow{CB'} = 3\sqrt{10} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{เมื่อ } B \text{ อยู่ที่ } B' \text{ จะได้ } \overrightarrow{CB'} = \begin{bmatrix} a-1 \\ b-2 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \begin{bmatrix} a-1 \\ b-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ จะได้ } a = 10 \text{ และ } b = 5$$

$$\text{จะได้ } 3a + 2b = 3(10) + 2(5) = 40$$

19. เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = 16x$ สัมผัสกับวงกลม $(x-6)^2 + y^2 = 2$ ที่จุดใด

ตอบ (5, 1), (5, -1)

จัดรูปพาราโบลา จะได้ $y^2 = 4(4)x \rightarrow$ เป็นแบบตะแคงขวา $c = 4 \rightarrow$ จะได้จุดโฟกัสคือ $F(4, 0)$

วงกลม $(x-6)^2 + y^2 = 2$ มีจุดศูนย์กลาง $C(6, 0)$ และมีรัศมี $= \sqrt{2}$

วาดรูป จะเห็นว่าเส้นสัมผัสจาก F ไปยังวงกลมจะมี 2 เส้นดังรูป

ให้ P เป็นจุดสัมผัสด้านบน จากสมบัติเส้นสัมผัส จะได้ $\angle FPC = 90^\circ$

พีทาгорัส จะได้ $FP = \sqrt{FC^2 - PC^2}$

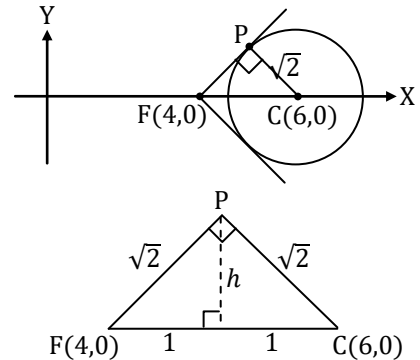
$$= \sqrt{(6-4)^2 - \sqrt{2}^2} = \sqrt{4-2} = \sqrt{2}$$

จะเห็นว่า $FP = PC = \sqrt{2}$ ดังนั้น $\triangle FPC$ เป็น $\triangle$ หน้าจั่ว

ส่วนสูง h จะแบ่งครึ่งฐาน FC เป็นฝั่งละ $\frac{6-4}{2} = 1$ ดังรูป

พีทาгорัส จะได้ $h = \sqrt{\sqrt{2}^2 - 1^2} = 1 \rightarrow$ จะได้พิกัดจุด P คือ (5, 1)

จุดสัมผัสด้านล่างจะสมมาตรกับ P รอบแกน $X \rightarrow$ จะได้จุดสัมผัสด้านล่างคือ (5, -1)



20. จ्ञาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้สมการต่อไปนี้มีผลเฉลยเป็นจำนวนจริงเพียงค่าเดียว

$$\log_3(x-2) + \log_3(a-x) = 2$$

ตอบ 8

หลัง $\log$ ต้องเป็นบวก $\rightarrow \begin{matrix} x-2 > 0 \\ x > 2 \end{matrix}$ และ $\begin{matrix} a-x > 0 \\ a > x \end{matrix} \rightarrow 2 < x < a \dots (*)$

$$\begin{aligned} \text{และจากสมการ } \log_3(x-2) + \log_3(a-x) &= 2 \\ \log_3(x-2)(a-x) &= 2 \\ (x-2)(a-x) &= 3^2 \\ ax - x^2 - 2a + 2x &= 9 \\ 0 &= x^2 - (a+2)x + 2a + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ใช้สูตรคำตอบของสมการกำลังสอง จะได้ } x &= \frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(2a+9)}}{2} \\ &= \frac{a+2}{2} \pm \frac{\sqrt{k}}{2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{(a+2) \pm \sqrt{(a+2)^2 - 4(2a+9)}}{2}} \right\} \text{ให้ } k = (a+2)^2 - 4(2a+9)$$

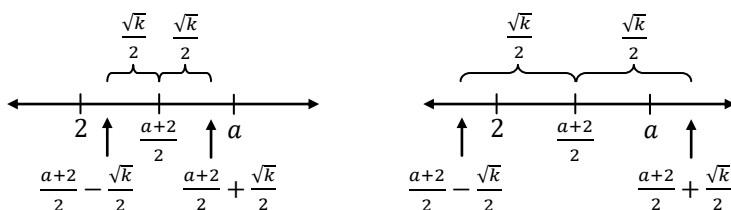
กรณี $k < 0$: ในรูปจะติดลบ สมการจะไม่มีคำตอบ $\rightarrow$ ใช้ไม่ได้ (โจทย์ต้องการให้มี 1 คำตอบ)

กรณี $k > 0$: สมการจะมี 2 คำตอบ คือ $\frac{a+2}{2} + \frac{\sqrt{k}}{2}$ และ $\frac{a+2}{2} - \frac{\sqrt{k}}{2}$

แต่จาก (*) เราต้องตรวจสอบด้วยว่า 2 คำตอบนี้อยู่ระหว่าง 2 กับ a หรือไม่

เนื่องจาก $\frac{a+2}{2}$ คือจำนวนที่อยู่ตรงกลางระหว่าง 2 กับ a พอดี

ดังนั้น $\frac{a+2}{2} \pm \frac{\sqrt{k}}{2}$ จะอยู่ในช่วง $(2, a)$ ทั้งคู่ หรือ ไม่อยู่ในช่วง $(2, a)$ ทั้งคู่ ดังรูป



ดังนั้น กรณีนี้ จะมี 2 คำตอบ หรือไม่มีคำตอบเลย $\rightarrow$ ใช้ไม่ได้

กรณี $k = 0$: สมการจะมี 1 คำตอบ คือ $\frac{a+2}{2}$ ซึ่งเป็นค่าตรงกลางระหว่าง 2 กับ a จึงสอดคล้องกับเงื่อนไข (*) เสมอ

$$\begin{aligned} \text{จาก } k &= (a+2)^2 - 4(2a+9) \text{ จะได้ } (a+2)^2 - 4(2a+9) &= 0 \\ a^2 + 4a + 4 - 8a - 36 &= 0 \\ a^2 - 4a - 32 &= 0 \\ (a-8)(a+4) &= 0 \\ a &= 8, -4 \end{aligned}$$

แต่จาก (*) จะได้ $2 < a$ ทำให้ $a = -4$ ไม่ได้ $\rightarrow$ เหลือ $a = 8$ เพียงคำตอบเดียว

21. ให้ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ เป็นเวกเตอร์ซึ่ง $|\vec{u}| = 2, |\vec{v}| = 1, |\vec{w}| = 1$ และ $\vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} = \vec{0}$

จงหาค่าของ $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

ตอบ $\frac{63}{16}$

$$\begin{aligned} \vec{u} + 2\vec{v} + 3\vec{w} &= \vec{0} \\ \vec{u} + 2\vec{v} &= -3\vec{w} \\ |\vec{u} + 2\vec{v}|^2 &= |-3\vec{w}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |2\vec{v}|^2 + 2(\vec{u} \cdot 2\vec{v}) &= |3\vec{w}|^2 \\ |\vec{u}|^2 + |2\vec{v}|^2 + 4|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta &= |3\vec{w}|^2 \\ 2^2 + (2 \cdot 1)^2 + 4(2)(1)\cos\theta &= (3 \cdot 1)^2 \\ \cos\theta &= \frac{9-4-4}{8} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{u} \times \vec{v}|^2 &= (|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)^2 \\ &= 2^2 1^2 \sin^2\theta \\ &= 4(1 - \cos^2\theta) \\ &= 4\left(1 - \frac{1}{8^2}\right) = 4\left(\frac{63}{64}\right) = \frac{63}{16} \end{aligned}$$

22. ถ้าเขียนผลคูณ $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$ ในรูปของพหุนาม $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{11}x^{11}$ แล้วจงหาค่า

ของ $a_2 + a_3 + \dots + a_{10}$

ตอบ -3198

จาก $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{11}x^{11} \dots (*)$

แทน $x = 1$ ใน (*): $(1^2 + 4)^3(1 - 2)^5 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{11}$
 $-125 = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{11} \dots (1)$

แทน $x = 0$ ใน (*): $(0^2 + 4)^3(0 - 2)^5 = a_0$
 $-2048 = a_0 \dots (2)$

a_{11} คือ สปส ของ x กำลังสูงที่สุดในการกระจาย $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$
 แต่จะเห็นว่า x กำลังสูงที่สุดของแต่ละวงเล็บที่มาคูณกัน ไม่มี สปส คุณอยู่ $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$
 ดังนั้น ถ้ากระจายออกมาแล้ว x กำลังสูงที่สุด ก็จะไม่ สปส คุณอยู่เช่นกัน $\rightarrow a_{11} = 1 \dots (3)$

a_1 คือ สปส ของ x กำลัง 1 ในการกระจาย $(x^2 + 4)^3(x - 2)^5$

แต่จะเห็นว่าในการกระจาย $(x^2 + 4)^3$ จะไม่มีพจน์ x กำลัง 1 เลย (เพราะ $x^2 + 4$ เลขชี้กำลังของ x เริ่มที่ 2)

ดังนั้น x กำลัง 1 จะเกิดจากพจน์ที่ไม่มี x ของ $(x^2 + 4)^3$ คูณกับ พจน์ x กำลัง 1 ของ $(x - 2)^5$

$$\begin{aligned} &\rightarrow = 4^3 \quad \rightarrow \text{ใช้ทวินาม จะได้ } = {}^5C_1 x^1 (-2)^4 \\ &\text{จะได้ } a_1 = 4^3 \cdot {}^5C_1 (-2)^4 = 5120 \dots (4) \end{aligned}$$

เอา (1) มาหักออกด้วย a_0, a_{11} และ a_1 จาก (2), (3) และ (4)

จะเหลือ $a_2 + a_3 + \dots + a_{10} = -125 - (-2048 + 1 + 5120) = -3198$

23. ให้ $x_1, x_2, \dots, x_{50}$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่

$$x_1 = 1 + \frac{1}{2x_2}, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{2x_3}, \quad \dots, \quad x_{49} = 1 + \frac{1}{2x_{50}}, \quad x_{50} = 1 + \frac{1}{2x_1}$$

จงหาค่าของ x_{25}

ตอบ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + \frac{1}{2x_2} \quad \dots(1) \\ x_2 &= 1 + \frac{1}{2x_3} \quad \dots(2) \\ (1) - (2) : x_1 - x_2 &= \frac{1}{2x_2} - \frac{1}{2x_3} \\ x_1 - x_2 &= \frac{x_3 - x_2}{2x_2x_3} \\ x_1 - x_2 &= -\frac{x_2 - x_3}{2x_2x_3} \end{aligned}$$

ทำแบบเดียวกันกับแต่ละคู่ของสมการที่เหลือ จะได้

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= -\frac{x_3 - x_4}{2x_3x_4} \\ x_3 - x_4 &= -\frac{x_4 - x_5}{2x_4x_5} \\ &\vdots \\ x_{50} - x_1 &= -\frac{x_1 - x_2}{2x_1x_2} \end{aligned}$$

นำผลลบทั้ง 50 สมการมาคูณกัน จะได้

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{50} - x_1) &= \left(-\frac{x_2 - x_3}{2x_2x_3}\right) \left(-\frac{x_3 - x_4}{2x_3x_4}\right) \dots \left(-\frac{x_1 - x_2}{2x_1x_2}\right) \\ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{50} - x_1) &= \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_4) \dots (x_1 - x_2)}{2^{50}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{50})^2} \quad \leftarrow \text{ลบ คูณกัน 50 ครั้ง กลายเป็นบวก} \\ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{50} - x_1) - \frac{(x_2 - x_3)(x_3 - x_4) \dots (x_1 - x_2)}{2^{50}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{50})^2} &= 0 \quad \leftarrow \text{ดึงตัวร่วม} \\ (x_1 - x_2)(x_2 - x_3) \dots (x_{50} - x_1) \left(1 - \frac{1}{2^{50}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{50})^2}\right) &= 0 \quad \dots (*) \end{aligned}$$

เนื่องจาก x_i ทุกตัวเป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น $1 + \frac{1}{2x_i}$ ทุกตัว จะมากกว่า 1 ทำให้ได้ว่า x_i ทุกตัว จะมากกว่า 1
ดังนั้น $\frac{1}{2^{50}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{50})^2}$ จะน้อยกว่า 1 ซึ่งจะสรุปได้ว่า $1 - \frac{1}{2^{50}(x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{50})^2}$ ใน (*) ไม่มีทางเป็นศูนย์ได้
ดังนั้น ต้องมีวงเล็บอย่างน้อย 1 วงเล็บ ที่เหลือทางซ้ายของ (*) ที่เป็น 0

และเมื่อมีคู่ x_i ติดกัน 1 คู่ ที่เท่ากัน มันจะดึงให้ x_i ที่เหลือเท่ากันไปด้วย

เช่น ถ้า $x_{10} - x_{11} = 0$ จะสรุปได้ว่า $x_{10} = x_{11}$ ซึ่งจะได้ว่า $1 + \frac{1}{2x_{10}} = 1 + \frac{1}{2x_{11}}$
$$x_9 = x_{10}$$

ทำเป็นทอดต่อไปเรื่อยๆ สุดท้าย เราจะสรุปได้เลยว่า x_i ทุกตัว เท่ากันหมด

จาก $x_1 = 1 + \frac{1}{2x_2}$ จะได้ $k = 1 + \frac{1}{2k}$ (ให้ x_i ทุกตัวเท่ากับ k)
$$2k^2 - 2k - 1 = 0$$

จะได้ $k = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ (ค่าลบใช้ไม่ได้ เพราะโจทย์ให้ x_i ทุกตัวเป็นบวก)

24. จงเขียนเซตของจำนวนจริง k ทั้งหมดที่ทำให้ $\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = k\} = \emptyset$ ในรูปของช่วง

ตอบ $(-8, 0)$

คือต้องหา k ที่ทำให้สมการไม่มีคำตอบ

$$\begin{aligned} \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} &= k \\ (x-1)^2 &= k(x+1)(x+3) \\ x^2 - 2x + 1 &= kx^2 + 4kx + 3k \\ 0 &= (k-1)x^2 + (4k+2)x + 3k-1 \quad \dots(*) \end{aligned}$$

กรณี $k - 1 \neq 0$: จะได้ (*) เป็นสมการกำลัง 2 ซึ่งจะไม่มีการตอบเมื่อ

$$\begin{aligned}
 & (4k + 2)^2 - 4(k - 1)(3k - 1) < 0 \\
 \div 4 \text{ ตลอด } \hookrightarrow & 2^2(2k + 1)^2 - 4(k - 1)(3k - 1) < 0 \\
 & (2k + 1)^2 - (k - 1)(3k - 1) < 0 \\
 & 4k^2 + 4k + 1 - 3k^2 + 4k - 1 < 0 \\
 & k^2 + 8k < 0 \\
 & k(k + 8) < 0 \\
 & \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \leftarrow \quad \quad \quad \rightarrow \\ -8 \quad \quad 0 \end{array} \quad \text{จะได้ } k \in (-8, 0)
 \end{aligned}$$

กรณี $k - 1 = 0$: (*) จะไม่ใช่สมการกำลัง 2 คิดแบบกรณีแรกไม่ได้

$$\begin{aligned}
 \text{กรณีนี้จะได้ว่า } k = 1 \text{ แทนใน (*) ได้ } & 0 = (1 - 1)x^2 + (4(1) + 2)x + 3(1) - 1 \\
 & 0 = 6x + 2 \\
 -\frac{1}{3} = x & \rightarrow \text{สมการมีคำตอบ ใช้ไม่ได้}
 \end{aligned}$$

รวม 2 กรณี จะได้ $k \in (-8, 0)$

25. นิยามจำนวนต่างใจตรงกันว่าเป็นจำนวนเต็มบวกที่สามารถเขียนในรูปผลต่างกำลังสองของจำนวนเต็มบวกได้สองแบบ เช่น 64 เป็นจำนวนต่างใจตรงกัน เนื่องจาก $64 = 10^2 - 6^2 = 17^2 - 15^2$ แต่ 3 ไม่เป็นจำนวนต่างใจตรงกัน เนื่องจาก $3 = 2^2 - 1^2$ และไม่มีจำนวนเต็มบวก a และ b อื่นใดที่ $3 = a^2 - b^2$
- จงหาจำนวนต่างใจตรงกันที่มีค่าน้อยที่สุด

ตอบ 15

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \rightarrow$ สังเกตว่า $a - b$ น้อยกว่า $a + b$ อยู่ $2b$ ซึ่ง $2b$ เป็นเลขคู่บวก นั่นคือ จำนวนต่างใจตรงกัน ต้องสามารถ “แยกเป็นผลคูณของสองตัวที่ต่างกันเป็นจำนวนคู่บวก” ได้ 2 แบบ ดังนั้น 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... หรือจำนวนเฉพาะอื่นๆ จะใช้ไม่ได้ เพราะเขียนเป็นผลคูณได้แค่แบบเดียว

$$\begin{array}{llll}
 4 = 1 \times 4 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & = 2 \times 2 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกัน 0)} & & \\
 6 = 1 \times 6 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & = 2 \times 3 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & & \\
 8 = 1 \times 8 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & = 2 \times 4 \text{ (ได้)} & \rightarrow & \text{ได้แค่แบบเดียว} \\
 9 = 1 \times 9 \text{ (ได้)} & = 3 \times 3 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกัน 0)} & \rightarrow & \text{ได้แค่แบบเดียว} \\
 10 = 1 \times 10 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & = 2 \times 5 \text{ (ไม่ได้ เพราะต่างกันเป็นเลขคี่)} & & \\
 12 = 1 \times 12 \text{ (ไม่ได้)} & = 2 \times 6 \text{ (ได้)} & = 3 \times 4 \text{ (ไม่ได้)} & \rightarrow \text{ได้แค่แบบเดียว} \\
 14 = 1 \times 14 \text{ (ไม่ได้)} & = 2 \times 7 \text{ (ไม่ได้)} & & \\
 15 = 1 \times 15 \text{ (ได้)} & = 3 \times 5 \text{ (ได้)} & \rightarrow & \text{แยกเป็นสองตัวที่ต่างกันเป็นคู่บวกได้ 2 แบบ}
 \end{array}$$

ซึ่งถ้าโยนหา a, b จะได้ $15 = (8 - 7)(8 + 7) = (4 - 1)(4 + 1)$

จะได้จำนวนต่างใจตรงกันที่น้อยที่สุด คือ 15

26. เด็กแต่งงานจะทำงานเป็นขนมเค้กที่มีหน้าตัดเป็นรูปวงกลมซ้อนขึ้นไปเป็นชั้นๆ โดยที่แต่ละชั้นที่ซ้อนขึ้นไปมีรัศมีหน้าตัดลดลงครึ่งหนึ่ง และมีส่วนสูงเป็น $\frac{2}{3}$ เท่าของส่วนสูงชั้นก่อนหน้านั้น ถ้าปริมาตรของเนื้อเค้กที่ฐานชั้นล่างสุดเป็น 10 ลูกบาศก์หน่วย แล้ว ปริมาตรของเค้กแต่งงานชิ้นนี้เท่ากับกี่ลูกบาศก์หน่วย

ตอบ 12

ให้ชั้นล่างสุดมีรัศมี r และสูง h ซึ่งจะมีปริมาตร $= \pi r^2 h$

ชั้นถัดขึ้นมา จะมีรัศมี $\frac{1}{2}r$ และสูง $\frac{2}{3}h$ ซึ่งจะมีปริมาตร $= \pi \left(\frac{1}{2}r\right)^2 \left(\frac{2}{3}h\right) = \frac{1}{6}\pi r^2 h$

ชั้นถัดขึ้นมา จะมีรัศมี $\left(\frac{1}{2}\right)^2 r$ และสูง $\left(\frac{2}{3}\right)^2 h$ ซึ่งจะมีปริมาตร $= \pi \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 r\right)^2 \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 h\right) = \frac{1}{6^2}\pi r^2 h$

จะเห็นว่าปริมาตรเค้ก เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม $\frac{1}{6}$ และมี $a_1 =$ ปริมาตรชั้นล่างสุด $= 10$

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$ จะได้ปริมาตรรวม $= \frac{10}{1-\frac{1}{6}} = 10 \cdot \frac{6}{5} = 12$

27. กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งสอดคล้องกับสมการต่อไปนี้

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 29$$

จงหาค่าของ $a + b + c$

ตอบ 7

$$abc + ab + bc + ca + a + b + c = 29$$

$$abc + ab + bc + b + ca + a + c + 1 = 29 + 1$$

$$ab(c+1) + b(c+1) + a(c+1) + c + 1 = 30$$

$$(c+1)(ab + b + a + 1) = 30$$

$$(c+1)(b(a+1) + a + 1) = 30$$

$$(c+1)(b+1)(a+1) = 30$$

เนื่องจาก a, b และ c เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $a+1, b+1$ และ $c+1$ จะเป็นจำนวนที่มากกว่า 1

30 แยกเป็นผลคูณของ 3 จำนวนที่มากกว่า 1 ได้แค่แบบเดียว คือ $2 \times 3 \times 5$

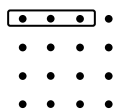
ดังนั้น $a+1, b+1, c+1$ คือ 2, 3, 5 (อาจไม่ตามลำดับ)

ดังนั้น a, b, c คือ 1, 2, 4 (อาจไม่ตามลำดับ) ซึ่งจะบวกกันได้ $1 + 2 + 4 = 7$

28. นำจุด 16 จุด มาจัดเรียงบนระนาบ โดยแบ่งออกเป็น 4 แถว แต่ละแถวมี 4 จุด และระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในแถวเดียวกัน เท่ากับระยะห่างระหว่างจุดสองจุดใดๆ ที่อยู่ติดกันในหลักเดียวกัน ความน่าจะเป็น ที่เมื่อสุ่มเลือกจุด 3 จุดใดๆ มาจากระนาบนี้แล้วอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันเท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{11}{140}$

กรณี 3 จุด อยู่ในแนวนอน :

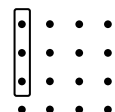


เลือกแนวนอนได้ 4 แบบ

เลือก 3 จุด จาก 4 จุดที่อยู่ในแนวนอนเดียวกัน ได้ $\binom{4}{3}$ แบบ

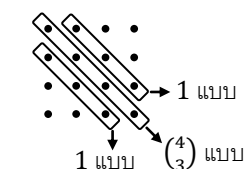
รวมได้ $4 \binom{4}{3} = 16$ แบบ

กรณี 3 จุด อยู่ในแนวตั้ง :



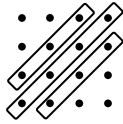
จะได้จำนวนแบบเท่ากับกรณีแรก = 16 แบบ

กรณี 3 จุด อยู่ในแนวเฉียงลง :



จะได้ $1 + 1 + \binom{4}{3} = 6$ แบบ

กรณี 3 จุด อยู่ในแนวเดียวกัน



จะได้จำนวนแบบเท่ากับกรณีเดียวกัน = 6 แบบ

$$\text{รวมทุกกรณี จะได้ความน่าจะเป็น} = \frac{16+16+6+6}{\binom{16}{3}} = \frac{44}{\frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{3 \cdot 2}} = \frac{11}{140}$$

29. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z| \leq 1$ และ $|w| \leq 1$ ถ้า $|z + iw| = |z - i\bar{w}| = 2$ แล้ว จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $z^2 - zw + w^2$

ตอบ i

$$\text{จาก } |z| \leq 1 \text{ และ } |w| \leq 1 \text{ จะได้ } |z| + |w| \leq 2 \quad \dots(1)$$

$$\text{จากสูตร } |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \text{ จะได้ } \frac{|z + iw|}{2} \leq \frac{|z| + |iw|}{2} \leq \frac{|z| + |w|}{2} \quad \dots(2)$$

$$\text{จาก (1) และ (2) จะได้ } |z| + |w| = 2 \text{ ซึ่งจะได้ } |z| = 1 \text{ และ } |w| = 1$$

$$\text{และจากสูตร } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } |z + iw|^2 + |z - iw|^2 &= 2|z|^2 + 2|i w|^2 \quad \text{และ} \quad |z + i\bar{w}|^2 + |z - i\bar{w}|^2 = 2|z|^2 + 2|i\bar{w}|^2 \\ 2^2 + 2^2 &= 2(1^2) + 2(1^2) \quad |z + i\bar{w}|^2 + 2^2 = 2(1^2) + 2(1^2) \\ |z - iw|^2 &= 0 \quad |z + i\bar{w}|^2 = 0 \\ z &= iw \quad z = -i\bar{w} \end{aligned}$$

สังเกตว่า $i w$ กับ $-i\bar{w}$ เป็นคู่สังยุคกัน ($i\bar{w} = \overline{i w} = -i\bar{w}$)

แสดงว่า $z = \bar{z}$ ดังนั้น ส่วนจินตภาพของ z ต้องเป็น 0 จึงสรุปได้ว่า z เป็นจำนวนจริง

$$\text{จาก } |z| = 1 \text{ จึงได้ว่า } z = \pm 1 \quad \text{และจาก } z = iw \text{ จะได้ } w = \frac{z}{i} = \frac{\pm 1}{i} = \mp i$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } z^2 - zw + w^2 &= (\pm 1)^2 - (\pm 1)(\mp i) + (\mp i)^2 \\ &= 1 - (-i) + (-1) = i \end{aligned}$$

30. กำหนดให้ $\alpha > 0$ จงหาจำนวนจริงบวก x และ y ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการต่อไปนี้

$$\begin{aligned} x^{x+y} &= y^\alpha \\ y^{x+y} &= x^{2\alpha} y^\alpha \end{aligned}$$

$$\text{ตอบ } (1, 1), \left(\frac{-1+\sqrt{8\alpha+1}}{2}, \frac{4\alpha+1-\sqrt{8\alpha+1}}{2} \right)$$

เมื่อ $x = 1$ หรือ $y = 1$: เนื่องจาก α, x, y เป็นบวกทั้งหมด $\rightarrow$ จะได้แก้ระบบสมการได้คำตอบ (x, y) คือ $(1, 1)$

เมื่อ $x \neq 1$ และ $y \neq 1$: จะสามารถนำ x และ y ไปใช้เป็นฐานของ $\log$ ได้

$$\text{สมการแรก จะได้ } x + y = \log_x y^\alpha = \alpha \log_x y \quad \dots(1)$$

$$\text{สมการที่สอง จะได้ } x + y = \log_y x^{2\alpha} y^\alpha = \log_y x^{2\alpha} + \log_y y^\alpha = 2\alpha \log_y x + \alpha \quad \dots(2)$$

$$(1) \text{ และ } (2) \text{ เท่ากับ } x + y \text{ ดังนั้น } \alpha \log_x y = 2\alpha \log_y x + \alpha$$

$$\begin{aligned} \log_x y &= \frac{2 \log_y x + 1}{\alpha} \\ k &= \frac{2}{k} + 1 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \log_x y = k \\ \log_y x = \frac{1}{k} \end{array} \right\} \text{ให้ } \log_x y = k \text{ จะได้ } \log_y x = \frac{1}{k}$$

$$k^2 - k - 2 = 0$$

$$(k - 2)(k + 1) = 0$$

$$k = 2, -1$$

$$\text{แต่จาก (1) จะเห็นว่า } x + y \text{ และ } \alpha \text{ เป็นบวก ดังนั้น } \log_x y \text{ ต้องเป็นบวก} \rightarrow k = \log_x y = 2 \\ y = x^2$$

$$\text{แทนใน (1) จะได้ } x + x^2 = 2\alpha \text{ จัดเป็นสมการกำลังสองได้ } x^2 + x - 2\alpha = 0$$

$$\text{จะได้ } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2\alpha)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{8\alpha+1}}{2} \quad (\text{ค่าลบใช้ไม่ได้ เพราะ } x \text{ เป็นบวก})$$

$$\text{และ } y = x^2 = \left(\frac{-1 + \sqrt{8\alpha+1}}{2} \right)^2 = \frac{1 + 8\alpha + 1 - 2\sqrt{8\alpha+1}}{4} = \frac{4\alpha + 1 - \sqrt{8\alpha+1}}{2}$$

31. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 และให้ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ และ J แทนเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มี 1 เป็นสมาชิกในทุกตำแหน่ง ถ้าอินเวอร์สของเมทริกซ์ $29I - 3J$ คือ $\frac{1}{29}(I - 3J)$ แล้ว จงหาค่าของ n

ตอบ 10

$$\begin{aligned} \text{อินเวอร์สของเมทริกซ์ } 29I - 3J \text{ คือ } \frac{1}{29}(I - 3J) \text{ แสดงว่า } (29I - 3J) \times \frac{1}{29}(I - 3J) &= I \\ 29I - 3J - 87J + 9J^2 &= 29I \\ 9J^2 &= 90J \\ J^2 &= 10J \quad \dots(*) \end{aligned}$$

$$J \text{ คือเมทริกซ์ที่มีแต่ 1 ในทุกตำแหน่ง ดังนั้น } J^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่าตอนหาผลคูณในแต่ละตำแหน่ง จะมี 1×1 บวกกันอยู่ n ตัว (J มีมิติ $n \times n$)

ดังนั้น J^2 จะเป็นเมทริกซ์ที่มีแต่ $1 \times 1 \times n = n$ ในทุกตำแหน่ง

ในขณะที่ $10J$ จะเป็นเมทริกซ์ที่มีแต่ 10 ในทุกตำแหน่ง $\rightarrow$ จาก (*) จะได้ $n = 10$

32. มีฉลาก 10 ใบ โดยที่ฉลากแต่ละใบเขียนเลขจำนวนจาก 1 ถึง 10 โดยที่ฉลากแต่ละใบมีเพียงเลขจำนวนเดียวเท่านั้น สุ่มหยิบฉลากมา 10 ใบ จงหาความน่าจะเป็นที่ผลต่างของจำนวนที่ปรากฏบนฉลากแต่ละคู่ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2

ตอบ 0

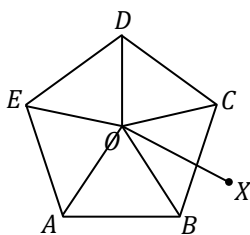
ข้อนี้ โจทย์น่าจะผิด เพราะถ้าสุ่มหยิบมา 10 ใบ ก็คือหยิบมาทุกใบ

ซึ่งจะมีฉลากคู่ที่ต่างกันน้อยกว่า 2 อยู่ในนั้นอย่างแน่นอน (เช่น 7 กับ 8)

เหตุการณ์ที่โจทย์สนใจ จึงเป็นไปไม่ได้ $\rightarrow$ ความน่าจะเป็น = 0

33. กำหนดให้ $ABCDE$ เป็นรูปห้าเหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่าที่แนบในวงกลม จุดศูนย์กลางที่ O และมีรัศมียาว 3 หน่วย ถ้า X เป็นจุดใดๆ ที่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง 4 หน่วย แล้ว $|AX|^2 + |BX|^2 + |CX|^2 + |DX|^2 + |EX|^2$ มีค่าเท่าใด

ตอบ 125



$$\begin{aligned} |AX|^2 &= |\vec{AX}|^2 = |\vec{AO} + \vec{OX}|^2 = |\vec{AO}|^2 + |\vec{OX}|^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OX} \\ &= 3^2 + 4^2 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OX} \\ &= 25 + 2\vec{AO} \cdot \vec{OX} \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ทำนองเดียวกัน } |BX|^2 &= |\vec{BO}|^2 + |\vec{OX}|^2 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OX} \\ &= 25 + 2\vec{BO} \cdot \vec{OX} \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$|CX|^2 = 25 + 2\vec{CO} \cdot \vec{OX} \quad \dots(3)$$

$$|DX|^2 = 25 + 2\vec{DO} \cdot \vec{OX} \quad \dots(4)$$

$$|EX|^2 = 25 + 2\vec{EO} \cdot \vec{OX} \quad \dots(5)$$

$$(1) + (2) + \dots + (5) : |AX|^2 + |BX|^2 + \dots + |EX|^2 = 5(25) + 2(\vec{AO} + \vec{BO} + \dots + \vec{EO}) \cdot \vec{OX} \quad \dots(*)$$

$\overrightarrow{AO}$ กับ $\overrightarrow{BO}$ ทำมุมกัน $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ เมื่อนำมาบวกกันแบบหางต่อหัว จะทำมุม $180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$ ซึ่งเท่ากับมุมภายในของรูปห้าเหลี่ยมมุมเท่าพอดี ($\frac{180^\circ(5-2)}{5} = 36^\circ \times 3 = 108^\circ$)

นั่นคือ $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \dots + \overrightarrow{EO}$ จะประกอบกันเป็นห้าเหลี่ยม และวนกลับมาที่จุดตั้งต้น กลายเป็น $\vec{0}$

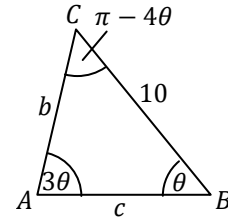
แทนใน (*) จะได้ $|AX|^2 + |BX|^2 + \dots + |EX|^2 = 5(25) + 2\vec{0} \cdot \overrightarrow{OX} = 125 + 0 = 125$

34. รูปสามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่งมีด้านแต่ละด้านยาวเป็นจำนวนเต็ม และ $\angle A = 3\angle B$ ถ้าด้านที่ยาวที่สุดอยู่ตรงข้ามมุม A มีความยาว 10 หน่วยแล้ว ความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมดังกล่าวเท่ากับเท่าใด

ตอบ 21

ให้ $\angle B = \theta$ จะได้ $\angle A = 3\theta$ และ $\angle C = \pi - 4\theta$ ดังรูป

$$\begin{aligned} \text{จากกฎของ sin จะได้ } \frac{10}{\sin 3\theta} &= \frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin(\pi-4\theta)} \\ \frac{10}{\sin 3\theta} &= \frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{\sin 4\theta} \\ \frac{10}{3\sin \theta - 4\sin^3 \theta} &= \frac{b}{\sin \theta} = \frac{c}{4\sin \theta \cos \theta \cos 2\theta} \\ \frac{10}{3-4\sin^2 \theta} &= b = \frac{c}{4\cos \theta \cos 2\theta} \quad \dots(*) \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{จาก } \frac{10}{3-4\sin^2 \theta} &= b \\ \frac{10}{b} &= 3-4\sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{3}{4} - \frac{5}{2b} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos \theta &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2b}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{2b}} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{2b}\right) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{5}{b} \end{aligned}$$

$$\text{แทน } \cos \theta \text{ และ } \cos 2\theta \text{ ใน } (*) \text{ ครึ่งหลัง จะได้ } b = \frac{c}{4\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{2b}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{b}\right)}$$

เนื่องจาก b และ c เป็นจำนวนเต็ม แสดงว่า $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{2b}}$ ต้องหาค่าลงตัว

(ถ้าถอดไม่ลงตัว จะได้เป็นค่าตรรกยะที่เขียนเป็นเศษส่วนของจำนวนเต็มไม่ได้)

ไล่แทน $b = 1, 2, 3, \dots, 9$ (ต้องสั้นกว่าด้านที่ยาวที่สุด ซึ่งคือ 10) ที่ทำให้ $\frac{1}{4} + \frac{5}{2b} = \frac{b+10}{4b}$ ถอดรูทลงตัว

จะได้ $b = 8$ เท่านั้น

$$\text{จาก } (*) \text{ จะได้ } c = 4b\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{2b}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{b}\right) = 4(8)\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{5}{2(8)}} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{5}{8}\right) = 4(8)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = 3$$

จะได้ความยาวรอบรูป $= 10 + 8 + 3 = 21$

35. จงหาค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=0}^n (1 - 2\cos(2^{k-n}\pi) + 2\cos(2^{k-n+1}\pi))$

โดยนิยามสัญลักษณ์ $\prod_{k=0}^n a_k = a_0 a_1 a_2 \dots a_n$ สำหรับลำดับ $(a_k)_{k=0}^n$ ใดๆ

ตอบ 1

$$\prod_{k=0}^n (1 - 2\cos(2^{k-n}\pi) + 2\cos(2^{k-n+1}\pi)) = \prod_{k=0}^n \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2^{n-k}} + 2\cos\frac{\pi}{2^{n-k-1}}\right)$$

$$\text{กระจายได้ } \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2^n} + 2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} + 2\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}\right) \dots \left(1 - 2\cos\frac{\pi}{2^0} + 2\cos\frac{\pi}{2^{-1}}\right) \dots(*)$$

พจน์แรก $1 - 2 \cos \frac{\pi}{2^n} + 2 \cos \frac{\pi}{2^{n-1}}$ จัดตัวส่วนให้เป็น 2^{n+1}

$$= \frac{1 - 2 \cos \frac{2\pi}{2^{n+1}} + 2 \cos \frac{4\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

คูณเข้าและหารออกด้วย $\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$ เพื่อให้ $\cos$ เข้าสูตร

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - 2 \cos \frac{2\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} + 2 \cos \frac{4\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$2 \cos A \cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B)$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - (\cos \frac{3\pi}{2^{n+1}} + \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}) + (\cos \frac{5\pi}{2^{n+1}} + \cos \frac{3\pi}{2^{n+1}})}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}} - \cos \frac{3\pi}{2^{n+1}} - \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} + \cos \frac{5\pi}{2^{n+1}} + \cos \frac{3\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\cos \frac{5\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}}$$

สามารถทำแบบเดียวกันกับพจน์ที่เหลือได้ ยกเว้นพจน์สุดท้ายที่ $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ทำให้คูณเข้าและหารออกไม่ได้

คิดพจน์สุดท้ายแบบตรงๆ จะได้ $1 - 2 \cos \frac{\pi}{2^0} + 2 \cos \frac{\pi}{2^{-1}} = 1 - 2(-1) + 2(1) = 5$

จะได้ (*) = $\frac{\cos \frac{5\pi}{2^{n+1}}}{\cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{\cos \frac{5\pi}{2^n}}{\cos \frac{\pi}{2^n}} \cdot \dots \cdot \frac{\cos \frac{5\pi}{2^2}}{\cos \frac{\pi}{2^2}} \cdot 5$

คูณเข้าและหารออกด้วย $\frac{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}$

$$= \frac{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^{n+1}}}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}} \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^n}}{2 \cos \frac{\pi}{2^n}} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^2}}{2 \cos \frac{\pi}{2^2}} \cdot 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}$$

และเตรียม "กวาด" ด้วยสูตร $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$

$$= \frac{\sin \frac{5\pi}{2^n}}{\sin \frac{\pi}{2^n}} \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^n}}{2 \cos \frac{\pi}{2^n}} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^2}}{2 \cos \frac{\pi}{2^2}} \cdot 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\sin \frac{5\pi}{2^{n-1}}}{\sin \frac{\pi}{2^{n-1}}} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cos \frac{5\pi}{2^2}}{2 \cos \frac{\pi}{2^2}} \cdot 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}$$

$$= \frac{\sin \frac{5\pi}{2^1}}{\sin \frac{\pi}{2^1}} \cdot 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}} = 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}$$

แต่จะเห็นว่า $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}}$ อยู่ในรูปแบบ $\frac{0}{0} \rightarrow$ ต้องจัดรูป $\frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}} = \frac{\sin \theta}{\sin 5\theta}$ ให้เกิดการตัดกันก่อน

เนื่องจาก $\sin 5\theta = \sin(2\theta + 3\theta) = \sin 2\theta \cos 3\theta + \cos 2\theta \sin 3\theta$

$$= 2 \sin \theta \cos \theta \cos 3\theta + \cos 2\theta (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$= \sin \theta (2 \cos \theta \cos 3\theta + \cos 2\theta (3 - 4 \sin^2 \theta))$$

ดังนั้น $\frac{\sin \theta}{\sin 5\theta} = \frac{1}{2 \cos \theta \cos 3\theta + \cos 2\theta (3 - 4 \sin^2 \theta)}$

จะได้ $\lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin \frac{5\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \cdot \frac{1}{2 \cos \frac{\pi}{2^{n+1}} \cos \frac{3\pi}{2^{n+1}} + \cos \frac{2\pi}{2^{n+1}} (3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{2^{n+1}})}$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2 \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) + \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) (3 - 4 \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix} \right))} = 1$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สันธยา เสนามนตรี และ คุณ Atiratch Laoharenoo สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ คุณ Permsup Meeyang สำหรับเฉลยละเอียด

ขอบคุณ คุณ Teerapat Saengsubin ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร