

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 58)

วันอาทิตย์ที่ 22 พฤศจิกายน 2558 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 15 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน

1. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และสำหรับ $X, Y \in \mathcal{U}$ นิยาม $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$

กำหนดให้ $A, B, C \in \mathcal{U}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $A \Delta B = B \Delta A$

ข. $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

ค. $(A \Delta B) \cup C = (A \cup C) \Delta (B \cup C)$

ง. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

2. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นประโยคเปิด ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

ก. $\forall x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [\forall xP(x) \wedge \forall xQ(x)]$

ข. $\forall x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow [\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)]$

ค. $\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow [\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)]$

ง. $\exists x[P(x) \vee Q(x)] \rightarrow [\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)]$

3. ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ในข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

ก. $f(x) = |x - 1| + |x|$

ข. $f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}$

ค. $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$

ง. $f(x) = \frac{2|x|}{|x|+1}$

4. กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^4 - 4x^2}$ ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. $f = g$ โดยที่ $g(x) = |x|\sqrt{x^2 - 4}$

ข. $(-\infty, -2]$ เป็นสับเซตของโดเมนของ f

ค. $[2, \infty)$ เป็นสับเซตของโดเมนของ f

ง. f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

5. ให้ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย โดยที่ $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ไม่ขนานกัน และ $(\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$
มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{2\pi}{3}$

ข. $\frac{\pi}{3}$

ค. $\frac{\pi}{2}$

ง. π

6. ถ้า $\log(\log a) + \log(\log b) = \log(\log c)$ โดยที่ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่มากกว่า 1 แล้วค่าของ c เท่ากับ
ข้อใดต่อไปนี้

ก. $a + b$

ข. ab

ค. $(\log a)^b$

ง. $b^{\log a}$

7. ค่า x ในข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบของสมการ $4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$
 ก. 238 ข. 239 ค. 240 ง. 241

8. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $z + w^{-1} = \sqrt{2} + i$ และ $z^{-1} + w = 1 + \sqrt{2}i$
 ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนเต็มบวก
 ก. $zw + (zw)^{-1}$ ข. $(zw)^2 + (zw)^{-2}$
 ค. $(zw)^3 + (zw)^{-3}$ ง. $(zw)^4 + (zw)^{-4}$

9. กำหนดให้ a, b, x, y และ z เป็นจำนวนเต็มซึ่งไม่เท่ากับศูนย์และสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{cases} x + ay + z &= 3 \\ 2x + y + bz &= 1 \\ 3x + y + 3z &= 2 \end{cases}$$

ค่าของ $2x - 3y + 2z + 3ab$ ตรงกับข้อใด

- ก. 5 ข. -2 ค. 0 ง. -7

10. ช่างภาพต้องการจัดคนในครอบครัวหนึ่งซึ่งมี 8 คนที่มีความสูงแตกต่างกันหมด เข้าแถวหน้ากระดานสองแถว โดยที่แต่ละแถวให้ยืนตามลำดับความสูงจากซ้ายไปขวา และคนที่ยืนอยู่แถวหน้าต้องสูงน้อยกว่าคนที่อยู่แถวหลังในตำแหน่งเดียวกันเพื่อจะได้ไม่บังกัน วิธีที่ช่างภาพสามารถจัดคนทั้งแปดเข้าแถวถ่ายรูปได้แตกต่างกันทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 14

ข. 16

ค. 18

ง. 20

11. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $\sqrt{2}z + |z + w| = 1 + i$ และ $\sqrt{2}w + |z - w| = 1 - i$ แล้ว $z^{2015} - w^{2015}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ข. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ ค. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ ง. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

12. กำหนดให้ θ เป็นจำนวนจริง และให้ $P = \sin^2 \theta + \cos \theta$, $Q = \cos^2 \theta + \sin \theta$, $R = \tan \theta$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า P และ Q เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว R เป็นจำนวนตรรกยะ(2) ถ้า P และ R เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว Q เป็นจำนวนตรรกยะ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

- [illegible]

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

16. ให้ p เป็นจำนวนเฉพาะที่น้อยที่สุดที่ทำให้มีจำนวนเต็มบวก n สอดคล้องกับสมการ

$$1 + 2 + \cdots + n = 1^2 + 2^2 + \cdots + p^2$$

จงหาค่าของ $1^3 + 2^3 + \cdots + p^3$

17. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \begin{cases} x - [x] & \text{เมื่อ } x - [x] \leq \frac{1}{2} \\ 1 - (x - [x]) & \text{เมื่อ } x - [x] > \frac{1}{2} \end{cases}$

จงหาค่าของ $\int_{-2015}^{2015} f(x + 2558) dx$

18. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $f(x) = ax + b$ ทุก $x \in \mathbb{R}$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม

ถ้า $f(f(0)) = 1$ และ $f(f(f(1))) = -11$ แล้ว จงหาค่าของ

$$f(f(f(f(1)))) + f(f(f(f(2)))) + f(f(f(f(3)))) + \dots + f(f(f(f(60))))$$

19. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} = 6$

20. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ มีด้าน AB ยาว 1 หน่วย และด้าน BC ยาว 3 หน่วย ถ้ามีจุด O ภายในรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ และ $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ แล้ว $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

21. กำหนดให้ $A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}) \right\}$
จงหาพื้นที่ของเซต A

22. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนนับทั้งหมดที่มีผลบวกของเลขโดดเป็น 5 จากนั้นเรียงลำดับของสมาชิกทั้งหมดของ A จากน้อยไปมาก (นั่นคือเขียน $A = \{5, 14, 23, 32, \dots\}$) จงหาสมาชิกลำดับที่ 130 ของ A

23. จงหาสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $4x + 3y - 2 = 0$ และวงกลมวงนี้สัมผัสทั้งเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และ $7x - y + 4 = 0$

24. กำหนดให้ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = |2x + 4| + 3|x - 2| + |x - 5| + \left|\frac{x-7}{2}\right|$, $x \in \mathbb{R}$
จงหาค่าต่ำสุดของ f

25. จงหาจำนวนของเมทริกซ์ไม่เอกฐานขนาด 3×3 ทั้งหมดซึ่งมี 1 เป็นสมาชิกจำนวนสี่ตัวและสมาชิกที่เหลือเป็น 0 ทั้งหมด และมีผลรวมของสมาชิกในแนวทแยงมุมหลักไม่เกิน 1

ตอนที่ 3 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

26. จงหาค่าของ $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan \left(\frac{x+1}{x+2} \right) - \arctan \left(\frac{x}{x+2} \right) \right)$
 (ข้อเสนอแนะ : ถ้า $f(x) = \arctan x$ แล้ว $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

27. สำหรับจำนวนเต็มบวก n กำหนดให้ $S_n = \sum_{r=1}^n \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$
 จงหาจำนวนนับ k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $|S_k - 0.25| < 0.0001$

28. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน 2 จำนวน โดยที่ $z_1 z_2 \neq 0$ ถ้า $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ และ $|z_1 - z_2| = 1$ แล้ว $|z_1 + 2z_2|$ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

29. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{1}{mn} + \frac{n}{m} = \frac{2}{m-n}$
จงหาค่าสูงสุดของ $m + n$

30. กำหนดให้ $f(x) = \tan(35^\circ + x^\circ) \tan(25^\circ - x^\circ)$
ถ้าค่าที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่ำที่สุดของ f เกิดขึ้นที่ $x = \alpha$ โดย $0 < \alpha < 90$ แล้ว
จงหาค่าของ $\tan(2015^\circ + \alpha^\circ)$

31. สุ่มเขียนเลข 0 หรือ 1 ในแต่ละช่องของตารางขนาด 4×4 จงหาความน่าจะเป็นที่ผลรวมของตัวเลขในแต่ละแถวและแต่ละหลักเป็นจำนวนคู่

32. จำนวนของเมทริกซ์ M ทั้งหมดที่อยู่ในรูป $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้เมทริกซ์ $M^9 + M^7 + M^5 + M^3 + M$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ มีจำนวนเท่าใด

33. กำหนดให้ $\{x_1, x_2, \dots, x_{100}\}$ เป็นข้อมูลของประชากรทั้งหมดซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ 11 เลือกตัวอย่างจากข้อมูลชุดนี้ 15 ตัว จะเห็นว่าสามารถเลือกตัวอย่างมาได้ทั้งหมด $\binom{100}{15}$ ตัวอย่าง (เช่น $\{x_1, x_2, \dots, x_{15}\}, \{x_2, x_3, \dots, x_{16}\}, \{x_{15}, x_{16}, \dots, x_{26}, x_{50}, x_{88}, x_{100}\}, \dots$)
สำหรับแต่ละตัวอย่าง $\{y_1, y_2, \dots, y_{15}\}$ ที่เลือกมานี้ หาความแปรปรวนของตัวอย่างโดยใช้สูตร

$$\text{ความแปรปรวนของตัวอย่าง} = \sum_{k=1}^{15} \frac{(y_k - \bar{y})^2}{14} \quad \text{โดยที่ } \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{15}}{15}$$

ถ้า $z_1, z_2, \dots, z_{\binom{100}{15}}$ เป็นความแปรปรวนของตัวอย่าง $\binom{100}{15}$ ตัวอย่างเหล่านี้
จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $z_1, z_2, \dots, z_{\binom{100}{15}}$

34. กำหนดให้ $\int_0^1 \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{a_{n+1}}^{a_n} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx \right)$ โดยที่ $0 < a_{n+1} < a_n < a_1 = 1$ ทุกจำนวนนับ n
 และ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ (สามารถพิสูจน์ได้ว่าอนุกรมอนันต์ข้างต้นไม่ขึ้นกับลำดับ $(a_n)_{n=1}^{\infty}$)
 ถ้า $A = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ และ $B = \int_0^1 \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx$ แล้ว จงหาค่าของ $12A - B$

35. กำหนดให้ $A = \{ n \in \mathbb{N} \mid n < 3003 \text{ และ } \text{ห.ร.ม.}(n, 3003) = 1 \}$

จงหาค่าของ $\sum_{n \in A} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{3003} \right)$

เฉลย

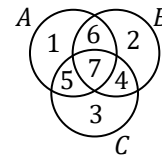
- | | | | |
|------|------------|-----------------------------|---------------------|
| 1. ค | 10. ก | 19. $1, -2 - 2\log_3 2$ | 27. 70 |
| 2. ข | 11. ข | 20. 8 | 28. 7 |
| 3. ค | 12. ค | 21. $2 + \frac{\pi}{2}$ | 29. 12 |
| 4. ก | 13. ก | 22. 100031 | 30. $-\sqrt{3}$ |
| 5. ก | 14. ข | 23. $(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$ | 31. $\frac{1}{128}$ |
| 6. ง | 15. ข | $(x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$ | 32. 9 |
| 7. ข | 16. 225 | 24. 13.5 | 33. $\frac{100}{9}$ |
| 8. ค | 17. 1007.5 | 25. 24 | 34. $\frac{37}{4}$ |
| 9. ง | 18. 29580 | 26. $\frac{1}{2}$ | 35. 719.5 |

แนวคิด

1. ค

$$\begin{aligned} \text{ก.} \quad A \Delta B &= B \Delta A \\ (A - B) \cup (B - A) &= (B - A) \cup (A - B) \quad \checkmark \end{aligned}$$

ข้อ ข. ค. ง. จะใช้เทคนิค “กำหนดสมาชิกตัวแทน” ให้แต่ละส่วน แล้วหาผลลัพธ์
ให้ A, B, C มีสมาชิكدังรูป



$$\begin{aligned} \text{ข.} \quad A \Delta (B \Delta C) &= (A \Delta B) \Delta C \\ \{1, 5, 6, 7\} \Delta \{2, 3, 5, 6\} &= \{1, 2, 4, 5\} \Delta \{3, 4, 5, 7\} \\ \{1, 7, 2, 3\} &= \{1, 2, 3, 7\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ค.} \quad (A \Delta B) \cup C &= (A \cup C) \Delta (B \cup C) \\ \{1, 2, 4, 5\} \cup \{3, 4, 5, 7\} &= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \Delta \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} \\ \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} &= \{1, 2\} \quad \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ง.} \quad (A \Delta B) \cap C &= (A \cap C) \Delta (B \cap C) \\ \{1, 2, 4, 5\} \cap \{3, 4, 5, 7\} &= \{5, 7\} \Delta \{4, 7\} \\ \{4, 5\} &= \{5, 4\} \quad \checkmark \end{aligned}$$

2. ข

ประโยคในรูป ถ้า $\rightarrow$ แล้ว ต้องสมมติให้ตัวหน้าเป็นจริง แล้วดูว่าตัวหลังต้องเป็นจริงตามมัย

ก. สมมติให้ $\forall x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

แสดงว่า x ทุกตัวต้องทำให้ทั้ง $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นจริงทั้งคู่

การที่ x ทุกตัวทำให้ $P(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\forall x P(x)$ เป็นจริง

การที่ x ทุกตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\forall x Q(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x)$ เป็นจริง $\rightarrow$ ก. ถูก

ข. สมมติให้ $\forall x[P(x) \vee Q(x)]$ เป็นจริง

แสดงว่า x ทุกตัวต้องทำให้ $P(x)$ หรือ $Q(x)$ เป็นจริงตัวใดตัวหนึ่ง หรือทั้งคู่

ซึ่ง x บางตัว อาจทำให้ $P(x)$ จริง แต่ทำให้ $Q(x)$ เท็จ และ x บางตัว อาจทำให้ $P(x)$ เท็จ แต่ทำให้ $Q(x)$ จริง

การที่มี x บางตัวทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จ จะสรุปได้ว่า $\forall xP(x)$ เป็นเท็จ

การที่มี x บางตัวทำให้ $Q(x)$ เป็นเท็จ จะสรุปได้ว่า $\forall xQ(x)$ เป็นเท็จ

ซึ่งในกรณีนี้ จะทำให้ $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$ เป็นเท็จ $\rightarrow$ ข. ผิด

(ตัวอย่างเช่น การที่ “ทุกคนเป็นผู้ชายหรือผู้หญิง” จะสรุปไม่ได้ว่า “ทุกคนเป็นผู้ชาย” หรือ “ทุกคนเป็นผู้หญิง”)

ค. สมมติให้ $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง

แสดงว่า มี x บางตัวที่ทำให้ทั้ง $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นจริงทั้งคู่

การที่ x ตัวนั้นทำให้ $P(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\exists xP(x)$ เป็นจริง

การที่ x ตัวนั้นทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\exists xQ(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $\exists xP(x) \wedge \exists xQ(x)$ เป็นจริง $\rightarrow$ ค. ถูก

ง. สมมติให้ $\exists x[P(x) \vee Q(x)]$ เป็นจริง

แสดงว่า มี x บางตัวที่ทำให้ $P(x)$ หรือ $Q(x)$ เป็นจริงตัวใดตัวหนึ่ง หรือทั้งคู่

- กรณีที่ x ตัวนั้น ทำให้ $P(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\exists xP(x)$ เป็นจริง

- กรณีที่ x ตัวนั้น ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริง จะสรุปได้ว่า $\exists xQ(x)$ เป็นจริง

ดังนั้น $\exists xP(x)$ หรือ $\exists xQ(x)$ จะเป็นจริงตัวใดตัวหนึ่ง หรือทั้งคู่

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $\exists xP(x) \vee \exists xQ(x)$ เป็นจริง $\rightarrow$ ง. ถูก

3. ค

ถ้า x อยู่ในค่าสัมบูรณ์ หรือ ถูกยกกำลังคู่ มักจะไม่ใช้หนึ่งต่อหนึ่ง (เพราะ ค่าบวก และ ค่าลบ จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน)

จะเห็นว่า ข้อ ข. และ ง. จะเข้าข่ายนี้ เช่น กรณี $x = 1$ กับ $x = -1$ จะได้ผลลัพธ์เท่ากัน $\rightarrow$ ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

$$\text{ข. } \frac{|1|}{\sqrt{1+1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{1+(-1)^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{ง. } \frac{2|1|}{|1|+1} = \frac{2|-1|}{|-1|+1} = 1$$

ส่วน ข้อ ก. จะลองแทนค่า x ดูเล่นๆก่อนก็ได้ ว่ามี x ที่ได้ผลลัพธ์เท่ากันหรือไม่

จะเห็นว่า $x = 0$ จะได้ผลลัพธ์เหมือน $x = 1 \rightarrow$ ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

$$\begin{array}{lcl} \text{ก. } f(0) & = & |0 - 1| + |0| \\ & = & 1 + 0 \\ & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} f(1) & = & |1 - 1| + |1| \\ & = & 0 + 1 \\ & = & 1 \end{array}$$

แต่ถ้าใครแทนเล่นๆแล้วไม่เจอ อาจสังเกตจากสมบัติของค่าสัมบูรณ์

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases} \quad \text{และ} \quad |x - 1| = \begin{cases} x - 1 & , x - 1 \geq 0 \\ -(x - 1) & , x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{จะเห็นว่า ถ้า } x \text{ เป็นบวก } |x| = x \\ \text{และ } x - 1 \text{ เป็นลบ } |x - 1| = -(x - 1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} |x| + |x - 1| = x + (-(x - 1)) \\ = x - x + 1 \\ = 1 \end{array}$$

เมื่อถอดค่าสัมบูรณ์แล้ว x จะตัดกัน ทำให้ค่า $f(x) = 1$ เสมอ

นั่นคือ ถ้า x เป็นบวก แต่ $x - 1$ เป็นลบ (คือ x อยู่ในช่วง 0 ถึง 1) จะได้ $f(x) = 1$ ซ้ำกันรัวๆ $\rightarrow$ ไม่ใช่หนึ่งต่อหนึ่ง

ส่วน ข้อ ค. มีแนวโน้มที่จะเป็นคำตอบของข้อนี้ (เพราะข้ออื่นผิดหมด)

จะพิสูจน์โดยสมมติให้กรณี $x = a$ กับ $x = b$ ได้ผลลัพธ์เท่ากัน แล้วพิสูจน์ให้ได้ว่า $a = b$

สมมติให้ $\frac{a}{1+|a|} = \frac{b}{1+|b|} \rightarrow$ พิจารณาเครื่องหมาย จะเห็นว่าตัวส่วนเป็นบวก เหมือนกันทั้งสองข้าง
 ดังนั้น ตัวเศษ คือ a กับ b ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน ไม่งั้นผลหารจะเท่ากันไม่ได้
 ↓ คูณไขว้
 $\frac{a}{a} = \frac{b + |a|b}{b}$
 ดังนั้น ค. เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง

a กับ b มีเครื่องหมายเหมือนกัน จะทำให้ $a|b| = |a|b$
 ทำให้ตัด $a|b|$ ทางซ้าย กับ $|a|b$ ทางขวา ได้

4. ก

ก. ข้อนี้ เหมือนโจทย์ต้องการกระจายรูป

แต่ การกระจายรูปแบบนี้ ทำได้ภายใต้เงื่อนไขว่า

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{x^4 - 4x^2} \\ &= \sqrt{x^2(x^2 - 4)} \\ &= \sqrt{x^2} \sqrt{x^2 - 4} \\ &= |x| \sqrt{x^2 - 4} \end{aligned}$$

ถ้า $x^2(x^2 - 4) \geq 0$ แล้ว $x^2 \geq 0$ และ $x^2 - 4 \geq 0$
 $x^2(x - 2)(x + 2) \geq 0$
 กำลังคู่ ไม่ต้องสลับ บวก ลบ

 $x \in (-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, \infty)$
 จะเห็นว่า ถ้า $x = 0$
 จะทำให้ $x^2 - 4$ ติดลบ
 ขัดแย้งกับเงื่อนไข

ดังนั้น $f(0)$ จะหาค่าได้ แต่ $g(0)$ จะหาค่าไม่ได้ $\rightarrow f \neq g \rightarrow$ ก. ผิด

ข. หา $D_f \rightarrow$ ต้องแก้สมการ $x^2(x^2 - 4) \geq 0$ ซึ่งแก้ไปแล้วในข้อ ก.

จะได้ $D_f = (-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, \infty) \rightarrow$ ดังนั้น $(-\infty, -2]$ เป็นสับเซตของ $D_f \rightarrow$ ข. ถูก

ค. จาก $D_f = (-\infty, -2] \cup \{0\} \cup [2, \infty) \rightarrow$ ดังนั้น $[2, \infty)$ เป็นสับเซตของ $D_f \rightarrow$ ข. ถูก

ง. เนื่องจาก x ถูกยกกำลังคู่ ดังนั้น f น่าจะไม่ใช่ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (เพราะ เลขลบ กับ เลขบวก ยกกำลังคู่ จะกลายเป็นบวกเท่ากัน) ซึ่งจะเห็นว่า $f(2) = \sqrt{2^4 - 4(2)^2} = \sqrt{16 - 16} = 0$ และ $f(-2) = \sqrt{(-2)^4 - 4(-2)^2} = \sqrt{16 - 16} = 0$

เนื่องจาก $f(2) = f(-2)$ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $\rightarrow$ ง. ถูก

5. ก

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} &= \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2} \\ (|\vec{a}||\vec{c}| \cos \theta_{ac})\vec{b} - (|\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta_{ab})\vec{c} &= \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2} \end{aligned}$$

จาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$ ให้มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{c} = \theta_{ac}$
 มุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b} = \theta_{ab}$
 $(1 \cdot 1 \cdot \cos \theta_{ac})\vec{b} - (1 \cdot 1 \cdot \cos \theta_{ab})\vec{c} = \frac{\vec{b}}{2} + \frac{\vec{c}}{2}$
 $(\cos \theta_{ac})\vec{b} - \frac{\vec{b}}{2} = (\cos \theta_{ab})\vec{c} + \frac{\vec{c}}{2}$
 $(\cos \theta_{ac} - \frac{1}{2})\vec{b} = (\cos \theta_{ab} + \frac{1}{2})\vec{c}$

มุมระหว่างเวกเตอร์ จะอยู่ในช่วง 0 ถึง π

เนื่องจาก $\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ไม่ขนานกัน จะสรุปได้ว่า $\cos \theta_{ac} - \frac{1}{2} = 0$ และ $\cos \theta_{ab} + \frac{1}{2} = 0$
 $\cos \theta_{ac} = \frac{1}{2}$ $\cos \theta_{ab} = -\frac{1}{2}$
 $\theta_{ac} = \frac{\pi}{3}$ $\theta_{ab} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow$ ตอบ

6. ง

$$\begin{array}{rcl}
 \log(\log a) + \log(\log b) & = & \log(\log c) \\
 \log(\log a \cdot \log b) & = & \log(\log c) \\
 \log a \cdot \log b & = & \log c \\
 \log b^{\log a} & = & \log c \\
 b^{\log a} & = & c
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 \log M + \log N = \log MN \\
 \text{ตัด } \log \text{ ทั้งสองข้าง} \\
 \text{โยน } \log a \text{ ที่คูณอยู่ ไปเป็นเลขชี้กำลังหลัง } \log \\
 \text{ตัด } \log \text{ ทั้งสองข้าง}
 \end{array} \right\}$$

7. ข

หา $\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right)$ ก่อน โดยใช้สูตร $\tan$ มุม 2 เท่า 2 รอบ

$$\begin{aligned}
 \tan\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right) &= \frac{2 \tan\left(\arctan \frac{1}{5}\right)}{1 - \tan^2\left(\arctan \frac{1}{5}\right)} = \frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{25}{24} = \frac{5}{12} \\
 \tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) &= \frac{2 \tan\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right)}{1 - \tan^2\left(2 \arctan \frac{1}{5}\right)} = \frac{2\left(\frac{5}{12}\right)}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{5}{6} \cdot \frac{144}{119} = \frac{120}{119} \dots (*)
 \end{aligned}$$

$$\tan(2A) = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$$

$$\text{และจาก } 4 \arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{4}$$

$$4 \arctan \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4} + \arctan \frac{1}{x}$$

$$\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\text{จาก } (*) \rightarrow \frac{120}{119}$$

$$= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan\left(\arctan \frac{1}{x}\right)}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan\left(\arctan \frac{1}{x}\right)}$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

$$\frac{120}{119}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - (1)\left(\frac{1}{x}\right)}$$

$$120 - \frac{120}{x}$$

$$= \frac{119 + \frac{119}{x}}{x}$$

$$1$$

$$= \frac{239}{x}$$

$$x$$

$$= 239$$

8. ค

ก. เอาสองค่าที่โจทย์ให้ มาคูณกัน เพื่อให้ z ตัดกับ z^{-1} และ w ตัดกับ w^{-1} ดังนี้

$$\begin{aligned}
 (z + w^{-1})(z^{-1} + w) &= (\sqrt{2} + i)(1 + \sqrt{2}i) \\
 zz^{-1} + zw + w^{-1}z^{-1} + w^{-1}w &= \sqrt{2} + 2i + i - \sqrt{2} \\
 1 + zw + (zw)^{-1} + 1 &= 3i \\
 zw + (zw)^{-1} &= -2 + 3i \rightarrow \text{ไม่เป็นเต็มบวก} \rightarrow \text{ก. ผิด}
 \end{aligned}$$

ข. เอา $zw + (zw)^{-1} = -2 + 3i$ จาก ก. มายกกำลังสอง จะได้

$$\begin{aligned}
 (zw)^2 + 2zw(zw)^{-1} + (zw)^{-2} &= 4 - 12i - 9 \\
 (zw)^2 + 2 + (zw)^{-2} &= -5 - 12i \\
 (zw)^2 + (zw)^{-2} &= -7 - 12i \rightarrow \text{ไม่เป็นเต็มบวก} \rightarrow \text{ข. ผิด}
 \end{aligned}$$

ค. ใช้สูตร $n^3 + d^3 = (n + d)(n^2 - nd + d^2)$ จะได้

$$\begin{aligned}
 (zw)^3 + (zw)^{-3} &= (zw + (zw)^{-1})(zw^2 - zw(zw)^{-1} + (zw)^{-2}) \\
 &\quad \text{จาก ก.} \downarrow \quad \text{จาก ข.} \downarrow \\
 &= (-2 + 3i)(-7 - 12i - 1) \\
 &= (-2 + 3i)(-8 - 12i) \\
 &= 16 + 24i - 24i + 36 = 52 \rightarrow \text{ค. ถูก}
 \end{aligned}$$

ง. เอา $(zw)^2 + (zw)^{-2} = -7 - 12i$ จาก ข. มายกกำลังสอง จะได้

$$\begin{aligned}(zw)^4 + 2(zw)^2(zw)^{-2} + (zw)^{-4} &= 49 - 168i - 144 \\(zw)^4 + 2 + (zw)^{-4} &= -95 - 168i \\(zw)^4 + (zw)^{-4} &= -97 - 168i \rightarrow \text{ไม่เป็นเต็มบวก} \rightarrow \text{ง. ผิด}\end{aligned}$$

9. ง

$$\begin{aligned}x + ay + z &= 3 \quad \dots(1) \\2x + y + bz &= 1 \quad \dots(2) \\3x + y + 3z &= 2 \quad \dots(3)\end{aligned}$$

$$3 \times (1): 3x + 3ay + 3z = 9 \quad \dots(4)$$

$$\begin{aligned}(4) - (3): 3ay - y &= 7 \\(3a - 1)y &= 7\end{aligned}$$

$3a - 1$	y	
1	7	$a = \frac{2}{3}, y = 7$
-1	-7	$a = 0, y = -7$
7	1	$a = \frac{8}{3}, y = 1$
-7	-1	$a = -2, y = -1$

7 แยกเป็นผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนได้ 4 แบบ คือ

แต่ a เป็นจำนวนเต็มที่ $\neq 0$

ดังนั้น ได้แบบเดียวคือ $a = -2$ และ $y = -1$

แทน a และ y ใน (1) และ (2) แล้วจัดรูป จะได้

$$x + z = 1 \quad \dots(5)$$

$$2x + bz = 2 \quad \dots(6)$$

$$2 \times (5): 2x + 2z = 2 \quad \dots(7)$$

$$(6) - (7): bz - 2z = 0$$

$$(b - 2)z = 0 \quad \text{แต่ } z \text{ เป็น } 0 \text{ ไม่ได้ ดังนั้น } \begin{aligned}b - 2 &= 0 \\b &= 2\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } 2x - 3y + 2z + 3ab = 2x - 3(-1) + 2z + 3(-2)(2)$$

$$\begin{aligned}\text{จาก (5)} \left\{ \begin{aligned} &= 2(x + z) + 3 - 12 \\ &= 2(1) - 9 = -7\end{aligned}\right.\end{aligned}$$

10. ก

A	B	C	D
E	F	G	H

เงื่อนไขการเข้าแถวคือ $A > B > C > D$ และ $E > F > G > H$

และ $A < E, B < F, C < G, D < H$

ข้อนี้ จะไล่นับเขาก็ได้ $\rightarrow$ ให้ทุกคนเข้าแถวจากเตี้ยไปสูง แล้วปะหมายเลข 1, 2, 3, ..., 8

เนื่องจาก D กับ H น้อยสุดในแถว และในหลักขวา $D < H \rightarrow D$ น้อยสุด $\rightarrow D = 1$

C ต้องมากกว่า D จะได้ $C > 1$

C ต้องน้อยกว่าตัวอื่นๆอีก 5 ตัว (A, B, G, F, E) จะได้ $C < 4$ } $C = 2, 3$

B ต้องมากกว่าตัวอื่นๆอีก 2 ตัว (C, D) จะได้ $B > 2$

B ต้องน้อยกว่าตัวอื่นๆอีก 3 ตัว (A, F, E) จะได้ $B < 6$ } $B = 3, 4, 5$

A ต้องมากกว่าตัวอื่นๆอีก 3 ตัว (B, C, D) จะได้ $A > 3$

A ต้องน้อยกว่าตัวอื่นๆอีก 1 ตัว (E) จะได้ $A < 8$ } $A = 4, 5, 6, 7$

จากตารางจะได้จำนวนวิธี $= 4 + 3 + 2 + 3 + 2 = 14$ วิธี

D	C	B	A	#
1	2	3	4 5 6 7	4
		4	5 6 7	3
		5	6 7	2
	3	4	5 6 7	3
		5	6 7	2

หรือถ้าจะคำนวณ จะสามารถใช้เทคนิคในเรื่อง Catalan Number ได้โดยจับคู่แบบการเข้าแถว กับ การเรียงตัวอักษร

“ล” และ “น” อย่างละ 4 ตัว โดยมีข้อกำหนดว่า จำนวน “ล” นับจากซ้าย $\geq$ จำนวน “น” นับจากซ้าย ในทุกตำแหน่งของการเรียงตัวอักษร

วิธีจับคู่คือ ให้คนที่สูงที่สุด เลือกว่าจะยืนแถวหลัง (ล) หรือ แถวหน้า (น) แล้วไปยืนชิดทางซ้ายของแถวนั้นๆ

ให้คนที่สูงถัดมา เลือกว่าจะยืนแถวหลัง (ล) หรือ แถวหน้า (น) แล้วไปยืนชิดทางซ้ายของแถวนั้นๆ

⋮

เช่น “ล ล น ล น ล น น” จะได้ผลลัพธ์คือ

8 7 6 5 4 3 2 1

6	4	2	1
8	7	5	3

จะเห็นว่า การให้เลือกแถวตามลำดับความสูง จะทำให้ความสูงภายในแถวเรียงจากมากไปน้อย

และการกำหนดให้ จำนวน “ล” นับจากซ้าย $\geq$ จำนวน “น” นับจากซ้าย ในทุกๆตำแหน่ง จะทำให้คนที่ยืนแถวหน้า สูงน้อยกว่าคนที่อยู่แถวหลังในตำแหน่งเดียวกันเสมอ

ซึ่งจากสูตรของ Catalan Number จะเรียงได้ $= \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{4+1} \binom{8}{4} = 14$ วิธี

11. ข

เนื่องจาก $|z + w|$ และ $|z - w|$ เป็นจำนวนจริง จะไม่มีส่วนจินตภาพ

ดังนั้น จะพิจารณา “ส่วนจินตภาพ” ทั้งสองฝั่ง ในสมการที่กำหนดให้ก่อน

$$\begin{array}{l} \text{ไม่มีส่วนจินตภาพ} \\ \sqrt{2}z + \overbrace{|z + w|}^{\text{ไม่มีส่วนจินตภาพ}} = 1 + i \\ \swarrow \quad \downarrow \\ \text{ส่วนจินตภาพ} = \sqrt{2} \operatorname{Im}(z) \quad \text{ส่วนจินตภาพ} = 1 \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{2} \operatorname{Im}(z) = 1$$

$$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น z จะอยู่ในรูป $a + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง

$$\begin{array}{l} \text{ไม่มีส่วนจินตภาพ} \\ \sqrt{2}w + \overbrace{|z - w|}^{\text{ไม่มีส่วนจินตภาพ}} = 1 - i \\ \swarrow \quad \downarrow \\ \text{ส่วนจินตภาพ} = \sqrt{2} \operatorname{Im}(w) \quad \text{ส่วนจินตภาพ} = -1 \end{array}$$

$$\text{ดังนั้น } \sqrt{2} \operatorname{Im}(w) = -1$$

$$\operatorname{Im}(w) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ดังนั้น w จะอยู่ในรูป $b - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ เมื่อ b เป็นจำนวนจริง

แทน z และ w ในสมการโจทย์ จะได้ $\sqrt{2}z + |z + w| = 1 + i$

$$\sqrt{2}\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \left|(a + \frac{1}{\sqrt{2}}i) + (b - \frac{1}{\sqrt{2}}i)\right| = 1 + i$$

$$\sqrt{2}a + i + |a + b| = 1 + i$$

$$\sqrt{2}a + \sqrt{(a+b)^2} = 1$$

$$(a+b)^2 = (1 - \sqrt{2}a)^2 \quad \dots(*)$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 1 - 2\sqrt{2}a + 2a^2$$

$$-a^2 + 2ab + b^2 = 1 - 2\sqrt{2}a \quad \dots(1)$$

$$\text{และ } \sqrt{2}w + |z - w| = 1 - i$$

$$\sqrt{2}\left(b - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) + \left|(a + \frac{1}{\sqrt{2}}i) - (b - \frac{1}{\sqrt{2}}i)\right| = 1 - i$$

$$\sqrt{2}b - i + |a - b + \frac{2}{\sqrt{2}}i| = 1 - i$$

$$\sqrt{2}b + \sqrt{(a-b)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

$$(a-b)^2 + \frac{4}{2} = (1 - \sqrt{2}b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 2 = 1 - 2\sqrt{2}b + 2b^2$$

$$a^2 - 2ab - b^2 = -1 - 2\sqrt{2}b \quad \dots(2)$$

จะเห็นว่า (1) + (2) จะตัดกันได้เกือบทุกตัว เหลือ

$$0 = -2\sqrt{2}a - 2\sqrt{2}b$$

$$2\sqrt{2}b = -2\sqrt{2}a$$

$$b = -a$$

แทน $b = -a$ ใน w จะได้ $w = -a - \frac{1}{\sqrt{2}}i$ และ เนื่องจาก $z = a + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ จะเห็นว่า $w = -z$

แทน $w = -z$ ในสมการโจทย์อีกรอบ จะได้ $\sqrt{2}z + |z + (-z)| = 1 + i$
 $\sqrt{2}z + 0 = 1 + i$ แปลงเป็นเชิงขั้ว ให้ยกกำลังง่าย ๆ
 $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = 1 \operatorname{cis} \frac{\pi}{4}$

ดังนั้น $z^{2015} = 1^{2015} \operatorname{cis} \frac{2015\pi}{4} = 1 \operatorname{cis} \frac{(2016-1)\pi}{4} = 1 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

จะได้ $z^{2015} - w^{2015} = z^{2015} - (-z)^{2015}$
 $= z^{2015} + z^{2015}$
 $= 2z^{2015} = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

12. ค

จำนวนตรรกยะ บวกลบคูณหาร กับจำนวนตรรกยะ จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนตรรกยะเสมอ

ดังนั้น เราจะพยายามเอาจำนวนที่โจทย์กำหนดให้เป็นตรรกยะ มาจัดรูปไปสู่ค่าที่โจทย์ถาม

(1) สมมติให้ P และ Q เป็นตรรกยะ ดังนั้น $P + Q = \sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin \theta$
 $= 1 + \cos \theta + \sin \theta$ เป็นตรรกยะด้วย

เนื่องจาก 1 เป็นตรรกยะ ดังนั้น $\cos \theta + \sin \theta$ ต้องเป็นตรรกยะ ... (1)

และจะได้ $P - Q = (\sin^2 \theta + \cos \theta) - (\cos^2 \theta + \sin \theta)$
 $= \sin^2 \theta - \cos^2 \theta + \cos \theta - \sin \theta$
 $= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta) - (\sin \theta - \cos \theta)$
 $= (\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta - 1)$ เป็นตรรกยะด้วย

แต่จาก (1) จะได้ $\sin \theta + \cos \theta - 1$ เป็นจำนวนตรรกยะ ดังนั้น จะได้ $\sin \theta - \cos \theta$ เป็นตรรกยะ ... (2)

(1) + (2) จะทำให้ $\cos \theta$ ตัดกัน จะสรุปได้ว่า $2 \sin \theta$ เป็นตรรกยะ $\rightarrow$ จะได้ $\sin \theta$ เป็นตรรกยะ

$\rightarrow$ ทำต่อจาก (1) จะได้ว่า $\cos \theta$ เป็นตรรกยะ

$\rightarrow$ ดังนั้น $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เป็นตรรกยะ

(เมื่อ $\cos \theta \neq 0$)

อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่า การพิสูจน์เป็นไปไม่ได้ ภายใต้เงื่อนไข $\cos \theta \neq 0$

กรณีที่ $\cos \theta = 0$ เช่น เมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $P = \sin^2 \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ เป็นตรรกยะ

$$Q = \cos^2 \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1 \text{ เป็นตรรกยะ}$$

แต่จะเห็นว่า $\tan \frac{\pi}{2}$ หาค่าไม่ได้ $\rightarrow$ ดังนั้น (1) ผิด

(2) สมมติให้ P และ R เป็นตรรกยะ $\rightarrow$ จาก $P = \sin^2 \theta + \cos \theta$
 $= 1 - \cos^2 \theta + \cos \theta$

เนื่องจาก 1 เป็นตรรกยะ ดังนั้น $-\cos^2 \theta + \cos \theta$ ต้องเป็นตรรกยะ

เนื่องจาก R เป็นตรรกยะ ดังนั้น $(-\cos^2 \theta + \cos \theta) \times R = (-\cos^2 \theta + \cos \theta)(\tan \theta)$
 $= (-\cos^2 \theta + \cos \theta) \left(\frac{\sin \theta}{\cos \theta}\right)$
 $= -\sin \theta \cos \theta + \sin \theta$ ต้องเป็นตรรกยะ ... (1)

และ $\frac{P}{R} = \frac{\sin^2 \theta + \cos \theta}{\tan \theta}$ (เมื่อ $\tan \theta \neq 0$)
 $= (\sin^2 \theta + \cos \theta) \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta}\right)$
 $= \sin \theta \cos \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$ ต้องเป็นตรรกยะ ... (2)

(1) + (2) จะทำให้ $\sin \theta \cos \theta$ ตัดกัน เหลือ $\sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{\sin \theta}$ ต้องเป็นตรรกยะ

ดังนั้น $\sin \theta$ เป็นตรรกยะ $\rightarrow$ จาก $R = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ เป็นตรรกยะ จะสรุปได้ว่า $\cos \theta$ เป็นตรรกยะด้วย

ดังนั้น $Q = \cos^2 \theta + \sin \theta$ เป็นตรรกยะ

อย่างไรก็ตาม จะเห็นว่า การพิสูจน์เป็นไปไม่ได้ ภายใต้เงื่อนไข $\tan \theta \neq 0$

กรณีที่ $\tan \theta = 0$ จะได้ $\theta = n\pi$

ซึ่งจะทำให้ $Q = \cos^2 n\pi + \sin n\pi = 1 + 0 = 1$ เป็นตรรกยะ $\rightarrow$ ดังนั้น (2) ถูก

13. ก

จะประกอบเป็นสามเหลี่ยมได้ เมื่อแต่ละด้าน สั้นกว่า อีกสองด้านที่เหลือรวมกัน

$A \xrightarrow{x} \bullet \xrightarrow{y} \bullet \xrightarrow{z} B$ นั่นคือ $x < y + z$, $y < x + z$ และ $z < x + y$

(ถ้ามีด้านไหนยาวเกินไป จะทำให้สองด้านที่เหลือมาต่อกันไม่ถึง $\rightarrow \angle \angle$)

ซึ่งจากรูป จะเห็นว่า $x < y + z$ เมื่อ x สั้นกว่าครึ่งหนึ่งของ AB นั่นเอง

และจาก $y < x + z$ และ $z < x + y$ จะได้ว่า ทั้ง y และ z ก็ต้องสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของ AB ด้วย

ดังนั้น ทั้ง x, y และ z ต้องสั้นกว่าครึ่งหนึ่งของ AB จึงจะประกอบเป็นสามเหลี่ยมได้

และเนื่องจาก ในสามด้าน x, y และ z จะมีได้อย่างมากเพียงด้านเดียวเท่านั้น ที่ยาวเกินครึ่งหนึ่งของ AB

ดังนั้น สองจุดที่สุ่มได้ จะแบ่ง AB ออกเป็นแบบใดแบบหนึ่งใน 4 แบบ คือ

- 1) x ยาวเกินครึ่ง 2) y ยาวเกินครึ่ง 3) z ยาวเกินครึ่ง 4) ไม่มีด้านไหนยาวเกินครึ่ง

กรณีที่ x ยาวเกินครึ่ง จะเกิดขึ้นเมื่อสองจุดที่สุ่มได้ ตกอยู่ทางครึ่งขวาของ AB

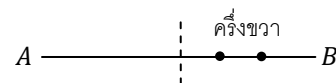
ความน่าจะเป็น ที่สุ่มจุดจุดหนึ่งบน AB แล้วได้จุดทางครึ่งขวา จะเท่ากับ $\frac{1}{2}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ทั้งสองจุดที่สุ่มได้ อยู่ทางครึ่งขวา $= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

ความน่าจะเป็นที่ y ยาวเกินครึ่ง และ z ยาวเกินครึ่ง จะเท่ากับ $\frac{1}{4}$ เช่นกัน (เพราะเราสามารถจับคู่แบบที่ x ยาวเกินครึ่ง

กับแบบที่ y ยาวเกินครึ่ง แบบหนึ่งต่อหนึ่งได้ โดยการสลับ $x + y + z$ เป็น $y + x + z$)

ดังนั้น จะเหลือความน่าจะเป็นให้ กรณีไม่มีด้านไหนเกินครึ่ง $= 1 - 3\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$



14. ข

$$\begin{array}{rcl}
 -|y| + x - \sqrt{x^2 + y^2} - 1 & \geq & 1 \\
 x - |y| - 1 & \geq & \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \\
 (x - |y| - 1)^2 & \geq & x^2 + y^2 - 1 \\
 x^2 + |y|^2 + 1 - 2x|y| - 2x + 2|y| & \geq & x^2 + y^2 - 1 \\
 2 - 2x|y| - 2x + 2|y| & \geq & 0 \\
 1 - x|y| - x + |y| & \geq & 0 \\
 |y| + 1 - x|y| - x & \geq & 0 \\
 (|y| + 1) - x(|y| + 1) & \geq & 0 \\
 (|y| + 1)(1 - x) & \geq & 0 \\
 \swarrow \text{เป็นบวกเสมอ} & & 1 - x \geq 0 \\
 1 & \geq & x
 \end{array}$$

$\begin{array}{l} \text{ค่ารากทางขวา} \geq 0 \\ \text{ดังนั้น } x - |y| - 1 \geq 0 \text{ ด้วย} \\ x \geq |y| + 1 \end{array}$

$\begin{array}{l} \text{เอามาต่อกัน จะได้ } 1 \geq x \geq |y| + 1 \dots (*) \end{array}$

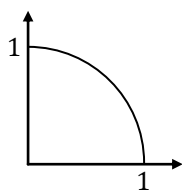
พิจารณา ขั้วสุด กับขวาสุดของ (*) จะได้ $1 \geq |y| + 1 \rightarrow$ เป็นจริงได้เมื่อ $y = 0$ เท่านั้น

แทน $y = 0$ ใน (*) จะได้ $1 \geq x \geq 1 \rightarrow x = 1$ ดังนั้น อสมการนี้มีคำตอบเดียวคือ $(x, y) = (1, 0)$

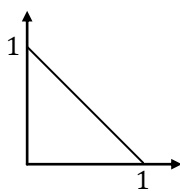
15. ข

ลองวาดกราฟคร่าวๆดูก่อน โดยหาจุด (x, y) ง่ายๆ ที่ทำให้สมการเป็นจริง จะได้ตารางเมื่อนำจุดในตาราง ไปพิจารณาร่วมกับกราฟอื่นที่เคยรู้จัก จะพอ เดาลักษณะกราฟได้ดังรูป

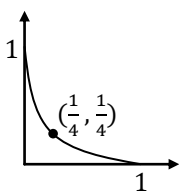
x	0	1	$\frac{1}{4}$
y	1	0	$\frac{1}{4}$



$$x^2 + y^2 = 1$$

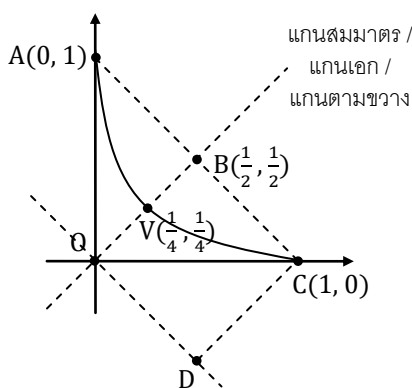


$$x + y = 1$$



$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$$

จะเห็นว่ากราฟไม่น่าจะเป็นเส้นตรงสองเส้น แต่ยังคงอาจจะเป็นพาราโบลา วงรี หรือ ไฮเพอร์โบลาได้อยู่



วาดเส้นประเพิ่มดังรูป จะเห็นว่ากราฟสมมาตรรอบแนวเส้นตรง OB ดังนั้น กราฟจะมี แกนสมมาตร / แกนเอก / แกนตามขวาง ทับกับแนวเส้นตรง OB → จะได้จุด $V(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ เป็นจุดยอดของกราฟ
เนื่องจาก B เป็นจุดกึ่งกลางระหว่าง $A(0, 1)$ และ $C(1, 0)$
ดังนั้น พิกัด B คือ $(\frac{0+1}{2}, \frac{1+0}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \rightarrow$ ดังนั้น $VB = VO$
และเนื่องจาก BCDO เป็น สี่เหลี่ยมจัตุรัส → จะได้ $CB = CD$
จะเห็นว่า V และ C สอดคล้องกับสมบัติของพาราโบลาที่มี B เป็นจุดโฟกัส และมีเส้นตรง OD เป็นไดเรกตริกซ์

พาราโบลา ที่มีโฟกัส คือ $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ และ เส้นตรง OD เป็นไดเรกตริกซ์ จะต้องมียะยะจาก (x, y) ใดๆ ไปยัง $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ เท่ากับระยะจาก (x, y) นั้นไปยังเส้นตรง OD (เส้นตรง OD มีสมการคือ $x + y = 0$)

$$\begin{aligned} \text{จะได้พาราโบลานี้คือ } \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2} &= \frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ x^2 - x + \frac{1}{4} + y^2 - y + \frac{1}{4} &= \frac{x^2+2xy+y^2}{2} \\ 2x^2 - 2x + \frac{1}{2} + 2y^2 - 2y + \frac{1}{2} &= x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่งถ้าจัดรูป } \sqrt{x} + \sqrt{y} &= 1 \\ x + 2\sqrt{xy} + y &= 1 \\ 2\sqrt{xy} &= 1 - x - y \\ 4xy &= 1 + x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2xy \\ 0 &= x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1 \end{aligned}$$

ได้เหมือนกับสมการพาราโบลาเลย

ดังนั้น กราฟนี้เป็นส่วนหนึ่งของพาราโบลา (ในส่วนที่ $(x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$)

หมายเหตุ : หลังจากที่เราว่า OB เป็นแกนสมมาตร จะลอง หมุนกราฟ 45° แบบตามเข็มนาฬิกา ดูก็ได้

$$\begin{aligned} \sqrt{x \cos 45^\circ - y \sin 45^\circ} + \sqrt{x \sin 45^\circ + y \cos 45^\circ} &= 1 \\ \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}}} + \sqrt{\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}} &= 1 \\ \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{y}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} &= 1 \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} 2\sqrt{\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}} &= 1 - \sqrt{2}x \\ 2x^2 - 2y^2 &= 1 - 2\sqrt{2}x + 2x^2 \\ 0 &= 2y^2 - 2\sqrt{2}x + 1 \\ \text{ไม่มี } x^2 &\rightarrow \text{เป็นพาราโบลา} \end{aligned} \right.$$

16. 225

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n &= 1^2 + 2^2 + \cdots + p^2 \\ \frac{n(n+1)}{2} &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\ n(n+1) &= \frac{p(p+1)(2p+1)}{3} \end{aligned}$$

ลองไล่แทน p เป็นจำนวนเฉพาะน้อยๆดู

$$p = 2: \text{ จะได้ } \frac{(2)(2+1)(4+1)}{3} = (2)(5) \text{ ซึ่งจะเขียนเป็น } n(n+1) \text{ ไม่ได้}$$

$$p = 3: \text{ จะได้ } \frac{(3)(3+1)(6+1)}{3} = (4)(7) \text{ ซึ่งจะเขียนเป็น } n(n+1) \text{ ไม่ได้}$$

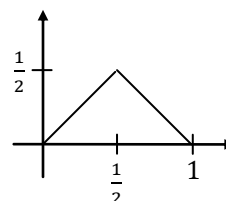
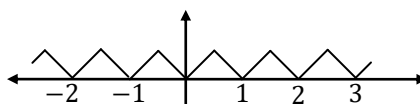
$$p = 5: \text{ จะได้ } \frac{(5)(5+1)(10+1)}{3} = (5)(2)(11) = (10)(11) \rightarrow \text{เขียนเป็น } n(n+1) \text{ ได้}$$

$$\text{ดังนั้น จะได้ } p \text{ น้อยสุดคือ } 5 \text{ และจะได้ } 1^3 + 2^3 + \cdots + p^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 = \left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2 = 225$$

17. 1007.5

จะหา $\int_{-2015}^{2015} f(x + 2558) dx$ โดยดูจากพื้นที่ใต้กราฟจะเห็นว่า ในสูตรของ $f(x)$ จะมี $x - [x]$ ปรากฏอยู่ทุกครั้งที่ x ปรากฏเนื่องจาก $[x]$ คือการปัดเศษลงให้เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $x - [x]$ ก็คือเศษที่ถูกปัดลงนั่นเองดังนั้น $x - [x]$ จะ “วนซ้ำ” ในช่วง $[0, 1)$ ทุกๆรอบจำนวนเต็มของ x ดังนั้น เราจะวาดกราฟ เฉพาะในช่วง $[0, 1)$ แล้วคัดลอกไปแปะในรอบอื่นๆเมื่อ $x \in [0, 1)$ จะได้ว่า $[x] = 0$ ทำให้ได้ว่า $x - [x] = x \rightarrow$ แทนใน $f(x)$

$$\text{จะได้ } f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - x & \text{เมื่อ } x > \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \text{วาดกราฟได้ดังรูป}$$

ดังนั้น $y = f(x)$ จะมีกราฟคือและ $y = f(x + 2558)$ จะได้จากการเลื่อนกราฟ $y = f(x)$ ไปทางซ้าย 2558 หน่วย ซึ่งจะได้กราฟรูปเดิม(เพราะกราฟซ้ำทุกๆรอบจำนวนเต็มของ x)จาก -2015 ไปถึง 2015 จะมีสามเหลี่ยมทั้งหมด $2015 - (-2015) = 4030$ รูป

$$\text{ซึ่งสามเหลี่ยมแต่ละรูปมีพื้นที่} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } \int_{-2015}^{2015} f(x + 2558) dx = 4030 \cdot \frac{1}{4} = 1007.5$$

18. 29580

เนื่องจาก a, b เป็นจำนวนเต็ม จะจัดรูปให้ฝั่งซ้ายเป็นตัวเลข แล้วอ้างว่าตัวเลขฝั่งซ้ายเขียนเป็นผลคูณได้ไม่กี่แบบ

$$\begin{aligned} f(f(0)) &= 1 \\ f(a(0) + b) &= 1 \\ f(b) &= 1 \\ ab + b &= 1 \\ (a + 1)b &= 1 \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{l} 1 \text{ เขียนเป็นผลคูณได้แค่ 2 แบบ} \\ \text{คือ } 1 \times 1 \text{ กับ } -1 \times -1 \end{array}$$

$a + 1$	b	
1	1	$\rightarrow a = 0, b = 1$
-1	-1	$\rightarrow a = -2, b = -1$

จะได้ $a = 0, b = 1$ หรือ $a = -2, b = -1$

ถ้า $a = 0, b = 1$ จะได้ $f(x) = (0)x + 1 = 1 \rightarrow f(x) = 1$ เสมอ โดยไม่ขึ้นกับค่า x

ดังนั้น จะได้ $f(f(f(1))) = 1$ ซึ่งขัดแย้งกับที่โจทย์บอกว่า $f(f(f(1))) = -11$

ถ้า $a = -2, b = -1$ จะได้ $f(x) = -2x - 1$ ดังนั้น $f(f(f(1))) = f(f(-2(1) - 1))$
 $= f(f(-3))$
 $= f(-2(-3) - 1)$
 $= f(5)$
 $= -2(5) - 1$
 $= -11 \quad \checkmark$

ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a = -2, b = -1$ เท่านั้น และจะได้ $f(x) = -2x - 1$

พิจารณาสิ่งที่โจทย์ถาม $\rightarrow$ จะได้ $f(f(f(f(n)))) = f(f(f(-2n - 1)))$
 $= f(f(-2(-2n - 1) - 1))$
 $= f(f(4n + 1))$
 $= f(-2(4n + 1) - 1)$
 $= f(-8n - 3)$
 $= -2(-8n - 3) - 1$
 $= 16n + 5$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น สิ่งที่โจทย์ถาม} &= \sum_{n=1}^{60} 16n + 5 = 16 \sum_{n=1}^{60} n + \sum_{n=1}^{60} 5 \\ &= 16 \left(\frac{60(60+1)}{2} \right) + 60(5) = 29280 + 300 = 29580 \end{aligned}$$

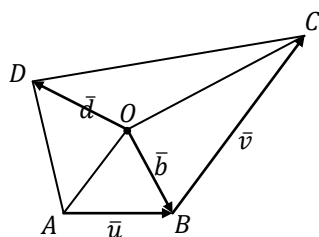
19. $1, -2 - 2 \log_3 2$

$$\begin{aligned} 3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+2}} &= 6 \\ 3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}} &= 3 \cdot 2 \\ \frac{3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+2}}}{3 \cdot 2} &= 1 \\ 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{3x}{x+2} - 1} &= 1 \\ 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{3x - (x+2)}{x+2}} &= 1 \\ 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{2x-2}{x+2}} &= 1 \\ 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{2(x-1)}{x+2}} &= 1 \\ \left(3 \cdot 2^{\frac{2}{x+2}} \right)^{x-1} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_2 \left(3 \cdot 2^{\frac{2}{x+2}} \right)^{x-1} &= \log_2 1 \\ (x-1) \left(\log_2 \left(3 \cdot 2^{\frac{2}{x+2}} \right) \right) &= 0 \\ x = 1 \quad \text{หรือ} \quad \log_2 \left(3 \cdot 2^{\frac{2}{x+2}} \right) &= 0 \\ \log_2 3 + \log_2 2^{\frac{2}{x+2}} &= 0 \\ \log_2 3 + \frac{2}{x+2} &= 0 \\ \frac{2}{x+2} &= -\log_2 3 \\ -\frac{2}{\log_2 3} &= x + 2 \\ -2 - 2 \log_3 2 &= x \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการมี 2 คำตอบ คือ 1 และ $-2 - 2 \log_3 2$

20. 8



โจทย์ให้ $AB = 1$ และ $BC = 3 \rightarrow$ จะสมมติให้ $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ และ $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$

$\rightarrow$ จะได้ $|\vec{u}| = 1$ และ $|\vec{v}| = 3$

สังเกตว่าข้อมูลที่โจทย์ให้ จะอิงกับจุด $O \rightarrow$ จะให้ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ และ $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$

แต่ไม่ต้องกำหนด $\overrightarrow{OA}$ กับ $\overrightarrow{OC}$ แล้ว เพราะ $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BA} = \vec{b} - \vec{u}$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \vec{b} + \vec{v}$

จากโจทย์ $\vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB} + \vec{OD}$ และ $\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \vec{OB} \cdot \vec{OD}$
 $\vec{b} - \vec{u} + \vec{b} + \vec{v} = \vec{b} + \vec{d}$ $(\vec{b} - \vec{u}) \cdot (\vec{b} + \vec{v}) = \vec{b} \cdot \vec{d}$
 $\vec{b} - \vec{u} + \vec{v} = \vec{d}$

โจทย์ถาม $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{BO} + \vec{OD})$
 $= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{b} + \vec{d})$
 $= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (-\vec{u} + \vec{v})$
 $= -\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$
 $= -|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2$
 $= -1^2 + 3^2 = 8$

21. $2 + \frac{\pi}{2}$

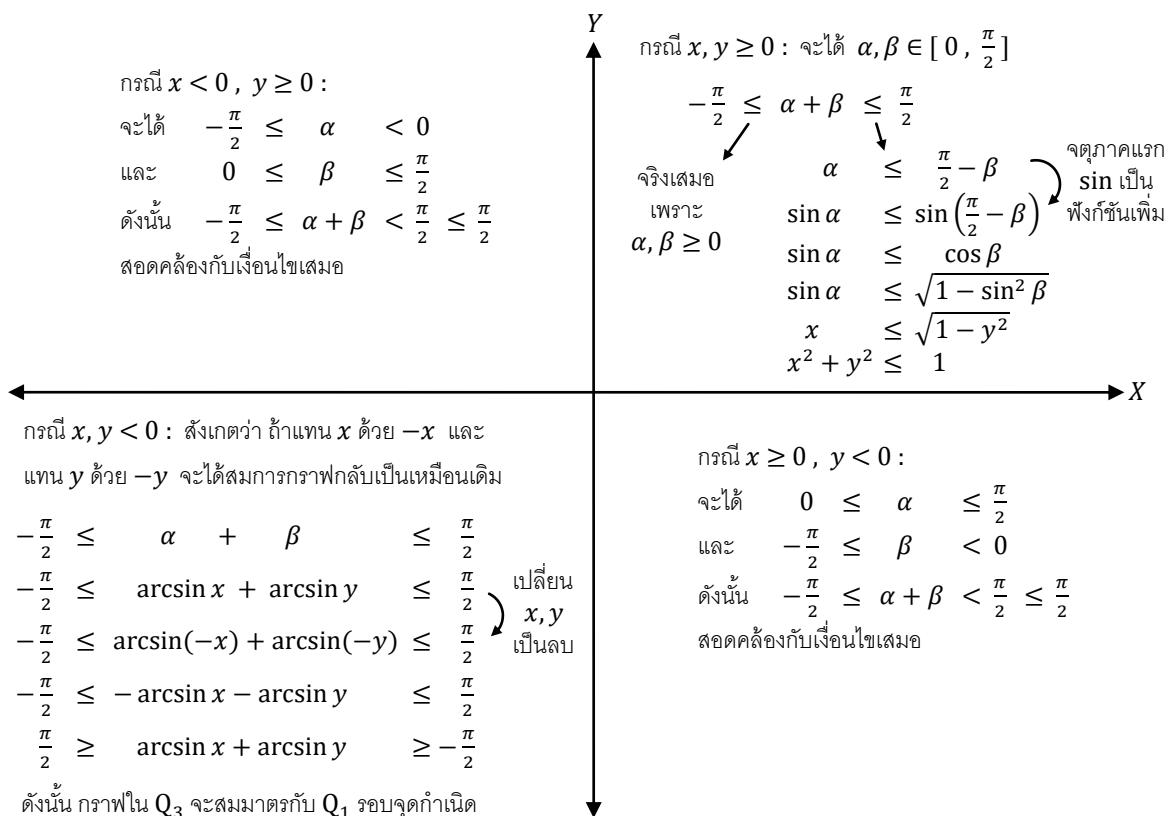
ให้ $\arcsin x = \alpha$ และ $\arcsin y = \beta \rightarrow$ จากเรนจ์ของ $\arcsin$ จะได้ $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $x = \sin \alpha$ $y = \sin \beta$

แทนในโจทย์ จะได้

$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$
 $\alpha + \beta = \arcsin(\sin \alpha \sqrt{1-\sin^2 \beta} + \sin \beta \sqrt{1-\sin^2 \alpha})$
 $\alpha + \beta = \arcsin(\sin \alpha \sqrt{\cos^2 \beta} + \sin \beta \sqrt{\cos^2 \alpha})$
 $\alpha + \beta = \arcsin(\sin \alpha |\cos \beta| + \sin \beta |\cos \alpha|)$ เนื่องจาก $\alpha, \beta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
 $\alpha + \beta = \arcsin(\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha)$ จะได้ $\cos \alpha, \cos \beta \geq 0$
 $\alpha + \beta = \arcsin(\sin(\alpha + \beta))$

จะเห็นว่าบรรทัดสุดท้ายเป็นจริงเสมอ ภายใต้เงื่อนไขว่า $\alpha + \beta$ ต้องอยู่ในเรนจ์ของ $\arcsin$ ซึ่งคือ $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

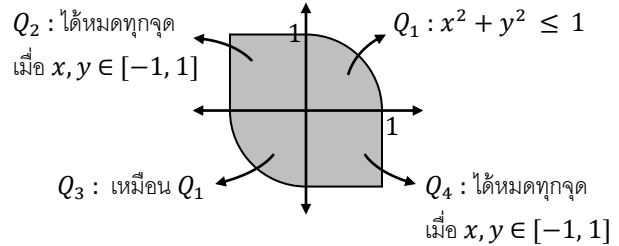
จะได้เงื่อนไขคือ $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha + \beta \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow$ แบ่งกรณีวาด ตามจุดภาค จะได้ดังรูป



ในเงื่อนไขของ A มี $\arcsin x$ และ $\arcsin y$ อยู่

พิจารณาโดเมนของ $\arcsin$ จะได้ $x, y \in [-1, 1]$

วาดกราฟในแต่ละจุดภาค จะได้ดังรูป



$$\text{จะได้พื้นที่} = 2 \left(1^2 + \frac{\pi(1^2)}{4} \right) = 2 + \frac{\pi}{2}$$

22. 100031

จำนวน “ไม่เกิน n หลัก” ที่ผลบวกเลขโดดเป็น 5 จะเทียบได้กับการแจกของเหมือนกัน 5 ชิ้น ให้คน n คน โดยอาจมีบางคนไม่ได้ของ (ถ้าคนไหนไม่ได้ของ ถือว่าหลักนั้นเป็น 0 และถ้าหลักหน้าๆ เป็น 0 จะกลายเป็นจำนวนที่น้อยกว่า n หลัก) เช่น ถ้าแจกของเหมือนกัน 5 ชิ้น ให้คน 3 คน จะได้ 005, 014, 023, 032, ..., 401, 410, 500

จาก Stars & Bars การแจกของเหมือนกัน 5 ชิ้น ให้คน n คน โดยอาจมีคนไม่ได้ของ จะมี $\binom{5+n-1}{n-1}$ แบบ

เช่น ถ้า $n = 1$ จะได้ จำนวนไม่เกิน 1 หลัก มี $\binom{5+1-1}{1-1} = \binom{5}{0} = 1$ แบบ (คือ 5)

ถ้า $n = 2$ จะได้ จำนวนไม่เกิน 2 หลัก มี $\binom{5+2-1}{2-1} = \binom{6}{1} = 6$ แบบ (คือ 5, 14, 23, 32, 41, 50)

⋮

โจทย์ที่จะหาตัวที่ 130 → จะหา n ที่ทำให้ได้จำนวนแบบ ใกล้เคียง 130

ถ้า $n = 4$ จะได้ จำนวนไม่เกิน 4 หลัก มี $\binom{5+4-1}{4-1} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 56$ แบบ

ถ้า $n = 5$ จะได้ จำนวนไม่เกิน 5 หลัก มี $\binom{5+5-1}{5-1} = \binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 126$ แบบ → ใกล้ 130 แล้ว

ตัวที่ 130 จะอยู่ถัดจากตัวที่ 126 ไปอีก 4 ตัว → ดังนั้นตัวที่ 130 จะเป็น “จำนวน 6 หลักตัวที่ 4”

จำนวน 6 หลัก เรียงจากน้อยไปมาก แล้วตอบตัวที่ 4 จะได้ 100004, 100013, 100022, 100031

$$23. (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8, (x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$$

จุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $4x + 3y - 2 = 0 \rightarrow$ ให้จุดศูนย์กลางคือ (h, k) จะได้ $4h + 3k - 2 = 0 \dots(1)$

ระยะจาก ศก ไปยังเส้นสัมผัส จะเท่ากับรัศมี

$$\text{จะได้ } \frac{|h+k+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{|7h-k+4|}{\sqrt{7^2+(-1)^2}} = \text{รัศมี} \dots(*)$$

$$\frac{h+k+4}{\sqrt{2}} = \pm \frac{7h-k+4}{\sqrt{50}}$$

$$5(h+k+4) = \pm(7h-k+4)$$

$$5(h+k+4) = 7h-k+4$$

$$0 = 2h - 6k - 16$$

$$0 = h - 3k - 8 \dots(2a)$$

$$5(h+k+4) = -(7h-k+4)$$

$$12h + 4k + 24 = 0$$

$$3h + k + 6 = 0 \dots(2b)$$

แก้ (1) กับ (2a) จะได้หนึ่งคำตอบ และ แก้ (1) กับ (2b) จะได้อีกหนึ่งคำตอบ

$$(1) \quad 4h + 3k - 2 = 0$$

$$(2a) \quad h - 3k - 8 = 0$$

$$(1) + (2a): \quad 5h - 10 = 0$$

$$h = 2$$

$$(2a): \quad 2 - 3k - 8 = 0$$

$$k = \frac{6}{-3} = -2$$

$$(1) \quad 4h + 3k - 2 = 0$$

$$(2b) \quad 3h + k + 6 = 0$$

$$3 \times (2b): \quad 9h + 3k + 18 = 0 \dots(3b)$$

$$(3b) - (1): \quad 5h + 20 = 0$$

$$h = -4$$

$$(2b): \quad 3(-4) + k + 6 = 0$$

$$k = 6$$

แทน (h, k) ใน $(*)$ เพื่อหา รศมี จาก $\frac{|h+k+4|}{\sqrt{1^2+1^2}}$

(1) กับ $(2a)$ ได้ $(h, k) = (2, -2)$

$$\text{จะได้ รศมี} = \frac{|2+(-2)+4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

จะได้สมการวงกลมคือ

$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y-(-2))^2 &= (2\sqrt{2})^2 \\ (x-2)^2 + (y+2)^2 &= 8\end{aligned}$$

(1) กับ $(2b)$ ได้ $(h, k) = (-4, 6)$

$$\text{จะได้ รศมี} = \frac{|-4+6+4|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$$

จะได้สมการวงกลมคือ

$$\begin{aligned}(x-(-4))^2 + (y-6)^2 &= (3\sqrt{2})^2 \\ (x+4)^2 + (y-6)^2 &= 18\end{aligned}$$

24. 13.5

$$\begin{aligned}f(x) &= |2x+4| + 3|x-2| + |x-5| + \left|\frac{x-7}{2}\right| \\ 2f(x) &= 4|x+2| + 6|x-2| + 2|x-5| + |x-7|\end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{คูณ 2 ตลอด}$$

จากสมบัติของมัธยฐาน จะได้ $2f(x)$ มีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x =$ มัธยฐานของข้อมูลดังตาราง

ซึ่งจากตาราง จะได้มัธยฐานจะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{13+1}{2} = 7$

และจะเห็นว่า f_i สะสม เกิน 7 ในขั้นที่ 2 ($4+6 > 7$) $\rightarrow$ มัธยฐาน = 2

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น ค่าน้อยสุดของ } 2f(x) &= 4|2+2| + 6|2-2| + 2|2-5| + |2-7| \\ &= 16 + 0 + 6 + 5 = 27\end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น ค่าน้อยสุดของ } f(x) = \frac{27}{2} = 13.5$$

x_i	f_i
-2	4
2	6
5	2
7	1
13	

25. 24

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ เมทริกซ์ไม่เอกฐาน แสดงว่า $(aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb) \neq 0$
 ดังนั้น ในบรรดา $aei, bfg, cdh, gec, hfa, idb$ ทั้งหมดต้องมีบางตัว $\neq 0$

กรณี $aei \neq 0$ จะได้ $a, e, i = 1$ ทั้งสามตัว ทำให้ผลรวมแนวทแยงมุมหลักเกิน 1 $\rightarrow$ ใช้ไม่ได้

กรณี $bfg \neq 0$ จะได้ $b, f, g = 1$ ทั้งสามตัว ได้เป็น $\begin{bmatrix} a & 1 & c \\ d & e & 1 \\ 1 & h & i \end{bmatrix} \rightarrow 1$ ที่เหลืออีกตัว ลงตรงไหนก็ได้ $\rightarrow 6$ แบบ

กรณี $cdh \neq 0$ ทำเหมือนกรณีที่สอง $\rightarrow 6$ แบบ

จะเห็นว่ากลุ่มที่เหลือ gec, hfa, idb ทำแบบเดิมไม่ได้แล้ว เพราะพวกนี้ผ่านแนวทแยงมุมหลัก a, e, i

กรณี $gec \neq 0$ จะได้ $g, e, c = 1$ ได้เป็น $\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ d & 1 & f \\ 1 & h & i \end{bmatrix} \rightarrow e = 1$ ไปแล้ว ทำให้ a, i ต้องเป็น 0 ได้ $\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ d & 1 & f \\ 1 & h & 0 \end{bmatrix} \rightarrow 1$ ที่เหลือ จะเลือกลงได้ 4 แบบ

กรณี $hfa \neq 0$ กับ $idb \neq 0$ ทำแบบเดียวกัน ได้อีกกรณีละ 4 แบบ

$$\text{ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด} = 6 + 6 + 4 + 4 + 4 = 24 \text{ แบบ}$$

26. $\frac{1}{2}$

จะจัดรูปให้ค่าลิมิตอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ แล้วใช้กฎของโลปีตาล

$$\text{ให้ } h = \frac{1}{x} \text{ จะได้ } x = \frac{1}{h} \text{ และจะเห็นว่า } \lim_{x \rightarrow \infty} h = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\arctan\left(\frac{x+1}{x+2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+2}\right) \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{h}+1}{\frac{1}{h}+2}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{h}}{\frac{1}{h}+2}\right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\arctan\left(\frac{1+h}{1+2h}\right) - \arctan\left(\frac{\frac{1}{h}}{1+\frac{2}{h}}\right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\arctan\left(\frac{1+h}{1+2h}\right) - \arctan\left(\frac{1}{1+2h}\right)}{h} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ถ้าแทน $h = 0$ จะได้ค่าลิมิตเป็น $\frac{\arctan\left(\frac{1}{1}\right) - \arctan\left(\frac{1}{1}\right)}{0}$ ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

ใช้กฎของโลปีตาล จะได้ $\frac{\text{ดิฟเฟอเรนเชียลของตัวเศษ}}{\text{ดิฟเฟอเรนเชียลของตัวส่วน}} = \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{1+h}{1+2h}\right)^2} \cdot \frac{(1+2h)(1) - (1+h)(2)}{(1+2h)^2} - \frac{1}{1+\left(\frac{1}{1+2h}\right)^2} \cdot \frac{-2}{(1+2h)^2}}{1}$

แทน $h = 0$ จะได้ $= \frac{\frac{1}{1+1} \cdot \frac{(1)(1) - (1)(2)}{1} - \frac{1}{1+1} \cdot \frac{-2}{1}}{1} = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

27. 70

ใช้เทเลสโคปิค จะเห็นว่า $\frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)} = \frac{r+2 - r}{r(r+1)(r+2)} = \frac{2}{r(r+1)(r+2)}$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)} \right) = \frac{1}{r(r+1)(r+2)}$$

ดังนั้น $S_k = \sum_{r=1}^k \frac{1}{r(r+1)(r+2)} = \sum_{r=1}^k \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)} \right)$

$$= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^k \frac{1}{r(r+1)} - \frac{1}{(r+1)(r+2)}$$

ตัดกันได้เป็นทอดๆ

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} \right) + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} \right) + \left(\frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \right)$$

เหลือตัวแรกสุด กับ ตัวสุดท้าย

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(k+1)(k+2)} \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} \end{aligned}$$

แทนใน $|S_k - 0.25| < 0.0001$

$$\left| \frac{1}{4} - \frac{1}{2(k+1)(k+2)} - 0.25 \right| < \frac{1}{10000}$$

$$\left| -\frac{1}{2(k+1)(k+2)} \right| < \frac{1}{10000}$$

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \frac{1}{10000}$$

5000 $< (k+1)(k+2) \rightarrow$ หาสองจำนวนติดกัน ที่คูณกันแล้วมากกว่า 5000

$$(70)(71) = 4970$$

$$(71)(72) = 5112 \quad \checkmark$$

จะได้ $k+1 = 71 \rightarrow k = 70$

28. 7

เนื่องจาก $z_1 z_2 \neq 0$ จะได้ $z_1 \neq 0$ และ $z_2 \neq 0$

จัดรูปสมการให้เป็นสมการกำลังสองที่มี $\frac{z_1}{z_2}$ เป็นตัวแปร $\rightarrow z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$

$$\div z_2^2 \text{ ตลอด } \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^2 - \frac{z_1}{z_2} + 1 = 0$$

จะได้ $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \rightarrow$ ดังนั้น $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = 1$$

$$\frac{|z_1|}{|z_2|} = |z_2| \quad \dots (*)$$

และจาก $(z_1 - z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1 z_2 + z_2^2$ โจทย์ให้ $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$

$$(z_1 - z_2)^2 = z_1 z_2 - 2z_1 z_2$$

$$(z_1 - z_2)^2 = -z_1 z_2$$

$$|z_1 - z_2|^2 = |-z_1 z_2|$$

$$1 = |z_1| |z_2| \quad \rightarrow \text{โจทย์ให้ } |z_1 - z_2| = 1$$

$$1 = |z_1|^2 \quad \rightarrow |z_1| = |z_2| \text{ จาก } (*)$$

$$1 = |z_1|$$

ดังนั้น $|z_1| = |z_2| = 1 \rightarrow$ แทนในสูตร $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$

$$1 = 1 + 1 - (z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 1$$

และสุดท้าย $|z_1 + 2z_2|^2 = |z_1|^2 + |2z_2|^2 + (z_1 \cdot \overline{2z_2} + \bar{z}_1 \cdot 2z_2)$

$$= |z_1|^2 + 4|z_2|^2 + 2(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$$

$$= 1 + 4 + 2(1) = 7$$

29. 12

$$\frac{\frac{1}{mn} + \frac{n}{m}}{\frac{1+n^2}{mn}} = \frac{2}{m-n} \rightarrow \text{ตัวส่วนห้ามเป็น 0 ดังนั้น } m \neq 0 \text{ และ } n \neq 0 \text{ และ } m \neq n$$

$$\frac{1+n^2}{mn} = \frac{2}{m-n}$$

$$(1+n^2)(m-n) = 2mn$$

$$m - n + n^2 m - n^3 = 2mn$$

ทุกพจน์ ยกเว้นพจน์แรก หารด้วย n ลงตัว ดังนั้นพจน์แรก (m) ต้องหารด้วย n ลงตัวด้วย

ให้ $m = kn$ จะได้ $kn - n + n^2 kn - n^3 = 2(kn)n$

$$k - 1 + n^2 k - n^2 = 2kn \quad \div n \text{ ตลอด}$$

เอาพจน์ที่มี k มาจับกลุ่มตั้งตัวร่วม

$$n^2 k - 2kn + k - n^2 - 1 = 0$$

บวก 2 ทั้งสองข้าง ให้กลุ่มที่เหลือเข้าสูตรผลต่างกำลังสองได้

$$k(n^2 - 2n + 1) - n^2 + 1 = 2$$

ตั้ง $n-1$ เป็นตัวร่วม

$$k(n-1)^2 - (n-1)(n+1) = 2$$

$$(n-1)(k(n-1) - (n+1)) = 2$$

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{array}$$

2 เขียนเป็นผลคูณของจำนวนเต็มสองจำนวนได้แค่ 4 แบบ

$$\begin{array}{l}
 \text{กรณี } \begin{array}{l} n-1=2 \\ n=3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} k(n-1)-(n+1)=1 \\ k(2)-4=1 \\ k=\frac{5}{2} \times \end{array} \\
 \text{กรณี } \begin{array}{l} n-1=-2 \\ n=-1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} k(n-1)-(n+1)=-1 \\ k(-2)-0=-1 \\ k=\frac{1}{2} \times \end{array} \\
 \text{กรณี } \begin{array}{l} n-1=1 \\ n=2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} k(n-1)-(n+1)=2 \\ k(1)-3=2 \\ k=5 \end{array} \\
 \text{กรณี } \begin{array}{l} n-1=-1 \\ n=0 \end{array} \times \begin{array}{l} k(n-1)-(n+1)=2 \\ k(-1)-1=2 \\ k=-3 \end{array}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{กรณี } \begin{array}{l} n-1=2 \\ n=3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} k(n-1)-(n+1)=1 \\ k(2)-4=1 \\ k=\frac{5}{2} \times \end{array} } \right\} \begin{array}{l}
 \text{เนื่องจาก } k \text{ ต้องเป็นจำนวนเต็ม และ } n \neq 0 \\
 \text{จะเหลือแค่ } n=2, k=5 \text{ เท่านั้นที่ใช้ได้} \\
 \text{ซึ่งจะได้ } m=(2)(5)=10 \\
 \text{ดังนั้น } m+n=10+2=12
 \end{array}$$

30. $-\sqrt{3}$

$$\tan(35^\circ + x^\circ) \tan(25^\circ - x^\circ)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(35^\circ + x^\circ)}{\cos(35^\circ + x^\circ)} \cdot \frac{\sin(25^\circ - x^\circ)}{\cos(25^\circ - x^\circ)} \\
 &= \frac{2 \sin(35^\circ + x^\circ) \sin(25^\circ - x^\circ)}{2 \cos(35^\circ + x^\circ) \cos(25^\circ - x^\circ)} \\
 &= \frac{-(\cos 60^\circ - \cos(10^\circ + 2x^\circ))}{\cos 60^\circ + \cos(10^\circ + 2x^\circ)} \\
 &= \frac{-\frac{1}{2} + \cos(10^\circ + 2x^\circ)}{\frac{1}{2} + \cos(10^\circ + 2x^\circ)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
 \cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B \\
 \cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ให้ } k \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกที่ต่ำที่สุดของ } f &\rightarrow \frac{-\frac{1}{2} + \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ)}{\frac{1}{2} + \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ)} = k \\
 -\frac{1}{2} + \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) &= \frac{k}{2} + k \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) \\
 -\frac{1}{2} - \frac{k}{2} &= k \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) - \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) \\
 \text{ถ้า } k=1 \rightarrow \text{ฝั่งซ้าย} \neq 0 \text{ แต่ฝั่งขวา} = 0 &\quad \left(\begin{array}{l} -\frac{k+1}{2} \\ -\frac{k+1}{2(k-1)} \end{array} \right. \\
 \text{ดังนั้น } k \neq 1 \rightarrow \text{เอา } k-1 \text{ ย้ายไปหารได้} &\quad \begin{array}{l} = (k-1) \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) \\ = \cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) \dots (*) \end{array}
 \end{aligned}$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก จะเห็นว่า $-\frac{k+1}{2(k-1)}$ เป็นลบเสมอ

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก } \cos \text{ มีค่าได้ในช่วง } [-1, 1] \text{ เท่านั้น ดังนั้น } -\frac{k+1}{2(k-1)} &\geq -1 \\
 k+1 &\leq 2(k-1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{คูณลบทั้งสองฝั่ง} \\ \text{ต้องกลับ } \geq \text{ เป็น } \leq \end{array} \right\} \\
 k+1 &\leq 2k-2 \\
 3 &\leq k \rightarrow \text{จะได้ } k \text{ ต่ำสุดคือ } 3
 \end{aligned}$$

แทน $k=3$ ใน (*) จะได้ $\cos(10^\circ + 2\alpha^\circ) = -\frac{3+1}{2(3-1)} = -1$

$$\begin{aligned}
 \text{เนื่องจาก } 0 < \alpha < 90 \text{ จะได้ } 10^\circ + 2\alpha^\circ &= 180^\circ \quad \text{ดังนั้น } \tan(2015^\circ + \alpha^\circ) = \tan(2015^\circ + 85^\circ) \\
 \alpha^\circ &= 85^\circ \\
 &= \tan 2100^\circ \\
 &= \tan(-60^\circ) = -\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

31. $\frac{1}{128}$

$n(E)$: ตาราง 4×4 จะมี 16 ช่อง แต่ละช่องเลือกได้ 2 แบบ (0 หรือ 1) ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= 2^{16}$ แบบ

$n(S)$: แนวคิดคือ

?	?	?	
?	?	?	
?	?	?	

ช่องที่เป็น ? ทั้ง 9 ช่อง จะเลือกใส่ 0 หรือ 1 ใส่ก็ได้

ส่วนช่องที่เหลือ จะโดน “บังคับใส่” ให้ผลรวมแต่ละแถว และแต่ละหลักเป็นคู่

a	b	c	p
d	e	f	q
g	h	i	r
w	x	y	z

กล่าวคือ $a, b, c, \dots, i$ เป็น 0 หรือ 1 ก็ได้

p จะโดนบังคับเป็นค่าที่ทำให้แถวแรกมีผลรวมเป็นคู่: $p = \begin{cases} 0 & , a+b+c \text{ เป็นคู่} \\ 1 & , a+b+c \text{ เป็นคี่} \end{cases}$

ทำนองเดียวกัน q กับ r จะโดนบังคับเป็นค่าที่ทำให้แถว 2 กับแถว 3 มีผลรวมเป็นคู่

ทำนองเดียวกัน w, x, y, z จะโดนบังคับเป็นค่าที่ทำให้ “หลัก” 1, 2, 3, 4 มีผลรวมเป็นคู่

และเมื่อทั้ง 4 หลักมีผลรวมเป็นคู่ และ 3 แถวแรกมีผลรวมเป็นคู่ จะได้แถวที่ 4 มีผลรวมเป็นคู่โดยอัตโนมัติ

(เพราะ ผลรวมแถวที่ 4 = ผลรวมทั้ง 4 หลัก - ผลรวม 3 แถวแรก)

นับจำนวนแบบ $\rightarrow a, b, c, \dots, i$ รวม 9 ช่อง เป็นได้ช่องละ 2 แบบ แต่ช่องที่เหลือเลือกไม่ได้ $\rightarrow n(S) = 2^9$

$$\text{จะได้ความน่าจะเป็น} = \frac{2^9}{2^{16}} = \frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$$

32. 9

ข้อนี้ ต้องสังเกตว่า การบวกและคูณเมทริกซ์ $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ จะเหมือนกับการบวกและคูณจำนวนเชิงซ้อน $a + bi$ ดังนี้

บวก

คูณ

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & -(b+d) \\ b+d & a+c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & -d \\ d & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac-bd & -(ad+bc) \\ ad+bc & ac-bd \end{bmatrix}$$

$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i$$

$$(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$$

ดังนั้น (a, b) ที่ทำให้ $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ เป็นคำตอบของ $M^9 + M^7 + M^5 + M^3 + M = 0_{2 \times 2}$

จะทำให้ $z = a + bi$ เป็นคำตอบของ $z^9 + z^7 + z^5 + z^3 + z = 0$ ด้วย

$$\begin{aligned} (z)(z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1) &= 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ z=0 \quad \quad \quad z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 &= 0 \\ (z^2 - 1)(z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1) &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{คูณ } z^2 - 1 \text{ ทั้ง} \\ \text{สองข้างเพื่อจัดรูป} \end{array} \right\} \\ \begin{array}{l} z^{10} - 1 \\ z^{10} \end{array} &= 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

เนื่องจาก รากที่ 10 ของ 1 จะมี 10 ราก ดังนั้น $z^{10} = 1$ จะมี 10 คำตอบ

หาจำนวนคำตอบ โดยไล่อ้อนกลับ ดังนี้ $\frac{z^{10}}{z^{10} - 1} = 1 \rightarrow 10$ คำตอบ

$$\begin{aligned} \frac{z^{10}}{z^{10} - 1} &= 0 \\ (z^2 - 1)(z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1) &= 0 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 2 \text{ คำตอบ} \quad \quad \quad 1 \text{ กับ } -1 \text{ แทนแล้ว } &\neq 0 \\ (1 \text{ กับ } -1) \quad \quad \quad \text{ดังนั้น วงเล็บนี้ต้องมี } 10 - 2 &= 8 \text{ คำตอบ} \end{aligned}$$

ดังนั้น $z^8 + z^6 + z^4 + z^2 + 1 = 0$ มี 8 คำตอบ รวมกับ $z = 0$ อีกคำตอบ ได้เป็น 9 คำตอบ

33. $\frac{100}{9}$

จาก ความแปรปรวนประชากร = 11 จะได้ $\frac{\sum x_i^2}{100} - \left(\frac{\sum x_i}{100}\right)^2 = 11$

$$\frac{\sum x_i^2}{100} - \frac{\sum x_i^2 + 2\sum x_i x_j}{100^2} = 11$$

$$S_{\text{ประชากร}}^2 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2$$

$$\begin{aligned} (\sum x_i)^2 &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \\ &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_2 x_1 + x_2^2 + x_2 x_3 + \dots \\ &\text{จะเห็นว่า } x_1 x_2 \text{ กับ } x_2 x_1 \text{ จะกลายเป็น } 2x_1 x_2 \\ &\quad x_1 x_3 \text{ กับ } x_3 x_1 \text{ จะกลายเป็น } 2x_1 x_3 \dots \end{aligned}$$

$$\frac{100 \sum x_i^2 - (\sum x_i^2 + 2 \sum x_i x_j)}{100^2} = 11$$

$$99 \sum x_i^2 - 2 \sum x_i x_j = 11 \cdot 100^2 \quad \dots (*)$$

$$\begin{aligned} \text{และจากสูตร } S_{\text{ตัวอย่าง}}^2 &= \frac{\sum y_i^2 - N\bar{y}^2}{N-1} \\ &= \frac{\sum y_i^2}{14} - \frac{15}{14} \left(\frac{\sum y_i}{15} \right)^2 \\ &= \frac{\sum y_i^2}{14} - \frac{\sum y_i^2 + 2 \sum y_i y_j}{14 \cdot 15} \\ &= \frac{15 \sum y_i^2 - (\sum y_i^2 + 2 \sum y_i y_j)}{14 \cdot 15} \\ &= \frac{14 \sum y_i^2 - 2 \sum y_i y_j}{14 \cdot 15} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{หรือจัดรูปจาก } S_{\text{ตัวอย่าง}}^2 &= \sum \frac{(y_k - \bar{y})^2}{N-1} \\ &= \frac{\sum y_k^2 - 2\bar{y} \sum y_k + \sum \bar{y}^2}{N-1} \\ &= \frac{\sum y_k^2 - 2\bar{y}(N\bar{y}) + N\bar{y}^2}{N-1} \\ &= \frac{\sum y_k^2 - N\bar{y}^2}{N-1} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } z \text{ แต่ละตัว จะหาได้จาก } \frac{14 \sum y_i^2 - 2 \sum y_i y_j}{14 \cdot 15}$$

โจทย์ถาม $\bar{z} \rightarrow$ ต้องเอา z ทั้ง $\binom{100}{15}$ ตัวมาบวกกัน แล้วหารด้วย $\binom{100}{15}$

เนื่องจาก y_i แต่ละตัว จะกระจายอยู่ใน z ทั้ง $\binom{100}{15}$ ตัวอย่างเท่าๆกัน ดังนั้น เราสามารถรวม y_i ในกลุ่มตัวอย่าง ทั้ง $\binom{100}{15}$ กลุ่ม แล้วจับกลุ่มใหม่ให้เป็น x_i ในกลุ่มประชากร โดยการเทียบสัดส่วนของจำนวนพจน์ได้ ดังนี้

$$z = \frac{14 \sum y_i^2 - 2 \sum y_i y_j}{14 \cdot 15}$$

$\sum y_i^2$ มี y_i^2 กลุ่มละ 15 ตัว บวกกัน $\binom{100}{15}$ กลุ่ม

จับกลุ่มใหม่เป็น $\sum x_i^2$ ที่มี x_i^2 กลุ่มละ 100 ตัว ได้ $\binom{100}{15} \cdot \frac{15}{100}$ กลุ่ม

$$\sum z = \frac{14 \cdot \binom{100}{15} \cdot \frac{15}{100} \sum x_i^2 - 2 \binom{100}{15} \cdot \frac{\binom{15}{2}}{\binom{100}{2}} \sum x_i x_j}{14 \cdot 15}$$

$\sum y_i y_j$ มี $y_i y_j$ กลุ่มละ $\binom{15}{2}$ ตัว บวกกัน $\binom{100}{15}$ กลุ่ม

จับกลุ่มใหม่เป็น $\sum x_i x_j$ ที่มี $x_i x_j$ กลุ่มละ $\binom{100}{2}$ ตัว ได้ $\binom{100}{15} \cdot \frac{\binom{15}{2}}{\binom{100}{2}}$ กลุ่ม

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \frac{\sum z}{\binom{100}{15}} &= \frac{14 \cdot \frac{15}{100} \sum x_i^2 - 2 \cdot \frac{15 \cdot 14}{100 \cdot 99} \sum x_i x_j}{14 \cdot 15} \\ &= \frac{1}{100} \cdot \sum x_i^2 - 2 \cdot \frac{1}{100 \cdot 99} \sum x_i x_j \\ &= \frac{99 \sum x_i^2 - 2 \sum x_i x_j}{100 \cdot 99} \\ &= \frac{11 \cdot 100^2}{100 \cdot 99} \quad \leftarrow \text{จาก } (*) \\ &= \frac{100}{9} \end{aligned}$$

$$34. \frac{37}{4}$$

หา $B : \left[\frac{3}{\sqrt{x}} \right]$ คือ การตัดเศษลงของ $\frac{3}{\sqrt{x}} \rightarrow$ จะแบ่ง $\int_0^1 \left[\frac{3}{\sqrt{x}} \right] dx$ ตามค่าต่างๆที่เป็นจำนวนเต็มของ $\frac{3}{\sqrt{x}}$

จะเห็นว่า เมื่อ $x \in (0, 1)$ จะได้ $\frac{3}{\sqrt{x}} \geq 3 \rightarrow$ เมื่อ $\frac{3}{\sqrt{x}} = 3$ จะได้ $x = 1$

เมื่อ $\frac{3}{\sqrt{x}} = 4$ จะได้ $x = \left(\frac{3}{4} \right)^2$

เมื่อ $\frac{3}{\sqrt{x}} = 5$ จะได้ $x = \left(\frac{3}{5} \right)^2$

:

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } \int_0^1 \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx &= \int_{\left(\frac{3}{4}\right)^2}^1 \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx + \int_{\left(\frac{3}{5}\right)^2}^{\left(\frac{3}{4}\right)^2} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx + \int_{\left(\frac{3}{6}\right)^2}^{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \left\lfloor \frac{3}{\sqrt{x}} \right\rfloor dx + \dots \\
&= \int_{\left(\frac{3}{4}\right)^2}^1 3 dx + \int_{\left(\frac{3}{5}\right)^2}^{\left(\frac{3}{4}\right)^2} 4 dx + \int_{\left(\frac{3}{6}\right)^2}^{\left(\frac{3}{5}\right)^2} 5 dx + \dots \\
&= 3 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \right) + 4 \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \right) + 5 \left(\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{6}\right)^2 \right) + \dots \\
&= 3(1) - 3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 4\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 5\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{6}\right)^2 + \dots \\
&= 3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 + \dots \\
&= 3 + 9 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

โจทย์ถาม $12A - B$ ดังนั้น ต้องจัดรูป A ให้คล้ายๆ กัน จะได้ตัดกันได้

$$\begin{aligned}
\text{หา } A: \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\
&= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \right) - \frac{1}{2^2} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\
&= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } 12A - B &= 12 \cdot \frac{3}{4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - \left(3 + 9 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \right) \\
&= 9 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots \right) - 3 - 9 \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots \right) \\
&= 9 \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \right) - 3 \\
&= 9 + \frac{9}{4} + 1 - 3 = \frac{37}{4}
\end{aligned}$$

35. 719.5

จะหาทั้งหมด $\sum_{n=1}^{3002} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{3003} \right)$ ก่อน แล้วค่อยหักด้วย $\sin^2 \left(\frac{k\pi}{3003} \right)$ ที่ ห.ร.ม. $(k, 3003) \neq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3002} \sin^2 \left(\frac{n\pi}{3003} \right) &= \sum_{n=1}^{3002} \frac{1 - \cos \left(\frac{2n\pi}{3003} \right)}{2} \\
&= \sum_{n=1}^{3002} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{3002} \cos \left(\frac{2n\pi}{3003} \right) \quad \dots (*)
\end{aligned}$$

$ \begin{aligned} \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta \\ \sin^2 \theta &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \end{aligned} $

สังเกตว่า $\sum_{n=1}^{3002} \cos \left(\frac{2n\pi}{3003} \right)$ คล้ายกับผลบวกของ “รากที่ 3003 ของ 1”

$$\begin{aligned}
\text{รากที่ 3003 ของ 1} &= \text{รากที่ 3003 ของ 1} \operatorname{cis} 0 \rightarrow \text{รากตัวแรก} = \sqrt[3003]{1} \operatorname{cis} \frac{0}{3003} = 1 \operatorname{cis} 0 \\
&\rightarrow \text{รากที่เหลือ} = 1 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3003}, 1 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3003}, \dots, 1 \operatorname{cis} \frac{2(3002)\pi}{3003}
\end{aligned}$$

แต่จากสูตรผลบวกรากของสมการ $z^{3003} = 1$ จะได้ว่า รากทั้ง 3003 ตัว ต้องบวกกันได้ 0

$$\text{ดังนั้น } 1 \operatorname{cis} 0 + 1 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3003} + 1 \operatorname{cis} \frac{4\pi}{3003} + \dots + 1 \operatorname{cis} \frac{2(3002)\pi}{3003} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{คิดเฉพาะส่วนจริงที่เป็น } \cos \text{ จะได้ } 1 \cos 0 + 1 \cos \frac{2\pi}{3003} + 1 \cos \frac{4\pi}{3003} + \dots + 1 \cos \frac{2(3002)\pi}{3003} &= 0 \\ 1 + \sum_{n=1}^{3002} \cos\left(\frac{2n\pi}{3003}\right) &= 0 \\ \sum_{n=1}^{3002} \cos\left(\frac{2n\pi}{3003}\right) &= -1 \end{aligned}$$

$$\text{แทนใน (*) จะได้ } \sum_{n=1}^{3002} \sin^2\left(\frac{n\pi}{3003}\right) = \frac{3002}{2} - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3003}{2}$$

ถัดมา หัก $\sin^2\left(\frac{k\pi}{3003}\right)$ ที่ ห.ร.ม. $(k, 3003) \neq 1$

เนื่องจาก $3003 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ ดังนั้น k ต้องหารด้วย 3 หรือ 7 หรือ 11 หรือ 13 ลงตัว

$$\begin{aligned} \text{หารด้วย 3 ลงตัว} \rightarrow \text{ต้องหัก } \sin^2\left(\frac{3\pi}{3003}\right) + \sin^2\left(\frac{6\pi}{3003}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{3003}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{3000\pi}{3003}\right) \\ = \sin^2\left(\frac{\pi}{1001}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{1001}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{1001}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{1000\pi}{1001}\right) \\ = \sum_{n=1}^{1000} \sin^2\left(\frac{n\pi}{1001}\right) \\ = \frac{1001}{2} \end{aligned}$$

ทำแบบเดียวกับที่เคยทำ $\sum_{n=1}^{3002} \sin^2\left(\frac{n\pi}{3003}\right) = \frac{3003}{2}$

$$\begin{aligned} \text{หารด้วย 7 ลงตัว} \rightarrow \text{ต้องหัก } \sin^2\left(\frac{7\pi}{3003}\right) + \sin^2\left(\frac{14\pi}{3003}\right) + \sin^2\left(\frac{21\pi}{3003}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{2996\pi}{3003}\right) \\ = \sin^2\left(\frac{\pi}{429}\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{429}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{429}\right) + \dots + \sin^2\left(\frac{428\pi}{429}\right) \\ = \sum_{n=1}^{428} \sin^2\left(\frac{n\pi}{429}\right) \\ = \frac{429}{2} \end{aligned}$$

$$\text{ทำแบบเดียวกัน จะได้ หารด้วย 11 ลงตัว} \rightarrow \text{ต้องหัก } \frac{\frac{3003}{11}}{2} = \frac{283}{2}$$

$$\text{หารด้วย 13 ลงตัว} \rightarrow \text{ต้องหัก } \frac{\frac{3003}{13}}{2} = \frac{231}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ผลรวม หลังหัก} &= \frac{3003}{2} - \frac{1001}{2} - \frac{429}{2} - \frac{283}{2} - \frac{231}{2} \\ &= \frac{3003}{2} \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13}\right) \end{aligned}$$

แต่จะเห็นว่า มีบางตัวที่โดน "หักซ้ำ" (เช่น $\sin^2\left(\frac{21\pi}{3003}\right)$ จะโดนหักทั้ง ตอนหาร 3 ลงตัว และ ตอนหาร 7 ลงตัว)

ดังนั้น จะใช้หลัก Inclusive - Exclusive เพื่อชดเชยตัวซ้ำ จะได้คำตอบ คือ

$$\begin{aligned} &\text{หัก หารลงตัว ตัวเดียว} \quad \text{รวม หารลงตัว สองตัว} \quad \text{หัก หารลงตัว สามตัว} \\ \frac{3003}{2} &\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{3 \cdot 11} + \frac{1}{3 \cdot 13} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{7 \cdot 13} + \frac{1}{11 \cdot 13} - \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11} - \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 13} - \frac{1}{3 \cdot 11 \cdot 13} - \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 13}\right) \end{aligned}$$

$\downarrow$ หาร 3 และ 7 ลงตัว $\downarrow$ หาร 3 และ 7 และ 11 ลงตัว

หมายเหตุ : รอบสุดท้าย "หารลงตัว สี่ตัว" ไม่ต้องคิด เพราะไม่มี $\sin^2\left(\frac{3003\pi}{3003}\right)$ ตั้งแต่แรก

จะกระจาย 3003 แล้วคิดเลขก็ได้ หรือจะจับกลุ่มตั้งตัวร่วม (เป็นแบบเดียวกับฟังก์ชันฟอยเลอร์) ก็ได้

$$\begin{aligned} \text{จะได้} &= \frac{3003}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{7}\right) \left(1 - \frac{1}{11}\right) \left(1 - \frac{1}{13}\right) - \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \right] \\ &= \frac{3003}{2} \left[\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{11} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \right] = \frac{3003}{2} \left[\frac{1439}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13} \right] = \frac{1439}{2} = 719.5 \end{aligned}$$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Gtr Ping จาก GTRmath สำหรับข้อสอบครับ

ขอบคุณ เว็บ MathCenter สำหรับเฉลยคำตอบ และวิธีทำ