

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 60)

วันอาทิตย์ที่ 26 พฤศจิกายน 2560 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. สำหรับเซตย่อย $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ใน $\mathbb{R}$ ใดๆ นิยาม

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{มีจำนวนนับ } n \text{ ซึ่ง } x \in A_n\} \quad \text{และ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ ทุกจำนวนนับ } n\}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right] = \mathbb{R}$

ข. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$

ค. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1]$

ง. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$

2. ตำรวจทำการสอบสวนผู้ต้องสงสัยในคดีลักทรัพย์จำนวน 5 คน ได้แก่ กนกกร เขมรัฐ แดทรียา จิรศักดิ์ เริงชาย

ภายใต้ข้อสมมติฐานว่าขโมยจะพูดโกหกเสมอ ส่วนผู้บริสุทธิ์จะพูดความจริงเสมอ และขโมยมีเพียงคนเดียว จากการสอบปากคำดังนี้

- กนกกร: ขโมยเป็นผู้ชาย
- แดทรียา: ขโมยคือ กนกกร
- เริงชาย: ถ้าขโมยคือจิรศักดิ์แล้วกนกกรเป็นผู้บริสุทธิ์

ผู้ต้องสงสัยในข้อใดเป็นขโมย

ก. กนกกร

ข. แดทรียา

ค. เริงชาย

ง. ข้อมูลไม่พอที่จะสรุปได้

- ဂ. 0.631 ခ. 0.640 က. 0.651 ဂ. 0.661

၈. $3\sqrt{3}-1$ ၉. 4 ၁၀. $\sqrt{3}+2$ ၁၁. 6

- ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ
ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ $z - \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริง(2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง และ $z + \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $|z| = 1$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ถ้าฟังก์ชัน $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการ $g(x) + xg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$ จงเขียน $g(x)$ ในรูปของ x 17. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{a} + 2\vec{b}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $5\vec{a} - 4\vec{b}$ แล้ว ความยาวรอบรูปมากที่สุดที่เป็นไปได้ของรูปสามเหลี่ยมที่มี $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นด้านประกอบสองด้าน มีค่าเท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ P เป็นจุดจุดหนึ่งที่ไม่เป็นจุดยอดบนไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 9$ ถ้า $PF_1 \cdot PF_2 = 25$ เมื่อ F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาดังกล่าวแล้ว รูปสามเหลี่ยม PF_1F_2 มีพื้นที่เท่ากับเท่าใด

19. ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ ทุก $x \in [-2, 3]$ แล้วพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = |f(x)|$ ที่อยู่เหนือแกน X บนช่วงปิด $[-2, 3]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

20. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x < y$ และสอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 2017$ จงหาค่าของ y

21. กำหนดให้ $x > 1$ และ $y > 1$ สอดคล้องกับสมการ $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}$ แล้ว ค่าต่ำสุดของ $x - 12y$ เท่ากับเท่าใด

22. กำหนดพหุนาม $p(x) = 2017x^2 - 2560x - 743$

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสพหุนาม $p(x)$ ที่จุด $(-10, p(-10))$ และที่จุด $(1000, p(1000))$ ตามลำดับ ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด (x_0, y_0) แล้ว x_0 มีค่าเท่าใด

23. กำหนดให้ $A = \{a \in \mathbb{R} : \text{สมการ } \ln(ax - 3) - \ln(3 - x) = \ln(x - 2) \text{ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว}\}$ และ $B = \{b \in \mathbb{R} : |b - 1| < |6 - 4b|\}$

จงหา $A \cap B$

24. **บทนิยาม** สำหรับเมทริกซ์ A ใดๆ ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ นิยาม $A \bmod n$

ให้เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากับมิติของ A และสมาชิกตำแหน่งใดๆ ของ $A \bmod n$ ได้จากเศษเหลือที่ได้จากการหาร

สมาชิกในตำแหน่งนั้นของ A ด้วย n เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ แล้วจะได้ว่า $A \bmod 3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

ให้ $X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 1, 2\} \right\}$

จำนวนเมทริกซ์ $A \in X$ ทั้งหมดที่มีสมบัติ $A^2 \bmod 3 = I$ เท่ากับเท่าใด

25. สุ่มเลือกจำนวนเต็ม a และ b จากเซตของจำนวนเต็ม $\{1, 2, \dots, 100\}$ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ a และ b ซึ่งทำ

ให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 3 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. จงหาคำตอบ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ทั้งหมดของระบบสมการ
$$\begin{cases} 2 \log(x - 2y) = \log x + \log y \\ 3^{x-y} + 27^y = 6 \end{cases}$$

27. จงหาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้เซตคำตอบของสมการ $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ ไม่เป็นเซตว่าง

28. มีชายหญิงอยู่จำนวนหนึ่งถูกจัดให้นั่งทานอาหารรอบโต๊ะกลม โดยมีเงื่อนไขว่า

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้ชายนั่งทางขวามือถัดจากตนเอง

มีผู้ชาย 1 คนที่มีผู้ชายนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้หญิงนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

จะมีวิธีในการจัดให้ชายหญิงกลุ่มนี้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดกี่วิธี

29. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = (x - 2)^4(x + 1)^3(x - 1)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

30. หนูทดลองตัวหนึ่งอยู่ในห้องของกล่องทดลองเขาวงกตซึ่งมีช่องประตู 4 ช่อง มีหนึ่งช่องของประตูที่มีทางเดินที่นำหนูไปสู่ทางออกภายนอกโดยหนูจะใช้เวลาในการเดินทาง 9 วินาที ส่วนช่องประตูอีกสามช่องที่เหลือจะนำไปสู่ทางเดินที่วกกลับมาที่ห้องเดิม โดยหนูจะใช้เวลาในทางเดินเหล่านี้เป็นเวลา 3, 5 และ 7 วินาทีตามลำดับ และทุกครั้งที่หนูกลับมาที่ห้องเดิมหนูจะสุ่มเข้าช่องประตูอีกครั้งโดยที่การสุ่มเลือกประตูแต่ละครั้งจะไม่ขึ้นกับการสุ่มเลือกช่องประตูในครั้งก่อนหน้านี้ จงหาความน่าจะเป็นที่หนูจะใช้เวลา 30 วินาทีในการเดินทางออกไปสู่ภายนอก

31. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

32. จงหาผลรวมของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{4}{\sec x - 2 \tan x} - \frac{1}{\sec x + \tan x} = 3\sqrt{3}$

33. จงหาค่า $a > 0$ และ $x > 0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ
$$\begin{cases} (\ln a)a^x = 1 \\ a^x = x \end{cases}$$

34. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ซึ่ง A , B และ $B^{-1} - A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
จงหา $(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1}$ (ตอบในรูปของเมทริกซ์ A และ B โดยไม่ใช่เครื่องหมายอินเวอร์ส)

35. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ
$$\frac{1}{x - \tan 20^\circ} + \frac{1}{x + \tan 40^\circ} + \frac{1}{x - \tan 80^\circ} = 0$$

เฉลย

- | | | | |
|------|------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1. ค | 10. ง | 19. $\frac{28}{3}$ | 28. $\binom{5}{2} 4! 6!$ |
| 2. ก | 11. ค | 20. 44 | 29. $0, \frac{5}{4}, 2$ |
| 3. ค | 12. ข | 21. -16 | 30. $\frac{737}{4^8}$ |
| 4. ค | 13. ค | 22. 495 | 31. -0.25 |
| 5. ก | 14. ข | 23. (1, 1.4) | 32. $\frac{13\pi}{6}$ |
| 6. ค | 15. ค | 24. 14 | 33. $x = e, a = e^{\frac{1}{e}}$ |
| 7. ข | 16. $\frac{2x}{x^2+1}$ | 25. 1 | 34. $A - ABA$ |
| 8. ง | 17. $2 + \sqrt{3}$ | 26. $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ | 35. $\sqrt{3} \pm 2$ |
| 9. ก | 18. 12 | 27. $[2, \infty)$ | |

แนวคิด

1. สำหรับเซตย่อย $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ ใน $\mathbb{R}$ ใดๆ นิยาม

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \text{มีจำนวนนับ } n \text{ ซึ่ง } x \in A_n\} \quad \text{และ} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n := \{x \in \mathbb{R} \mid x \in A_n \text{ ทุกจำนวนนับ } n\}$$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

- | | |
|---|--|
| ก. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right] = \mathbb{R}$ | ข. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ |
| ค. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1]$ | ง. $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ |

ตอบ ค

- ก. เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ จะเห็นว่า $a \in \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right]$ ได้เสมอ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากพอ เช่น เมื่อ $n = \lceil |a| \rceil + 2$ จะได้ $3 \in \left[-5 + \frac{1}{5}, 5 - \frac{1}{5}\right]$, $91.9 \in \left[-93 + \frac{1}{93}, 93 - \frac{1}{93}\right]$, $-5.1 \in \left[-7 + \frac{1}{7}, 7 - \frac{1}{7}\right]$ เป็นต้น

ดังนั้น จำนวนจริงทุกจำนวน จะอยู่ใน $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[-n + \frac{1}{n}, n - \frac{1}{n}\right] \rightarrow$ ก. ถูก

- ข. จะเห็นว่า $0 \in \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

และเมื่อ $a \neq 0$ จะสามารถหา n ที่ $a \notin \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ ได้เสมอ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากพอ

เช่น เมื่อ $n = \left\lceil \left|\frac{1}{a}\right| \right\rceil$ จะได้ $3 \notin \left(-\frac{1}{1}, \frac{1}{1}\right)$, $0.05 \notin \left(-\frac{1}{20}, \frac{1}{20}\right)$ เป็นต้น

ดังนั้น 0 จะเป็นจำนวนเดียวเท่านั้น ที่อยู่ใน $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \rightarrow$ ข. ถูก

- ค. ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนนับอะไรก็ตาม จะเห็นว่า $1 \notin \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$ ดังนั้น $1 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]$

แต่ $1 \in (0, 1]$ ดังนั้น $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] \neq (0, 1] \rightarrow$ ค. ผิด

- ง. จะแสดงว่าทั้งฝั่งซ้ายและฝั่งขวา ต่างก็เท่ากับ $(0, 1]$ ทั้งคู่

เมื่อ $a \in (0, 1]$ จะเห็นว่า $(0, 1] \subset \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right]$ และ $(0, 1] \subset \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ สำหรับจำนวนนับ n ทุกตัว

เมื่อ $a \leq 0$ จะเห็นว่า $a \notin \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right]$ และ $a \notin \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ สำหรับ n บางตัว (เช่นเมื่อ $n = 1$)

เมื่อ $a > 1$ จะมี n ที่ $a \notin (0, 1 + \frac{1}{n}]$ และ $a \notin (0, 1 + \frac{1}{n})$ เสมอ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่มีค่ามากพอ
 เช่น เมื่อ $n = \left\lceil \frac{1}{a-1} \right\rceil + 1$ จะได้ $3 \notin (0, 1 + \frac{1}{11}]$ และ $3 \notin (0, 1 + \frac{1}{11})$
 $1.1 \notin (0, 1 + \frac{1}{11}]$ และ $1.1 \notin (0, 1 + \frac{1}{11})$ เป็นต้น
 ดังนั้น จะมีแค่ $(0, 1]$ เท่านั้น ที่อยู่ทั้งฝั่งซ้ายและฝั่งขวา $\rightarrow$ ง. ถูก

2. ตำรวจทำการสอบสวนผู้ต้องสงสัยในคดีลักทรัพย์จำนวน 5 คน ได้แก่ กนกกร เขมรัฐ แครทรียา จิรศักดิ์ เชิงชาย
 ภายใต้ข้อสมมติฐานว่าขโมยจะพูดโกหกเสมอ ส่วนผู้บริสุทธิ์จะพูดความจริงเสมอ และขโมยมีเพียงคนเดียว จากการ
 สอบปากคำดังนี้

- กนกกร: ขโมยเป็นผู้ชาย
- แครทรียา: ขโมยคือ กนกกร
- เชิงชาย: ถ้าขโมยคือจิรศักดิ์แล้วกนกกรเป็นผู้บริสุทธิ์

ผู้ต้องสงสัยในข้อใดเป็นขโมย

- ก. กนกกร ข. แครทรียา ค. เชิงชาย ง. ข้อมูลไม่พอที่จะสรุปได้

ตอบ ก

เนื่องจากขโมยมีคนเดียว ดังนั้น คำพูดของ เชิงชาย จะเป็นจริงเสมอ

เนื่องจากขโมยจะพูดโกหกเสมอ ดังนั้น เชิงชาย ไม่ใช่ขโมย

กรณี แครทรียาพูดจริง จะได้ว่า กนกกร เป็นขโมย ดังนั้น คำพูด กนกกร ที่บอกว่า “ขโมยเป็นผู้ชาย” จะเป็นเท็จ

ดังนั้น ขโมยเป็นหญิง $\rightarrow$ จะสรุปได้ว่า กนกกร เป็นขโมย ที่เป็นหญิง

กรณี ให้แครทรียาพูดโกหก จะได้ แครทรียา เป็นขโมย (เพราะขโมยจะพูดโกหกเสมอ)

เนื่องจากขโมยมีคนเดียว ดังนั้น คำพูดกนกกรจะเป็นจริง $\rightarrow$ สรุปได้ว่า แครทรียา เป็นขโมย ที่เป็นชาย

ดังนั้น ข้อนี้ควรจะตอบข้อ ง. เพราะไม่รู้ว่าเป็น กนกกร (ญ) หรือ แครทรียา (ช) ที่เป็นขโมย

แต่ผมเดาใจคนออกข้อสอบ ว่าคงอยากให้เรารู้เองว่า แครทรียาเป็นหญิง $\rightarrow$ ถ้าผมสอบ ผมคงเสี่ยงตอบของ ก.

3. จำนวนของคู่อันดับ (m, n) ของจำนวนเต็ม m, n ทั้งหมดซึ่งสอดคล้องกับสมการ $m^2 - mn + 2n^2 = 23$
 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 0 ข. 4 ค. 6 ง. 8

ตอบ ค

จัดรูปให้เป็นสมการกำลังสองที่มี m เป็นตัวแปร $\rightarrow$ $m^2 - mn + 2n^2 = 23$
 $m^2 - nm + 2n^2 - 23 = 0$

ใช้สูตร $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ จะได้ $m = \frac{-(-n) \pm \sqrt{(-n)^2 - 4(1)(2n^2 - 23)}}{2} = \frac{n \pm \sqrt{92 - 7n^2}}{2}$

เนื่องจาก m และ n ต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $92 - 7n^2$ ต้องถอดรูทลงตัวเท่านั้น (ไม่งั้น m จะเป็นอตรรกยะ)

n	$92 - 7n^2$
0	92
± 1	85
± 2	64
± 3	29
± 4	ติดลบ

✓

จะเห็นว่า $n = \pm 2$ เท่านั้น ที่ทำให้ $92 - 7n^2$ ถอดรูทลงตัว

(ถ้า n เป็น ± 4 ลงไป จะทำให้ $92 - 7n^2$ ติดลบ และถอดรูทไม่ได้)

ถ้า $n = 2$ จะได้ $m = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = -3, 5$

ถ้า $n = -2$ จะได้ $m = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = -5, 3$

จะได้คำตอบคือ $(-3, 2), (5, 2), (-5, -2), (3, -2)$ รวม 4 คำตอบ

4. กำหนดให้ $A = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x, y \geq 0 \text{ และ } |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|} \}$ และ
 $B = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2x + 2y - 1 \}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นพื้นที่ของเซต $A \cap B$
 ก. $\pi/4$ ข. $\pi/2$ ค. π ง. 2π

ตอบ ค

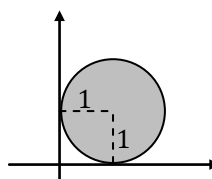
หา A :

$$\begin{aligned} |\sqrt{x} - \sqrt{y}| &\leq \sqrt{|x - y|} \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 &\leq |x - y|^4 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 &\leq (x - y)^2 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 &\leq (\sqrt{x^2 - y^2})^2 \\ (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 &\leq ((\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y}))^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ยกกำลังสอง เพื่อกำจัดราก} \\ \text{ยกกำลังสอง เพื่อกำจัดค่าสัมบูรณ์} \end{array} \right\} \text{รวมเป็น กำลังสี่} \\ 0 &\leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^4 \quad \left. \begin{array}{l} \text{ผลต่างกำลังสอง} \end{array} \right\} \\ 0 &\leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 ((\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 - (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{ผลต่างกำลังสอง} \end{array} \right\} \\ 0 &\leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (2\sqrt{y})(2\sqrt{x}) \end{aligned}$$

จะเห็นว่าทุกตัวทางขวามากกว่าหรือเท่ากับ 0 ทุกตัว $\rightarrow$ อสมการเป็นจริงเสมอเมื่อ $x, y \geq 0$
 $\rightarrow$ จะได้ A คือบริเวณทั้งหมดในจุดภาคที่ 1

หา B :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 2x + 2y - 1 \\ x^2 - 2x + y^2 - 2y &\leq -1 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 &\leq -1 + 1 + 1 \\ (x - 1)^2 + (y - 1)^2 &\leq 1 \end{aligned}$$



เป็นพื้นที่ในวงกลมที่มี ศก = (1, 1) และ รัศมี = 1 ดังรูป

เนื่องจากวงกลม B อยู่ในจุดภาคที่ 1 ทั้งวง จะได้ $A \cap B =$ วงกลม B ทั้งวง

ดังนั้น $A \cap B$ จะเป็นวงกลม รัศมี 1 หน่วย $\rightarrow$ จะได้พื้นที่ = $\pi(1^2) = \pi$

5. กำหนดให้ $f(x) = \frac{2560x+2017}{2017x-2560}$ และ $g(x) = \sqrt{x-25}$

ค่าของ $(g \circ f \circ f \circ f \circ f)(650)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 25 ข. 50 ค. 625 ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

ตอบ ก

จัดรูปสมการ $y = f(x)$:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2560x+2017}{2017x-2560} \\ 2017xy - 2560y &= 2560x + 2017 \\ 2017xy - 2017 &= 2560x + 2560y \end{aligned}$$

จะเห็นว่า x และ y ในสมการที่ได้ มีลักษณะ “สมมาตร” กัน (เมื่อเปลี่ยน x เป็น y , เปลี่ยน y เป็น x จะได้สมการเดิม)

ดังนั้น $f^{-1} = f$ (เพราะ f^{-1} ได้จากการเปลี่ยน x เป็น y , เปลี่ยน y เป็น x

ถ้าเปลี่ยนแล้วได้เหมือนเดิม แสดงว่า $f^{-1} = f$)

ดังนั้น $(g \circ f \circ f \circ f \circ f)(650) = g(f(f(f(f(650))))))$
 $= g(f^{-1}(f(f^{-1}(f(650)))))$
 $= g(f^{-1}(f(650)))$
 $= g(650)$
 $= \sqrt{650 - 25} = 25$

$\left. \begin{array}{l} f^{-1} = f \\ f^{-1} \text{ ตัดกับ } f \text{ ได้} \end{array} \right\}$

6. นักวิ่งสองคน A และ B กำลังจะวิ่งแข่งบนลู่วิ่งที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี r เมตร เป็นจำนวน 50 รอบ ถ้านักวิ่งเริ่มต้นวิ่งที่จุดเดียวกันและวิ่งไปในทิศทางเดียวกันด้วยความเร็วคงที่ โดย A วิ่งด้วยความเร็ว a เมตรต่อนาที และ B วิ่งด้วยความเร็ว b เมตรต่อนาที โดยที่ $a > b$ เมื่อการแข่งขันเสร็จสิ้น พบว่า A ได้วิ่งแซงรอบ B ไปเป็นจำนวนทั้งสิ้น 17 รอบ ข้อใดต่อไปนี้เป็นค่าที่เป็นไปได้ของ b/a

ก. 0.631

ข. 0.640

ค. 0.651

ง. 0.661

ตอบ ค

เนื่องจาก $a > b$ ดังนั้น เมื่อการแข่งขันเสร็จสิ้น A จะวิ่งได้ครบ 50 รอบ (แต่ B จะวิ่งได้น้อยกว่า 50 รอบ)

1 รอบ = $2\pi r$ เมตร ดังนั้น A จะวิ่งได้ระยะทาง = $50(2\pi r) = 100\pi r$ เมตร

A วิ่งเร็ว a เมตรต่อนาที ดังนั้น A ใช้เวลาวิ่ง = $\frac{100\pi r}{a}$ นาที จึงจะถึงเส้นชัย

B เริ่มวิ่งพร้อม A ดังนั้น ขณะที่ A เข้าเส้นชัย B จะใช้เวลาวิ่งไป $\frac{100\pi r}{a}$ นาที ด้วย

ดังนั้น ขณะที่ A เข้าเส้นชัย B วิ่งได้ระยะทาง $\frac{100\pi r}{a} \cdot b$ เมตร

A แซง B ไป 17 รอบ แสดงว่า ระยะทาง A - ระยะทาง B ต้องเกิน 17 รอบสนาม แต่ไม่ถึง 18 รอบสนาม

$$\begin{array}{rcll}
 17(2\pi r) < 100\pi r - \frac{100\pi r}{a} \cdot b < 18(2\pi r) & & & \\
 34 < 100 - \frac{100b}{a} < 36 & \begin{array}{l} \nearrow \div \pi r \text{ ตลอด} \\ \nearrow - 100 \text{ ตลอด} \end{array} & & \\
 -66 < -\frac{100b}{a} < -64 & & & \\
 0.66 > \frac{b}{a} > 0.64 & \begin{array}{l} \nearrow \div (-100) \text{ ตลอด} \\ \text{ต้องกลับ มากกว่า} \leftrightarrow \text{น้อยกว่า} \end{array} & &
 \end{array}$$

→ จะเห็นว่าข้อ ค เท่านั้น ที่อยู่ระหว่าง 0.64 และ 0.66

7. ค่าของ $(\cot 10^\circ - 3\sqrt{3})(\csc 20^\circ + 2 \cot 20^\circ)$ ตรงกับข้อใด

ก. $3\sqrt{3} - 1$

ข. 4

ค. $\sqrt{3} + 2$

ง. 6

ตอบ ข

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\cos 10^\circ}{\sin 10^\circ} - 3\sqrt{3} \right) \left(\frac{1}{\sin 20^\circ} + \frac{2 \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \right) \\
 &= \left(\frac{\cos 10^\circ - 3\sqrt{3} \sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} \right) \left(\frac{1 + 2 \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} \right) \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + 2 \cos 10^\circ \cos 20^\circ - 3\sqrt{3} \sin 10^\circ - 3\sqrt{3} (2 \cos 20^\circ \sin 10^\circ)}{\sin 10^\circ \sin 20^\circ} \cdot \frac{2}{2} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 10^\circ - 3\sqrt{3} \sin 10^\circ - 3\sqrt{3} (\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)}{\cos 10^\circ - \cos 30^\circ} \cdot \frac{2}{1} \\
 &= \frac{\cos 10^\circ + \cos 30^\circ + \cos 10^\circ - 3\sqrt{3} \sin 10^\circ - 3\sqrt{3} \sin 30^\circ + 3\sqrt{3} \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 30^\circ} \cdot 2 \\
 &= \frac{2 \cos 10^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 \\
 &= \frac{2 \cos 10^\circ - \frac{2\sqrt{3}}{2}}{\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 \\
 &= \frac{2 \left(\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot 2 = 4
 \end{aligned}$$

พิจารณาเส้นทาง $S \rightarrow 1 \rightarrow S$ จะเห็นว่าการเดินครั้งถัดไป มีโอกาสที่จะเดินต่อไปที่ 2 หรือ 1 อย่างละ $\frac{1}{2}$ เท่ากัน

$S \rightarrow 1 \rightarrow S \rightarrow 2$: ถ้าเดินแบบนี้ จะเดินผ่านเกือบทุกจุดแล้ว ขาดแค่ 3 ดังนั้น เมื่อไหร่ก็ตามที่เดินไปที่ 3 จะถือว่าสิ้นสุดการเดินทันที (3 คือจุดสุดท้าย) จึงไม่มีทางผ่าน 3 ก่อนจุดสุดท้ายได้ (โอกาสสำเร็จ = 0)

$S \rightarrow 1 \rightarrow S \rightarrow 1$: เดินแบบนี้ จะยังบอกไม่ได้ว่าสำเร็จหรือไม่ $\rightarrow$ สมมติให้โอกาสที่เดินแบบนี้แล้วสำเร็จ = p
 ดังนั้น เส้นทาง $S \rightarrow 1 \rightarrow S$ มีโอกาสที่จะเดินต่อไปที่ 2 (โอกาสสำเร็จ = 0) หรือ 1 (โอกาสสำเร็จ = p) เท่ากัน
 ดังนั้น เส้นทาง $S \rightarrow 1 \rightarrow S$ จะมีโอกาสสำเร็จ = $\frac{0+p}{2} = \frac{p}{2}$

จากทั้งกรณี $S \rightarrow 1 \rightarrow 3$ (โอกาสสำเร็จ = $\frac{1}{2}$) และ $S \rightarrow 1 \rightarrow S$ (โอกาสสำเร็จ = $\frac{p}{2}$)

ย้อนกลับขึ้นไปพิจารณาเส้นทาง $S \rightarrow 1$

จะเห็นว่า เส้นทาง $S \rightarrow 1$ มีโอกาสที่จะเดินต่อไปที่ 3 (โอกาสสำเร็จ = $\frac{1}{2}$) หรือ 1 (โอกาสสำเร็จ = $\frac{p}{2}$) เท่ากัน

ดังนั้น เส้นทาง $S \rightarrow 1$ จะมีโอกาสสำเร็จ = $\frac{\frac{1}{2} + \frac{p}{2}}{2} = \frac{1+p}{4}$

แต่เส้นทาง $S \rightarrow 1$ จะมีโอกาสสำเร็จเหมือนกับเส้นทาง $S \rightarrow 1 \rightarrow S \rightarrow 1$ (เพราะเดินมาอยู่ที่จุด 1 เหมือนกัน และเคยผ่าน S กับ 1 สองจุดเหมือนกัน) แต่เราเคยสมมติให้เส้นทาง $S \rightarrow 1 \rightarrow S \rightarrow 1$ มีโอกาสสำเร็จ = p

ดังนั้น เส้นทาง $S \rightarrow 1$ จะมีโอกาสสำเร็จ = p ด้วย ทำให้ได้สมการคือ $\frac{1+p}{4} = p$

$$1+p = 4p$$

$$\frac{1}{3} = p$$

เนื่องจากจุด 1 กับ 2 มีความสมมาตรกัน ดังนั้น เส้นทาง $S \rightarrow 1$ กับ $S \rightarrow 2$ จะมีโอกาสสำเร็จเท่ากัน คือ $\frac{1}{3}$

ดังนั้น จากจุด S ที่เป็นจุดเริ่มต้น จะมีโอกาสเดินไปที่ 1 (โอกาสสำเร็จ = $\frac{1}{3}$) หรือ 2 (โอกาสสำเร็จ = $\frac{1}{3}$) เท่ากัน

ดังนั้น จากจุด S จะมีโอกาสสำเร็จ = $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

10. สำหรับจำนวนจริง $a \geq 1$ นิยาม $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \dots}}}$ คือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ โดยที่ $a_1 = \sqrt{a}$

และ $a_{n+1} = \sqrt{a - a_n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริงสำหรับ $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}$

ก. มีค่าเท่ากับ $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$

ข. มีค่าเท่ากับ $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ค. มีค่าเท่ากับ 0

ง. ไม่มีค่า

ตอบ ง

จากนิยาม จะได้ $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}}$ คือ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ เมื่อ $a = 1$

ซึ่งจะได้ $a_1 = \sqrt{1} = 1$ และ $a_{n+1} = \sqrt{1 - a_n} \rightarrow$ แทน $n = 1$ จะได้ $a_2 = \sqrt{1 - a_1} = \sqrt{1 - 1} = 0$

$\rightarrow$ แทน $n = 2$ จะได้ $a_3 = \sqrt{1 - a_2} = \sqrt{1 - 0} = 1$

$\rightarrow$ แทน $n = 3$ จะได้ $a_4 = \sqrt{1 - a_3} = \sqrt{1 - 1} = 0$

$\vdots$

จะเห็นว่า a_n แกว่งไปมาระหว่าง 1 กับ 0 ดังนั้น จะหาค่า $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ไม่ได้

หมายเหตุ : ข้อนี้ จะยังสมมติให้ $\sqrt{1 - \sqrt{1 - \sqrt{1 - \dots}}} = x$ ไม่ได้ จนกว่าจะรู้ว่ามันมีค่า

11. กำหนดให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงซึ่ง $a_n < b_n$ ทุก $n = 1, 2, 3, \dots$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้าลำดับ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ และ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ ลู่เข้า แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(2) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ค

1. ไม่จริง เช่น ถ้า ให้ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ คือ $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$

ให้ $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ คือ $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

จะเห็นว่า $a_n < b_n$ เสมอ แต่ลิมิตของทั้งสองลำดับ เท่ากับ 0 เท่ากัน $\rightarrow$ (1) ผิด

2. เมื่อลู่เข้าทั้งสองอนุกรม จะกระจาย $\lim$ ได้ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n)$

และเนื่องจาก $a_n < b_n$ ดังนั้น $b_n - a_n$ เป็นบวก ทุก $n = 1, 2, 3, \dots$

ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ จะมี "พจน์แรกเป็นบวก" และยิ่งบวกพจน์ต่อไปก็จะเป็นบวกมากขึ้น

จึงเป็นไปได้ที่ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ จะลู่เข้าสู่ศูนย์ หรือค่าติดลบ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) > 0$

อนุกรมลู่เข้า จะกระจาย $\lim$ ได้ $\rightarrow$ ได้เป็น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} a_n > 0$ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} b_n > \sum_{n=1}^{\infty} a_n \rightarrow$ (2) ถูก

12. กำหนดให้ $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt{\arccos x} + \sqrt{\arcsin x}$ ถ้าผลต่างของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด

ของ f บนช่วง $[0, 1]$ มีค่าเท่ากับ $a\sqrt{\pi}$ สำหรับบางค่า a ที่เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ $4a - 2a^2$ ตรงกับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. 2

ง. 3

ตอบ ข

จากสูตร $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2} \rightarrow$ ให้ $\arccos x = k$ จะได้ $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - k$

และเมื่อ $x \in [0, 1]$ จะได้ $\arccos x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

ดังนั้น ค่าสูงสุด / ต่ำสุดของ f บนช่วง $[0, 1]$ จะเท่ากับ ค่าสูงสุด / ต่ำสุดของ $\sqrt{k} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - k}$ เมื่อ $k \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$$\begin{aligned} \text{ดิฟ แล้วจับ } 0 & \hookrightarrow \frac{1}{2\sqrt{k}} + \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2} - k}}(-1) = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{k}} &= \frac{1}{2\sqrt{\frac{\pi}{2} - k}} \\ k &= \frac{\pi}{2} - k \\ k &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุด / ต่ำสุด จะเกิดที่จุด $k = \frac{\pi}{4}$ หรือ จุดขอบ ($k = 0$ หรือ $k = \frac{\pi}{2}$)

$$k = \frac{\pi}{4}: \text{ จะได้ } \sqrt{\frac{\pi}{4}} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

$$k = 0 : \text{ จะได้ } \sqrt{0} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - 0} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$k = \frac{\pi}{2} : \text{ จะได้ } \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \sqrt{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

ดังนั้น ค่าสูงสุด $= \sqrt{\pi}$ (เกิดที่ $k = \frac{\pi}{4}$) และค่าต่ำสุด $= \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (เกิดที่ $k = 0$ กับ $k = \frac{\pi}{2}$ ต่ำสุดเท่ากัน)

จะได้ผลต่างของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด $= \sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\pi} \rightarrow$ เทียบกับ $a\sqrt{\pi}$ จะได้ $a = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 4a - 2a^2 &= 4\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 2\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 \\ &= 4\left(1 - \sqrt{\frac{1}{2}}\right) - 2\left(1 - 2\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\right) \\ &= 4 - 4\sqrt{\frac{1}{2}} - 2 + 4\sqrt{\frac{1}{2}} - 1 = 1 \end{aligned}$$

13. นิยามลำดับ $\{a_n\}, \{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ สำหรับ $n = 1, 2, \dots$ ดังนี้

$$a_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}}, \quad b_n = a_1 a_2 \cdots a_n, \quad c_n = b_1 b_2 \cdots b_n$$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \quad c_9 = \frac{32}{\sqrt{111}}$$

$$(2) \quad \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} < \frac{1}{n^3} \quad \text{ทุก } n = 1, 2, \dots$$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ค

$n^4 + 4$ จะแยกตัวประกอบ โดยการทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์แบบเพิ่มพจน์กลาง ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} n^4 + 4 &= n^4 + 4n^2 + 4 - 4n^2 \\ &= (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 \\ &= (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2) \\ &= (n^2 - 2n + 1 + 1)(n^2 + 2n + 1 + 1) \\ &= ((n-1)^2 + 1)((n+1)^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } a_n = \frac{n^2+1}{\sqrt{n^4+4}} = \frac{n^2+1}{\sqrt{((n-1)^2+1)((n+1)^2+1)}} = \frac{n^2+1}{\sqrt{(n-1)^2+1} \sqrt{(n+1)^2+1}}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1^2+1}{\sqrt{0^2+1} \sqrt{2^2+1}} = \frac{2}{\sqrt{1} \sqrt{5}} \\ a_2 &= \frac{2^2+1}{\sqrt{1^2+1} \sqrt{3^2+1}} = \frac{5}{\sqrt{2} \sqrt{10}} \\ a_3 &= \frac{3^2+1}{\sqrt{2^2+1} \sqrt{4^2+1}} = \frac{10}{\sqrt{5} \sqrt{17}} \\ a_4 &= \frac{4^2+1}{\sqrt{3^2+1} \sqrt{5^2+1}} = \frac{17}{\sqrt{10} \sqrt{26}} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } b_n = a_1 a_2 \cdots a_n = \frac{2}{\sqrt{1} \sqrt{5}} \cdot \frac{5}{\sqrt{2} \sqrt{10}} \cdot \frac{10}{\sqrt{5} \sqrt{17}} \cdot \frac{17}{\sqrt{10} \sqrt{26}} \cdots \frac{n^2+1}{\sqrt{(n-1)^2+1} \sqrt{(n+1)^2+1}}$$

จะเห็นว่า ตัวเศษ ตัดกับตัวส่วนสองข้างซ้ายขวาได้ $\rightarrow$ เหลือซ้ายสุดกับขวาสุดที่ตัดไม่ได้ $\rightarrow b_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}$

$$(1) \text{ จะได้ } c_9 = b_1 b_2 b_3 \cdots b_9 = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{1^2+1}}{\sqrt{2^2+1}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{2^2+1}}{\sqrt{3^2+1}} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{3^2+1}}{\sqrt{4^2+1}} \right) \cdots \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1}} \cdot \frac{\sqrt{9^2+1}}{\sqrt{10^2+1}} \right)$$

$$= \sqrt{2}^9 \cdot \frac{\sqrt{1^2+1}}{\sqrt{10^2+1}} = \frac{32}{\sqrt{101}} \rightarrow (1) \text{ ผิด}$$

$$(2) \frac{b_n}{\sqrt{2}} - \frac{n}{n+1} = \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{n}{n+1}$$

$$= \left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} - \frac{n}{n+1} \right) \cdot \frac{\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} + \frac{n}{n+1}}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} + \frac{n}{n+1}}$$

$$= \left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} + \frac{n}{n+1}}$$

$$< \left(\frac{n^2+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{(n+1)^2} \right) \cdot \frac{1}{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}} \quad \left. \vphantom{\frac{1}{\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+1}}} \right\} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}} > \frac{n}{n+1}$$

$$= \frac{(n^2(n+1)^2 + (n+1)^2) - (n^2(n+1)^2 + n^2)}{((n+1)^2+1)(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{(n+1)^2 - n^2}{((n+1)^2+1)(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{2n+1}{((n+1)^2+1)(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n}$$

$$< \frac{2(n+1)}{((n+1)^2+1)(n+1)^2} \cdot \frac{n+1}{2n}$$

$$= \frac{1}{((n+1)^2+1)} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \rightarrow (2) \text{ ถูก}$$

14. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $iz^4 - z^3 - z - i = 0$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $|z| = 1$

(2) ถ้า $z \neq \pm i$ แล้ว $z - 1/z = i$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ข

$$(1) \quad iz^4 + i^2 z^3 - z - i = 0$$

$$iz^3(z+i) - (z+i) = 0$$

$$(z+i)(iz^3 - 1) = 0$$

$$z = -i \quad \text{หรือ} \quad iz^3 = 1$$

$$|z| = |-i| \quad |iz^3| = 1$$

$$|z| = 1 \quad |i||z|^3 = 1$$

$$|z| = 1 \quad \rightarrow (1) \text{ ถูก}$$

$$(2) \text{ จาก (1) จะได้ } z = -i \quad \text{หรือ} \quad iz^3 = 1$$

$$iz^3 = i^4$$

$$z^3 - i^3 = 0$$

$$(z-i)(z^2 + zi - 1) = 0$$

$$z = i \quad \text{หรือ} \quad z^2 + zi - 1 = 0$$

$$z + i - \frac{1}{z} = 0$$

$$z - \frac{1}{z} = -i$$

แทน $z = 0$ แล้วสมการไม่จริง

ดังนั้น $z \neq 0 \rightarrow \div z$ ตลอดได้

$$\text{ดังนั้น ถ้า } z \neq \pm i \text{ จะได้ } z - \frac{1}{z} = -i \rightarrow (2) \text{ ผิด}$$

15. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีจำนวนเชิงซ้อน z ที่ไม่ใช่จำนวนจริง แต่ $z - \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริง(2) ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง และ $z + \frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริงแล้ว $|z| = 1$

ข้อใดต่อไปนี้กล่าวถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

ตอบ ค

(1) ให้ $z = x + yi$ ไม่ใช่จำนวนจริง จะได้ $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } z - \frac{1}{z} &= x + yi - \frac{1}{x+yi} \\
 &= x + yi - \left(\frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} \right) \\
 &= x + yi - \frac{x-yi}{x^2+y^2} \\
 &= x - \frac{x}{x^2+y^2} + \left(y + \frac{y}{x^2+y^2} \right) i \rightarrow \text{เป็นจำนวนจริง เมื่อ } y + \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad 1 + \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \div y \text{ ตลอด} \\ (y \neq 0) \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นเท็จ (เพราะฝั่งซ้ายเป็นบวกเสมอ) $\rightarrow$ (1) ผิด(2) ให้ $z = x + yi$ ไม่ใช่จำนวนจริง จะได้ $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \text{จะได้ } z + \frac{1}{z} &= x + yi + \frac{1}{x+yi} \\
 &= x + yi + \left(\frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} \right) \\
 &= x + yi + \frac{x-yi}{x^2+y^2} \\
 &= x + \frac{x}{x^2+y^2} + \left(y - \frac{y}{x^2+y^2} \right) i \rightarrow \text{เป็นจำนวนจริง เมื่อ } y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \\
 &\qquad\qquad\qquad 1 - \frac{1}{x^2+y^2} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \div y \text{ ตลอด} \\ (y \neq 0) \end{array} \right\} \\
 &\qquad\qquad\qquad x^2 + y^2 = 1
 \end{aligned}$$

จะได้ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1} = 1 \rightarrow$ (2) ถูก16. ถ้าฟังก์ชัน $g: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้องกับสมการ $g(x) + xg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = x$ จงเขียน $g(x)$ ในรูปของ x ตอบ $\frac{2x}{x^2+1}$

$$\begin{aligned}
 g(x) + xg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) &= x \quad \dots(1) \\
 \text{แทน } x \text{ ด้วย } \frac{x+1}{x-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x+1}{x-1} \cdot g\left(\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{\frac{x+1}{x-1}-1}{x-1}}\right) = \frac{x+1}{x-1} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x+1}{x-1} \cdot g\left(\frac{\frac{2x}{x-1}}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right) &= \frac{x+1}{x-1} \\
 \text{แทน } x \text{ ด้วย } \frac{x+1}{x-1} \quad \left\{ \begin{array}{l} g\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + \frac{x+1}{x-1} \cdot g(x) = \frac{x+1}{x-1} \\ xg\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + x \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot g(x) = x \cdot \frac{x+1}{x-1} \quad \dots(2) \\ g(x) - x \cdot \frac{x+1}{x-1} \cdot g(x) = x - x \cdot \frac{x+1}{x-1} \\ g(x) \left(1 - x \cdot \frac{x+1}{x-1}\right) = x - x \cdot \frac{x+1}{x-1} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) \left(\frac{x-1-x^2-x}{x-1} \right) &= \frac{x^2-x-x^2-x}{x-1} \\ g(x) &= \frac{-2x}{-x^2-1} = \frac{2x}{x^2+1} \end{aligned}$$

17. กำหนดให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{a} + 2\vec{b}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $5\vec{a} - 4\vec{b}$ แล้ว ความยาวรอบรูปมากที่สุดที่เป็นไปได้ของรูปสามเหลี่ยมที่มี $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นด้านประกอบสองด้าน มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $2 + \sqrt{3}$

$$\begin{aligned} \text{ตั้งฉากกัน จะดอทกันได้ } 0 &\rightarrow (\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \\ &\vec{a} \cdot 5\vec{a} - \vec{a} \cdot 4\vec{b} + 2\vec{b} \cdot 5\vec{a} - 2\vec{b} \cdot 4\vec{b} = 0 \\ &5\vec{a} \cdot \vec{a} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 8\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \\ \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 &\left\{ \begin{aligned} 5|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta - 8|\vec{b}|^2 &= 0 \\ 5 + 6 \cos \theta - 8 &= 0 \\ \cos \theta &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

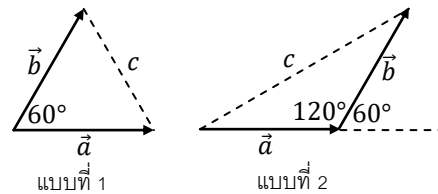
ดังนั้น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ทำมุมกัน $60^\circ \rightarrow$ จะสร้างสามเหลี่ยมได้ 2 แบบ ดังรูป

จะเห็นว่า แบบที่ 2 มี c ยาวกว่า จึงมีความยาวรอบรูปมากกว่า

ใช้กฎของ $\cos$ กับแบบที่ 2 จะได้

$$\begin{aligned} c^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}| \cos 120^\circ \\ &= 1 + 1 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) \\ &= 3 \\ c &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

$\rightarrow$ จะได้ความยาวรอบรูปมากที่สุดคือ $1 + 1 + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}$



18. กำหนดให้ P เป็นจุดจุดหนึ่งที่ไม่เป็นจุดยอดบนไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 9$ ถ้า $PF_1 \cdot PF_2 = 25$ เมื่อ F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลาดังกล่าวแล้ว รูปสามเหลี่ยม PF_1F_2 มีพื้นที่เท่ากับเท่าใด

ตอบ 12

$$\begin{aligned} \text{จัดรูปจะได้ } x^2 - y^2 &= 9 \\ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} &= 1 \\ \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{3^2} &= 1 \end{aligned}$$

$$\text{จะได้ } a = 3, b = 3 \text{ ดังนั้น } c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

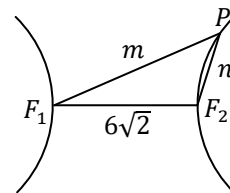
$$\text{จะได้ } F_1F_2 = 2c = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \text{ ดังรูป}$$

$$\text{และจะได้ความยาวแกนตามขวาง } = 2a = 2\sqrt{9} = 6$$

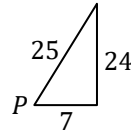
$$\text{ให้ } PF_1 = m, PF_2 = n \rightarrow \text{จากสมบัติของไฮเพอร์โบลา จะได้ } |m - n| = 6 \\ (m - n)^2 = 36 \quad \dots(1)$$

$$\text{จาก } PF_1 \cdot PF_2 = 25 \text{ จะได้ } mn = 25 \quad \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \text{ใช้ กฎของ } \cos \text{ ที่ } \Delta PF_1F_2 \text{ จะได้ } (6\sqrt{2})^2 &= m^2 + n^2 - 2mn \cos P \\ 72 &= m^2 + n^2 - 2mn + 2mn - 2mn \cos P \\ \text{จาก (1) และ (2) } \left\{ \begin{aligned} 72 &= (m - n)^2 + 2mn - 2mn \cos P \\ 72 &= 36 + 2(25) - 2(25) \cos P \\ 50 \cos P &= 14 \\ \cos P &= \frac{7}{25} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{จะได้ พื้นที่ } \Delta PF_1F_2 &= \frac{1}{2}mn \sin P \\ &= \frac{1}{2}(25)\left(\frac{24}{25}\right) \\ &= 12 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} P \text{ อยู่จุดภาคที่ 1} \rightarrow \text{วาด } \Delta \end{array}$$



19. ถ้า $f(x) = x^2 - 1$ ทุก $x \in [-2, 3]$ แล้วพื้นที่ใต้เส้นโค้ง $y = |f(x)|$ ที่อยู่เหนือแกน X บนช่วงปิด $[-2, 3]$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ $\frac{28}{3}$

มีค่าสัมบูรณ์ กรอบ $f(x)$ อยู่ $\rightarrow$ ส่วนที่อยู่ใต้แกน X จะถูกเปลี่ยนให้ขึ้นมาอยู่เหนือแกน X

ดังนั้น ข้อนี้หาพื้นที่ตั้งแต่ -2 ถึง 3 ที่อยู่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X แบบปกติได้เลย

$$\begin{aligned} \text{หาจุดตัดแกน } X \text{ เพื่อใช้เป็นจุดแบ่งการช่วงอินทิเกรต} &\rightarrow x^2 - 1 = 0 \\ (x+1)(x-1) &= 0 \\ x &= -1, 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น ต้องแบ่งช่วงอินทิเกรตเป็น $[-2, -1]$, $[-1, 1]$ และ $[1, 3]$ แล้วเปลี่ยนค่าเป็นบวกก่อน ค่อยเอามารวมกัน

$$\begin{array}{ccc} \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx & \int_{-1}^1 (x^2 - 1) dx & \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-2}^{-1} & = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-1}^1 & = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 \\ = \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 2 \right) & = \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \left(\frac{-1}{3} + 1 \right) & = (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) \\ = \frac{2}{3} - \frac{-2}{3} & = \frac{-2}{3} - \frac{2}{3} & = 6 - \frac{-2}{3} \\ = \frac{4}{3} & = -\frac{4}{3} & = \frac{20}{3} \\ & \rightarrow \text{เปลี่ยนเป็นบวกได้ } \frac{4}{3} & \end{array}$$

$$\text{จะได้พื้นที่} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3}$$

20. ให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกโดยที่ $x < y$ และสอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 2017$ จงหาค่าของ y

ตอบ 44

เนื่องจาก 2017 เป็นเลขคู่ ดังนั้น ฝ่ายซ้ายที่บวกกัน ต้องมีตัวหนึ่งเป็นคี่ ตัวหนึ่งเป็นคู่

$$\begin{aligned} \text{จะได้} \quad (2m+1)^2 + (2n)^2 &= 2017 \\ 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 &= 2017 \\ 4m^2 + 4m + 4n^2 &= 2016 \\ m^2 + m + n^2 &= 504 \\ m(m+1) + n^2 &= 504 \end{aligned}$$

เนื่องจาก 504 เป็นเลขคู่ และ $m(m+1)$ เป็นเลขคู่ (สองจำนวนที่เรียงติดกัน ต้องมีตัวหนึ่งเป็นเลขคู่)

ดังนั้น n^2 ต้องเป็นเลขคู่ ทำให้ n ต้องเป็นเลขคู่ และจะได้ว่า $2n$ ต้องหารด้วย 4 ลงตัว

$$\text{ดังนั้น } 2017 = (\text{จำนวนคี่})^2 + (\text{จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว})^2 \quad \dots(1)$$

พิจารณาหลักหน่วยของผลกำลังสอง

จะเห็นว่ามี 0, 1, 4, 5, 6, 9 เท่านั้น

a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81

2017 ลงท้ายด้วย 7 ซึ่งได้จาก $1 + 6$ เท่านั้น

$$\text{นั่นคือ } 2017 = (\text{จำนวนที่ลงท้ายด้วย 1 หรือ 9})^2 + (\text{จำนวนที่ลงท้ายด้วย 4 หรือ 6})^2 \quad \dots(2)$$

จาก (1) และ (2) จะได้ จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว ต้องลงท้ายด้วย 4 หรือ 6 ซึ่งจะมี 4, 16, 24, 36, 44, 56, ...
(ตั้งแต่ 56 ขึ้นไป จะไม่ได้ เพราะ $56^2 > 2017$)

ไล่แทนทีละตัว

k	k^2	$2017 - k^2$
4	16	2001
16	256	1761
24	576	1441
36	1296	721
44	1936	81

} ถอดรูปไม่ลงตัว
 $= 9^2$

ดังนั้น $2017 = 44^2 + 9^2 \rightarrow$ จะได้ $y = 44$

21. กำหนดให้ $x > 1$ และ $y > 1$ สอดคล้องกับสมการ $\log_y x - \log_x y = \frac{8}{3}$ แล้ว ค่าต่ำสุดของ $x - 12y$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ -16

$\log_y x$ กับ $\log_x y$ จะเป็นส่วนกลับกัน ดังนั้น ถ้าให้ $\log_y x = a$ จะได้ $\log_x y = \frac{1}{a}$

จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned}
 a - \frac{1}{a} &= \frac{8}{3} \\
 3a^2 - 3 &= 8a \\
 3a^2 - 8a - 3 &= 0 \\
 (3a + 1)(a - 3) &= 0 \\
 a = -\frac{1}{3}, 3 &\leftarrow \begin{array}{l} x > 1 \text{ และ } y > 1 \text{ จะทำให้ } \log_y x > 0 \\ \text{ดังนั้น } a \text{ เป็น } -\frac{1}{3} \text{ ไม่ได้} \end{array}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \log_y x &= 3 \\
 x &= y^3
 \end{aligned}$$

ดังนั้น $x - 12y = y^3 - 12y \rightarrow$ หาค่าต่ำสุด ต้องดิฟ

ดิฟเทียบกับ y จะได้ $= 3y^2 - 12 = 3(y + 2)(y - 2) \rightarrow$ วาดกราฟเพิ่มลด ได้

จะเห็นว่าในช่วง $y > 1$ จะมี $y = 2$ เป็นค่าต่ำสุดสมบูรณ์

ดังนั้น ค่าต่ำสุด $= 2^3 - 12(2) = -16$



22. กำหนดพาราโบลา $p(x) = 2017x^2 - 2560x - 743$

ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสพาราโบลา $p(x)$ ที่จุด $(-10, p(-10))$ และที่จุด $(1000, p(1000))$ ตามลำดับ

ถ้า L_1 และ L_2 ตัดกันที่จุด (x_0, y_0) แล้ว x_0 มีค่าเท่าใด

ตอบ 495

เปลี่ยนเลขเยอะๆ ให้เป็นตัวแปรให้หมด เพราะสุดท้ายแล้ว มันน่าจะตัดกันเองได้

ให้ $a = 2017, b = -2560, c = -734$ จะได้ $p(x) = ax^2 + bx + c$

ดิฟ จะได้ความชันเส้นสัมผัส $\rightarrow p'(x) = 2ax + b$

ให้ $m = -10$

จะได้ L_1 ผ่านจุด $(m, p(m))$ และมีความชัน $p'(m)$

$$\begin{aligned}
 L_1: \frac{y - p(m)}{x - m} &= p'(m) \\
 y &= xp'(m) - mp'(m) + p(m)
 \end{aligned}$$

ให้ $n = 1000$

จะได้ L_2 ผ่านจุด $(n, p(n))$ และมีความชัน $p'(n)$

$$\begin{aligned}
 L_2: \frac{y - p(n)}{x - n} &= p'(n) \\
 y &= xp'(n) - np'(n) + p(n)
 \end{aligned}$$

แก้ระบบสมการ L_1 กับ L_2 เพื่อหาจุดตัด จะได้

$$\begin{aligned}
 xp'(m) - mp'(m) + p(m) &= xp'(n) - np'(n) + p(n) \\
 xp'(m) - xp'(n) &= mp'(m) - np'(n) - p(m) + p(n) \\
 x &= \frac{mp'(m) - np'(n) - p(m) + p(n)}{p'(m) - p'(n)} \\
 x &= \frac{2am^2 + bm - 2an^2 - bn - am^2 - bm - c + an^2 + bn + c}{2am + b - 2an - b} \\
 x &= \frac{2am^2 - 2an^2 - am^2 + an^2}{2am - 2an} \\
 x &= \frac{am^2 - an^2}{2am - 2an} \\
 x &= \frac{a(m-n)(m+n)}{2a(m-n)} \\
 x &= \frac{m+n}{2} = \frac{-10+1000}{2} = 495
 \end{aligned}$$

23. กำหนดให้ $A = \{a \in \mathbb{R} : \text{สมการ } \ln(ax-3) - \ln(3-x) = \ln(x-2) \text{ มีผลเฉลยเพียงหนึ่งเดียว}\}$ และ

$$B = \{b \in \mathbb{R} : |b-1| < |6-4b|\}$$

จงหา $A \cap B$

ตอบ (1, 1.4)

หา A : หลัง $\ln$ ต้องเป็นบวก ดังนั้น $ax-3 > 0 \dots(1)$ และ $\underbrace{3-x > 0 \text{ และ } x-2 > 0}_{x \in (2,3) \dots(2)}$

พิจารณา (1) ร่วมกับ (2) จะเห็นว่า ถ้า $a \leq 1$ จะไม่มีทางคูณ x ที่อยู่ในช่วง $(2,3)$ แล้วมากกว่า 3 ได้

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a > 1$

$$\begin{aligned}
 \text{และจาก } \ln(ax-3) - \ln(3-x) &= \ln(x-2) \\
 \ln(ax-3) &= \ln(x-2) + \ln(3-x) \\
 \ln(ax-3) &= \ln((x-2)(3-x)) \\
 ax-3 &= (x-2)(3-x) \dots (*) \\
 ax-3 &= -x^2 + 5x - 6 \\
 x^2 + (a-5)x + 3 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\text{ใช้สูตรคำตอบของสมการกำลังสอง จะได้ } x = \frac{-(a-5) \pm \sqrt{(a-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{5-a \pm \sqrt{(a-5)^2 - 12}}{2}$$

$$\text{แต่ } \frac{5-a - \sqrt{(a-5)^2 - 12}}{2} \leq \frac{5-a}{2} < \frac{5-1}{2} \leq 2 \rightarrow \text{ไม่อยู่ในช่วง } (2,3) \text{ จึงเป็นคำตอบไม่ได้}$$

เพราะ $a > 1$

$$\begin{aligned}
 \text{อีกค่าอาจเป็นคำตอบได้ ถ้า } 2 &< \frac{5-a + \sqrt{(a-5)^2 - 12}}{2} < 3 && \left. \begin{array}{l} \times 2 \text{ และ } + a - 5 \text{ ตลอด} \\ \text{ยกกำลัง 2 ได้ เพราะ } a > 1 \\ -a^2 + 10a - 1 \text{ ตลอด} \\ \div 12a \text{ ตลอด} \\ \text{กลับเศษส่วน} \end{array} \right\} \\
 a-1 &< \sqrt{(a-5)^2 - 12} < a+1 \\
 a^2 - 2a + 1 &< a^2 - 10a + 13 < a^2 + 2a + 1 \\
 8a &< 12 < 12a \\
 \frac{2}{3} &< \frac{1}{a} < 1 \\
 \frac{3}{2} &> a > 1
 \end{aligned}$$

ส่วนเงื่อนไข (1) จะเป็นจริงโดยอัตโนมัติ เพราะเมื่อแทน $x \in (2,3)$ ใน (*) จะได้ $ax-3$ เป็นบวกเสมอ

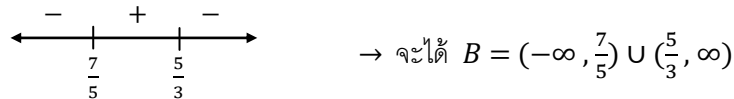
$$\text{ดังนั้น จะได้ } A = (1, \frac{3}{2})$$

หมายเหตุ : จะแก้สมการ (*) โดยหาจุดตัดกราฟ $y = ax - 3$ กับ $y = (x - 2)(3 - x)$ ก็ได้

ถ้าพิจารณาความชัน จะพบว่ากราฟตัดกันจุดเดียวในช่วง $x \in (2, 3)$ เสมอ

ซึ่งจะได้ความชันเส้นตรง $a \in \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{2}\right) = (1, \frac{3}{2})$

$$\begin{aligned} \text{หา } B : \quad & |b - 1| < |6 - 4b| \\ & (b - 1)^2 < (6 - 4b)^2 \\ & (b - 1)^2 - (6 - 4b)^2 < 0 \\ & ((b - 1) - (6 - 4b))((b - 1) + (6 - 4b)) < 0 \\ & (5b - 7)(-3b + 5) < 0 \end{aligned}$$



$$\text{จะได้ } A \cap B = (1, \frac{3}{2}) \cap [(-\infty, \frac{7}{5}) \cup (\frac{5}{3}, \infty)] = (1, \frac{7}{5}) = (1, 1.4)$$

24. **บทนิยาม** สำหรับเมทริกซ์ A ใดๆ ซึ่งมีสมาชิกเป็นจำนวนเต็ม และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ นิยาม $A \bmod n$

ให้เป็นเมทริกซ์ที่มีมิติเท่ากับมิติของ A และสมาชิกตำแหน่งใดๆของ $A \bmod n$ ได้จากเศษเหลือที่ได้จากการหาร

สมาชิกในตำแหน่งนั้นของ A ด้วย n เช่น ถ้า $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ แล้ว จะได้ว่า $A \bmod 3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

$$\text{ให้ } X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

จำนวนเมทริกซ์ $A \in X$ ทั้งหมดที่มีสมบัติ $A^2 \bmod 3 = I$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 14

$$\text{ให้ } A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ จะได้ } A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{bmatrix}$$

ดังนั้น $A^2 \bmod 3 = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ

$$a^2 + bc \text{ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1} \quad \dots(1)$$

$$b(a + d) \text{ หารด้วย 3 ลงตัว ซึ่งก็คือ } b \text{ หรือ } a + d \text{ หารด้วย 3 ลงตัว} \quad \dots(2)$$

$$c(a + d) \text{ หารด้วย 3 ลงตัว ซึ่งก็คือ } c \text{ หรือ } a + d \text{ หารด้วย 3 ลงตัว} \quad \dots(3)$$

$$d^2 + bc \text{ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1} \quad \dots(4)$$

กรณี $a = 0$

จาก (1) จะได้ bc ต้องหารด้วย 3 เหลือเศษ 1 นั่นคือ $bc = 1$ หรือ 4

ซึ่งเป็นไปได้ 2 แบบ คือ $b = c = 1$ หรือ $b = c = 2$

ดังนั้น b กับ c จะหารด้วย 3 ไม่ลงตัว $\rightarrow$ จาก (2) และ (3) จะได้ $a + d$ ต้องหารด้วย 3 ลงตัว

แต่ $a = 0$ จึงสรุปได้ว่า $d = 0$

ดังนั้น กรณีนี้มี 2 แบบ คือ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

กรณี $a \neq 0$

จะได้ $a = 1$ หรือ 2 ซึ่งจะได้ว่า $a^2 = 1$ หรือ 4 จะเห็นว่า a^2 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 เสมอ

จาก (1) จะสรุปได้ว่า bc ต้องหารด้วย 3 ลงตัวเท่านั้น

และจาก (4) เมื่อ bc หารด้วย 3 ลงตัว จะสรุปได้ว่า d^2 ต้องหารด้วย 3 เหลือเศษ 1 นั่นคือ $d = 1$ หรือ 2

เหลือ (2) กับ (3) ที่ต้องพิจารณาต่อ → จะแบ่งกรณีย่อยเพิ่ม

กรณี $a + d$ หารด้วย 3 ไม่ลงตัว

จาก (2) และ (3) จะได้ b และ c ต้องหารด้วย 3 ลงตัว → $b = 0$ และ $c = 0$ เท่านั้น

จาก a และ d เป็นได้แค่ 1 หรือ 2 → จะมี (a, d) ที่บวกกันแล้วหารด้วย 3 ไม่ลงตัว คือ (1, 1) กับ (2, 2)

ดังนั้น กรณีนี้จะมี 2 แบบ คือ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ กับ $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

กรณี $a + d$ หารด้วย 3 ลงตัว

(2) และ (3) จะเป็นจริงโดยอัตโนมัติ

จาก a และ d เป็นได้แค่ 1 หรือ 2 → จะมี (a, d) ที่บวกกันแล้วหารด้วย 3 ลงตัว คือ (1, 2) กับ (2, 1)

รวม 2 แบบ

(b, c) เป็นอะไรก็ได้ ที่ bc หารด้วย 3 ลงตัว → (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (2, 0) รวม 5 แบบ

ดังนั้น กรณีนี้ จะมี $2 \times 5 = 10$ แบบ

รวมทุกกรณี จะมี $2 + 2 + 10 = 14$ แบบ

25. สุ่มเลือกจำนวนเต็ม a และ b จากเซตของจำนวนเต็ม $\{1, 2, \dots, 100\}$ ความน่าจะเป็นที่จะสุ่มได้ a และ b ซึ่งทำให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัวเท่ากับเท่าใด

ตอบ 0.1

ถ้า $a = 1$ จะได้ $7^a = 7$ → จะมี $b = 3, 13, 23, \dots, 93$ ทั้งหมด 10 แบบ ที่ทำให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัว

ถ้า $a = 2$ จะได้ $7^a = 49$ → จะมี $b = 1, 11, 21, \dots, 91$ ทั้งหมด 10 แบบ ที่ทำให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัว

ถ้า $a = 3$ จะได้ $7^a = 343$ → จะมี $b = 7, 17, 27, \dots, 97$ ทั้งหมด 10 แบบ ที่ทำให้ $7^a + b$ หารด้วย 10 ลงตัว

⋮

จะเห็นว่า ไม่ว่า 7^a จะลงท้ายด้วยอะไรก็ตาม จะมี b ทั้งหมด 10 แบบ จาก 100 แบบ ที่ทำให้หารด้วย 10 ลงตัวเสมอ

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $= \frac{10}{100} = 0.1$

26. จงหาคำตอบ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ทั้งหมดของระบบสมการ
$$\begin{cases} 2 \log(x - 2y) = \log x + \log y \\ 3^{x-y} + 27^y = 6 \end{cases}$$

ตอบ $(\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$

$$2 \log(x - 2y) = \log x + \log y \quad \text{เมื่อ } x - 2y > 0 \text{ และ } x > 0 \text{ และ } y > 0 \quad \dots(*)$$

$$\log(x - 2y)^2 = \log xy$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy$$

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = 0$$

$$(x - y)(x - 4y) = 0$$

$$x = y, 4y$$

แต่ $x = y$ จะทำให้ (*) เป็นเท็จ จึงใช้ไม่ได้ → จะได้ $x = 4y$ → แทนในสมการที่สอง: $3^{4y-y} + 27^y = 6$

$$3^{3y} + (3^3)^y = 6$$

$$2(3^{3y}) = 6$$

$$3^{3y} = 3$$

$$3y = 1$$

$$y = \frac{1}{3}$$

$$\text{และจะได้ } x = 4y = \frac{4}{3}$$

27. จงหาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้เซตคำตอบของอสมการ $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ ไม่เป็นเซตว่าง

ตอบ $[2, \infty)$

$$\begin{aligned} 4^x - a \cdot 2^x - a + 3 &\leq 0 \\ 2^{2x} - a \cdot 2^x - a + 3 &\leq 0 \\ (2^x)^2 - a \cdot 2^x - a + 3 &\leq 0 \\ k^2 - ak - a + 3 &\leq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \text{ให้ } k = 2^x$$

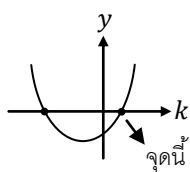
เนื่องจาก $2^x > 0$ ดังนั้นคำตอบจะไม่เป็นเซตว่าง เมื่อมี $k > 0$ ที่ทำให้ $k^2 - ak - a + 3 \leq 0$

ให้ $y = k^2 - ak - a + 3 \rightarrow$ ต้องการค่า a ที่จะมี $k > 0$ ซึ่งทำให้ $y \leq 0$

พิจารณากกราฟ $y = k^2 - ak - a + 3$ บนระนาบ $k - y$ จะได้กราฟเป็นพาราโบลาหงาย

$k > 0$ และ $y \leq 0$ จะหมายถึงจุดภาคที่ 4 รวมแกน k ฝั่งบวก

ดังนั้น อสมการจะมีคำตอบ เมื่อกราฟ $y = k^2 - ak - a + 3$ ผ่านจุดภาคที่ 4 หรือแกน k ฝั่งบวก



พาราโบลาหงาย จะผ่านจุดภาคที่ 4 หรือแกน k ฝั่งบวก เมื่อมีจุดตัดแกน k อยู่บนแกน k ฝั่งบวก

$$\begin{aligned} \text{ให้สูตรคำตอบของสมการกำลังสอง จะได้จุดตัดแกน } k \text{ อยู่ที่ } &\frac{-(-a) \pm \sqrt{(-a)^2 - 4(1)(-a+3)}}{2} \\ &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{จะได้จุดตัดฝั่งซ้าย คือ } \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} \text{ และจุดตัดฝั่งขวา คือ } \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2}$$

$$\text{ดังนั้น อสมการจะมีคำตอบ เมื่อจุดตัดฝั่งขวา } \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0$$

$$\text{ในรูป } \geq 0 \text{ จะได้ } a^2 + 4a - 12 \geq 0$$

$$(a + 6)(a - 2) \geq 0$$

$$\begin{array}{c} + \quad \quad - \quad \quad + \\ \hline -6 \quad \quad 2 \end{array}$$

$$\rightarrow a \geq 2 \text{ หรือ } a \leq -6$$

กรณี $a \geq 2$:

เนื่องจาก รูป ≥ 0 และ a เป็นบวก

$$\text{อสมการ } \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0 \text{ จะเป็นจริงเสมอ}$$

กรณีนี้ จะได้คำตอบคือ $[2, \infty)$

กรณี $a \leq -6$:

เนื่องจาก a เป็นลบ จะได้ $-a$ เป็นบวก

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + 4a - 12}}{2} > 0$$

$$a + \sqrt{a^2 + 4a - 12} > 0$$

$$\sqrt{a^2 + 4a - 12} > -a$$

$$a^2 + 4a - 12 > (-a)^2 \rightarrow -a \text{ เป็นบวก}$$

$$4a - 12 > 0$$

$$a > 3$$

ขัดแย้งกับเงื่อนไข $a \leq -6 \rightarrow$ กรณีนี้จะไม่มีการตอบ

รวมทั้งสองกรณี จะได้อสมการมีคำตอบเมื่อ $a \in [2, \infty)$

28. มีชายหญิงอยู่จำนวนหนึ่งถูกจัดให้นั่งทานอาหารรอบโต๊ะกลม โดยมีเงื่อนไขว่า

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้ชายนั่งทางขวามือถัดจากตนเอง

มีผู้ชาย 1 คนที่มีผู้ชายนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้หญิงนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง

จะมีวิธีในการจัดให้ชายหญิงกลุ่มนี้นั่งรอบโต๊ะกลมโดยสอดคล้องเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดกี่วิธี

ตอบ $\binom{5}{2} 4! 6!$

“มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้ชายนั่งทางขวามือถัดจากตนเอง” → จะวาดได้ดังรูป

โดยที่ (1), (2), (3) อาจไม่มีคนนั่ง หรือมีคนนั่งกี่คนก็ได้ แต่จะมี ข อยู่ทางขวา ญ ไม่ได้แล้ว

ดังนั้น ใน (1), (2), (3) จะเป็นไปได้ 2 แบบ คือ “มี ข อยู่ทางซ้ายสุด” หรือไม่มีก็ “ไม่มี ข”

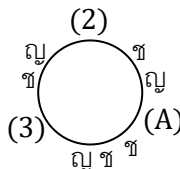
เงื่อนไขถัดมา “มีผู้ชาย 1 คนที่มีผู้ชายนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง” → จะมี ข นั่งติดกันได้แค่คู่เดียว

เนื่องจากทางซ้ายของ (1), (2), (3) เป็น ข ดังนั้น ใน (1), (2), (3) จะ “มี ข อยู่ทางซ้ายสุด” ได้แค่ครั้งเดียว

ที่เหลือต้อง “ไม่มี ข”

เช่นถ้า (1) มี ข อยู่ทางซ้ายสุด จะได้ดังรูป

โดยที่ (A), (2), (3) ต้อง “ไม่มี ข”



เงื่อนไขสุดท้าย “มีผู้หญิง 3 คนที่มีผู้หญิงนั่งทางซ้ายมือถัดจากตนเอง” → แสดงว่ามี ญ นั่งติดกันได้แค่ 3 คู่

จะเห็นว่าทางขวาของ (A), (2), (3) เป็น ญ ดังนั้น การเพิ่ม ญ เข้าไป 1 คน จะเกิดคู่ ญ ที่นั่งติดกันเพิ่มขึ้น 1 คู่เสมอ

นั่นคือ ต้องเพิ่ม ญ อีก 3 คน ถึงจะทำให้เงื่อนไขสุดท้ายเป็นจริงได้

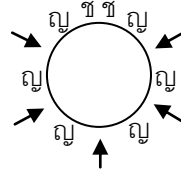
ดังนั้น คนนั่งจะต้องเป็น ข 4 คน และ ญ 6 คน โดยมีเงื่อนไขทั้งหมดจะเป็นจริงเมื่อ มี ข 2 คนนั่งติดกัน

เอา ข 2 คน ตอกไม่ให้วงหมุน และให้ ญ 6 คนมานั่งก่อน ดังรูป

เหลือ ข 2 คน ห้ามนั่งติดกัน → เลือก 2 ที่จาก 5 ที่ได้ $\binom{5}{2}$ แบบ

ข 4 คน ญ 6 คน สลับตำแหน่งกันเองได้ $4! 6!$ แบบ

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = $\binom{5}{2} 4! 6!$ แบบ



29. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) = (x-2)^4(x+1)^3(x-1)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์

ตอบ $0, \frac{5}{4}, 2$

หาสูตรดิฟ 3 ตัวคูณกันได้จากการแบ่งกลุ่ม $uvw = u(vw)$

$$\begin{aligned}(uvw)' &= u'(vw) + u(vw)' \\ &= u'vw + u(v'w + vw') \\ &= u'vw + uv'w + uvw'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } f'(x) &= 4(x-2)^3(x+1)^3(x-1) + (x-2)^4 3(x+1)^2(x-1) + (x-2)^4(x+1)^3(1) \\ &= (x-2)^3(x+1)^2(4(x+1)(x-1) + (x-2)3(x-1) + (x-2)(x+1)) \\ &= (x-2)^3(x+1)^2(4x^2 - 4 + 3x^2 - 9x + 6 + x^2 - x - 2) \\ &= (x-2)^3(x+1)^2(8x^2 - 10x) \\ &= (x-2)^3(x+1)^2(2x)(4x-5)\end{aligned}$$

จุดสัมพัทธ์ คือจุดที่ $f'(x)$ เปลี่ยนเครื่องหมาย (จากบวกเป็นลบ หรือลบเป็นบวก) ซึ่งจะเกิดเมื่อวงเล็บยกกำลังเป็น 0

จะได้จุดสัมพัทธ์เกิดเมื่อ $x = 2, 0, \frac{5}{4}$

30. หนูทดลองตัวหนึ่งอยู่ในห้องของกล่องทดลองเขาวงกตซึ่งมีช่องประตู 4 ช่อง มีหนึ่งช่องของประตูที่มีทางเดินที่นำหนูไปสู่ทางออกภายนอกโดยหนูจะใช้เวลาในการเดินทาง 9 วินาที ส่วนช่องประตูอีกสามช่องที่เหลือจะนำไปสู่ทางเดินที่วกกลับมาที่ห้องเดิม โดยหนูจะใช้เวลาในทางเดินเหล่านี้เป็นเวลา 3, 5 และ 7 วินาทีตามลำดับ และทุกครั้งที่หนูกลับมาที่ห้องเดิมหนูจะสุ่มเข้าช่องประตูอีกครั้งโดยที่การสุ่มเลือกประตูแต่ละครั้งจะไม่ขึ้นกับการสุ่มเลือกช่องประตูในครั้งก่อนหน้า จงหาความน่าจะเป็นที่หนูจะใช้เวลา 30 วินาทีในการเดินทางออกไปสู่ภายนอก

ตอบ $\frac{737}{4^8}$

$30 - 9 = 21 \rightarrow$ แสดงว่าหนูอยู่ในห้องเดิม 21 วินาที ก่อนจะเลือกประตู 9 วินาที และออกจากห้องได้

เขียน 21 เป็นผลบวกของ 3, 5, 7 จะได้ 4 แบบ ดังนี้

$3+3+3+3+3+3+3$: คือหนูสุ่มได้ประตู 3 วินาที 7 ครั้ง ก่อนจะสุ่มได้ประตู 9 วินาทีในครั้งสุดท้าย

สมมติให้ความน่าจะเป็นที่หนูเลือกแต่ละประตู มีค่าเท่ากัน $= \frac{1}{4}$

จะได้ความน่าจะเป็นของกรณีนี้ $= \left(\frac{1}{4}\right)^7 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^8}$

$7+7+7$: คือหนูสุ่มได้ประตู 7 วินาที 3 ครั้ง ก่อนจะสุ่มได้ประตู 9 วินาทีในครั้งสุดท้าย

ทำแบบเดียวกับกรณีที่แล้ว จะได้ความน่าจะเป็นของกรณีนี้ $= \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4^4}$

$3+3+5+5+5$: คือหนูสุ่มได้ประตู 3 วินาที 2 ครั้ง และประตู 5 วินาที 3 ครั้ง ก่อนสุ่มได้ประตู 9 วินาที

จะเห็นว่าลำดับของประตู 3 วินาที กับประตู 5 วินาที สลับกันยังงี้ก็ได้ $\rightarrow$ ได้ $\frac{5!}{2!3!}$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็นของกรณีนี้ $= \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{10}{4^6}$

$3+3+3+5+7$: ลำดับของประตู สลับกันได้ $\frac{5!}{3!}$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็นของกรณีนี้ $= \frac{5!}{3!} \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{20}{4^6}$

$$\begin{aligned} \text{รวมทุกกรณี จะได้ความน่าจะเป็น} &= \frac{1}{4^8} + \frac{1}{4^4} + \frac{10}{4^6} + \frac{20}{4^6} \\ &= \left(\frac{1}{4^4}\right) \left(\frac{1}{4^4} + 1 + \frac{10}{4^2} + \frac{20}{4^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4^4}\right) \left(\frac{1 + 256 + 160 + 320}{4^4}\right) = \frac{737}{4^8} \end{aligned}$$

31. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$

ตอบ -0.25

$$\begin{aligned} &x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}) \\ &= x^{\frac{3}{2}}((\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1})) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left((\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - (\sqrt{x} - \sqrt{x-1}) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{x-(x-1)}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{x-1}) - (\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})} \cdot \frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}\right) \\ &= x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{x-1-(x+1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})(\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1})}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-2}{(\sqrt{x}) \left(\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 1 \right) (\sqrt{x}) \left(1 + \sqrt{\frac{x-1}{x}} \right) (\sqrt{x}) \left(\sqrt{\frac{x-1}{x}} + \sqrt{\frac{x+1}{x}} \right)} \right) \\
&= x^{\frac{3}{2}} \left(\frac{-2}{(\sqrt{x})^3 \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right) \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right) \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)} \right) \\
&= \frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 \right) \left(1 + \sqrt{1-\frac{1}{x}} \right) \left(\sqrt{1-\frac{1}{x}} + \sqrt{1+\frac{1}{x}} \right)} \\
\text{เมื่อ } x \rightarrow \infty \text{ จะได้ค่าลิมิต} &= \frac{-2}{(\sqrt{1+0}+1)(1+\sqrt{1-0})(\sqrt{1-0}+\sqrt{1+0})} = \frac{-2}{8} = -0.25
\end{aligned}$$

32. จงหาผลรวมของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0, 2\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{4}{\sec x - 2 \tan x} - \frac{1}{\sec x + \tan x} = 3\sqrt{3}$

ตอบ $\frac{13\pi}{6}$

$$\frac{4}{\sec x - 2 \tan x} - \frac{1}{\sec x + \tan x} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{\frac{4}{\cos x} - \frac{2 \sin x}{\cos x}}{\cos x} - \frac{\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos x} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{4 \cos x}{1 - 2 \sin x} - \frac{\cos x}{1 + \sin x} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{4 \cos x (1 + \sin x) - \cos x (1 - 2 \sin x)}{(1 - 2 \sin x)(1 + \sin x)} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{4 \cos x + 4 \sin x \cos x - \cos x + 2 \sin x \cos x}{1 - \sin x - 2 \sin^2 x} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{3 \cos x + 6 \sin x \cos x}{1 - \sin x - 2 \sin^2 x} = 3\sqrt{3}$$

$$\frac{\cos x + 2 \sin x \cos x}{(1 - 2 \sin^2 x) - \sin x} = \sqrt{3}$$

$$\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 2x - \sin x} = \sqrt{3}$$

$$\cos x + \sin 2x = \sqrt{3} \cos 2x - \sqrt{3} \sin x$$

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$$

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x = \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{3} - x \right) = \cos \left(\frac{\pi}{6} + 2x \right)$$

$$\frac{\pi}{6} + 2x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$\frac{\pi}{6} + 2x = 2n\pi + \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$3x = 2n\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

แต่ $x \in [0, 2\pi]$ ดังนั้น $n = 0, 1, 2$

$$\text{จะได้ } x = \frac{\pi}{18}, \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{18}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2x = 2n\pi - \left(\frac{\pi}{3} - x \right)$$

$$x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}$$

แต่ $x \in [0, 2\pi]$ ดังนั้น $n = 1$

$$\text{จะได้ } x = \frac{3\pi}{2}$$

แต่ใช้ไม่ได้ เพราะ $\sec \frac{3\pi}{2}$ ในสมการโจทย์จะหาค่าไม่ได้

$$\text{จะได้ผลรวมของค่า } x \text{ คือ } \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{18} + \frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{18} = \frac{3\pi}{18} + \frac{6\pi}{3} = \frac{13\pi}{6}$$

33. จงหาค่า $a > 0$ และ $x > 0$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับระบบสมการ
$$\begin{cases} (\ln a)a^x = 1 \\ a^x = x \end{cases}$$

ตอบ $x = e, a = e^{\frac{1}{e}}$

$$\begin{aligned} (\ln a)a^x &= 1 && \dots(1) \\ a^x &= x && \dots(2) \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{ใส่ } \ln \text{ ทั้งสองข้าง} \\ \text{คูณ (2)} \\ \text{จาก (1)} \\ \div x \text{ ทั้งสองข้าง (โจทย์ให้ } x > 0 \text{ จึง } \neq 0) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \ln a^x &= \ln x \\ x \ln a &= \ln x \\ a^x x \ln a &= x \ln x \\ x &= x \ln x \\ 1 &= \ln x \\ x &= e \rightarrow \text{แทนใน (2): } a^e = e \\ a &= e^{\frac{1}{e}} \end{aligned}$$

34. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ขนาด 5×5 ซึ่ง A, B และ $B^{-1} - A$ เป็นเมทริกซ์ไม่เอกฐาน
จงหา $(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1}$ (ตอบในรูปของเมทริกซ์ A และ B โดยไม่ต้องใช้เครื่องหมายอินเวอร์ส)

ตอบ $A - ABA$

ให้ $X = (A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1})^{-1}$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} X(A^{-1} + (B^{-1} - A)^{-1}) &= I \\ XA^{-1} + X(B^{-1} - A)^{-1} &= I \\ XA^{-1}(B^{-1} - A) + X &= B^{-1} - A \\ XA^{-1}B^{-1} - X + X &= B^{-1} - A \\ XA^{-1}B^{-1} &= B^{-1} - A \\ XA^{-1} &= I - AB \\ X &= A - ABA \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{กระจาย } X \\ \text{คูณ } B^{-1} - A \text{ ทางขวาตลอด ให้ตัดกับ } (B^{-1} - A)^{-1} \\ \text{กระจาย } XA^{-1} \text{ (ตัวหลัง จะตัด } A^{-1} \text{ กับ } A \text{ ได้)} \\ \text{คูณ } B \text{ ทางขวาตลอด ให้ตัดกับ } B^{-1} \\ \text{คูณ } A \text{ ทางขวาตลอด ให้ตัดกับ } A^{-1} \end{array} \right\}$$

35. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{1}{x - \tan 20^\circ} + \frac{1}{x + \tan 40^\circ} + \frac{1}{x - \tan 80^\circ} = 0$

ตอบ $\sqrt{3} \pm 2$

ให้ $a = \tan 20^\circ, b = -\tan 40^\circ$ และ $c = \tan 80^\circ$ จะเขียนสมการใหม่ได้เป็น $\frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} = 0$

คูณตลอดด้วย $(x-a)(x-b)(x-c)$ จะได้สมการคือ

$$\begin{aligned} (x-b)(x-c) + (x-a)(x-c) + (x-a)(x-b) &= 0 \\ x^2 - bx - cx + bc + x^2 - ax - cx + ac + x^2 - ax - bx + ab &= 0 \\ 3x^2 - 2ax - 2bx - 2cx + ab + bc + ac &= 0 \\ 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ac) &= 0 \quad \dots(*) \end{aligned}$$

ต้องการ $a+b+c$ และ $ab+bc+ac$ มาแทนใน (*)

$$\begin{aligned} a+b+c &= \tan 20^\circ - \tan 40^\circ + \tan 80^\circ \\ &= \tan 20^\circ - \tan(60^\circ - 20^\circ) + \tan(60^\circ + 20^\circ) \\ &= \tan 20^\circ - \frac{\tan 60^\circ - \tan 20^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 20^\circ} + \frac{\tan 60^\circ + \tan 20^\circ}{1 - \tan 60^\circ \tan 20^\circ} \\ &= \tan 20^\circ + \frac{-\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1 + \sqrt{3} \tan 20^\circ} + \frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ} \\ &= \tan 20^\circ + \frac{(-\sqrt{3} + \tan 20^\circ)(1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ) + (1 + \sqrt{3} \tan 20^\circ)(\sqrt{3} + \tan 20^\circ)}{(1 + \sqrt{3} \tan 20^\circ)(1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ)} \\ &= \tan 20^\circ + \frac{-\sqrt{3} + 3 \tan 20^\circ + \tan 20^\circ - \sqrt{3} \tan^2 20^\circ + \sqrt{3} + \tan 20^\circ + 3 \tan 20^\circ + \sqrt{3} \tan^2 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} \\ &= \tan 20^\circ + \frac{3 \tan 20^\circ + \tan 20^\circ + \tan 20^\circ + 3 \tan 20^\circ}{1 - 3 \tan^2 20^\circ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \tan 20^\circ + \frac{8 \tan 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= \frac{(\tan 20^\circ)(1-3 \tan^2 20^\circ) + 8 \tan 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= \frac{\tan 20^\circ - 3 \tan^3 20^\circ + 8 \tan 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= \frac{9 \tan 20^\circ - 3 \tan^3 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= 3 \left(\frac{3 \tan 20^\circ - \tan^3 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \right) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tan 3A = \frac{3 \tan A - \tan^3 A}{1-3 \tan^2 A} \end{array} \right. \\
&= 3 \tan 3(20^\circ) = 3 \tan 60^\circ = 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
ab + bc + ac &= -\tan 20^\circ \tan 40^\circ - \tan 40^\circ \tan 80^\circ + \tan 20^\circ \tan 80^\circ \\
&= \tan 20^\circ (-\tan 40^\circ + \tan 80^\circ) - \tan 40^\circ \tan 80^\circ \quad \left. \begin{array}{l} \text{เคยหา } -\tan 40^\circ + \tan 80^\circ \text{ แล้ว} \\ \text{ตอนที่หา } a + b + c \end{array} \right\} \\
&= \tan 20^\circ \left(\frac{8 \tan 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \right) - \tan 40^\circ \tan 80^\circ \\
&= \frac{8 \tan^2 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} - \tan(60^\circ - 20^\circ) \tan(60^\circ + 20^\circ) \\
&= \frac{8 \tan^2 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} - \left(\frac{\sqrt{3} - \tan 20^\circ}{1 + \sqrt{3} \tan 20^\circ} \right) \left(\frac{\sqrt{3} + \tan 20^\circ}{1 - \sqrt{3} \tan 20^\circ} \right) \\
&= \frac{8 \tan^2 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} - \frac{3 - \tan^2 20^\circ}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= \frac{8 \tan^2 20^\circ - (3 - \tan^2 20^\circ)}{1-3 \tan^2 20^\circ} \\
&= \frac{9 \tan^2 20^\circ - 3}{1-3 \tan^2 20^\circ} = 3 \left(\frac{3 \tan^2 20^\circ - 1}{1-3 \tan^2 20^\circ} \right) = -3
\end{aligned}$$

แทนค่าที่หาได้ใน (*) จะได้สมการคือ $3x^2 - 2(3\sqrt{3})x - 3 = 0$
 $x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

ใช้สูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ จะได้ $x = \frac{-(-2\sqrt{3}) \pm \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{2\sqrt{3} \pm \sqrt{16}}{2} = \sqrt{3} \pm 2$

เกร็ด

ขอบคุณ คุณ สันธยา เสนามนตรี สำหรับข้อสอบครับ

ขอบคุณ คุณ Krittameth Pasiphol ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของโจทย์

ขอบคุณ คุณ Palagorn Pansamdang

และ คุณ Teerapat Saengsubin ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเฉลย