ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 59)
วันอาทิตย์ที่ 20 พฤศจิกายน 2559 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. จากการสำรวจผู้เล่นเกม Pokemon Go ในประเทศไทยทั้งหมดพบว่า 80% มีสัตว์เลี้ยงอย่างน้อยหนึ่งตัวในบรรดาสัตว์เลี้ยงต่อไปนี้ Bulbasaur, Charmander และ Squirtle โดยที่
   - 45% มีสัตว์เลี้ยง Bulbasaur
   - 28% มีสัตว์เลี้ยง Charmander
   - 46% มีสัตว์เลี้ยง Squirtle

   ถ้า 27% มีแค่ Squirtle เท่านั้น และ 6% มีสัตว์เลี้ยงทั้งสามชนิด ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับจำนวนผู้เล่นที่มี Bulbasaur, Charmander แต่ไม่มี Squirtle

   ก. 14% ข. 15% ค. 16% ง. 17%

2. กิจกรรมในค่ายฤดูร้อนแห่งหนึ่ง ให้ผู้เล่มเกมจับฉลาก ในฉลากแต่ละใบมีข้อความว่า **เปา** หรือ **ปด** อย่างใดอย่างหนึ่ง ผู้จับได้ **เปา** ต้องพูดความจริง ส่วนผู้จับได้ **ปด** ต้องพูดโกหก สืบ สน และ แสง จับฉลาก เมื่ออ่านฉลากแล้วจึงพูดว่า

   สืบ: ทั้งสนและแสงจับได้เปา

   สน: สืบก็จับได้เปา

   แสง: สนโกหก

   ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. สนและสืบพูดความจริง แต่แสงพูดโกหก ข. สนพูดความจริง แต่สืบและแสงพูดโกหก
   ค. สนและสืบพูดโกหก แต่แสงพูดความจริง ง. ทุกคนพูดโกหก

3. กำหนดให้ $x>1$ และ $y>1$ ค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{\log_x 2559+\log_y 2559}{\log_{xy} 2559}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 8

4. ค่าของ $\lim\limits_{a\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+|a|x}+ax\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. ∞ ค. $\frac{1}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

5. กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดยที่ $f(1)=1$ และสำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$
ค่าของ $f(-2)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

6. กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน $\mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{x\to 2559}\dfrac{xf(x)-2559f(2559)}{x-2559}=7677$ ถ้า $f(2559)=2559$ แล้ว ค่าของ $f'(2559)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

7. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC บนระนาบ XY ใน $\mathbb{R}^3$ ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC และ E เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่ง $BE:EC=1:2$ ลาก AE และ BD ตัดกันที่จุด F ถ้า $\left|\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AB}\right|=2$ แล้ว $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 2 ข. 4 ค. 6 ง. 8

8. สำหรับเมทริกซ์ขนาด 2×2 A และ B ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง กล่าวว่า A *เป็นชนิดเดียวกันกับ* B ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง λ และเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์ส P ที่ทำให้ $A=\lambda PBP^{-1}$ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้**ไม่**เป็นชนิดเดียวกันกับเมทริกซ์ $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

ก. $\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ ค. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1/2\end{pmatrix}$ ง. $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

9. ให้ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c} = 0$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$
ค่าของ $|\vec{b} \times \vec{c}|$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3

10. ค่าของ a ในข้อใดต่อไปนี้ทำให้ $\sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \sqrt{a + \sqrt{a - \ldots}}}}}} = 5$

ก. 19 ข. 20 ค. 21 ง. 22

11. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\frac{z}{1+z^2}$ เป็นจำนวนจริงแล้ว z เป็นจำนวนจริง

(2) ถ้า $\frac{z}{1+z^2}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ (จำนวนในรูป ai โดยที่ a เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับ 0) แล้ว z เป็นจำนวนจินตภาพแท้

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง
ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ
ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง
ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

12. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $h = f \circ g$ และ $h(x) = \sqrt{1+3x^4}$ แล้ว $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = 1+3x^4$

(2) ถ้า $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{3-x}$ แล้ว $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x}$ ทุก $x \geq -1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

13. ผลรวมของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0, \pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $(\sin x + \cos x)(1 + 2\cos x) = 1 + \sqrt{6}\cos\frac{x}{2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{4\pi}{3}$ ข. $\frac{19\pi}{18}$ ค. $\frac{\pi}{3}$ ง. $\frac{23\pi}{18}$

14. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $\frac{z}{1+w} = i\tan(22.5°)$ และ $\frac{w}{1+z} = i\tan(7.5°)$ ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับค่าของ $z - w$

ก. $(2-\sqrt{3})i$ ข. $\frac{1}{\sqrt{3}}i$ ค. $(\sqrt{3}-2)i$ ง. $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$

15. กำหนดให้ $D = \{ \det A \mid A$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็น 2 หรือ -1 เท่านั้น $\}$
ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของ D

ก. -135 ข. -136 ค. -137 ง. -138

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3}{x^2+x} + \frac{7}{x^2-x} + \frac{a}{x^3-x} \right) = b$ จงหาค่าของ $a + b$

17. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้จำนวนเต็ม $111\cdots1$ ซึ่งประกอบด้วยเลขโดด 1 เป็นจำนวน n ตัว หารด้วย 7 ลงตัว

18. กำหนดให้ A เป็นจุดยอดทางด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = 3$ และ B และ C เป็นจุดสองจุดบนอีกด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลาที่ทำให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

19. ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มไปยังเซตของจำนวนตรรกยะซึ่ง $f(1) = 3$ และ $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม x จงหาจำนวนเต็ม x ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) < 0$

20. กำหนดให้ สามี ภรรยา จำนวน 4 คู่ มานั่งรอบโต๊ะกลม จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดที่นั่ง โดยที่ผู้ชายนั่งสลับกับผู้หญิง และ ไม่ให้มีสามีภรรยาคู่ใดเลยนั่งติดกัน

21. ให้ S และ T แทนค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของ

$$(\arcsin x)(\arccos x) + (\arccos x)(\arccos y) + (\arcsin x)(\arcsin y) + (\arcsin y)(\arccos y)$$

เมื่อ x และ y อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ จงหาค่าของ $S - T$

22. กำหนดให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ จงหาจำนวนสับเซตของ X ทั้งหมดซึ่งสมาชิกในสับเซตนี้มีจำนวนคี่มากกว่าจำนวนคู่

23. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของสมการ $2^{(\log_{10} x)-1} + x^{-\log_{10} 2} = 4.125$

24. กำหนดตารางแจกแจงคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 30 คน เป็นดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
20 – 39	3
40 – 59	8
60 – 79	13
80 – 99	6

สำหรับ $i = 1, 2, 3, 4$ ให้ x_i และ f_i เป็นจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นที่ i และความถี่ของอันตรภาคชั้นที่ i ตามลำดับ

ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{4} f_i(x_i - a)^2 + \sum_{i=1}^{4} f_i|x_i - b|$ มีค่าต่ำสุด จงหาค่าของ $a - b$

25. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จงหาจำนวนฟังก์ชัน $f : A \to A$ ทั้งหมดซึ่ง $f(f(f(n))) = n$ ทุก $n \in A$

<u>ตอนที่ 3</u> มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. ให้ p, q และ r เป็นพจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็ม โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p^2 + qr = pr + 46$ จงหาค่าของ pqr

27. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 5[x] + 4 = 0$ เมื่อ $[x]$ คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

28. จงหาค่าของอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าต่อไปนี้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$
เมื่อ $\{F_n\}$ เป็นลำดับฟิโบนักชีนิยามโดย $F_1 = F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $n \geq 3$

29. คณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบไปด้วยกรรมการ 20 คน ซึ่งทุกคนต้องโหวตจัดอันดับนักเตะสามคน ได้แก่ เมสซี่ โรนัลโด้ และ ชัวเรส โดยที่กรรมการแต่ละคนจะเลือกจัดอันดับได้คนละแบบเท่านั้น ผลปรากฏว่า กรรมการ 11 คนให้เมสซี่เหนือกว่าโรนัลโด้ กรรมการ 12 คนจัดให้ชัวเรสเหนือกว่าเมสซี่ และกรรมการอย่างน้อย 14 คนให้โรนัลโด้เหนือกว่าชัวเรส ถ้าแต่ละการจัดอันดับที่เป็นไปได้ของนักเตะทั้งสามคน (ซึ่งมีอยู่ 6 แบบ) ถูกเลือกโดยกรรมการอย่างน้อยหนึ่งคน จงหาว่ามีกรรมการจำนวนกี่คนที่โหวตให้โรนัลโด้ได้อยู่ในอันดับที่ 1

30. จงหาสมการของพาราโบลาคว่ำที่ผ่านจุดกำเนิดและจุด $(2, 4)$ ที่ทำให้พื้นที่ใต้กราฟพาราโบลารูปนี้เมื่อเทียบกับแกน X มีค่าน้อยที่สุด

31. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ให้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n \times n$ และ J_n แทนเมทริกซ์ขนาด $n \times n$ ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 1 จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีจำนวนเฉพาะ p สอดคล้องกับสมการ $\det(pI_n + kJ_n) = 672$

32. สุ่มเลือกจำนวนเต็มบวกจากเซต $\{1, 2, \dots, 50\}$ มาหนึ่งจำนวน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N - 2$ หาร $N^5 + N^4 + N^3 + N^2 + N + 2$ ลงตัว

33. กำหนดให้ $P_1 = 2559$ และ $P_n = 1 + (P_1P_2 \cdots P_{n-1})$ เมื่อ $n = 2, 3, 4, \ldots$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{P_n}$

34. จงหาพหุนาม $p(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $p\left(\sqrt[3]{2} + \sqrt{3}\right) = 0$ และ

(ii) $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 6 โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^6 เท่ากับ 1

35. กำหนดให้ $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ทั้งหมดที่มีสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเป็นจำนวนจริง จงหาเมทริกซ์ $C \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ทั้งหมดที่ทำให้ สำหรับทุกๆเมทริกซ์ $A, B \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ใดๆ

$$(AB - BA)^2C = C(AB - BA)^2$$

เฉลย

1. ก
2. ค
3. ค
4. ง
5. ก
6. ข
7. ง
8. ง
9. ก
10. ค
11. ค
12. ง
13. ก
14. ก
15. ก
16. -14
17. 6
18. $9\sqrt{3}$
19. $4n+2\,,\ 4n+3$
20. 12
21. π^2
22. 256
23. $0.01\,,\ 1000$
24. $-\frac{16}{3}$
25. 351
26. 28
27. $-1\,,-\sqrt{6}\,,-\sqrt{11}\,,-4$
28. 2
29. 8
30. $y=-2x^2+6x$
31. 8
32. $\frac{7}{50}$
33. $\frac{2}{2559}$
34. $x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23$
35. อะไรก็ได้

แนวคิด

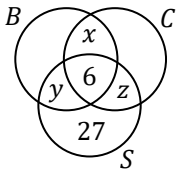
1. จากการสำรวจผู้เล่นเกม Pokemon Go ในประเทศไทยทั้งหมดพบว่า 80% มีสัตว์เลี้ยงอย่างน้อยหนึ่งตัวในบรรดาสัตว์เลี้ยงต่อไปนี้ Bulbasaur, Charmander และ Squirtle โดยที่
   - 45% มีสัตว์เลี้ยง Bulbasaur
   - 28% มีสัตว์เลี้ยง Charmander
   - 46% มีสัตว์เลี้ยง Squirtle

   ถ้า 27% มีแค่ Squirtle เท่านั้น และ 6% มีสัตว์เลี้ยงทั้งสามชนิด ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับจำนวนผู้เล่นที่มี Bulbasaur, Charmander แต่ไม่มี Squirtle

   ก. 14% ข. 15% ค. 16% ง. 17%

ตอบ ก

จาก 6% มีสัตว์เลี้ยงทั้งสามชนิด และ 27% มีแค่ Squirtle จะเติมได้ดังรูป



จาก 46% มี Squirtle แสดงว่าวง S ต้องรวมกันได้ 46

นั่นคือ จะได้ $y+6+z+27=46$

$y+z=13$ ...$(*)$

และจากสูตร Inclusive – Exclusive จะได้

$$n(B\cup C\cup S)=n(B)+n(C)+n(S)-n(B\cap C)-n(B\cap S)-n(C\cap S)+n(B\cap C\cap S)$$

$$80=45+28+46-(x+6)-(y+6)-(z+6)+6$$

$$80=45+28+46-x-6-y-6-z-6+6$$

$x+y+z=27$ จาก $(*)$

$x+13=27$

$x=14$

2. กิจกรรมในค่ายฤดูร้อนแห่งหนึ่ง ให้ผู้เล่มเกมจับฉลาก ในฉลากแต่ละใบมีข้อความว่า **เปา** หรือ **ปด** อย่างใดอย่างหนึ่ง ผู้จับได้ **เปา** ต้องพูดความจริง ส่วนผู้จับได้ **ปด** ต้องพูดโกหก สืบ สน และ แสง จับฉลาก เมื่ออ่านฉลากแล้วจึงพูดว่า

สืบ: ทั้งสนและแสงจับได้เปา

สน: สืบก็จับได้เปา

แสง: สนโกหก

ข้อความใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. สนและสืบพูดความจริง แต่แสงพูดโกหก ข. สนพูดความจริง แต่สืบและแสงพูดโกหก

ค. สนและสืบพูดโกหก แต่แสงพูดความจริง ง. ทุกคนพูดโกหก

ตอบ ค

พิจารณาคำพูดของแสง จากการที่ แสง บอกว่าสนโกหก แสดงว่า สนโกหกจริงๆ หรือไม่อย่างนั้น แสงก็โกหกซะเอง ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่ สนกับแสง จะพูดความจริงทั้งสองคน

ดังนั้น คำพูดของสืบที่บอกว่า ทั้งสนและแสงจับได้ “เปา” จึงเป็นเท็จ (จับได้ “เปา” ต้องพูดความจริง)

แสดงว่า สืบ จับได้ “ปด” จึงต้องพูดโกหก

สน บอกว่า สืบจับได้ “เปา” → แสดงว่า สน พูดโกหก

แสง บอกว่า สนโกหก → แสง จึงพูดความจริง

3. กำหนดให้ $x>1$ และ $y>1$ ค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ $\frac{\log_x 2559+\log_y 2559}{\log_{xy} 2559}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 4 ง. 8

ตอบ ค

จัดรูป $\frac{\log_x 2559+\log_y 2559}{\log_{xy} 2559}$

$(\log_a x)(\log_x a)=1$
$(\log_a x)(\log_y a)=\log_y x$

$=(\log_x 2559+\log_y 2559)\log_{2559} xy$

$=(\log_x 2559+\log_y 2559)(\log_{2559} x+\log_{2559} y)$ ⟩ กระจาย + ตัดๆ

$=1+\log_x y+\log_y x+1$

$=1+\log_x y+\frac{1}{\log_x y}+1$

$=1+k+\frac{1}{k}+1$

$\geq 1+2+1$ ⟶ จาก $\left(\sqrt{k}-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \geq 0$ เมื่อ $k=\log_x y>0$ (โจทย์ให้ $x,y>1$)

$\sqrt{k}^2-2(\sqrt{k})\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2 \geq 0$

$k+\frac{1}{k} \geq 2$

≥ 4

4. ค่าของ $\lim\limits_{a\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+|a|x}+ax\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. ∞ ค. $\frac{1}{2}$ ง. $-\frac{1}{2}$

ตอบ ง

$\lim\limits_{a\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+|a|x}+ax\right)\right)$

$=\lim\limits_{a\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\sqrt{a^2x^2+|a|x}+ax\cdot\frac{\sqrt{a^2x^2+|a|x}-ax}{\sqrt{a^2x^2+|a|x}-ax}\right)\right)$ ⟩ คูณคอนจูเกต ให้กลายเป็นเศษส่วน

$=\lim\limits_{a\to 0^+}\left(\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\frac{a^2x^2+|a|x-a^2x^2}{\sqrt{a^2x^2+|a|x}-ax}\right)\right)$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|a|x}{\sqrt{x^2\left(a^2+\frac{|a|}{x}\right)}-ax}\right)\right)$$

$\sqrt{x^2}=|x|$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|a|x}{|x|\sqrt{a^2+\frac{|a|}{x}}-ax}\right)\right)$$

$x\to -\infty$ ดังนั้น x เป็นลบ จึงทำให้ $|x|=-x$

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|a|x}{(-x)\sqrt{a^2+\frac{|a|}{x}}-ax}\right)\right)$$

ตัด x ทั้งบนและล่าง

$$= \lim_{a\to 0^+}\left(\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{|a|}{-\sqrt{a^2+\frac{|a|}{x}}-a}\right)\right)$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\frac{|a|}{-\sqrt{a^2-0}-a}$$

$$= \lim_{a\to 0^+}\frac{|a|}{-|a|-a}$$

$a\to 0^+$ ดังนั้น a เป็นบวก จึงทำให้ $|a|=a$

$$= \lim_{a\to 0^+}\frac{a}{-a-a}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

5. กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ โดยที่ $f(1)=1$ และสำหรับทุก $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}$
ค่าของ $f(-2)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

<u>ตอบ</u> ก

$f'(x)=\frac{x^4-1}{x^2+1}=\frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x^2+1}=x^2-1$ (ตัวส่วน x^2+1 ไม่มีทางเป็น 0 อยู่แล้ว จึงตัดบนล่างได้เลย)

อินทิเกรต จะได้ $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+c$ → แทน $x=1$ จะได้ $f(1)=\frac{1^3}{3}-1+c$

โจทย์กำหนด

$$1=\frac{1}{3}-1+c$$

$$\frac{5}{3}=c$$

ดังนั้น $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+\frac{5}{3}$ → จะได้ $f(-2)=\frac{(-2)^3}{3}-(-2)+\frac{5}{3}=1$

6. กำหนดให้ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน $\mathbb{R}$ โดยที่ $\lim_{x\to 2559}\frac{xf(x)-2559f(2559)}{x-2559}=7677$
ถ้า $f(2559)=2559$ แล้ว ค่าของ $f'(2559)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

<u>ตอบ</u> ข

จะเห็นว่า ถ้าแทน $x=2559$ ในลิมิต จะได้ $\frac{xf(x)-2559f(2559)}{x-2559}$ อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ → สามารถใช้กฎของโลปิตาลได้

$$\frac{\text{ดิฟบน}}{\text{ดิฟล่าง}}=\frac{\overbrace{xf'(x)+f(x)(1)}^{\text{น ล}'+\text{ล น}'}-0}{1}$$

$2559f(2559)$ เป็นค่าคงที่ → ดิฟ $=0$

โจทย์ให้ $f(2559)=2559$

→ แทน $x=2559$ จะได้ $\frac{2559f'(2559)+f(2559)(1)-0}{1}$

$$=2559f'(2559)+2559$$

โจทย์ให้ค่าลิมิต $=7677$ ดังนั้น

$$2559f'(2559)+2559=7677$$

$$2559f'(2559)=5118$$

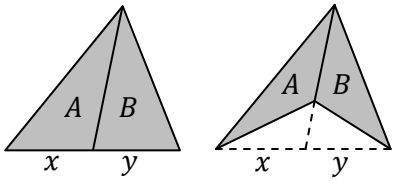
$$f'(2559)=2$$

7. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC บนระนาบ XY ใน $\mathbb{R}^3$ ให้ D เป็นจุดกึ่งกลางด้าน AC และ E เป็นจุดบนด้าน BC ซึ่ง $BE:EC=1:2$ ลาก AE และ BD ตัดกันที่จุด F ถ้า $\left|\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AB}\right|=2$ แล้ว $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

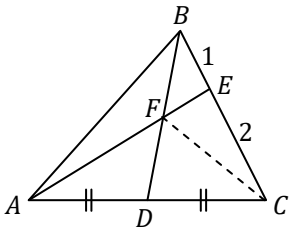
ก. 2 ข. 4 ค. 6 ง. 8

ตอบ ง

ข้อนี้ จะใช้ทฤษฎีสัดส่วนพื้นที่ Δ มาช่วย →



พื้นที่ $A:B=x:y$



จาก $\left|\overrightarrow{AF}\times\overrightarrow{AB}\right|=2$ แสดงว่า □ ด้านขนานที่เกิดจาก $\overrightarrow{AF}$ และ $\overrightarrow{AB}$ มี พื้นที่ $=2$

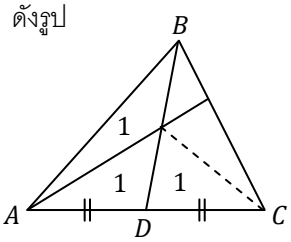
ดังนั้น พื้นที่ $\Delta AFB=\frac{1}{2}$ ของ □ ด้านขนาน $=\frac{1}{2}\times 2=1$

จาก ทฤษฎีสัดส่วนพื้นที่ Δ จะได้ $\frac{\Delta AFB}{\Delta AFC}=\frac{EB}{EC}=\frac{1}{2}$

$\frac{1}{\Delta AFC}=\frac{1}{2}\rightarrow \Delta AFC=2$

$\Delta AFD+\Delta CFD=2$

แต่จาก $AD=DC$ จะได้พื้นที่ $\Delta AFD=\Delta CFD$ ดังนั้น $\Delta AFD=\Delta CFD=1$ ดังรูป



และจาก $AD=DC$ จะได้ $\Delta CBD=\Delta ABD=1+1=2$

ดังนั้น พื้นที่ $\Delta ABC=\Delta ABD+\Delta CBD=2+2=4$

ดังนั้น $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=$ พื้นที่ □ ด้านขนานที่เกิดจาก $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{AC}$

$=2$ เท่าของ พื้นที่ $\Delta ABC=2(4)=8$

8. สำหรับเมทริกซ์ขนาด 2×2 A และ B ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริง กล่าวว่า *A เป็นชนิดเดียวกันกับ B* ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง λ และเมทริกซ์ที่มีอินเวอร์ส P ที่ทำให้ $A=\lambda PBP^{-1}$ เมทริกซ์ในข้อใดต่อไปนี้**ไม่**เป็นชนิดเดียวกันกับเมทริกซ์ $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$

ก. $\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$ ข. $\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$ ค. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1/2\end{pmatrix}$ ง. $\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}$

ตอบ ง

เมทริกซ์ที่เป็นชนิดเดียวกันกับ $\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$ จะต้องสามารถเขียนได้ในรูป $\lambda P\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}P^{-1}$

ให้ $P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$ จะได้ $P^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$

$$=\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda}{ad-bc}\begin{pmatrix}a&2b\\c&2d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda}{ad-bc}\begin{pmatrix}ad-2bc&ab\\-cd&2ad-bc\end{pmatrix}\ \ldots(*)$$

เราต้องดูว่า เมทริกซ์ในตัวเลือกไหน ที่ไม่สามารถเขียนได้ในรูป $(*)$

สังเกตว่าทุกตัวเลือกทุกข้อ มีสมาชิกตัวซ้ายล่างเป็น 0 ดังนั้น $-cd=0$ จะได้ $c=0$ หรือ $d=0$

กรณี $c=0$: แทน $c=0$ ใน $(*)$ จะได้ $=\frac{\lambda}{ad}\begin{pmatrix}ad&ab\\0&2ad\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda&\lambda b/d\\0&2\lambda\end{pmatrix}\rightarrow$ สังเกตว่า สมาชิกตัวขวาล่าง เป็น 2 เท่าของ สมาชิกตัวซ้ายบน

ซึ่งสอดคล้องกับ ตัวเลือกข้อ (ข) เมื่อ $\lambda=1$, $\frac{b}{d}=1$ (a เป็นอะไรก็ได้ ที่ $\neq 0$)

แต่จะไม่สอดคล้องกับข้ออื่น (ข้อ ก. ค. ง. สมาชิกตัวขวาล่าง ไม่ได้เป็น 2 เท่าของสมาชิกตัวซ้ายบน)

กรณี $a=0$: แทน $a=0$ ใน $(*)$ จะได้ $= -\frac{\lambda}{bc}\begin{pmatrix}-2bc & 0\\ -cd & -bc\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\lambda & 0\\ -d/b & \lambda\end{pmatrix}$ → สมาชิกตัวซ้ายบน เป็น 2 เท่าของ สมาชิกตัวขวาล่าง

ซึ่งสอดคล้องกับ ตัวเลือกข้อ (ก) เมื่อ $\lambda=2$, $d=0$ (b กับ c เป็นอะไรก็ได้ ที่ $\neq 0$)

และสอดคล้องกับ ตัวเลือกข้อ (ค) เมื่อ $\lambda=\frac{1}{2}$, $d=0$ (b กับ c เป็นอะไรก็ได้ ที่ $\neq 0$)

แต่จะไม่สอดคล้องกับข้อ (ง) เนื่องจาก สมาชิกตัวซ้ายบน ไม่ได้เป็น 2 เท่าของสมาชิกตัวขวาล่าง

จะเห็นว่าข้อ (ง) ไม่สอดคล้องกับกรณีไหนเลย ดังนั้น เมทริกซ์ที่กำหนด จึงไม่เป็นชนิดเดียวกับข้อ (ง)

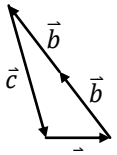
9. ให้ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ ซึ่ง $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=0$, $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$

ค่าของ $|\vec{b}\times\vec{c}|$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 1 ค. 2 ง. 3

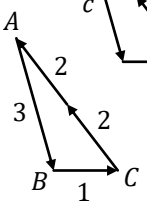
ตอบ ก

$\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=0$ แสดงว่า $\vec{a}$, $2\vec{b}$, และ $\vec{c}$ ต้องต่อแล้ววนกลับมาที่จุดตั้งต้นเป็นรูปสามเหลี่ยม ดังรูป



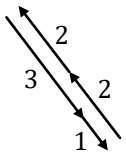
โจทย์ให้ $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ → จะได้ความยาวแต่ละด้านของ Δ เป็นดังรูป

สังเกตว่า CA ยาว $=2+2=4$ เท่ากับผลรวมอีกสองด้านที่เหลือ $AB+BC=3+1=4$



ดังนั้นเวกเตอร์ทั้งหมด จะต้องเป็นแนวเดียวกัน ดังรูป

จะได้ $|\vec{b}\times\vec{c}|=0$ (ขนานกัน ครอสกันได้ $\bar{0}$)



10. ค่าของ a ในข้อใดต่อไปนี้ทำให้ $\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-}}}}}}=5$

ก. 19 ข. 20 ค. 21 ง. 22

ตอบ ค

ก้อนถัดเข้าไป 2 ชั้น จะกลับไปเหมือนกับก้อนฝั่งซ้ายทั้งก้อน $\sqrt{a+\sqrt{a-\boxed{\sqrt{a+\sqrt{a-\sqrt{a+\sqrt{a-}}}}}}}=5$

วนกลับไปเหมือนฝั่งซ้ายทั้งก้อน

เนื่องจาก ฝั่งซ้ายทั้งก้อน $=5$

ดังนั้น ก้อนในเส้นประ จะเท่ากับ 5 ด้วย → จะได้สมการคือ $\sqrt{a+\sqrt{a-5}}=5$ ...$(*)$

ยกกำลังสอง ทั้ง 2 ข้าง $a+\sqrt{a-5}=25$

ยกกำลังสอง ทั้ง 2 ข้าง $\sqrt{a-5}=25-a$

$a-5=625-50a+a^2$

$0=a^2-51a+630$

$0=(a-21)(a-30)$

$a=21\ ,\ 30$

เนื่องจากระหว่างแก้สมการ มีการยกกำลังสองทั้งสองข้าง ดังนั้น ต้องตรวจคำตอบใน $(*)$ ด้วย

$a=21$: $\sqrt{21+\sqrt{21-5}}=\sqrt{21+4}=5$ → จริง

$a=30$: $\sqrt{30+\sqrt{30-5}}=\sqrt{30+5}\neq 5$ → เท็จ

} → ตอบ $a=21$

11. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $\frac{z}{1+z^2}$ เป็นจำนวนจริงแล้ว z เป็นจำนวนจริง

(2) ถ้า $\frac{z}{1+z^2}$ เป็นจำนวนจินตภาพแท้ (จำนวนในรูป ai โดยที่ a เป็นจำนวนจริงไม่เท่ากับ 0) แล้ว z เป็นจำนวนจินตภาพแท้

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

<u>ตอบ</u> ค

(1) ให้ $\frac{z}{1+z^2} = k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

จัดรูปให้เป็นสมการกำลังสองที่มี สปส เป็นจำนวนจริง $z = k + kz^2$

$0 = kz^2 - z + k$

สมการ $ax^2 + bx + c = 0$ มีคำตอบคือ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

จากสูตร จะได้ $z = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(k)(k)}}{2k} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4k^2}}{2k}$

จะเห็นว่า z อาจไม่ใช่จำนวนจริง ถ้า $1 - 4k^2 < 0$ → (1) ผิด

(2) ให้ $\frac{z}{1+z^2} = ki$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

จัดรูปให้เป็นสมการกำลังสองที่มี สปส เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} z &= ki + kz^2 i \\ zi &= ki^2 + kz^2 i^2 \\ zi &= ki^2 + k(zi)^2 \\ 0 &= k(zi)^2 - (zi) - k \end{aligned}$$

จากสูตร จะได้ $zi = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2-4(k)(-k)}}{2k} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4k^2}}{2k}$

เนื่องจาก $1 + 4k^2$ ไม่มีทางติดลบ $(k^2 \geq 0)$ ดังนั้น zi จะเป็นจำนวนจริงเสมอ

ดังนั้น z จะเป็นจำนวนจินตภาพแท้เสมอ → (2) ถูก

12. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือ เซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $h = f \circ g$ และ $h(x) = \sqrt{1 + 3x^4}$ แล้ว $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = 1 + 3x^4$

(2) ถ้า $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ และ $g(x) = \sqrt{3 - x}$ แล้ว $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x}$ ทุก $x \geq -1$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

<u>ตอบ</u> ง

(1) ยังมีวิธีประกอบแบบอื่น ที่ทำให้ได้ $h(x) = \sqrt{1 + 3x^4}$

เช่น $f(x) = \sqrt{1 + 3x^4}$ และ $g(x) = x$ ก็จะได้ $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$

$= f(\ \ x\ \ )$

$= \sqrt{1 + 3x^4} = h(x)$ เช่นกัน → (1) ผิด

(2) $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = \ \ f\big(\sqrt{3 - x}\big)$ เมื่อ $x \leq 3$ (ในรูทห้ามติดลบ)

$= \sqrt{4 - \sqrt{3 - x}^2}$

$= \sqrt{4 - (3 - x)} = \sqrt{1 + x}$ เมื่อ $x \geq -1$ (ในรูทห้ามติดลบ)

ดังนั้น $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x}$ เมื่อ $-1\le x\le 3$ → แต่โจทย์บอกแค่ $x\ge -1$ ดังนั้น (2) ผิด

(เช่น ถ้าถามค่าของ $(f\circ g)(4)$ ต้องตอบว่า หาไม่ได้ เพราะ $g(4)$ หาไม่ได้

แต่ถ้าใช้ $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x}$ ทุก $x\ge -1$ จะหาได้ $(f\circ g)(4)=\sqrt{5}$)

13. ผลรวมของค่า x ทั้งหมดในช่วง $[0,\pi]$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$(\sin x+\cos x)(1+2\cos x)=1+\sqrt{6}\cos\frac{x}{2}$ ตรงกับข้อใด

ก. $\frac{4\pi}{3}$ ข. $\frac{19\pi}{18}$ ค. $\frac{\pi}{3}$ ง. $\frac{23\pi}{18}$

ตอบ ก

$$\begin{aligned}(\sin x+\cos x)\ (1+2\cos x) &= 1+\sqrt{6}\cos\tfrac{x}{2}\\ \sin x+2\sin x\cos x+\cos x+2\cos^2 x &= 1+\sqrt{6}\cos\tfrac{x}{2}\\ \sin x+2\sin x\cos x+\cos x+2\cos^2 x-1 &= \sqrt{6}\cos\tfrac{x}{2}\\ \sin x+\ \sin 2x\ +\cos x+\ \cos 2x\ &= \sqrt{6}\cos\tfrac{x}{2}\\ 2\sin\tfrac{3x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\ +\ 2\cos\tfrac{3x}{2}\cos\tfrac{x}{2}\ &= \sqrt{6}\cos\tfrac{x}{2}\quad ...(*)\end{aligned}$$

จะเห็นว่าทุกตัวมี $\cos\frac{x}{2}$ เป็นตัวประกอบ ดังนั้น ถ้า $\cos\frac{x}{2}=0$ จะทำให้สมการเป็นจริงได้

กรณี $\cos\frac{x}{2}=0$: จาก $x\in[0,\pi]$ จะได้ $x=\pi$

กรณี $\cos\frac{x}{2}\neq 0$: หาร $(*)$ ตลอดด้วย $\cos\frac{x}{2}$ จะเหลือ $2\sin\frac{3x}{2}+2\cos\frac{3x}{2}=\sqrt{6}$

$$\sin\tfrac{3x}{2}+\ \cos\tfrac{3x}{2}=\tfrac{\sqrt{6}}{2}\quad ...(**)$$

ยกกำลังสอง ทั้ง 2 ข้าง

$$\begin{aligned}\sin^2\tfrac{3x}{2}+2\sin\tfrac{3x}{2}\cos\tfrac{3x}{2}+\cos^2\tfrac{3x}{2} &= \tfrac{6}{4}\\ \left(\sin^2\tfrac{3x}{2}+\cos^2\tfrac{3x}{2}\right)+2\sin\tfrac{3x}{2}\cos\tfrac{3x}{2} &= \tfrac{3}{2}\\ 1\ +\ \sin 3x &= \tfrac{3}{2}\\ \sin 3x &= \tfrac{1}{2}\end{aligned}$$

แต่การยกกำลัง 2 ตรง $(**)$ อาจทำให้มีคำตอบปลอม เกินมาได้ → ต้องพิจารณาขอบเขตของ x ใน $(**)$ ด้วย

เนื่องจาก $\frac{\sqrt{6}}{2}>1$ ดังนั้น ทั้ง $\sin\frac{3x}{2}$ และ $\cos\frac{3x}{2}$ ต้องเป็นบวกทั้งคู่ เพื่อรวมกันแล้ว >1 ดังนั้น $\frac{3x}{2}$ ต้องอยู่ใน Q_1

แต่โจทย์ให้ $x\in[0,\pi]$ จะได้ $\frac{3x}{2}\in[0,\frac{3\pi}{2}]$ แต่ $\frac{3x}{2}$ ต้องอยู่ใน Q_1 ดังนั้น $\frac{3x}{2}\in[0,\frac{\pi}{2}]$

ดังนั้น $3x\in[0,\pi]$ → ถ้า $\sin 3x=\frac{1}{2}$ จะได้ $3x=\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}$ ดังนั้น $x=\frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18}$

รวมคำตอบจากทั้ง 2 กรณี จะได้ผลรวมของ $x=\pi+\frac{\pi}{18}+\frac{5\pi}{18}=\frac{4\pi}{3}$

14. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $\frac{z}{1+w}=i\tan(22.5°)$ และ $\frac{w}{1+z}=i\tan(7.5°)$

ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับค่าของ $z-w$

ก. $(2-\sqrt{3})i$ ข. $\frac{1}{\sqrt{3}}i$ ค. $(\sqrt{3}-2)i$ ง. $-\frac{1}{\sqrt{3}}i$

ตอบ ก

ให้ $a=i\tan(22.5°)$ และ $b=i\tan(7.5°)$ จะได้ $\frac{z}{1+w}=a$ และ $\frac{w}{1+z}=b$

$$\begin{aligned}z &= a+aw\quad ...(1)\\ \times b\ \ bz &= ab+abw\end{aligned}$$

$$w=b+bz\quad ...(2)$$

แทนค่า bz

$$w=b+ab+abw$$

$$\begin{aligned} w - abw &= b + ab \\ w &= \tfrac{b+ab}{1-ab} \end{aligned}$$

แทน $w = \frac{b+ab}{1-ab}$ ใน (1) จะได้ $z = a + a\left(\frac{b+ab}{1-ab}\right)$

$$= a + \frac{ab-a^2b}{1-ab} = \frac{a-a^2b+ab+a^2b}{1-ab} = \frac{a+ab}{1-ab}$$

ดังนั้น $z - w = \frac{a+ab}{1-ab} - \frac{b+ab}{1-ab}$

$$= \frac{a-b}{1-ab} = \frac{i\tan 22.5° - i\tan 7.5°}{1-(i\tan 22.5°)(i\tan 7.5°)}$$

$$= \frac{i(\tan 22.5° - \tan 7.5°)}{1+(\tan 22.5°)(\tan 7.5°)} \quad (i^2 = -1)$$

$$= i\tan(22.5° - 7.5°) = i\tan 15°$$

$$= i\tan(60° - 45°)$$

$$= \frac{i(\tan 60° - \tan 45°)}{1+(\tan 60°)(\tan 45°)}$$

$$= \frac{i(\sqrt{3}-1)}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$

$$= \frac{i(3-2\sqrt{3}+1)}{2}$$

$$= i(2-\sqrt{3})$$

(หรือถ้าจำได้ว่า $\tan 15° = 2 - \sqrt{3}$ ก็ตอบเลย)

15. กำหนดให้ $D = \{ \det A \mid A$ เป็นเมทริกซ์ขนาด 4×4 ที่มีสมาชิกเป็น 2 หรือ -1 เท่านั้น $\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นสมาชิกของ D

ก. -135 ข. -136 ค. -137 ง. -138

ตอบ ก

เนื่องจาก 2 กับ -1 ต่างกันอยู่ 3 ดังนั้น ถ้าเอา 2 แถวใดๆมา “ลบ” กัน จะ “ดึง 3 เป็นตัวร่วม” ออกได้เสมอ และเนื่องจากเมทริกซ์ 4×4 จะ “ลบ 2 แถว” ได้ 3 ครั้งก่อนที่ค่าจะเปลี่ยน $\rightarrow$ จะดึง 3 เป็นตัวร่วมได้ 3 ครั้งเสมอ

เช่น $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - R_1 \\ = \end{matrix}$ $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ -3 & 3 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -3 \end{vmatrix}$ $\begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$ $\begin{matrix} \rightarrow \text{ ดึง } 3 \text{ ออกได้} \\ \rightarrow \text{ ดึง } 3 \text{ ออกได้} \\ \rightarrow \text{ ดึง } 3 \text{ ออกได้} \end{matrix}$

$$= 3^3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น ค่า det จะหารด้วย $3^3 = 27$ ลงตัวเสมอ ซึ่งจะมีแต่ ก. เท่านั้น $\rightarrow \frac{-135}{27} = -5 \rightarrow$ จะตอบ ก. เลยก็ได้ แต่ถ้าต้องการพิสูจน์ว่า -135 สามารถเป็นค่า det ได้จริงๆ ก็สามารถย้อนกลับแนวคิดดังกล่าวได้ดังนี้

$$-135 = (27)(-5) = 3^3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & ? & ? & ? \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$C_1 - C_2 - C_3 - C_4 \rightarrow C_1$ (แตก 5 เป็น $-1 + 2 + 2 + 2$)

$$= 3^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

กระจาย 3 เข้าไปใน 3 แถวล่าง

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$R_1 + R_2$
$R_1 + R_3$
$R_1 + R_4$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

ดังนั้น มีเมทริกซ์ตามเงื่อนไข ที่ $\det = -135 \rightarrow$ ตอบ ก.

16. ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x^2+x}+\frac{7}{x^2-x}+\frac{a}{x^3-x}\right)=b$ จงหาค่าของ $a+b$

ตอบ -14

$$\frac{3}{x^2+x}+\frac{7}{x^2-x}+\frac{a}{x^3-x}=\frac{3}{x(x+1)}+\frac{7}{x(x-1)}+\frac{a}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{3(x-1)+7(x+1)+a}{x(x-1)(x+1)}$$

ถ้า $4+a\neq 0$ จะหาค่าลิมิตไม่ได้

$$=\frac{10x+4+a}{x(x-1)(x+1)} \rightarrow \text{ถ้า } x\to 0 \text{ จะได้ } \frac{4+a}{0}$$

แต่โจทย์ให้หาลิมิตได้ $=b$ ดังนั้น $4+a=0$

$$a=-4$$

$$=\frac{10x}{x(x-1)(x+1)}$$

$$=\frac{10}{(x-1)(x+1)} \rightarrow \text{แทน } x\to 0 \text{ ใหม่ จะได้ลิมิต } \frac{10}{(-1)(1)}=-10$$

จะได้ $b=-10$

ดังนั้น $a+b=-4+-10=-14$

17. จงหาจำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้จำนวนเต็ม $111\cdots1$ ซึ่งประกอบด้วยเลขโดด 1 เป็นจำนวน n ตัว หารด้วย 7 ลงตัว

ตอบ 6

```
      1 5 8 7 3
  7 ) 1 1 1 1 1 1 1 ...
      7
      4 1
      3 5
        6 1
        5 6
          5 1
          4 9
            2 1
            2 1
```

หารยาวไปเรื่อยๆ จนกว่าจะลงตัว

เนื่องจากเศษจากการหารด้วย 7 มีแค่ 7 แบบ (คือ 0, 1, 2, … , 6)

ดังนั้น รับประกันได้ว่า หารไม่เกิน 7 รอบ ต้องรู้คำตอบ

(คือภายใน 7 รอบ ต้องหารลงตัว หรือไม่ก็วนซ้ำเศษตัวเดิมแบบไม่รู้จบ)

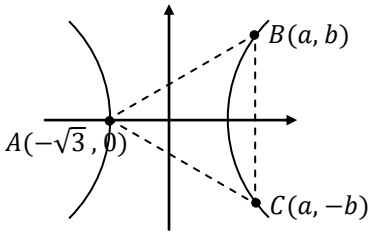
จะเห็นว่าหารลงตัว เมื่อเศษ $=111111 \rightarrow$ มี 1 จำนวน 6 ตัว $\rightarrow n=6$

18. กำหนดให้ A เป็นจุดยอดทางด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $x^2-y^2=3$ และ B และ C เป็นจุดสองจุดบนอีกด้านหนึ่งของไฮเพอร์โบลาที่ทำให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

ตอบ $9\sqrt{3}$

จัดรูป ได้ $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{3}=1 \rightarrow$ จะได้จุดยอดคือ $(\pm\sqrt{3}\,,0)$

จากความสมมาตร ถ้า พิกัด B คือ (a,b) จะได้พิกัด C คือ $(a,-b)$ ดังรูป



ΔABC เป็น Δ ด้านเท่า $\rightarrow \quad AB = BC$

$$\sqrt{(a-(-\sqrt{3}))^2+(b-0)^2}=b-(-b)$$

$$\sqrt{(a+\sqrt{3})^2+b^2}=2b$$

$$(a+\sqrt{3})^2+b^2=4b^2$$

$$a^2+2\sqrt{3}a+3=3b^2$$

และเนื่องจาก (a,b) อยู่บนไฮเพอร์โบลา

จึงต้องสอดคล้องกับสมการไฮเพอร์โบลา

$$a^2-b^2=3$$

$$a^2-3=b^2 \quad \ldots(*)$$

$$a^2+2\sqrt{3}a+3=3(a^2-3)$$

$$a^2+2\sqrt{3}a+3=3a^2-9$$

$$\begin{aligned} 0 &= 2a^2 - 2\sqrt{3}a - 12 \\ 0 &= a^2 - \sqrt{3}a - 6 \\ 0 &= (a+\sqrt{3})(a-2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$a = \cancel{-\sqrt{3}},\ 2\sqrt{3}$ $\rightarrow$ (a,b) อยู่ใน Q_1 ดังนั้น a, b ต้องเป็นบวก

แทน $a = 2\sqrt{3}$ ใน $(*)$ เพื่อหา b จะได้ $(2\sqrt{3})^2 - 3 = b^2$

$9 = b^2$

$3 = b$ (b ต้องเป็นบวก)

จะได้ $BC = b - (-b) = 3 - (-3) = 6$ ดังนั้น พื้นที่ $\Delta ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times$ ด้าน$^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}(6^2) = 9\sqrt{3}$

19. ให้ f เป็นฟังก์ชันจากเซตของจำนวนเต็มไปยังเซตของจำนวนตรรกยะซึ่ง $f(1) = 3$ และ $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม x จงหาจำนวนเต็ม x ทั้งหมดที่ทำให้ $f(x) < 0$

<u>ตอบ</u> $4n+2$, $4n+3$

ลองแทน x เป็นค่าต่างๆดู ดังนี้

แทน $x = 1$ จะได้ $f(1+1) = \frac{1+f(1)}{1-f(1)}$

$f(2) = \frac{1+3}{1-3} = -2$

แทน $x = 2$ จะได้ $f(2+1) = \frac{1+f(2)}{1-f(2)}$

$f(3) = \frac{1+(-2)}{1-(-2)} = -\frac{1}{3}$

แทน $x = 3$ จะได้ $f(3+1) = \frac{1+f(3)}{1-f(3)}$

$f(4) = \frac{1+\left(-\frac{1}{3}\right)}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3-1}{3+1} = \frac{1}{2}$

แทน $x = 4$ จะได้ $f(4+1) = \frac{1+f(4)}{1-f(4)}$

$f(5) = \frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2+1}{2-1} = 3$

จะเห็นว่า $f(5)$ วนกลับไปเป็น 3 เหมือน $f(1)$

เนื่องจากค่าของ $f(x+1)$ จะคำนวณได้จาก $f(x)$ ดังนั้น ค่า f จะวนซ้ำทุกๆ 4 ตัว ดังนี้

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$f(x)$	$3 \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$				$\rightarrow 3 \rightarrow -2 \rightarrow -\frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{2}$				$\rightarrow$ ...

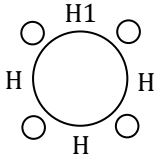
(เมื่อ x เป็น 0 หรือติดลบ จะคิดได้โดยแทน $x = 0$ หรือติดลบ แล้วแก้สมการ จะได้ผลในลักษณะเดียวกัน)

จะเห็นว่า $f(x) < 0$ เมื่อ x เป็นช่องที่ 2 หรือ 3 ของแต่ละรอบ $\rightarrow$ $x = 4n+2$, $4n+3$

20. กำหนดให้ สามี ภรรยา จำนวน 4 คู่ มานั่งรอบโต๊ะกลม จงหาจำนวนวิธีทั้งหมดในการจัดที่นั่ง โดยที่ผู้ชายนั่งสลับกับผู้หญิง และ ไม่ให้มีสามีภรรยาคู่ใดเลยนั่งติดกัน

<u>ตอบ</u> 12

ให้ สามี คือ H1 , H2 , H3 , H4 และ ภรรยา คือ W1 , W2 , W3 , W4



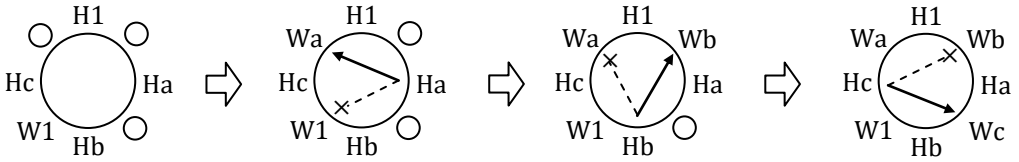
เอา H1 ตอกไว้ไม่ให้วงหมุน

เนื่องจาก ชาย หญิง ต้องนั่งสลับกัน จึงเหลือที่นั่งให้ H2, H3, H4 แค่ 3 ที่

ดังนั้น เลือกที่นั่งให้ H2, H3, H4 จะเลือกได้ 3! แบบ

ถัดมา W1 ต้องไม่นั่งติดกับ H1 $\rightarrow$ เลือกได้ ซ้ายล่าง หรือไม่ก็ขวาล่าง ได้ 2 แบบ

เนื่องจาก W2, W3, W4 มีที่นั่งที่ไม่ติดกับสามีของตน 2 แบบเช่นกัน ดังนั้น เมื่อ W1 ได้ที่นั่งแล้ว W1 จะแย่งที่นั่ง 1 ที่ จาก 2 ที่ของ W อีกคนไป ทำให้ W คนนั้น ไม่เหลือทางเลือกและต้องถูกบังคับนั่ง ซึ่ง W คนนั้น ก็จะไปแย่งที่นั่งของ W คนอื่นต่อไปอีกเป็นทอดๆ → เช่นกรณี W1 เลือกนั่งซ้ายล่าง จะเป็นดังนี้



(กรณี W1 เลือกนั่งขวาล่าง ก็ทำแบบเดียวกัน แค่สลับซ้ายขวา)

ดังนั้น จะมี W1 แค่คนเดียว ที่มีสิทธิเลือกที่นั่งได้ได้ 2 แบบ → จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 3! \times 2 = 12$ แบบ

21. ให้ S และ T แทนค่าสูงสุด และค่าต่ำสุดของ

$$(\arcsin x)(\arccos x) + (\arccos x)(\arccos y) + (\arcsin x)(\arcsin y) + (\arcsin y)(\arccos y)$$

เมื่อ x และ y อยู่ในช่วง $[-1, 1]$ จงหาค่าของ $S - T$

ตอบ π^2

จับกลุ่มดึงตัวร่วมได้ดังนี้

$$= \arccos x(\arcsin x + \arccos y) + \arcsin y\,(\arcsin x + \arccos y)$$
$$= (\arccos x + \arcsin y)(\arcsin x + \arccos y)$$ เปลี่ยน arccos เป็น arcsin ด้วยกฎ $\arcsin\theta + \arccos\theta = \frac{\pi}{2}$
$$= (\tfrac{\pi}{2} - \arcsin x + \arcsin y)(\arcsin x + \tfrac{\pi}{2} - \arcsin y)$$
$$= (\tfrac{\pi}{2} - (\arcsin x - \arcsin y))(\tfrac{\pi}{2} + (\arcsin x - \arcsin y))$$
$$= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - (\arcsin x - \arcsin y)^2$$ $(น - ล)(น + ล) = น^2 - ล^2$

ค่าสูงสุด S จะเกิดเมื่อ $(\arcsin x - \arcsin y)^2$ ต่ำสุด นั่นคือเมื่อ $\arcsin x = \arcsin y$ จะได้ $S = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$

ค่าต่ำสุด T จะเกิดเมื่อ $(\arcsin x - \arcsin y)^2$ มากสุด เช่นเมื่อ $\arcsin x = \frac{\pi}{2}$ และ $\arcsin y = -\frac{\pi}{2}$

จะได้ $T = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi^2$

ดังนั้น $S - T = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \pi^2\right) = \pi^2$

22. กำหนดให้ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ จงหาจำนวนสับเซตของ X ทั้งหมดซึ่งสมาชิกในสับเซตนี้มีจำนวนคี่มากกว่าจำนวนคู่

ตอบ 256

จะพยายามโยงเข้าไปหาเซตที่เล็กกว่า คือ $Y = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ แบบไม่มี 9

จากสูตรจำนวนสับเซต $= 2^{n(A)}$ จะได้จำนวนสับเซตทั้งหมดของ Y คือ $2^8 = 256$

จะแบ่งสับเซตของ Y ทั้ง 256 สับเซต เป็น 3 กลุ่ม คือ (1) สับเซตของ Y ที่มีจำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่
(2) สับเซตของ Y ที่มีจำนวนคี่ น้อยกว่า จำนวนคู่
(3) สับเซตของ Y ที่มีจำนวนคี่ เท่ากับ จำนวนคู่

(1) กับ (2) จะมีจำนวนเท่ากัน (เนื่องจาก $\{1, 2, 3, \dots, 8\}$ มีเลขคู่กับเลขคี่อย่างละ 4 ตัวเท่าๆกัน + หลักความสมมาตร)

ให้ (1) และ (2) มีอย่างละ a สับเซต และให้ (3) มี b สับเซต ดังนั้น $2a + b = 256$ ...(∗)

(จะเห็นว่า $X = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ มีจำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่ จึงใช้หลักความสมมาตรไม่ได้)

โจทย์ถาม จำนวนสับเซตของ $X=\{1,2,3,\dots,8,9\}$ ที่มีจำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่

จะแบ่งสับเซตของ X ที่มี จำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่ ออกเป็น 2 ประเภท คือ

(4) สับเซตของ X ที่มีจำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่ และไม่มี 9 เป็นสมาชิก

(5) สับเซตของ X ที่มีจำนวนคี่ มากกว่า จำนวนคู่ และ มี 9 เป็นสมาชิก

เนื่องจาก (4) ไม่มี 9 เป็นสมาชิก ดังนั้น (4) ของ X จะมีจำนวนเท่ากับ (1) ของ Y $\rightarrow$ (4) มี a สับเซต

และสำหรับ (5) จะเห็นว่า ถ้าตัด 9 ที่เป็นสมาชิกออก จะกลายเป็น สับเซตที่มีจำนวนคี่ มากกว่าหรือเท่ากับ จำนวนคู่

ดังนั้น (5) จะมีจำนวนเท่ากับ (1) $+$ (3) $\rightarrow$ (5) มี $a+b$ สับเซต

(1) คือ มากกว่า , (3) คือเท่ากับ

จำนวนคี่ $>$ จำนวนคู่

จำนวนคี่ $-1\geq$ จำนวนคู่

ดังนั้น (4) $+$ (5) จะมี $=a+a+b=2a+b$

$=256$ จาก $(*)$

23. จงหาคำตอบที่เป็นจำนวนจริงทั้งหมดของสมการ $2^{(\log_{10}x)-1}+x^{-\log_{10}2}=4.125$

ตอบ $0.01\,,\ 1000$

$$\frac{2^{\log_{10}x}}{2^1}+\frac{1}{x^{\log_{10}2}}=4.125$$

$m^{\log_a n}=n^{\log_n m}$

$$\frac{2^{\log_{10}x}}{2}+\frac{1}{2^{\log_{10}x}}=4.125$$

ให้ $a=2^{\log_{10}x}$

$$\frac{a}{2}+\frac{1}{a}=4.125$$

$$4a^2+8=33a$$

$$4a^2-33a+8=0$$

$$(4a-1)(a-8)=0$$

$$a=\frac{1}{4},\ 8$$

$$2^{\log_{10}x}=\frac{1}{4}\ ,\ 8$$

$$2^{\log_{10}x}=2^{-2}\ ,\ 2^3$$

$$\log_{10}x=-2\ ,\ 3$$

$$x=10^{-2}\ ,\ 10^3$$

$$x=0.01\ ,\ 1000$$

24. กำหนดตารางแจกแจงคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 30 คน เป็นดังนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
20 – 39	3
40 – 59	8
60 – 79	13
80 – 99	6

สำหรับ $i=1,2,3,4$ ให้ x_i และ f_i เป็นจุดกึ่งกลางของอันตรภาคชั้นที่ i และความถี่ของอันตรภาคชั้นที่ i ตามลำดับ

ถ้า a และ b เป็นค่าคงที่ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{4}f_i(x_i-a)^2+\sum_{i=1}^{4}f_i|x_i-b|$ มีค่าต่ำสุด จงหาค่าของ $a-b$

ตอบ $-\frac{16}{3}$

จากสมบัติของค่ากลาง จะได้ $\sum_{i=1}^{4}f_i(x_i-a)^2$ ต่ำสุดเมื่อ $a=\bar{x}$ และ $\sum_{i=1}^{4}f_i|x_i-b|$ ต่ำสุดเมื่อ $b=\text{Med}$

สิ่งที่ต้องระวังของข้อนี้ คือ ต้องหา b จาก Med ของข้อมูล x_i ไม่ใช่จากตารางอันตรภาคชั้นที่โจทย์กำหนด

หา $\bar{x}$ โดยวิธีลดทอนข้อมูล (หาตรงๆก็ได้ แต่คิดเลขเยอะ)

x_i	f_i	$d_i=\frac{x_i-69.5}{20}$	f_id_i
29.5	3	-2	-6
49.5	8	-1	-8
69.5	13	0	0
89.5	6	1	6
	30		-8

จะได้ $\bar{d}=-\frac{8}{30}$

ดังนั้น $\frac{\bar{x}-69.5}{20}=-\frac{8}{30}$

$\bar{x}=-\frac{16}{3}+69.5=a$

หา Med จากความถี่สะสม

x_i	f_i	F_i
29.5	3	3
49.5	8	11
69.5	13	24
89.5	6	30

ข้อมูลไม่ได้เป็นอันตรภาคชั้น $\rightarrow$ ใช้ $N+1$ เป็นตัวหาร

จะได้ Med อยู่ตัวที่ $\frac{30+1}{2} = 15.5 \rightarrow$ อยู่ชั้นที่ 3 (F_i เริ่มเกิน 15.5 ในชั้นที่ 3)

จะได้ Med $= 69.5 = b$

ดังนั้น $a - b = -\frac{16}{3} + 69.5 - 69.5 = -\frac{16}{3}$

25. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

จงหาจำนวนฟังก์ชัน $f : A \rightarrow A$ ทั้งหมดซึ่ง $f(f(f(n))) = n$ ทุก $n \in A$

ตอบ 351

ให้ $a \in A$: กรณี $f(a) = a$ จะทำให้ $f(f(f(a))) = f(f(\ a\ )) = f(\ \ a\ \ ) = \ \ a$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

กรณี $f(a) \neq a$ สมมติให้ $f(a) = b$ เมื่อ $b \neq a$

จะเห็นว่า $f(b) = a$ ไม่ได้

ไม่งั้น $f(f(f(a))) = f(f(\ b\ )) = f(\ \ a\ \ ) = \ \ b$ ×

และ $f(b) = b$ ไม่ได้

ไม่งั้น $f(f(f(a))) = f(f(\ b\ )) = f(\ \ b\ \ ) = \ \ b$ ×

นั่นคือ $f(b)$ จะย้อนไปซ้ำ a หรือ b ไม่ได้ $\rightarrow$ ให้ $f(b) = c$ เมื่อ $c \neq a$ และ $c \neq b$

a, b, c ครบ 3 ตัวแล้ว ดังนั้น $f(c)$ ต้องย้อนกลับไปเป็น aเพื่อให้ $f(f(f(a))) = f(f(\ b\ )) = f(\ \ c\ \ ) = \ \ a$

ดังนั้น การจับคู่ใน f จะมีได้แค่ 2 แบบ คือ "ไปที่ตัวเดิม" $f(a) = a$ กับ "กลุ่มหมุน 3 ตัว" $f(a) = b,\ f(b) = c,\ f(c) = a$

$\rightarrow$ จะแบ่งกรณีนับ f ตามกลุ่มพวกนี้

กรณีที่ f ไม่มี กลุ่มหมุน : แสดงว่า $f(a) = a$ ทุก $a \in A \rightarrow$ มี 1 แบบ

กรณีที่ f มีกลุ่มหมุน 1 กลุ่ม : ขั้นที่ 1 เลือก 3 ตัวที่จะใช้ในกลุ่มหมุนได้ $\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$ วิธี

ขั้นที่ 2 เรียง 3 ตัวในขั้นที่ 1 เป็นวงกลม ได้ $(3-1)! = 2$ วิธี

(ที่เหลืออีก 4 ตัว ต้องโยงไปที่ตัวเดิม เลือกไม่ได้)

รวมจำนวนแบบ $= 35 \times 2 = 70$ แบบ

กรณีที่ f มีกลุ่มหมุน 2 กลุ่ม : ขั้นที่ 1 เลือกตัวที่จะใช้ใน 2 กลุ่มหมุน จะได้ $\frac{\binom{7}{3}\binom{4}{3}}{2!} = \frac{\frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2}}{2!} = 70$ วิธี

ขั้นที่ 2 เรียงกลุ่มหมุนทั้ง 2 กลุ่มเป็นวงกลม ได้ $(3-1)!\,(3-1)! = 4$ วิธี

(ที่เหลืออีก 1 ตัว ต้องโยงไปที่ตัวเดิม เลือกไม่ได้)

รวมจำนวนแบบ $= 70 \times 4 = 280$ แบบ

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนฟังก์ชัน f คือ $1 + 70 + 280 = 351$ ฟังก์ชัน

26. ให้ p, q และ r เป็นพจน์ที่เรียงกันในลำดับเลขคณิตของจำนวนเต็ม โดยที่ p เป็นจำนวนเฉพาะ และ $p^2 + qr = pr + 46$ จงหาค่าของ pqr

ตอบ 28

ให้ผลต่างร่วม $= d$ ดังนั้น $q = p + d$ และ $r = p + 2d$

แทนใน $p^2 + qr = pr + 46$

$p^2 + (p+d)(p+2d) = p(p+2d) + 46$

$p^2 + p^2 + 3dp + 2d^2 = p^2 + 2dp + 46$

$p^2 + dp + 2d^2 - 46 = 0$

จัดเป็นสมการกำลังสองที่มี p เป็นตัวแปร แล้วใช้สูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$p = \frac{-d \pm \sqrt{d^2-4(2d^2-46)}}{2} = \frac{-d \pm \sqrt{184-7d^2}}{2}$ ...$(*)$

พิจารณา $\sqrt{184-7d^2}$ → เนื่องจาก ในรูทต้อง ≥ 0 และ $d^2 \geq 0$ ดังนั้น $0 \leq 184 - 7d^2 \leq 184$

เนื่องจาก p, q, r เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น d ต้องเป็นจำนวนเต็ม ซึ่งจะทำให้ $184 - 7d^2$ ต้องถอดรูทลงตัว

ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ $184 - 7d^2$ จะมีแค่ 0^2 , 1^2 , 2^2 , 3^2 , ... , 13^2 ($14^2 = 196$ จะเกิน 184)

และเนื่องจาก 184 หารด้วย 7 เหลือเศษ 2 และ $7d^2$ หารด้วย 7 ลงตัว ดังนั้น $184 - 7d^2$ หารด้วย 7 เหลือเศษ 2

และใน $0^2, 1^2, 2^2, \dots, 6^2$ จะมีแค่ 3^2 กับ 4^2 เท่านั้น ที่หารด้วย 7 เหลือเศษ 2

ดังนั้น $184 - 7d^2$ ต้องอยู่ในรูป $(7k+3)^2$ หรือ $(7k+4)^2$ เท่านั้น

ดังนั้น ค่าที่เป็นไปได้ของ $184 - 7d^2$ จะเหลือแค่ 3^2 , 4^2 , 10^2 , 11^2

$184 - 7d^2 = 3^2$	$184 - 7d^2 = 4^2$	$184 - 7d^2 = 10^2$	$184 - 7d^2 = 11^2$
$175 = 7d^2$	$168 = 7d^2$	$84 = 7d^2$	$63 = 7d^2$
$25 = d^2$	$24 = d^2$	$12 = d^2$	$9 = d^2$
$\pm 5 = d$	ไม่ลงตัว	ไม่ลงตัว	$\pm 3 = d$

แทนใน $(*)$ $p = \frac{-(\pm 5) \pm 3}{2}$

ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

แทนใน $(*)$ $p = \frac{-(\pm 3) \pm 11}{2}$

จะเห็นว่า $\frac{-(-3)+11}{2} = 7$ เป็นจำนวนเฉพาะ

ดังนั้น จะได้ $d = -3$, $p = 7$

จะได้ $pqr = (7)(4)(1) = 28$

27. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + 5\lceil x \rceil + 4 = 0$ เมื่อ $\lceil x \rceil$ คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

ตอบ -1 , $-\sqrt{6}$, $-\sqrt{11}$, -4

จะแบ่งกรณีให้สามารถหาค่าของ $\lceil x \rceil$ ได้

กรณี $x \in (-1, \infty)$: จะได้ $\lceil x \rceil \geq 0$ ซึ่งจะเห็นว่า $x^2 + 5\lceil x \rceil + 4 \geq x^2 + 4 \geq 4$ ไม่มีทาง $= 0$

ดังนั้น กรณีนี้ สมการจะไม่มีคำตอบ

กรณี $x \in (-2, -1]$: จะได้ $\lceil x \rceil = -1$ จะได้สมการกลายเป็น $x^2 + 5(-1) + 4 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

ดังนั้น ในช่วง $(-2, -1]$ จะได้คำตอบคือ -1

กรณี $x \in (-3,-2]$: จะได้ $[x] = -2$ จะได้สมการกลายเป็น $x^2 + 5(-2) + 4 = 0$

$x^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{6}$

ดังนั้น ในช่วง $(-3,-2]$ จะได้คำตอบคือ $-\sqrt{6}$ $(\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9})$

กรณี $x \in (-4,-3]$: จะได้ $[x] = -3$ จะได้สมการกลายเป็น $x^2 + 5(-3) + 4 = 0$

$x^2 = 11$

$x = \pm\sqrt{11}$

ดังนั้น ในช่วง $(-4,-3]$ จะได้คำตอบคือ $-\sqrt{11}$ $(\sqrt{9} < \sqrt{11} < \sqrt{16})$

กรณี $x \in (-5,-4]$: จะได้ $[x] = -4$ จะได้สมการกลายเป็น $x^2 + 5(-4) + 4 = 0$

$x^2 = 16$

$x = \pm 4$

ดังนั้น ในช่วง $(-5,-4]$ จะได้คำตอบคือ -4

กรณี $x \in (-\infty,-5]$: จาก $x \leq -5$

$x^2 \geq -5x$) คูณ x ตลอด (x เป็นลบ ต้องกลับ น้อยกว่า เป็น มากกว่า)

$x^2 + 5x \geq 0$ ...(∗)

และจาก $\lceil x \rceil \geq x$ ($\lceil x \rceil$ คือจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่ $\geq x$)

จะได้ $x^2 + 5\lceil x \rceil + 4 \geq x^2 + 5x + 4 \geq 4$ (จาก (∗)) ไม่มีทาง $= 0$

ดังนั้น กรณีนี้ สมการจะไม่มีคำตอบ

รวมทุกกรณี จะได้คำตอบคือ $-1, -\sqrt{6}, -\sqrt{11}, -4$

28. จงหาค่าของอนุกรมอนันต์ที่ลู่เข้าต่อไปนี้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{2^n}$

เมื่อ $\{F_n\}$ เป็นลำดับฟิโบนักชีนิยามโดย $F_1 = F_2 = 1$ และ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $n \geq 3$

<u>ตอบ</u> 2

$\frac{F_1}{2^1} + \frac{F_2}{2^2} + \frac{F_3}{2^3} + \frac{F_4}{2^4} + \frac{F_5}{2^5} + \ldots = x$ ...(1)

$F_1 + \frac{F_2}{2^1} + \frac{F_3}{2^2} + \frac{F_4}{2^3} + \frac{F_5}{2^4} + \ldots = 2x$ ...(2)) คูณ 2 ตลอด ให้ตำแหน่งเลื่อน

(2) − (1) : $F_1 + \frac{F_2 - F_1}{2^1} + \frac{F_3 - F_2}{2^2} + \frac{F_4 - F_3}{2^3} + \frac{F_5 - F_4}{2^3} + \ldots = x$

$F_1 + 0 + \frac{F_1}{2^2} + \frac{F_2}{2^3} + \frac{F_3}{2^4} + \ldots = x$

$F_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{F_1}{2^2} + \frac{F_2}{2^3} + \frac{F_3}{2^4} + \ldots\right) = x$

$1 + \frac{1}{2}(x) = x$

$2 + x = 2x$) คูณ 2 ตลอด

$2 = x$

29. คณะกรรมการชุดหนึ่งประกอบไปด้วยกรรมการ 20 คน ซึ่งทุกคนต้องโหวตจัดอันดับนักเตะสามคน ได้แก่ เมสซี่ โรนัลโด้ และ ชัวเรส โดยที่กรรมการแต่ละคนจะเลือกจัดอันดับได้คนละแบบเท่านั้น ผลปรากฏว่า กรรมการ 11 คนให้เมสซี่เหนือกว่าโรนัลโด้ กรรมการ 12 คนจัดให้ชัวเรสเหนือกว่าเมสซี่ และกรรมการอย่างน้อย 14 คนให้โรนัลโด้เหนือกว่าชัวเรส ถ้าแต่ละการจัดอันดับที่เป็นไปได้ของนักเตะทั้งสามคน (ซึ่งมีอยู่ 6 แบบ) ถูกเลือกโดยกรรมการอย่างน้อยหนึ่งคน จงหาว่ามีกรรมการจำนวนกี่คนที่โหวตให้โรนัลโด้ได้อยู่ในอันดับที่ 1

ตอบ 8

อันดับ	จำนวนกรรมการ
M , R , S	a
M , S , R	b
R , M , S	c
R , S , M	d
S , M , R	e
S , R , M	f

ให้การจัดอันดับ เมสซี่ (M) โรนัลโด้ (R) และ ชัวเรส (S) ถูกเลือกดังตาราง

มีกรรมการ 20 คน $\rightarrow a+b+c+d+e+f = 20$ ...(1)

11 คน ให้ M เหนือ R $\rightarrow a+b+e = 11$ ...(2)

12 คน ให้ S เหนือ M $\rightarrow d+e+f = 12$ ...(3)

อย่างน้อย 14 คน ให้ R เหนือ S $\rightarrow a+c+d \geq 14$ ...(4)

เอา (4) ไปแทนใน (1) : $20 = a+b+c+d+e+f$

$20 = (a+c+d)+b+e+f$

$20 \geq 14 + b+e+f$

$6 \geq b+e+f$

$6 \geq b+(c+3)+f$

$3 \geq b+c+f$

แต่ทุกแบบ ถูกเลือกอย่างน้อย 1 คน ดังนั้น $b \geq 1$, $c \geq 1$, $f \geq 1$

(2) + (3) − (1) : $e-c = 3$

$e = c+3$ ...(5)

เป็นไปได้แบบเดียว คือ $b=c=f=1$

แทนใน (5) : $e = 1+3 = 4$

แทนใน (3) : $d+4+1 = 12$

$d = 7$

ดังนั้น คนที่โหวต R เป็นที่ 1 จะมี $c+d = 1+7 = 8$ คน

30. จงหาสมการของพาราโบลาคว่ำที่ผ่านจุดกำเนิดและจุด $(2,4)$ ที่ทำให้พื้นที่ใต้กราฟพาราโบลารูปนี้เมื่อเทียบกับแกน X มีค่าน้อยที่สุด

ตอบ $y = -2x^2+6x$

ให้สมการพาราโบลาคือ $y = ax^2+bx+c$ $\rightarrow$ กราฟคว่ำ จะได้ $a<0$

$\rightarrow$ ผ่านจุด $(0,0)$ จะได้ $0 = a(0^2)+b(0)+c$

$0 = c$

เหลือ $y = ax^2+bx$

$\rightarrow$ ผ่านจุด $(2,4)$ จะได้ $4 = a(2^2)+b(2)$

$4 = 4a+2b$

$2 = 2a+b$

$2-2a = b$ ...(∗)

a เป็นลบ ดังนั้น b จะเป็นบวก

หาพื้นที่ใต้กราฟเทียบกับแกน X ต้องอินทิเกรตระหว่าง จุดตัดแกน X

แทน $y=0$ $\rightarrow$ $0 = ax^2+bx$

$0 = x(ax+b)$

$x = 0 , -\frac{b}{a}$

จะได้พื้นที่ใต้กราฟ $= \int_0^{-\frac{b}{a}} ax^2+bx\ dx = \left.\frac{ax^3}{3}+\frac{bx^2}{2}\right|_0^{-\frac{b}{a}}$

a เป็นลบ b เป็นบวก

$-\frac{b}{a}$ จะเป็นบวก

$= \frac{a}{3}\left(-\frac{b}{a}\right)^3+\frac{b}{2}\left(-\frac{b}{a}\right)^2-0 = -\frac{b^3}{3a^2}+\frac{b^3}{2a^2} = \frac{b^3}{6a^2}$

แทน $b=2-2a$ จาก $(*)$ จะได้พื้นที่ $=\frac{(2-2a)^3}{6a^2}=\frac{2^3(1-a)^3}{6a^2}=\frac{4(1-a)^3}{3a^2}$

โจทย์ถามพื้นที่น้อยสุด ต้องดิฟแล้วดูจุดที่อนุพันธ์เปลี่ยนจาก ลบ เป็น บวก

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\text{บน}}{\text{ล่าง}}\right)=\frac{\left(\text{ล่าง}\cdot\frac{d}{dx}\text{บน}\right)-\left(\text{บน}\cdot\frac{d}{dx}\text{ล่าง}\right)}{\text{ล่าง}^2}$$

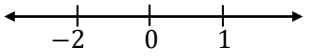
ดิฟพื้นที่ $=\frac{3a^2 12(1-a)^2(-1)-4(1-a)^3 6a}{9a^4}$

$=\frac{-12a(1-a)^2(3a+2(1-a))}{9a^4}$

$=-\frac{4(1-a)^2(a+2)}{3a^3}$

วงเล็บกำลังคู่ → ไม่ต้องสลับ

มีลบอยู่หน้าสุด → เริ่มที่ ลบ



จะเห็นว่าอนุพันธ์เปลี่ยนจากลบเป็นบวก เมื่อ $a=-2\ \rightarrow$ แทนใน $(*)$ ได้ $b=2-2(-2)=6$

จะได้สมการพาราโบลาคือ $y=-2x^2+6x$

31. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากกว่า 1 ให้ I_n แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด $n\times n$ และ J_n แทนเมทริกซ์ขนาด $n\times n$ ที่มีสมาชิกทุกตัวเป็น 1 จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีจำนวนเฉพาะ p สอดคล้องกับสมการ $\det(pI_n+kJ_n)=672$

ตอบ 8

หมายเหตุ : ข้อนี้ โจทย์ควรระบุตัวบ่งปริมาณให้ n ด้วย โจทย์ควรจะถามค่า k ที่น้อยที่สุด "สำหรับ n บางตัว" สำหรับ p บางตัว ที่สอดคล้องกับสมการ $\det(pI_n+kJ_n)=672$

$$pI_n+kJ_n=p\begin{bmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\end{bmatrix}+k\begin{bmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\1&1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&1&\cdots&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p+k&k&k&\cdots&k\\k&p+k&k&\cdots&k\\k&k&p+k&\cdots&k\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\k&k&k&\cdots&p+k\end{bmatrix}$$

จะเปลี่ยนรูปให้มี 0 เยอะๆ : $|pI_n+kJ_n|$ $\overset{\text{ทุกแถว}-R_1}{\sim}$ $\begin{vmatrix}p+k&k&k&k&\cdots&k\\-p&p&0&0&\cdots&0\\-p&0&p&0&\cdots&0\\-p&0&0&p&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\-p&0&0&0&\cdots&p\end{vmatrix}$

$\overset{C_1+\text{ทุกแถว}}{\sim}$ $\begin{vmatrix}p+nk&k&k&k&\cdots&k\\0&p&0&0&\cdots&0\\0&0&p&0&\cdots&0\\0&0&0&p&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&0&\cdots&p\end{vmatrix}$

ได้เส้นทแยงมุมหลักเป็น 0 หมด $\rightarrow \det=$ ผลคูณเส้นทแยงมุมหลัก $=(p+nk)\,p^{n-1}$

ดังนั้น ต้องหา k ที่น้อยที่สุด ที่ทำให้ $(p+nk)\,p^{n-1}=672\ \rightarrow$ ต้องให้ p กับ n มากๆ ถึงจะได้ k น้อยๆ

แยกตัวประกอบ 672 จะได้ $2^5\cdot 3\cdot 7$ ดังนั้น p เป็น $2\,,3\,,7$ ได้เท่านั้น

กรณี $p=2$ จะได้ $(2+nk)2^{n-1}=2^5\cdot 3\cdot 7\ \rightarrow n$ มากสุดคือ 6

กรณี $n=6$ จะได้ $(2+6k)2^5=2^5\cdot 3\cdot 7\ \rightarrow\ 2+6k=21\ \rightarrow\ k=\frac{19}{6}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณี $n=5$ จะได้ $(2+5k)2^4=2^5\cdot 3\cdot 7\ \rightarrow\ 2+5k=42\ \rightarrow\ k=8$

กรณี n น้อยกว่านี้ ไม่ต้องทำแล้ว เพราะไม่มีทางได้ $k<8$ แล้ว (n ยิ่งน้อย k จะยิ่งมาก)

กรณี $p=7$ จะได้ $(7+nk)7^{n-1}=2^5\cdot 3\cdot 7 \rightarrow n$ มากสุดแค่ 2

กรณี $n=2$ จะได้ $(7+2k)7^1=2^5\cdot 3\cdot 7 \rightarrow 7+2k=96 \rightarrow k=\frac{89}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็ม

กรณี n น้อยกว่านี้ ไม่ต้องทำแล้ว เพราะไม่มีทางได้ $k<\frac{89}{2} \rightarrow$ ไม่มีทางได้ $k<8$

กรณี $p=3$ จะได้ $(3+nk)3^{n-1}=2^5\cdot 3\cdot 7 \rightarrow n$ มากสุดแค่ 2

ไม่ต้องทำแล้ว เพราะ n มากสุดแค่ 2 เหมือนกรณี $p=7$ (p ยิ่งน้อย k จะยิ่งมาก)

จะได้ k น้อยสุด คือ 8

32. สุ่มเลือกจำนวนเต็มบวกจากเซต $\{1,2,\dots,50\}$ มาหนึ่งจำนวน จงหาความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $N-2$ หาร $N^5+N^4+N^3+N^2+N+2$ ลงตัว

ตอบ $\frac{7}{50}$

จากทฤษฎีเศษ $N-2$ หาร $N^5+N^4+N^3+N^2+N+2$ เหลือเศษ $=2^5+2^4+2^3+2^2+2+2$

$=32+16+8+4+2+2=64$

ดังนั้น จะหารลงตัว เมื่อ $N-2$ หาร 64 ลงตัว ดังนี้

$N-2=\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16, \pm 32, \pm 64$

$N=\pm 1+2, \pm 2+2, \pm 4+2, \pm 8+2, \pm 16+2, \pm 32+2, \pm 64+2$

$=1, 3, 4, 6, 10, 18, 34$ ← เลือกเฉพาะที่อยู่ใน $\{1,2,3,\dots,50\}$

$\rightarrow$ มี 7 ตัว ดังนั้น ความน่าจะเป็น $=\frac{7}{50}$

33. กำหนดให้ $P_1=2559$ และ $P_n=1+(P_1P_2\cdots P_{n-1})$ เมื่อ $n=2,3,4,\dots$ จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}$

ตอบ $\frac{2}{2559}$

จัดรูป $\frac{1}{P_n}$ ให้เป็นผลลบ เพื่อทำเทเลสโคปิค $P_n = 1 + (P_1P_2\cdots P_{n-1})$

$\frac{P_n}{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}+\frac{P_1P_2\cdots P_{n-1}}{P_1P_2\cdots P_n}$ ↙ $\div P_1P_2\cdots P_n$ ตลอด

$\frac{1}{P_1P_2\cdots P_{n-1}}=\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}+\frac{1}{P_n}$

$\frac{1}{P_1P_2\cdots P_{n-1}}-\frac{1}{P_1P_2\cdots P_n}=\frac{1}{P_n}$

ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{P_n}=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+\frac{1}{P_4}+\dots$

$=\frac{1}{P_1}+\left(\frac{1}{P_1}-\frac{1}{P_1P_2}\right)+\left(\frac{1}{P_1P_2}-\frac{1}{P_1P_2P_3}\right)+\left(\frac{1}{P_1P_2P_3}-\frac{1}{P_1P_2P_3P_4}\right)+\dots$

$=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_1}-\cancel{\frac{1}{P_1P_2}+\frac{1}{P_1P_2}}-\cancel{\frac{1}{P_1P_2P_3}+\frac{1}{P_1P_2P_3}}-\cancel{\frac{1}{P_1P_2P_3P_4}+\dots}$

เหลือผลบวก $=\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_1}=\frac{2}{P1}=\frac{2}{2559}$

34. จงหาพหุนาม $p(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $p(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3})=0$ และ

(ii) $p(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 6 โดยที่สัมประสิทธิ์ของ x^6 เท่ากับ 1

ตอบ $x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23$

ให้ $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ จะได้

$$\begin{aligned} x-\sqrt{3} &= \sqrt[3]{2} \\ x^3-3\sqrt{3}x^2+9x-3\sqrt{3} &= 2 \\ x^3+9x-2 &= 3\sqrt{3}x^2+3\sqrt{3} \\ x^3+9x-2 &= 3\sqrt{3}(x^2+1) \\ x^6+81x^2+4+18x^4-4x^3-36x &= 27(x^4+2x^2+1) \\ x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23 &= 0 \end{aligned}$$

ยกกำลัง 3 ทั้งสองข้าง

$(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

ยกกำลัง 2 ทั้งสองข้าง

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

เนื่องจากเริ่มต้นด้วย $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$

ดังนั้น $\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}$ จะสอดคล้องกับสมการ $x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$ ด้วย

จะได้ $p(x)=x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23$

35. กำหนดให้ $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ แทนเซตของเมทริกซ์ขนาด 2×2 ทั้งหมดที่มีสมาชิกในแต่ละตำแหน่งเป็นจำนวนจริง

จงหาเมทริกซ์ $C\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ ทั้งหมดที่ทำให้ สำหรับทุกๆเมทริกซ์ $A,B\in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ใดๆ

$$(AB-BA)^2C = C(AB-BA)^2$$

ตอบ อะไรก็ได้

สมมติให้ $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ และ $B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

จะได้ $$\begin{aligned} AB-BA &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ea+fc & eb+fd \\ ga+hc & gb+hd \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} bg-fc & af+bh-eb-fd \\ ce+dg-ga-hc & cf-gb \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ให้สมาชิกซ้ายบน $bg-fc=x$ จะได้สมาชิกขวาล่าง $cf-gb=-x$ และให้สมาชิกสองตัวที่เหลือเป็น y กับ z

ดังนั้น $(AB-BA)^2 = \begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & y \\ z & -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+yz & 0 \\ 0 & yx+x^2 \end{bmatrix} = (x^2+yx)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

แทนใน $(AB-BA)^2\,C = C(AB-BA)^2$

$$(x^2+yx)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}C = C(x^2+yx)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ...(*)$$

เนื่องจาก x^2+yx เป็นตัวเลข จึงสลับที่การคูณได้ และ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ คือเมทริกซ์เอกลักษณ์ คูณอะไรก็ได้เท่าเดิม

ดังนั้น $(*)$ จะเป็นจริงเสมอ ไม่ว่า C เป็นเมทริกซ์ 2×2 อะไรก็ตาม

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Wasanont TeacherPomme Pongsawat สำหรับข้อสอบครับ

ขอบคุณ คุณ บุญช่วย ฤทธิเทพ

และ คุณ สารศิลป์ ทับทิมทอง ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ