

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 57)

วันอาทิตย์ที่ 16 พฤศจิกายน 2557 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1

1. ถ้า A, B และ C เป็นสับเซตใดๆของเอกภพสัมพัทธ์ U แล้ว $[(A - B) - C] \cup (A \cap C)$ ตรงกับข้อใด

- ก. $(A - C) - B$ ข. $A - (C - B)$ ค. $A - (B - C)$ ง. $A - (B \cap C)$

2. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจริงขนาด 5×5 ซึ่ง $AB = BA$, $A^2 = A$, $B^2 = B$ และ $\det(A - B) = 2557$ ค่าของ $\det(A + B)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- ก. 1 ข. -1 ค. 5 ง. 2557

3. ข้อใดต่อไปนี้ เป็นจริงสำหรับอนุกรม $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}}$

- ก. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}$ ข. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ 1
 ค. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$ ง. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

4. กำหนดให้ $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

(2) เรนจ์ของ f เท่ากับ $(-1, 1)$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง แต่ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ แต่ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) ต่างเป็นเท็จ

5. กำหนดให้ $\vec{v} = (2, -1)$ ผลบวกของเวกเตอร์ $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ทั้งหมดที่ $|\vec{u}| = 1$ และมุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เท่ากับ $\arccos(1/\sqrt{5})$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5})$

ข. $(-\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$

ค. $(\frac{4}{5}, \frac{-8}{5})$

ง. $(-\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$

6. กำหนดความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ดังต่อไปนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y + 3x = 4x^3\} \text{ และ } r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 3y = 4y^3\}$$

จำนวนสมาชิกของโดเมนของความสัมพันธ์ $r_1 \cap r_2$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. 3

ค. 6

ง. 9

7. ถ้าจุด $(-2, 11)$, $(0, 5)$, $(2, 3)$ เป็นจุดที่อยู่บนพาราโบลาที่มีแกนสมมาตรขนานกับแกน Y และมีเส้นตรง L เป็นเส้นบังคับ (directrix) ของพาราโบลา แล้วระยะตั้งฉากจากจุด $(-2, 11)$ ไปยังเส้นตรง L มีค่าเท่ากับข้อใด
- ก. $\sqrt{72.25}$ ข. $\sqrt{80}$ ค. $\sqrt{80.25}$ ง. $\sqrt{90}$

8. กำหนดให้ a และ b เป็นรากทั้งหมดของสมการ $8^x - 2(4^x) - 2^{x+3} + 15 = 0$ โดยที่ $a < b$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
- ก. $0 < a < \frac{1}{2}$ และ $\frac{1}{2} < b < 1$ ข. $\frac{1}{2} < a < 1$ และ $1 < b < 2$
- ค. $0 < a < 1$ และ $0 < b < 1$ ง. $1 < a < 2$ และ $1 < b < 2$

9. ถ้าให้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล $X = \{x_1, x_2, \dots, x_{17}\}$ และ $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_{17}\}$ เป็นไปตามสมการ $Y = a + bX$ โดยที่ X เป็นตัวแปรอิสระ และ Y เป็นตัวแปรตาม
- ถ้า $\sum_{i=1}^{17} x_i = 85$, $\sum_{i=1}^{17} y_i = 153$ และ ความแปรปรวนของ X มีค่าเท่ากับ 1.73 แล้ว ค่าพยากรณ์ของ Y เมื่อ $X = 5$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- ก. 5 ข. 7 ค. 9 ง. ข้อมูลไม่เพียงพอ

13. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มีขนาดของ $\angle ACB$ เกิน $\frac{3\pi}{4}$ ค่าของ $(2 + \tan \frac{A}{2})(2 + \tan \frac{B}{2})$ อยู่ในช่วงเปิดใดต่อไปนี

(ก) (4, 5)

(ข) (5, 6)

(ค) (6, 7)

(ง) (7, 8)

14. กำหนดให้ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ และ $\tan(\alpha + \beta) = \tan \alpha + \cot \alpha + \tan \beta + \cot \beta$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องเกี่ยวกับอนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ $1 + \tan \alpha \tan \beta + \tan^2 \alpha \tan^2 \beta + \tan^3 \alpha \tan^3 \beta + \dots$

ก. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

ข. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

ค. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2$

ง. เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$

15. สมการของตัวแปรเชิงซ้อนในข้อใดต่อไปนี้ มีรากซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1

ก. $z^{2014} - z^{2013} - 1 = 0$

ข. $z^{2557} - z^{2556} - 1 = 0$

ค. $z^{2015} - z^{2014} - 1 = 0$

ง. $z^{2558} - z^{2557} - 1 = 0$

ตอนที่ 2

16. กำหนดให้ $A(3, 4)$ เป็นจุดบนวงกลม C ซึ่งมี C เป็นจุดศูนย์กลาง ให้ l เป็นเส้นผ่านศูนย์กลางเส้นหนึ่งของ C โดยมี $B(0, 0)$ เป็นจุดบน l และ V เป็นจุดปลายข้างหนึ่งของ l สมมติว่าอัตราส่วนของความยาวของ $\overline{BC}$ และ $\overline{BV}$ เป็น $2 : 1$ จงหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีขนาดเล็กที่สุดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขข้างต้น

17. ข้อมูลชุดหนึ่งคือ $2, 5, 7, x, y$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 4 และ x, y มีค่าต่างกันอย่างน้อย 6 จงหาค่าความแปรปรวนที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้ของข้อมูลชุดนี้

18. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $1 + m + m^2 = n^3$ จงหาผลคูณ mn น้อยสุด

19. กำหนดให้ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $x^2 + 6x + y^2 + 8y = 875$ จงหาค่า x มากสุดที่เป็นไปได้

20. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\sqrt{x^{\log \sqrt{x}}} = 10000$

21. ในตารางหมากรุกขนาด 8×8 ที่ระบายแต่ละช่องในกระดานด้วยสีขาวสลับสีดำ จงหาจำนวนวิธีในการเลือกช่องมา 56 ช่องจากกระดานนี้ โดยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้
1. ช่องสีดำทุกช่องถูกเลือกทั้งหมด และ
 2. ในแต่ละแถวตามแนวดิ่ง และแนวนอน จะเลือกมา 7 ช่องพอดี

22. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ $(\bar{z})^{2014} = z$ เท่ากับเท่าใด

23. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC โดยมีจุดยอดทั้งสามอยู่บนวงกลมซึ่งมี O เป็นจุดศูนย์กลาง ถ้า $AC = 9$ และ $AB = 5$ แล้ว $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{BC}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. บริษัทหนึ่งของบริษัทหนึ่งต้องการซื้อรถบรรทุกทั้งหมด 25 คัน โดยที่รถเหล่านี้มีความจุรวมกัน 28,000 ลูกบาศก์ฟุต โดยรถบรรทุกที่บริษัทต้องการมีอยู่สามขนาด ได้แก่ ขนาดเล็ก ขนาดกลาง และขนาดใหญ่ โดยที่รถบรรทุกแต่ละชนิดมีความจุ 350, 700 และ 1400 ลูกบาศก์ฟุต ตามลำดับ ถ้ามีเงื่อนไขว่าต้องซื้อรถบรรทุกทุกชนิดในการซื้อครั้งนี้ จงพิจารณาว่าจำนวนรถขนาดใหญ่ที่น้อยที่สุดเท่าที่เป็นไปได้ในการซื้อครั้งนี้เป็นเท่าใด

25. จงหาจำนวนของจำนวนนับ N ทั้งหมดซึ่งมีสมบัติว่าจำนวนเฉพาะที่หาร N ลงตัวคือ 3 และ 7 เท่านั้น และมีจำนวนเต็มบวก $x > 1$ ซึ่งทำให้ $N^{(x-1)/2} < 10^x < N$

ตอนที่ 3

26. ให้ A เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชัน $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ที่ถูกกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{ax^2+4}}{bx-1} & , x \leq 0 \\ \frac{\sin ax}{x} + b\left(\frac{x-3\pi}{\pi}\right) & , 0 < x \leq \pi \\ \sqrt{(x-\pi)^2+1} - x + c^2 & , \pi < x \end{cases}$$

มีความต่อเนื่องบน $\mathbb{R}$ และ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A และ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

(ข้อเสนอนี้ : สำหรับ $a \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$)

27. กำหนดให้ $f(x) = 24x^2 + 2014x - 2557$ ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัส $f(x)$ ที่จุด $(2553, f(2553))$ และ $(2557, f(2557))$ ตามลำดับ จงหาพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f เส้นตรง L_1 และเส้นตรง L_2

28. จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R}, (x - y < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon)$$

29. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ซึ่งมีสมบัติว่า $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ

$$A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \text{ถ้า } A^{2557} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{แล้ว จงหาค่าของ } a + b + c$$

30. จงหาจำนวนจริง a ทั้งหมดที่ทำให้สมการ $|ax - 1| = ax^2 + (1 - 2a)x + 1$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริงเพียงคำตอบเดียว

31. คณะกรรมการของชมรมคณิตศาสตร์ที่มหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งหนึ่งประกอบไปด้วย นิสิตชั้นปีที่ 1 ชั้นปีที่ 2 ชั้นปีที่ 3 และชั้นปีที่ 4 อยู่จำนวน 4, 4, 5, และ 7 คนตามลำดับ ชมรมคณิตศาสตร์สุ่มเลือกคณะกรรมการจำนวน 6 คน จากคณะกรรมการทั้งหมดเพื่อเป็นกรรมการตัดสินการประกวดโครงงานคณิตศาสตร์ จงหาความน่าจะเป็นที่กรรมการตัดสินโครงงานคณิตศาสตร์ประกอบไปด้วยนิสิตจากทุกชั้นปี (ตอบในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ)

32. กำหนดให้ $\mathbb{I}^+$ แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมด จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A เมื่อ

$$A = \{ (x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{I}^+, x + y + z = 2557, x \leq y + z, y \leq x + z \text{ และ } z \leq x + y \}$$

33. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{\tan\left(\frac{(2n-1)\pi}{360}\right)}}}$ เมื่อ $n = 1, 2, \dots, 90$ จงหาค่าของ $\frac{\sqrt{1+a_1} + \sqrt{1+a_2} + \dots + \sqrt{1+a_{90}}}{\sqrt{1-a_1} + \sqrt{1-a_2} + \dots + \sqrt{1-a_{90}}}$

34. กำหนดให้ $f(x)$ มีค่าเท่ากับจำนวนเต็มค่าน้อยสุดที่มีค่าไม่น้อยกว่า $\operatorname{cosec} \frac{1}{x}$
 จงหาค่าของ $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2014 \text{ ตัว}}(2557)$

35. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z_1, z_2, \dots, z_{2014}$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $z_j \neq 1$ ทุก $j = 1, 2, \dots, 2014$

(2) มีจำนวนเชิงซ้อน $w = x + iy$ ซึ่ง $y \neq 0$ ที่ทำให้ $\frac{w - \bar{w}z_j}{1 - z_j}$ เป็นจำนวนจริง ทุก $j = 1, 2, \dots, 2014$

(3) $\left| \sum_{j=1}^{2014} \frac{1}{z_j} \right| = \frac{1}{1007}$

จงหาค่าของ $\left| \sum_{j=1}^{2014} z_j \right|$

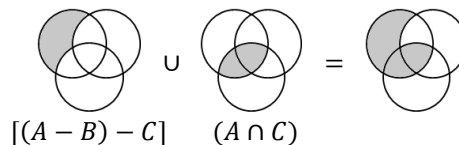
เฉลย

- | | | | |
|------|----------------|---------------------|-----------------------|
| 1. ค | 10. ข | 19. 21 | 28. $f(x) = c$ |
| 2. ก | 11. ก | 20. $10^4, 10^{-4}$ | 29. -10 |
| 3. ง | 12. ค | 21. 576 | 30. 0, 1 |
| 4. ก | 13. ก | 22. 2016 | 31. $\frac{301}{646}$ |
| 5. ก | 14. ง | 23. 28 | 32. $\binom{1279}{2}$ |
| 6. ง | 15. ค | 24. 16 | 33. $1 + \sqrt{2}$ |
| 7. ก | 16. (1.2, 1.6) | 25. 12 | 34. 4571 |
| 8. ข | 17. 6.8 | 26. 2, -3 | 35. $\frac{1}{1007}$ |
| 9. ค | 18. 126 | 27. 128 | |

แนวคิด

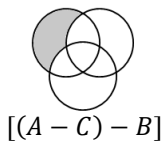
1. ค

วาดรูป จะได้ $[(A - B) - C] \cup (A \cap C)$ ดังรูป

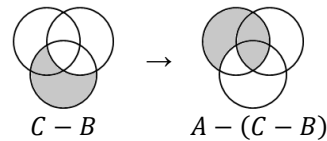


วาดรูปตัวเลือกทั้ง 4 ข้อ จะเห็นว่ารูปของโจทย์ จะตรงกับข้อ ค

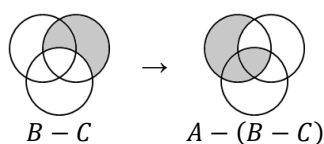
- ก.



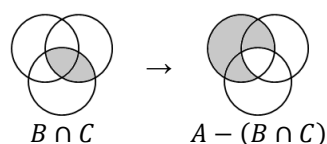
- ข.



- ค.



- ง.



2. ก

จาก $A^2 = A$ และ $B^2 = B$ ลบสองสมการนี้จะได้ $A^2 - B^2 = A - B \dots (*)$

เนื่องจาก $AB = BA$ ดังนั้น $(A - B)(A + B) = A^2 + AB - BA - B^2 = A^2 - B^2$

แทนใน (*) จะได้ $(A - B)(A + B) = A - B$

จาก $\det(A - B) = 2557 \neq 0 \rightarrow$ หา $(A - B)^{-1}$ ได้ $\rightarrow$ เอา $(A - B)^{-1}$ คูณตลอด เหลือ $A + B = I$

ดังนั้น $\det(A + B) = \det I = 1$

3. ง

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} &= \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} \quad (\text{แยกได้เพราะ } k \text{ เป็นบวก}) \\ &= \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k^2+k}} &= \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{4}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

4. ก

(1) จะพิสูจน์ว่า ถ้า $f(a) = f(b)$ แล้ว $a = b$ ให้ $\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}}$ เนื่องจากตัวส่วนเป็นบวกเสมอ ดังนั้น ตัวเศษ คือ a กับ b ต้องมีเครื่องหมายบวกลบเหมือนกันยกกำลังสอง จะได้ $\frac{a^2}{a^2+1} = \frac{b^2}{b^2+1}$ กลับเศษส่วน จะได้ $\frac{a^2+1}{a^2} = \frac{b^2+1}{b^2}$ แยกเศษส่วนได้ $1 + \frac{1}{a^2} = 1 + \frac{1}{b^2}$ ตัด 1 สองข้างได้ $\frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$ ดังนั้น $a^2 = b^2$ และจะได้ $a = \pm b$ แต่ a กับ b ต้องมีเครื่องหมายเหมือนกัน ดังนั้น $a = b$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1 $\rightarrow$ (1) ถูก(2) จะแบ่ง 3 กรณี คือ $x > 0$, $x = 0$ และ $x < 0$ กรณี $x = 0$ จะได้ $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2+1}} = 0$ กรณี $x > 0$ จะได้ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}$ จาก $x^2 \in (0, \infty) \rightarrow \frac{1}{x^2} \in (0, \infty) \rightarrow 1 + \frac{1}{x^2} \in (1, \infty) \rightarrow \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \in (0, 1) \rightarrow \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} \in (0, 1)$ กรณี $x < 0$ จะได้ $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+1}}$ (เพราะ $\sqrt{x^2}$ เป็นบวกเสมอ) $= -\sqrt{\frac{x^2}{x^2+1}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}$ คิดแบบกรณีที่แล้ว จะได้ $\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} \in (0, 1)$ ดังนั้น $-\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}} \in (-1, 0)$ รวม 3 กรณี จะได้ เรนจ์ $= \{0\} \cup (0, 1) \cup (-1, 0) = (-1, 1)$

5. ก

ให้ $\vec{u} = (a, b)$ จาก $|\vec{u}| = 1$ จะได้ $\sqrt{a^2 + b^2} = 1 \rightarrow a^2 + b^2 = 1 \dots (*)$ และจาก $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \theta = (1) (\sqrt{2^2 + (-1)^2}) \left(\cos \left(\arccos \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right) = (1)(\sqrt{5}) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 1$ แต่ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (a, b) \cdot (2, -1) = a(2) + b(-1) = 2a - b$ ดังนั้น $2a - b = 1$ ย้ายข้างจะได้ $b = 2a - 1$ แทนใน (*) จะได้ $\begin{aligned} a^2 + (2a - 1)^2 &= 1 \\ a^2 + 4a^2 - 4a + 1 &= 1 \\ a(5a - 4) &= 0 \end{aligned}$ จะได้ $a = 0, \frac{4}{5}$ แทนใน $b = 2a - 1$ จะได้ $b = -1, \frac{3}{5} \rightarrow \vec{u} = (0, -1), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ จะได้ผลบวก $\vec{u} = \left(0 + \frac{4}{5}, -1 + \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

6. ง

ต้องการจุดตัด ระหว่าง $y + 3x = 4x^3$ กับ $x + 3y = 4y^3$ สังเกตว่าสมการหนึ่งได้จากการเอาอีกสมการมาสลับ x สลับ $y \rightarrow$ สองสมการนี้ เป็นอินเวอร์สซึ่งกันและกันวาดกราฟ $y + 3x = 4x^3$ แบบคร่าวๆ จัดรูปได้ $y = 4x^3 - 3x \rightarrow$ ตัดแกน x ที่ $0 = 4x^3 - 3x$
 $0 = x(4x^2 - 3)$ และหาจุดสูงสุดต่ำสุด $y' = 12x^2 - 3 = 0$

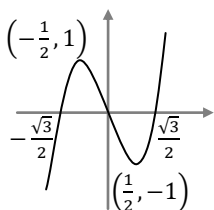
$$3(4x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

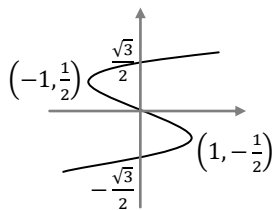
$$\rightarrow \text{แทนหา } y \text{ ได้ } \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$x = 0, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

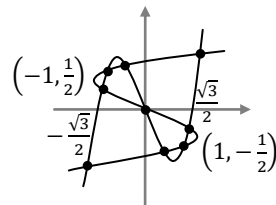
ใช้จุดตัดแกน กับ จุดสูงสุดต่ำสุด
วาดกราฟ $y + 3x = 4x^3$ ได้



พลิกกราฟ หาค้นเวอร์ส จะได้
กราฟ $x + 3y = 4x^3$ คือ



ซ้อนกราฟ หาจุดตัด เนื่องจาก
 $\frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ จะได้จุดตัดดังรูป



จะเห็นว่า มีจุดตัดทั้งหมด 9 จุด $\rightarrow$ จะได้ $n(r_1 \cap r_2) = 9$

7. ก

สมมติให้สมการพาราโบลา คือ $y = ax^2 + bx + c$ แทนจุดทั้งสาม จะได้

$$\begin{aligned} 11 &= 4a - 2b + c & \dots(1) \\ 5 &= & c & \dots(2) \\ 3 &= 4a + 2b + c & \dots(3) \end{aligned}$$

(3) - (1) จะได้ $b = -2$, แทน b, c ใน (1) จะได้ $a = \frac{1}{2}$

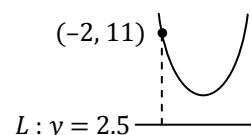
จะได้สมการพาราโบลา คือ $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$ จัดรูปได้

$$\begin{aligned} 2y - 10 &= x^2 - 4x \\ 2y - 10 + 2^2 &= (x - 2)^2 \\ 4\left(\frac{1}{2}\right)(y - 3) &= (x - 2)^2 \end{aligned}$$

จะได้พาราโบลาหงาย จุดยอด $(2, 3)$, ระยะโฟกัส $c = \frac{1}{2}$

ดังนั้น ไคเรตริก คือ $y = 3 - \frac{1}{2} = 2.5$

จะได้ระยะตั้งฉาก จาก $(-2, 11)$ คือ $11 - 2.5 = 8.5 = \sqrt{8.5^2} = \sqrt{72.25}$



8. ข.

ให้ $k = 2^x$ จะได้ $k^3 - 2k^2 - 8k + 15 = 0$

แยกตัวพหุนามพิเศษ จะเห็นว่าแทน $k = 3$ จะได้ $27 - 18 - 24 + 15 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} 3 & 1 & -2 & -8 & 15 \\ & & 3 & 3 & -15 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & 0 \end{array}$$

หารสังเคราะห์ จะได้ $(k - 3)(k^2 + k - 5) \rightarrow k = 3, \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$

แต่ $k = 2^x$ เป็นลบไม่ได้ $\rightarrow \frac{-1 - \sqrt{21}}{2}$ ใช้ไม่ได้ $\rightarrow$ แทนค่า k กลับ จะได้ $2^x = 3, \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$

ถ้า $2^x = 3$ เนื่องจาก $2^1 < 3 < 2^2$ ดังนั้น $1 < x < 2$

ถ้า $2^x = \frac{-1 + \sqrt{21}}{2}$ เนื่องจาก $4 < \sqrt{21} < 5$ ดังนั้น $\frac{3}{2} < \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < 2$

และเนื่องจาก $2^{\frac{1}{2}} \sim 1.414 < \frac{3}{2}$ ดังนั้น $2^{\frac{1}{2}} < \frac{-1 + \sqrt{21}}{2} < 2^1$ ดังนั้น $\frac{1}{2} < x < 1$

ดังนั้น คำตอบมี 2 ค่า โดยจะอยู่ในช่วง $(1, 2)$ และ $(\frac{1}{2}, 1)$ $\rightarrow$ ตอบ ข.

9. ค

จาก $\sum x_i = 85$ จะได้ $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} = \frac{85}{17} = 5$

และจากความแปรปรวน $= 1.73$ จะได้ $1.73 = \frac{\sum x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{17} - 5^2$

แก้หา $\sum x_i^2$ จะได้ $\sum x_i^2 = (1.73 + 5^2)(17) = (26.73)(17)$

แทนในสูตร $\sum y_i = aN + b\sum x_i$ จะได้ $153 = a(17) + b(85) \dots(1)$

$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x_i^2$ $\sum x_i y_i = a(85) + b(26.73)(17) \dots(2)$

จะเห็นว่าแก้หา a, b ไม่ได้ เพราะไม่รู้ $\sum x_i y_i$ ใน (2)

โจทย์ถามค่าพหุคูณของ Y เมื่อ $X = 5 \rightarrow$ ลองแทน $x = 5$ ในสมการทำนาย จะได้ $Y = a + b(5)$

จะเห็นว่า ถ้าเอา (1) มาหารตลอดด้วย 17 จะได้ $9 = a + b(5)$ ซึ่งบังเอิญตรงกับที่โจทย์ถามพอดี $\rightarrow$ ได้ $Y = 9$

10. ข

(a, b) อยู่บน $y = f(x) = \frac{x^2}{2}$ ดังนั้น $b = \frac{a^2}{2} \dots(1)$ และ (c, d) อยู่บน $y = g(x) = x^3$ ดังนั้น $d = c^3 \dots(2)$

ความชันของ L จะหาได้ 3 วิธี คือจากจุดผ่าน จาก $f'(x)$ และจาก $g'(x)$ โดยที่ทั้ง 3 วิธีต้องได้ความชันเท่ากัน

- จาก L ผ่าน (a, b) และ (c, d) จะได้ L มีความชัน $= \frac{b-d}{a-c}$

แทน b และ d จาก (1) และ (2) จะได้ความชัน $\frac{\frac{a^2}{2} - c^3}{a-c}$ คูณ 2 บนล่าง จะได้ความชัน $= \frac{a^2 - 2c^3}{2a - 2c}$

- L สัมผัส $y = f(x)$ ที่ (a, b) ดังนั้น L มีความชัน $= f'(a)$

ดิฟ $f(x) = \frac{x^2}{2}$ จะได้ $f'(x) = x \rightarrow$ แทน $x = a$ จะได้ $f'(a) = a$ ดังนั้น L มีความชัน $= a$

- L สัมผัส $y = g(x)$ ที่ (c, d) ดังนั้น L มีความชัน $= g'(c)$

ดิฟ $g(x) = x^3$ จะได้ $g'(x) = 3x^2 \rightarrow$ แทน $x = c$ จะได้ $g'(c) = 3c^2$ ดังนั้น L มีความชัน $= 3c^2$

จากทั้งสามข้อ จะได้ $\frac{a^2 - 2c^3}{2a - 2c} = a = 3c^2$ จากคู่อหลังจะได้ $a = 3c^2 \dots(3)$

แทนในตัวหน้า จะได้ $\frac{(3c^2)^2 - 2c^3}{2(3c^2) - 2c} = 3c^2$ และจาก $c \neq 0 \rightarrow$ ตัด c ตลอดเหลือ $\frac{9c - 2}{6c - 2} = 3$

$$9c - 2 = 18c - 6$$

$$4 = 9c$$

$$\frac{4}{9} = c$$

แทนใน (3) จะได้ $a = \frac{16}{27} = \frac{2^4}{3^3} \rightarrow$ แทนใน (1) จะได้ $b = \frac{2^7}{3^6} \rightarrow$ แทนใน (2) จะได้ $d = \frac{2^6}{3^6}$

ดังนั้น $b + d + \frac{ac}{3} = \frac{2^7}{3^6} + \frac{2^6}{3^6} + \frac{\left(\frac{2^4}{3^3}\right)\left(\frac{2^2}{3^2}\right)}{3} = \frac{2^7}{3^6} + \frac{2^6}{3^6} + \frac{2^6}{3^6} = \frac{2^7}{3^6} + 2\left(\frac{2^6}{3^6}\right) = \frac{2^7}{3^6} + \frac{2^7}{3^6} = 2\left(\frac{2^7}{3^6}\right) = \frac{2^8}{3^6}$

11. ก.

เนื่องจากในการยิงแต่ละครั้ง มีโอกาส เข้าเป้า กับ ไม่เข้า อย่างละ $\frac{1}{2}$ เท่าๆกัน

และมีการยิงทั้งหมด $100 + 101 = 201$ ครั้ง ซึ่งแต่ละครั้ง มีผลลัพธ์ได้ 2 แบบ (คือ เข้าเป้า กับ ไม่เข้าเป้า)

ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= 2^{201}$ แบบ

จะพิสูจน์ว่า ใน 2^{201} แบบนี้ มี จำนวนแบบที่ “B ชนะ” = จำนวนแบบที่ “B ไม่ชนะ” (คือ แพ้หรือเสมอ)

พิจารณาแบบการแข่งขันที่ B ชนะ ให้ A ยิงเข้าเป้า a ครั้ง และ B ยิงเข้าเป้า b ครั้ง โดยที่ $a < b$

พิจารณาแบบการแข่งขันอีกแบบที่ ได้จากการ “เปลี่ยนผลการยิงแต่ละครั้งเป็นตรงข้าม”

เช่น A (เข้า, ไม่เข้า, เข้า, เข้า, ไม่เข้า, ...)

B (ไม่เข้า, เข้า, เข้า, เข้า, เข้า, ...)



A (ไม่เข้า, เข้า, ไม่เข้า, ไม่เข้า, เข้า, ...)

B (เข้า, ไม่เข้า, ไม่เข้า, ไม่เข้า, ไม่เข้า, ...)

หลังเปลี่ยนผลการยิงเป็นตรงข้าม A จะได้คะแนน $100 - a$ และ B จะได้คะแนน $101 - b$

เนื่องจาก $a < b \rightarrow 100 - a > 100 - b \rightarrow 100 - a \geq 101 - b \rightarrow$ คะแนน A $\geq$ คะแนน B

เนื่องจาก a, b เป็นจำนวนเต็ม เราสามารถ

เพิ่มฝั่งขวาขึ้น 1 แล้วเปลี่ยน $>$ เป็น $\geq$ ได้

นั่นคือ แบบที่เปลี่ยนผลการยิงเป็นตรงข้าม A จะได้คะแนนมากกว่าหรือเท่ากับ B นั่นคือ เป็นแบบที่ B ไม่ชนะ

พิจารณาแบบการแข่งขันที่ B ไม่ชนะ ให้ A ยิ่งเข้าเป้า a ครั้ง และ B ยิ่งเข้าเป้า b ครั้ง โดยที่ $a \geq b$

จะเห็นว่า หลังเปลี่ยนผลการยิงเป็นตรงข้าม A จะได้คะแนน $100 - a$ และ B จะได้คะแนน $101 - b$

เนื่องจาก $a \geq b \rightarrow 100 - a \leq 100 - b \rightarrow 100 - a < 101 - b \rightarrow$ ได้เป็นแบบที่ B ชนะ

ดังนั้น เราสามารถจับคู่แบบที่ B ชนะ กับ แบบที่ B ไม่ชนะได้แบบ 1 ต่อ 1 (โดยการเปลี่ยนผลการยิงเป็นตรงข้าม)

ดังนั้น จำนวนแบบที่ B ชนะ จะเท่ากับจำนวนแบบที่ B ไม่ชนะ ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ B ชนะ $= \frac{1}{2}$

12. ค

ข้อ (1) ถ้าใส่ $\tan$ ผั่งซ้าย จะได้ $\frac{\frac{1-x}{y} + \frac{1-y}{x}}{1 - (\frac{1-x}{y})(\frac{1-y}{x})} = \frac{x-x^2+y-y^2}{xy - (1-y-x+xy)} = \frac{x+y-1}{-1+y+x} = 1 = \tan \frac{\pi}{4}$ ทางฝั่งขวา จริง

แต่สิ่งที่ต้องระวังในเรื่อง $\arcsin$ คือ เรนจ์ จะเห็นว่า ถ้า x, y เป็นลบทั้งคู่ จะทำให้ $\frac{1-x}{y}$ และ $\frac{1-y}{x}$ เป็นลบทั้งคู่

ซึ่งจะทำให้ $\arcsin$ ได้ผลลัพธ์ติดลบ และจะไม่มีทางบวกกันแล้วกลายเป็นบวก $\frac{\pi}{4}$ ได้ $\rightarrow$ (1) ผิด

ข้อ (2) ใส่ $\tan$ ผั่งซ้าย จะได้ $\frac{x+1-x}{1-(x)(1-x)} = \frac{1}{1-x+x^2} = \tan$ ผั่งขวา จริง

ถัดมา เช็คเรนจ์ (นั่นคือ ผั่งซ้ายต้องอยู่ในเรนจ์ของ $\arcsin$ ถึงจะเท่ากับ $\arcsin$ ทางขวาได้)

กรณี $x < 0$: จะได้ $1 - x > 1$ ดังนั้น $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ และ $\arcsin(1-x) \in (\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$

จะได้ผลบวก $\in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ จะยังอยู่ในช่วง $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ที่เป็นเรนจ์ของ $\arcsin$

กรณี $0 \leq x < 1$: จะได้ $1 - x \in (0, 1]$ ดังนั้น $\arcsin x \in [0, \frac{\pi}{4})$ และ $\arcsin(1-x) \in (0, \frac{\pi}{4}]$

จะได้ผลบวก $\in (0, \frac{\pi}{2})$ จะยังอยู่ในช่วงเรนจ์ของ $\arcsin$

กรณี $x \geq 1$: จะได้ $1 - x \leq 0$ ดังนั้น $\arcsin x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ และ $\arcsin(1-x) \in (-\frac{\pi}{2}, 0]$

จะได้ผลบวก $\in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ จะยังอยู่ในช่วงเรนจ์ของ $\arcsin$

ดังนั้น ผั่งซ้ายอยู่ในเรนจ์ของ $\arcsin$ ในทุกกรณี $\rightarrow$ (2) ถูก

13. ก

เนื่องจากมุมในสามเหลี่ยมรวมกันได้ π และถ้า C น้อยกว่า π นิดๆ จะเหลือ A และ B มีค่ามากกว่า 0 นิดๆ

ซึ่งจะทำให้ $(2 + \tan \frac{A}{2})(2 + \tan \frac{B}{2}) \approx (2 + \tan 0)(2 + \tan 0) = (2)(2) = 4$

ดังนั้น ในกรณีนี้ $(2 + \tan \frac{A}{2})(2 + \tan \frac{B}{2})$ จะมากกว่า 4 อยู่หน่อย $\rightarrow$ ตอบข้อ (ก) เลยก็ได้

ที่เหลือ จะแสดงว่า $(2 + \tan \frac{A}{2})(2 + \tan \frac{B}{2}) < 5$

$$4 + 2 \tan \frac{A}{2} + 2 \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} < 5$$

$$2 \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} \right) < 1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}$$

$$\frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} < \frac{1}{2}$$

$$\tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) < \frac{1}{2} \quad \dots (*)$$

จากโจทย์ $C > \frac{3\pi}{4}$ และ มุมในสามเหลี่ยมรวมกันได้ π ดังนั้น จะเหลือ $A + B < \pi - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

หารด้วย 2 ตลอด จะได้ $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} < \frac{\pi}{8} \rightarrow$ เป็นมุมใน Q_1 ทั้งสองข้าง ใส่ $\tan$ ตลอด ได้ $\tan \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) < \tan \frac{\pi}{8}$

$$\text{ใช้สูตร } \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}} \text{ จะได้ } \tan \frac{\pi}{8} = + \sqrt{\frac{1-\cos \frac{\pi}{4}}{1+\cos \frac{\pi}{4}}} \quad \left(\frac{\pi}{8} \text{ อยู่ } Q_1 \rightarrow \tan \text{ เป็นบวก} \right) = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1 \approx 1.414 - 1 = 0.414$$

ดังนั้น $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) < \tan\frac{\pi}{8} \approx 0.414 < \frac{1}{2}$ จะได้ (*) จริง ทำย้อนขึ้นไป จะได้ช่วงคำตอบคือ (4, 5)

14. ง

ใช้สูตร $\tan$ ผลบวก จะได้ $\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = \tan\alpha + \tan\beta + \frac{1}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\beta}$

$$= \tan\alpha + \tan\beta + \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha \tan\beta}$$

เอา $\tan\alpha + \tan\beta$ หารตลอดได้ (เพราะ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ทำให้ค่า $\neq 0$) เหลือ $\frac{1}{1 - \tan\alpha \tan\beta} = 1 + \frac{1}{\tan\alpha \tan\beta}$
เปลี่ยนตัวแปรให้ $x = \tan\alpha \tan\beta$ จะได้ $\frac{1}{1-x} = 1 + \frac{1}{x} \rightarrow$ บวกเศษส่วน คูณไขว้ จะได้ $x = (1+x)(1-x)$
 $x = 1 - x^2$
 $x^2 + x - 1 = 0$

จะได้ $x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2(1)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \tan\alpha \tan\beta$

แต่ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น $\tan\alpha \tan\beta$ เป็นบวก จะได้ $\tan\alpha \tan\beta = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

ดังนั้น $1 + \tan\alpha \tan\beta + \tan^2\alpha \tan^2\beta + \tan^3\alpha \tan^3\beta + \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ที่มี $r = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

เนื่องจาก $|r| \approx \left| \frac{-1+2.236}{2} \right| < 1$ จึงใส่เข้าสู่อัฒ $\frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1 - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{3-\sqrt{5}}$

$$= \frac{2}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} = \frac{6+2\sqrt{5}}{9-5} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2$$

15. ค

จะเห็นว่าตัวเล็อกแต่ละข้ออยู่ในรูป $z^n - z^{n-1} - 1 = 0 \rightarrow$ จะหาค่า n ที่ทำให้สมการมีรากขนาดเท่ากับ 1

รากที่มีขนาดเท่ากับ 1 จะต้องเขียนได้ในรูป $1 \text{ cis } \theta$ โดยที่ $(1 \text{ cis } \theta)^n - (1 \text{ cis } \theta)^{n-1} - 1 = 0$
 $1 \text{ cis } n\theta - 1 \text{ cis } (n-1)\theta - 1 = 0$

จะได้ ส่วนจริง $= \cos n\theta - \cos(n-1)\theta - 1 = 0$ และส่วนจินตภาพ $= \sin n\theta - \sin(n-1)\theta = 0$
 $\cos n\theta = \cos(n-1)\theta + 1 \dots(1)$ $\sin n\theta = \sin(n-1)\theta \dots(2)$

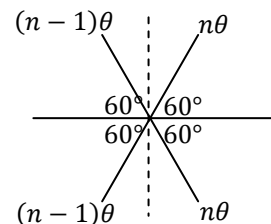
$(1)^2 + (2)^2: \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = \cos^2(n-1)\theta + 2\cos(n-1)\theta + 1 + \sin^2(n-1)\theta$
 $\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 1 + 2\cos(n-1)\theta + 1$
 $-\frac{1}{2} = \cos(n-1)\theta$

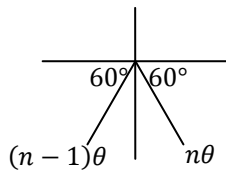
แทนค่า $\cos(n-1)\theta = -\frac{1}{2}$ ใน (1) จะได้ $\cos n\theta = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

จะได้มุม $n\theta$ และ $(n-1)\theta$ อยู่ในตำแหน่งดังรูป

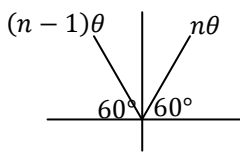
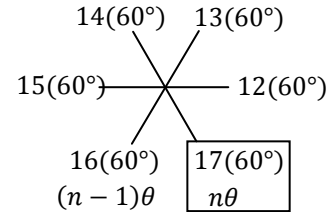
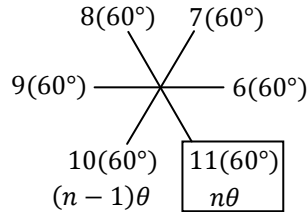
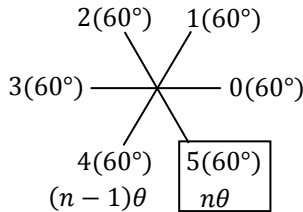
และจาก (2) จะได้ $n\theta$ และ $(n-1)\theta$ ต้องอยู่บนเส้นแกน y ทั้งคู่ หรือไม่ก็

อยู่ใต้แกน y ทั้งคู่ (เพราะต้อง $\sin$ แล้วได้เท่ากัน)

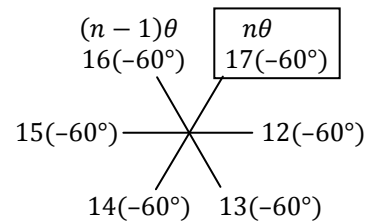
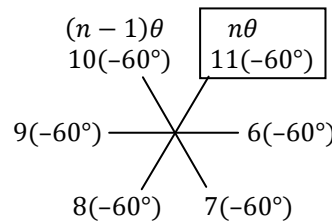
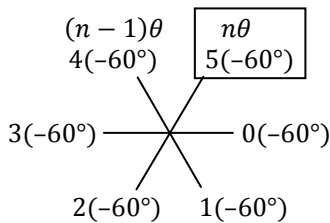




กรณี $n\theta$ และ $(n-1)\theta$ อยู่ใต้แกน y ทั้งคู่ จะได้ $n\theta$ อยู่ถัดมาจาก $(n-1)\theta$ แบบทวน
 เข็ม 60° (จะได้ $\theta = 60^\circ$) และเนื่องจาก $\frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$ พอดี ดังนั้น n ที่เป็นคำตอบได้จะวน
 กลับมาเป็นคำตอบได้อีกในทุกๆ 6 ตัว ดังรูป จะได้ $n = 5, 11, 17, \dots$
 นั่นคือ n หารด้วย 6 เหลือเศษ 5 นั่นเอง

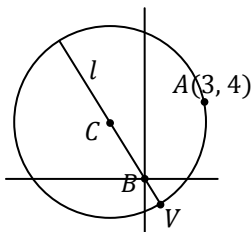


กรณี $n\theta$ และ $(n-1)\theta$ อยู่เหนือแกน y ทั้งคู่ จะได้ $n\theta$ อยู่ถัดมาจาก $(n-1)\theta$ แบบตาม
 เข็ม 60° (จะได้ $\theta = -60^\circ$) และ n ที่เป็นคำตอบ ก็จะมีจำนวนทุกๆ 6 ตัวในลักษณะเดิม ซึ่งจะได้
 $n = 5, 11, 17, \dots \rightarrow$ นั่นคือ n หารด้วย 6 เหลือเศษ 5 เหมือนเดิม



จากตัวเลือก จะเห็นว่ามี 2015 เท่านั้น ที่หารด้วย 6 เหลือเศษ 5 $\rightarrow$ ตอบ ค.

16. (1.2, 1.6)



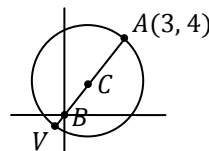
เนื่องจาก $BC : BV = 2 : 1$ ดังนั้น BC ยาวกว่า BV จึงสรุปได้ว่า V ต้องอยู่ฝั่ง
 เดียวกันกับ B ดังรูป (ถ้า V ไปอยู่อีกฝั่งทางซ้ายบนจะทำให้ BV จะยาวกว่า BC)
 จะพิสูจน์ว่า “วงกลม C จะเล็กที่สุด เมื่อ C อยู่บนแนว AB ” โดยใช้หลัก “ระยะสั้นสุด คือ
 ระยะที่เป็นเส้นตรง” มาช่วยพิสูจน์

ให้วงกลม C มีรัศมี $CA = CV = r$ จาก $BC : BV = 2 : 1$ จะได้ $BC = \frac{2r}{3}$
 ดังนั้น $BC + CA = \frac{2r}{3} + r = \frac{5r}{3} \rightarrow$ จะเห็นว่า $BC + CA$ เป็นสัดส่วนโดยตรงกับ r

ดังนั้น “ r จะสั้นที่สุด” เมื่อ “ $BC + CA$ สั้นที่สุด” ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อ B, C, A อยู่บนแนวเส้นตรงเดียวกันนั่นเอง
 วาดวงกลมใหม่ โดยย้าย C ไปอยู่บนแนว AB จะได้ดังรูป

จะได้ $BA = BC + CA = \frac{5r}{3}$ ดังนั้น $\frac{BC}{BA} = \frac{\frac{2r}{3}}{\frac{5r}{3}} = \frac{2}{5}$

ดังนั้น พิกัดจุด C คือ $\left(\frac{2}{5}(3), \frac{2}{5}(4)\right) = (1.2, 1.6)$



17. 6.8

ความแปรปรวนจะมีค่าน้อย เมื่อ x กับ y มีค่าใกล้ๆกัน

$$\text{จากค่าเฉลี่ย} = 4 \text{ จะได้ } \frac{2+5+7+x+y}{5} = 4 \rightarrow 14 + x + y = 20$$

$$x + y = 6$$

ดังนั้น x กับ y ต้องรวมกันได้ 6 (เช่น $3 + 3$, $2 + 4$, $1 + 5$, ...)

แต่เนื่องจาก x กับ y ต้องต่างกันอย่างน้อย 6 ดังนั้น x กับ y จะใกล้กันได้มากที่สุดคือ 0 กับ 6

$$\text{จะได้ความแปรปรวน} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{(2-4)^2 + (5-4)^2 + (7-4)^2 + (0-4)^2 + (6-4)^2}{5} = \frac{4+1+9+16+4}{5} = \frac{34}{5} = 6.8$$

18. 126

จัดรูปได้ $1 + m(m+1) = n^3$ เนื่องจาก $m(m+1)$ เป็นผลคูณของสองจำนวนติดกัน ซึ่งจะมีจำนวนหนึ่งเป็นคู่เสมอ ดังนั้น $m(m+1)$ จะเป็นคู่ ทำให้ $1 + m(m+1)$ เป็นคี่ ดังนั้น n^3 ต้องเป็นคี่ ซึ่งจะได้ว่า n ต้องเป็นคี่ และเนื่องจาก m เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น $m \geq 1$ จะทำให้ได้ว่า $n > 1$

$$\text{จัดรูปต่อ จะได้ } m(m+1) = n^3 - 1$$

$$m(m+1) = (n-1)(n^2 + n + 1)$$

เราจะลองแทน $n = 3, 5, 7, 9, \dots$ ไปทางฝั่งขวา แล้วดูว่าสามารถจัดเป็นผลคูณของสองจำนวนติดกัน แบบทางฝั่งซ้าย

ได้หรือไม่ $n = 3$: ได้ฝั่งขวา $= (2)(9 + 3 + 1) = (2)(13)$ แยกเป็นสองจำนวนติดกันคูณกันไม่ได้

$n = 5$: ได้ฝั่งขวา $= (4)(25 + 5 + 1) = (4)(31)$ แยกเป็นสองจำนวนติดกันคูณกันไม่ได้

$n = 7$: ได้ฝั่งขวา $= (6)(49 + 7 + 1) = (6)(57) = (6)(3 \times 19) = (18)(19) \rightarrow$ ได้ $m = 18$

ดังนั้น mn น้อยสุด $= (7)(18) = 126$

19. 21

$$\text{จัดรูป โดยทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ จะได้ } x^2 + 6x + 9 + y^2 + 8y + 16 = 875 + 9 + 16$$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 900$$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 30^2$$

จะเห็นว่า ผลลัพธ์จะคล้ายกับทฤษฎีของพีทาโกรัส ใน Δ มุมฉาก ที่มีด้านทั้งสามคือ $x+3$, $y+4$, 30

3, 4, 5	เนื่องจาก x และ y เป็นจำนวนเต็มบวก เราจะพิจารณาด้านซุดที่เป็นจำนวนเต็มของ Δ มุมฉากที่
5, 12, 13	ด้านตรงข้ามมุมฉากไม่เกิน 30
7, 24, 25	
8, 15, 17	จะเห็นว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก $= 30$ ได้เพียงแบบเดียว คือ นำ 3, 4, 5 มาขยายทุกด้าน 6 เท่า
20, 21, 29	จะได้เป็น 18, 24, 30 $\rightarrow$ เลือกด้านประกอบมุมฉากตัวมากเป็น x จะได้ $24 = x + 3$
	$21 = x$

20. $10^4, 10^{-4}$

$$\begin{aligned} \sqrt{x^{\log x^2}} &= 10^4 \\ x^{\log x^2} &= (10^4)^2 \quad \text{ยกกำลัง 2 ตลอด} \\ x^{\frac{1}{2} \log x} &= 10^8 \\ (x^{\frac{1}{2} \log x})^2 &= (10^8)^2 \quad \text{ยกกำลัง 2 ตลอด} \\ x^{\log x} &= 10^{16} \\ \log x^{\log x} &= \log 10^{16} \quad \text{ใส่ log ทั้งสองข้าง} \\ (\log x) \log x &= 16 \\ (\log x)^2 &= 16 \\ \log x &= \pm 4 \\ x &= 10^4, 10^{-4} \end{aligned}$$

ตรวจคำตอบ

$$\begin{aligned} 10^4 : \sqrt{(10^4)^{\log \sqrt{10^4}}} &= \sqrt{(10^4)^{\log 10^2}} \\ &= \sqrt{(10^4)^2} \\ &= 10000 \text{ จริง} \\ 10^{-4} : \sqrt{(10^{-4})^{\log \sqrt{10^{-4}}}} &= \sqrt{(10^{-4})^{\log 10^{-2}}} \\ &= \sqrt{(10^{-4})^{-2}} \\ &= \sqrt{10^8} = 10000 \text{ จริง} \end{aligned}$$

21. 576

มีช่องทั้งหมด $8 \times 8 = 64$ ช่อง

ต้องเลือก 56 ช่อง เท่ากับ ต้อง “เลือกออก” $= 64 - 56 = 8$ ช่อง

ช่องสีดำต้องถูกเลือกทั้งหมด ดังนั้น 8 ช่องที่จะถูกเลือกออกนี้ต้องเป็นสีขาว

และจากเงื่อนไขข้อ 2 แต่ละแถวต้องมี 7 ช่อง เท่ากับว่า แต่ละแถวต้องถูก

เลือกออกแถวละ 1 ช่อง นั่นคือ 8 ช่องสีขาวที่ถูกเลือกออก จะอยู่ในแถว

เดียวกันไม่ได้ (ทั้งแนวตั้งและแนวนอน)

1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							

ทำแถวเลขคู่ก่อน แถว 1 : มีช่องสีขาว 4 ช่อง $\rightarrow$ เลือกออกหนึ่งช่องได้ 4 แบบ

แถว 3 : ต้องไม่เลือกช่องสีขาวที่อยู่ในแนวตั้งเดียวกับช่องสีขาวที่ถูกเลือกออกในแถว 1

$\rightarrow$ เหลือช่องสีขาวให้เลือกออกได้ 3 แบบ

ทำนองเดียวกัน แถว 5 จะเหลือให้เลือกได้ 2 แบบ และ แถว 7 จะเลือกได้แค่ 1 แบบ

สรุปแถวเลขคี่ จะมีวิธีเลือกช่องสีขาวออกได้ $= 4 \times 3 \times 2 \times 1$ แบบ

สำหรับแถวเลขคู่ (2, 4, 6, 8) จะทำแบบเดียวกันกับแถวเลขคี่ (เนื่องจากแถวเลขคู่ กับแถวเลขคี่มีช่องสีขาวไม่ตรงกัน

ดังนั้น การเลือกช่องสีขาวจึงไม่ส่งผลกระทบต่อกัน) ดังนั้น 4 แถวเลขคู่ จะเลือกช่องสีขาวออกได้ $= 4 \times 3 \times 2 \times 1$

แบบ ด้วย ดังนั้น จำนวนวิธี $= (4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (4 \times 3 \times 2 \times 1) = 576$ วิธี

22. 2016

ให้ $z = r \operatorname{cis} \theta$ จะได้ $\bar{z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$ และจะได้สมการคือ $(r \operatorname{cis}(-\theta))^{2014} = r \operatorname{cis} \theta$
 $r^{2014} \operatorname{cis}(-2014\theta) = r \operatorname{cis} \theta$

วัดมีของทั้งสองฝั่ง ต้องเท่ากัน $\rightarrow$ จะได้ว่า $r^{2014} = r$
 $r^{2014} - r = 0$
 $r(r^{2013} - 1) = 0$

จะได้ $r = 0$ หรือ $r^{2013} = 1$ แต่เนื่องจาก r ต้องเป็นจำนวนจริง จะได้ $r = 0$ หรือ $r = 1$

กรณี $r = 0 \rightarrow$ ไม่ต้องหา θ เพราะ เอา $r = 0$ มาคูณ $\operatorname{cis} \theta$ จะเป็น 0 เสมอ $\rightarrow$ ได้คำตอบคือ $z = 0$ หนึ่งคำตอบ

กรณี $r = 1 \rightarrow$ จะได้ $|z| = 1$ แต่จากกฎ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ จะได้ $z \cdot \bar{z} = 1$ ดังนั้น $\bar{z} = \frac{1}{z}$

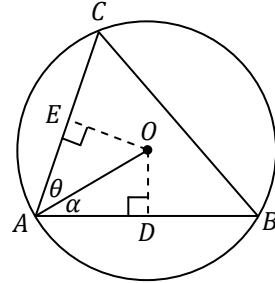
แทนใน สมการ จะได้ $\left(\frac{1}{z}\right)^{2014} = z$ กระจาย 2014 แล้วย้าย z^{2014} ไปคูณทางขวา จะได้ $1 = z^{2015}$

ดังนั้น z คือ รากที่ 2015 ของ 1 นั่นเอง ซึ่งจะมีได้ทั้งหมด 2015 คำตอบ
รวมสองกรณี จะได้คำตอบของสมการมีทั้งหมด $1 + 2015 = 2016$ คำตอบ

23. 28

ให้ D และ E เป็นจุดกึ่งกลาง AB และ AC ดังรูป

$$\begin{aligned}\text{จะได้ } \vec{AO} \cdot \vec{BC} &= \vec{AO} \cdot (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \vec{AO} \cdot (-\vec{AB} + \vec{AC}) \\ &= -\vec{AO} \cdot \vec{AB} + \vec{AO} \cdot \vec{AC} \\ &= -|\vec{AO}||\vec{AB}| \cos \alpha + |\vec{AO}||\vec{AC}| \cos \theta \\ &= -|\vec{AB}|(|\vec{AO}| \cos \alpha) + |\vec{AC}|(|\vec{AO}| \cos \theta) \\ &= -|\vec{AB}| \left(\frac{|\vec{AD}|}{1} \right) + |\vec{AC}| \left(\frac{|\vec{AE}|}{1} \right) \\ &= -(5) \left(\frac{5}{2} \right) + (9) \left(\frac{9}{2} \right) = -\frac{25}{2} + \frac{81}{2} = \frac{56}{2} = 28\end{aligned}$$



24. 16

ให้ซื้อรถ เล็ก กลาง ใหญ่ จำนวน S, M, L คัน ตามลำดับ จากโจทย์ จะได้ $S + M + L = 25 \dots(1)$

และ $350S + 700M + 1400L = 28000 \rightarrow$ หารด้วย 350 ตลอด ได้ $S + 2M + 4L = 80 \dots(2)$

จะเขียน S และ M ให้อยู่ในรูปของ $L : \rightarrow (2) - (1)$ ให้ S ตัดกัน: $M + 3L = 55$

$$M = 55 - 3L \dots(3)$$

แทน (3) ใน (1): $S + 55 - 3L + L = 25$
 $S = 2L - 30 \dots(4)$

ต้องซื้อรถทุกชนิด ดังนั้น $M \geq 1$ และ $S \geq 1 \rightarrow$ จาก (3), (4) จะได้ $55 - 3L \geq 1$ และ $2L - 30 \geq 1$
 $18 \geq L \quad L \geq 15.5$

จำนวนรถต้องเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น ค่าน้อยสุดของ L คือ 16

25. 12

จะเห็นว่า $x = 2$ ได้เท่านั้น เพราะถ้า $x \geq 3$ จะได้ $N^{(x-1)/2} \geq N^{(3-1)/2} = N$ จะไม่มีทาง $< N$ ตัวยาวสุดได้

แทน $x = 2$ จะได้ $N^{(2-1)/2} < 10^2 < N \rightarrow$ แยกเป็นสองอสมการได้ $N^{\frac{1}{2}} < 100$ และ $100 < N$
 $N < 10000$

รวมสองอสมการกลับไปใหม่ จะได้ $100 < N < 10000$

เนื่องจาก จำนวนเฉพาะที่หาร N ลงตัวคือ 3 และ 7 เท่านั้น จะได้ N ต้องอยู่ในรูป $3^m 7^n$ เมื่อ $m, n \geq 1$

กรณี $n = 1$: จะได้ $100 < 3^m 7^1 < 10000$

หารตลอดด้วย 7 (คิดทศนิยมตำแหน่งเดียวพอ เพราะเป็นจำนวนนับ) ได้ $14.2 < 3^m < 1428.5 \dots(1)$

พิจารณา 3^m เมื่อ m เป็นค่าต่างๆ จะได้ 3, 9, 27, 81, 243, 729, 21xx

จะเห็นว่า มี 27, 81, 243, 729 เท่านั้นที่อยู่ในช่วง (1) ดังนั้น กรณีนี้มี 4 คำตอบ

กรณี $n = 2$: จะได้ $100 < 3^m 7^2 < 10000$

หารตลอดด้วย 7^2 (เอาตัวเลขจาก (1) มาหารด้วย 7 ต่ออีกรอบ) ได้ $2.0 < 3^m < 204.0 \dots(2)$

จะเห็นว่า มี 3, 9, 27, 81 เท่านั้นที่อยู่ในช่วง (2) ดังนั้น กรณีนี้มี 4 คำตอบ

กรณีถัดๆไป ทำซ้ำแบบเดิม กรณี $n = 3$: หารด้วย 7 ต่อได้ $0.2 < 3^m < 29.1 \rightarrow 3, 9, 27$ มี 3 คำตอบ

กรณี $n = 4$: หารด้วย 7 ต่อได้ $0.0 < 3^m < 4.1 \rightarrow 3$ มี 1 คำตอบ

กรณี $n = 5$: หารด้วย 7 ต่อได้ $0.0 < 3^m < 0.5 \rightarrow$ ไม่มีคำตอบ

ถ้า $n > 5$ จะไม่มีคำตอบแล้ว $\rightarrow$ รวมคำตอบจากทุกกรณี จะได้ จำนวนคำตอบ = $4 + 4 + 3 + 1 = 12$ คำตอบ

26. 2, -3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{ax^2+4}}{bx-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(a+\frac{4}{x^2})}}{x(b-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|\sqrt{a+\frac{4}{x^2}}}{x(b-\frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x\sqrt{a+\frac{4}{x^2}}}{x(b-\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{\sqrt{a+\frac{4}{x^2}}}{b-\frac{1}{x}} = -\frac{\sqrt{a}}{b} \end{aligned}$$

x เป็นลบ จะได้ $|x| = -x$

โจทย์ให้ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ ดังนั้น $-\frac{\sqrt{a}}{b} = -1$ ย้ายข้างแล้วยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้ $a = b^2 \dots (*)$

$$\begin{aligned} \text{คิดต่อเนืองที่ } x = 0 \text{ จะได้ } \frac{\sqrt{a(0^2)+4}}{b(0)-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{x} + b \left(\frac{x-3\pi}{\pi} \right) \\ \frac{\sqrt{4}}{-1} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin ax}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} b \left(\frac{x-3\pi}{\pi} \right) \\ -2 &= a + b \left(\frac{0-3\pi}{\pi} \right) \\ -2 &= a - 3b \\ -2 &= b^2 - 3b \quad \text{แทน } a = b^2 \text{ จาก } (*) \\ 0 &= b^2 - 3b + 2 \\ 0 &= (b-1)(b-2) \\ b &= 1, 2 \end{aligned}$$

จากข้อเสนอนี้ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ จะได้ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(ax)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

จาก (*) ถ้า $b = 1$ จะได้ $a = 1$ และ ถ้า $b = 2$ จะได้ $a = 4$

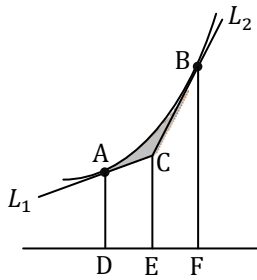
$$\text{คิดต่อเนืองที่ } x = \pi \text{ จะได้ } \frac{\sin a\pi}{\pi} + b \left(\frac{\pi-3\pi}{\pi} \right) = \lim_{x \rightarrow \pi^+} \sqrt{(x-\pi)^2+1} - x + c^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\sin a\pi}{\pi} - 2b &= 1 - \pi + c^2 \\ \text{กรณี } b = 1, a = 1: & \quad \text{กรณี } b = 2, a = 4: \\ \begin{aligned} 0 - 2(1) &= 1 - \pi + c^2 \\ \pi - 3 &= c^2 \\ \pm\sqrt{\pi-3} &= c \end{aligned} & \quad \begin{aligned} 0 - 2(2) &= 1 - \pi + c^2 \\ \pi - 5 &= c^2 \\ & \text{(ไม่มีคำตอบ เพราะ } \pi - 5 \text{ ติดลบ แต่ } c^2 \text{ เป็นลบไม่ได้)} \end{aligned} \end{aligned}$$

ดังนั้น A มีสมาชิก 2 ตัว คือ $(1, 1, \sqrt{\pi-3})$ และ $(1, 1, -\sqrt{\pi-3})$

$$\begin{aligned} \text{และจะได้ } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-\pi)^2+1} - x + (\pm\sqrt{\pi-3})^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-\pi)^2+1} - x + \pi - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{(x-\pi)^2+1} - (x-\pi) - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\sqrt{(x-\pi)^2+1} - (x-\pi) \right) \cdot \frac{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + (x-\pi)}{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + (x-\pi)} \right] - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-\pi)^2+1 - (x-\pi)^2}{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + (x-\pi)} \right] - 3 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt{(x-\pi)^2+1} + (x-\pi)} \right] - 3 = 0 - 3 = -3 \end{aligned}$$

27. 128



ให้ $a = 2553$, $b = 2557$ จะเห็นว่า a , b , $f(a)$ และ $f(b)$ เป็นบวก

แต่พิกัด x ของจุดยอด $= -\frac{2014}{2(24)}$ เป็นลบ ดังนั้น ส่วนที่แรเงาจะอยู่ Q_1 ดังรูป

พื้นที่ที่แรเงา = พื้นที่ใต้โค้ง f จาก A ถึง B - $\square ADEC$ - $\square CEFB$... (1)

$$\text{จะได้ พื้นที่ใต้โค้ง } f = \int_a^b f(x) dx$$

$$= F(b) - F(a) \text{ เมื่อ } F \text{ คือปฏิยานุพันธ์ของ } f \text{ ... (2)}$$

พื้นที่ $\square ADEC = \frac{1}{2}(AD + CE)(DE) \rightarrow$ เรามี $AD = f(a)$ ที่เหลือ ต้องหาพิกัดของจุดตัด C ระหว่าง L_1 กับ L_2

จากสูตรความชัน $= f'(x)$ ดังนั้น ความชัน $L_1 = f'(a)$ และ ความชัน $L_2 = f'(b)$

L_1 มีความชัน $f'(a)$ และผ่านจุด $(a, f(a))$ ดังนั้น สมการ L_1 คือ $\frac{y-f(a)}{x-a} = f'(a)$

$$y - f(a) = (x - a)f'(a)$$

$$y = (x - a)f'(a) + f(a) \text{ ... (3)}$$

ทำนองเดียวกัน จะได้สมการ L_2 คือ $y = (x - b)f'(b) + f(b)$... (4)

จับ (3) = (4) และแทน $f(x) = 24x^2 + 2014x - 2557$

$$f'(x) = 48x + 2014$$

และแก้ระบบสมการหาจุดตัด C ระหว่าง L_1 กับ L_2 จะได้

$$\begin{aligned} (x-a)(48a+2014) + 24a^2 + 2014a - 2557 &= (x-b)(48b+2014) + 24b^2 + 2014b - 2557 \\ 48ax + 2014x - 48a^2 - 2014a + 24a^2 + 2014a &= 48bx + 2014x - 48b^2 - 2014b + 24b^2 + 2014b \\ 48ax - 24a^2 &= 48bx - 24b^2 \\ 48ax - 48bx &= 24a^2 - 24b^2 \\ 48x(a-b) &= 24(a-b)(a+b) \\ x &= \frac{a+b}{2} = \frac{2553+2557}{2} = 2555 \end{aligned}$$

จะได้จุด C มีพิกัด x คือ 2555 $\rightarrow$ จะได้ $DE = 2555 - a = 2555 - 2553 = 2$

จากสมการ L_1 ใน (3) จะได้ $CE = (2555 - a)f'(a) + f(a) = 2f'(a) + f(a)$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ } \square ADEC &= \frac{1}{2}(AD + CE)(DE) = \frac{1}{2}(f(a) + 2f'(a) + f(a))(2) \\ &= 2f(a) + 2f'(a) \text{ ... (5)} \end{aligned}$$

สุดท้าย พื้นที่ $\square CEFB = \frac{1}{2}(CE + BF)(EF) \rightarrow$ เรามี $BF = f(b)$

$$\text{และ } EF = b - 2555 = 2557 - 2555 = 2$$

แต่เราจะหา CE ใหม่โดยแทน 2555 ในสมการ L_2 ใน (4) เพื่อความสมมาตรของ a และ b ใน $\square$ ทั้งสองรูป

$$\text{จะได้ } CE = (2555 - b)f'(b) + f(b) = -2f'(b) + f(b)$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น พื้นที่ } \square CEFB &= \frac{1}{2}(CE + BF)(EF) = \frac{1}{2}(-2f'(b) + f(b) + f(b))(2) \\ &= 2f(b) - 2f'(b) \text{ ... (6)} \end{aligned}$$

แทน (2), (5), (6) ใน (1) จะได้ พื้นที่ $= F(b) - F(a) - (2f(a) + 2f'(a)) - (2f(b) - 2f'(b))$

$$= F(b) - F(a) - 2f(a) - 2f'(a) - 2f(b) + 2f'(b)$$

$$= F(b) - F(a) - 2f(b) - 2f(a) + 2f'(b) - 2f'(a)$$

$$= (8b^3 + 1007b^2 - 2557b) - (8a^3 + 1007a^2 - 2557a) - 2(24b^2 + 2014b - 2557) - 2(24a^2 + 2014a - 2557) + 2(48b + 2014) - 2(48a + 2014)$$

$$= 8(b^3 - a^3) + 1007(b^2 - a^2) - 2557(b - a) - 2(24(b^2 + a^2) + 2014(b + a) - 2557(2)) + 2(48b - 48a)$$

$$= 8(b - a)(b^2 + ba + a^2) + 1007(b - a)(b + a) - 2557(4) - 48(b^2 + a^2) - 4028(b + a) + 2557(4) + 2(48)(b - a)$$

$$= 8(4)(b^2 + ba + a^2) + 1007(4)(b + a) - 48(b^2 + a^2) - 4028(b + a) + 2(48)(4)$$

$$\begin{aligned} &= 32b^2 + 32ba + 32a^2 - 48b^2 - 48a^2 + 384 \\ &= -16b^2 + 32ba - 16a^2 + 384 \\ &= -16(b^2 - 2ba + a^2) + 384 = -16(b - a)^2 + 384 = -16(4)^2 + 384 = -256 + 384 = 128 \end{aligned}$$

28. $f(x) = c$

สังเกตว่า ประโยค $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ จะเป็นจริงยากมาก เพราะ ϵ มี $\forall \epsilon > 0$ อยู่

กรณีที่มี x, y บางคู่ (โดยไม่เสียใจทั่วไป ให้ $x < y$) ที่ $f(x) \neq f(y)$ จะทำให้ $|f(x) - f(y)| > 0$

และจะมี ϵ ค่าบวกน้อยๆบางตัว ที่อยู่ระหว่าง 0 กับ $|f(x) - f(y)|$ ซึ่งจะทำให้ $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ เป็นเท็จ

และเนื่องจาก $x < y$ จะทำให้ $x - y$ เป็นลบ ดังนั้น ไม่ว่าเลือก $\delta > 0$ เป็นอะไร ประโยค $x - y < \delta$ จะเป็นจริง

นั่นคือ ในกรณีนี้จะมี ϵ บางตัว ที่ไม่ว่า δ เป็นอะไรก็ตาม จะได้เงื่อนไขเป็น $T \Rightarrow F \equiv F$ ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไข

กรณีที่ $f(x) = f(y)$ สำหรับ x, y ใดๆ (คือกรณีที่ $f(x) =$ ค่าคงที่ สำหรับทุกๆค่า x)

จะทำให้ $|f(x) - f(y)| = 0$ ดังนั้น ประโยค $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ จะจริงเสมอ (เพราะฝั่งซ้าย = 0 และฝั่งขวา ϵ

เป็นบวก) ซึ่งได้เงื่อนไขเป็น $? \Rightarrow T \equiv T$ สอดคล้องกับเงื่อนไข

ดังนั้น ฟังก์ชันในรูป $f(x) = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดเสมอ

29. -10

จะรวมสามสมการ แล้วแก้หา A ก็ได้ หรืออีกวิธีที่ไม่ต้องหา A คือ สังเกตว่า สองสมการแรกได้ผลคูณเท่าเดิม และสมการ

ที่สามได้ผลคูณเป็นลบของของเดิม ดังนั้นถ้าคูณ A สองเที่ยว (คือคูณ A^2) จะได้เท่าเดิม

$$\begin{aligned} A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} &= A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} &= A \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & &= A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & &= A \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & &= -A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ & & & & &= -\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

การคูณเมทริกซ์ แต่ละหลักของตัวคูณจะคิดแยกกัน ดังนั้นเราสามารถรวมสามสมการได้เป็น

$$A^2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{เนื่องจาก } \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \neq 0 \text{ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า } A^2 = I$$

$$\text{ดังนั้น } A^{2557} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = A^{2(1278)+1} \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = (A^2)^{1278} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = I^{1278} \cdot A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ถัดมา จะแตก } \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ เป็นผลรวมของ } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ เพื่อให้สมบัติการกระจายในการหา } A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\text{ให้ } \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{เขียนเป็นระบบสมการได้} \quad \begin{aligned} x + y + z &= 9 & \dots(1) \\ y + z &= 7 & \dots(2) \\ -x + 2z &= 6 & \dots(3) \end{aligned}$$

$$(1) - (2) \text{ จะได้ } x = 2 \rightarrow \text{แทนใน (3) ได้ } z = \frac{8}{2} = 4 \rightarrow \text{แทนใน (2) ได้ } y = 3$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } A \cdot \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \\ 6 \end{bmatrix} &= A \cdot \left(2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = 2A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 3A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4A \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $a + b + c = 1 + (-1) + (-10) = -10$

30. 0, 1

กรณี $ax - 1 \geq 0$: จะได้ $|ax - 1| = ax - 1$ จะได้สมการคือ
$$\begin{aligned} ax - 1 &= ax^2 + (1 - 2a)x + 1 \\ 0 &= ax^2 + (1 - 3a)x + 2 \end{aligned}$$

จากสูตรคำตอบของสมการกำลังสอง จะได้ $x = \frac{-(1-3a) \pm \sqrt{(1-3a)^2 - 4a(2)}}{2a} = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ สองคำตอบ

แทน x ที่ได้ในเงื่อนไข $ax - 1 \geq 0$ จะได้เงื่อนไขของคำตอบคือ
$$a \cdot \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a} - 1 \geq 0$$
$$\frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2} \geq 1$$

กรณี $ax - 1 < 0$: จะได้ $|ax - 1| = -(ax - 1)$ จะได้สมการคือ
$$\begin{aligned} -(ax - 1) &= ax^2 + (1 - 2a)x + 1 \\ -ax + 1 &= ax^2 + (1 - 2a)x + 1 \\ 0 &= ax^2 + (1 - a)x \\ 0 &= x(ax + 1 - a) \end{aligned}$$

จะได้ $x = 0$ หรือ $ax + 1 - a = 0$
$$x = \frac{a-1}{a}$$

แทน x ที่ได้ในเงื่อนไข $ax - 1 < 0$ จะได้เงื่อนไขของคำตอบคือ
$$\begin{aligned} a(0) - 1 < 0 &\quad \text{กับ} \quad a\left(\frac{a-1}{a}\right) - 1 < 0 \\ -1 < 0 &\quad \quad \quad a - 1 - 1 < 0 \\ \text{จริงเสมอ} &\quad \quad \quad a < 2 \end{aligned}$$

จะเห็นว่า $x = 0$ สอดคล้องเงื่อนไขคำตอบเสมอ ดังนั้น $x = 0$ จะเป็นคำตอบโดยไม่มีขึ้นกับค่า a

แต่โจทย์ต้องการให้สมการนี้มีคำตอบเดียว ดังนั้น คำตอบอื่นต้อง

1. หาค่าไม่ได้ หรือ
2. กลับไปซ้ำกับคำตอบเดิม หรือ
3. ใช้ไม่ได้เนื่องจากเงื่อนไขของคำตอบเป็นเท็จ

1. ถ้าจะทำให้คำตอบ $x = \frac{a-1}{a}$ หาค่าไม่ได้ จะต้องให้ตัวส่วน $a = 0$

ซึ่งถ้า $a = 0$ จะทำให้คำตอบ $x = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ หาค่าไม่ได้เช่นกัน

และถ้าลองแทน $a = 0$ ในสมการตั้งต้นดู จะเห็นว่าคำตอบ $x = 0$ เดิม ยังคงเป็นคำตอบได้อยู่

ดังนั้น $a = 0$ จะสามารถทำให้สมการมีคำตอบเดียวได้

2. ทำให้ $x = \frac{a-1}{a}$ ซ้ำกับคำตอบ $x = 0 \rightarrow$ จะได้ $\frac{a-1}{a} = 0$ แก้สมการจะได้ $a = 1$

ซึ่งถ้า $a = 1$ จะทำให้คำตอบ $x = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ หาค่าไม่ได้ (เพราะในรูปติดลบ)

ดังนั้น $a = 1$ จะสามารถทำให้สมการมีคำตอบเดียวได้เช่นกัน

3. ทำให้เงื่อนไขของคำตอบ $x = \frac{a-1}{a}$ (ซึ่งคือ $a < 2$) เป็นเท็จ นั่นคือ เราจะกำหนดให้ $a \geq 2$

แต่ถ้า $a \geq 2$ จะทำให้คำตอบ $x = \frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2a}$ หาค่าได้ และเงื่อนไขของคำตอบนี้เป็นจริง

(เพราะ $\frac{3a-1 \pm \sqrt{9a^2-14a+1}}{2} \geq \frac{3(2)-1}{2} > 1$) ดังนั้น กรณีนี้จะไม่มีการทำให้สมการมีคำตอบเดียวได้

ดังนั้น $a = 0, 1$ จะทำให้สมการนี้มีคำตอบเดียว

31. $\frac{301}{646}$

กรรมการ 6 คน มี 4 ชั้นปี ดังนั้น จะมี 2 คนที่เข้าชั้นปีกับคนอื่นได้ จึงมีรูปแบบการเข้าแค่สองแบบ ดังนี้

กรณี มี 3 คน มาจากชั้นปีเดียวกัน อีก 3 คนมาจากชั้นปีอื่น ชั้นปีละคน (a a a b c d)

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccc}
 \text{ปี 1 สามคน} & \text{ปี 2 สามคน} & \text{ปี 3 สามคน} & \text{ปี 4 สามคน} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow
 \end{array} \\
 &= \binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{3}\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{3}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{3} \\
 &= \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\frac{5\cdot 4\cdot 3}{3!}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3!} \\
 &= (4\cdot 4\cdot 5\cdot 7)\left(1 + 1 + \frac{4\cdot 3}{3!} + \frac{6\cdot 5}{3!}\right) \\
 &= (4\cdot 4\cdot 5\cdot 7)(9)
 \end{aligned}$$

กรณี มีคน มาจากชั้นปีเดียวกัน 2 คู่ อีก 2 คนมาจากชั้นปีอื่น ชั้นปีละคน (a a b b c d)

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccccc}
 \text{ปี 1, 2 สองคู่} & \text{ปี 1, 3 สองคู่} & \text{ปี 1, 4 สองคู่} & \text{ปี 2, 3 สองคู่} & \text{ปี 2, 4 สองคู่} & \text{ปี 3, 4 สองคู่} \\
 \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow & \downarrow \downarrow
 \end{array} \\
 &= \binom{4}{2}\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{7}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{7}{1} + \binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{5}{1}\binom{7}{2} + \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{2}\binom{7}{1} + \binom{4}{1}\binom{4}{2}\binom{5}{1}\binom{7}{2} + \binom{4}{1}\binom{4}{1}\binom{5}{2}\binom{7}{2} \\
 &= \frac{4\cdot 3}{2} \cdot \frac{4\cdot 3}{2} \binom{5}{1}\binom{7}{1} + \frac{4\cdot 3}{2} \binom{4}{1} \frac{5\cdot 4}{2} \binom{7}{1} + \frac{4\cdot 3}{2} \binom{4}{1}\binom{5}{1} \frac{7\cdot 6}{2} + \binom{4}{1} \frac{4\cdot 3}{2} \cdot \frac{5\cdot 4}{2} \binom{7}{1} + \binom{4}{1} \frac{4\cdot 3}{2} \binom{5}{1} \frac{7\cdot 6}{2} + \binom{4}{1}\binom{4}{1} \frac{5\cdot 4}{2} \cdot \frac{7\cdot 6}{2} \\
 &= \left(\frac{4\cdot 4\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 2}\right)(3\cdot 3 + 3\cdot 4 + 3\cdot 6 + 3\cdot 4 + 3\cdot 6 + 4\cdot 6) \\
 &= (4\cdot 5\cdot 7)(9 + 12 + 18 + 12 + 18 + 24) \\
 &= (4\cdot 5\cdot 7)(93)
 \end{aligned}$$

มีทั้งหมด $4 + 4 + 5 + 7 = 20$ คน ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= \binom{20}{6} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16\cdot 15}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 19\cdot 17\cdot 8\cdot 15$ แบบ

$$\text{ดังนั้น จะได้ความน่าจะเป็น} = \frac{(4\cdot 4\cdot 5\cdot 7)(9) + (4\cdot 5\cdot 7)(93)}{19\cdot 17\cdot 8\cdot 15} = \frac{(4\cdot 5\cdot 7)(36+93)}{19\cdot 17\cdot 8\cdot 15} = \frac{(7)(129)}{19\cdot 17\cdot 2\cdot 3} = \frac{(7)(43)}{19\cdot 17\cdot 2} = \frac{301}{646}$$

32. $\binom{1279}{2}$

$$\begin{aligned}
 \text{จาก } x + y + z = 2557 \text{ จะได้ } y + z = 2557 - x \text{ แทนในเงื่อนไข } x \leq y + z \text{ จะได้ } & x \leq 2557 - x \\
 & 2x \leq 2557 \\
 & x \leq 1278.5
 \end{aligned}$$

แต่ x เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $x \leq 1278$

ทำนองเดียวกัน ถ้าแทน $x + z = 2557 - y$ กับ $x + y = 2557 - z$ ในอีกสองเงื่อนไขที่เหลือ

จะได้ว่า $y \leq 1278$ และ $z \leq 1278$ ด้วย

ดังนั้น โจทย์ข้อนี้เทียบได้กับการแจกของเหมือนกัน 2557 ชิ้น ให้ x, y, z (เพราะ $x + y + z = 2557$) โดยที่แต่ละคนได้ของอย่างน้อย 1 ชิ้น (เพราะ $x, y, z \in \mathbb{I}^+$) และแต่ละคนได้ของไม่เกินคนละ 1278 ชิ้น (เพราะ $x, y, z \leq 1278$) ซึ่งจะมีขั้นตอนการแจกให้ได้ตามเงื่อนไขดังนี้

1. แจกของให้แต่ละคนไปก่อนเลย คนละ 1278 ชิ้น
2. เนื่องจากมีของให้แจกได้แค่ 2557 ชิ้น ดังนั้น ขั้นตอนแรกจะแจกของเกินไป $3(1278) - 2557 = 1277$ ชิ้น
3. แจก “ใบคืนของ” จำนวน 1277 ใบ ให้ x, y, z เพื่อเรียกของ 1277 ชิ้นที่แจกเกิน กลับคืนมา

เช่น ถ้าแบ่ง 1277 เป็น $400 + 600 + 277$ แล้วแจก 400 ใบให้ x , แจก 600 ใบให้ y , แจก 277 ใบให้ z จะได้จำนวนของของ x เหลือ $1278 - 400 = 878$, ของ y เหลือ $= 1278 - 600 = 678$, ของ z เหลือ $1278 - 277 = 1001$ โดยวิธีนี้จะได้ $(x, y, z) = (878, 678, 1001)$ เป็นแบบหนึ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์
สังเกตว่า ข้อนี้ “โชคดี” ที่ใบคืนของทั้งหมด ($=1277$) มีจำนวนน้อยกว่าของที่แต่ละคนได้ในขั้นตอนแรก ($=1278$)

จึงไม่เกิดปัญหา “มีของไม่พอจะคืน” เช่น ถ้าแจกใบคืนของทั้งหมด 1277 ใบให้ x คนเดียวเต็มๆ ก็ยังจะได้

$(x, y, z) = (1, 1278, 1278)$ ซึ่งยังเป็นแบบหนึ่งที่สอดคล้องกับเงื่อนไขโจทย์

ดังนั้น จำนวนแบบของ (x, y, z) จะเท่ากับจำนวนแบบการแจกใบคืนของ 1277 ใบให้ x, y, z โดยอาจมีคนที่ได้ก็ได้

จาก Stars & Bars จะได้จำนวนแบบ $= \binom{1277+3-1}{3-1} = \binom{1279}{2}$

33. $1 + \sqrt{2}$

ข้อนี้จะใช้วิธีจับคู่ปลายซ้ายขวา แล้วไล่คู่เข้ามาตรงกลาง (จับตัวแรกกับตัวสุดท้าย, ตัวที่สองกับตัวรองสุดท้าย, ...)

สังเกตว่า a_1 มี $\tan \frac{\pi}{360}$ และ a_{90} มี $\tan \frac{179\pi}{360}$ จะเห็นว่า สองตัวนี้มีมุมหลัง $\tan$ รวมกันได้ $= \frac{180\pi}{360} = \frac{\pi}{2}$

ซึ่งจากโคฟังก์ชัน จะได้ $\left(\tan \frac{\pi}{360}\right) \left(\tan \frac{179\pi}{360}\right) = \left(\tan \frac{\pi}{360}\right) \left(\cot \frac{\pi}{360}\right) = 1$

ลองหาความสัมพันธ์ระหว่าง a_1 กับ a_{90} โดยพยายามให้ $\tan$ ของทั้งสองตัวมาคูณกันแล้วเป็น 1 จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_{90}^2 &= \frac{1}{1 + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}}} + \frac{1}{1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}}} \\ &= \frac{\left(1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}}\right) + \left(1 + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}}\right)}{\left(1 + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}}\right) \left(1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}}\right)} \\ &= \frac{1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}} + 1 + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}}}{1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}} + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}} + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}} \tan \frac{179\pi}{360}} = \frac{1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}} + 1 + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}}}{1 + \sqrt{\tan \frac{179\pi}{360}} + \sqrt{\tan \frac{\pi}{360}} + 1} = 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $a_1^2 = 1 - a_{90}^2$ และ $a_{90}^2 = 1 - a_1^2$...(*)

ถัดมา ลองหาความสัมพันธ์ระหว่าง $\sqrt{1 + a_1}$ กับ $\sqrt{1 - a_1}$ (เพราะ a_1 ของสองตัวนี้ น่าจะตัดกันได้) จะเห็นว่า

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + a_1} - \sqrt{1 - a_1}\right)^2 &= (1 + a_1) + (1 - a_1) - 2\sqrt{1 + a_1}\sqrt{1 - a_1} \\ &= 2 - 2\sqrt{1 - a_1^2} \\ &= 2 - 2\sqrt{a_{90}^2} \quad \leftarrow \text{จาก (*)} \\ &= 2 - 2a_{90} \\ &= 2(1 - a_{90}) \end{aligned}$$

ถอดรูททั้งสองข้าง จะได้ $\sqrt{1 + a_1} - \sqrt{1 - a_1} = \sqrt{2}\sqrt{1 - a_{90}}$... (1)

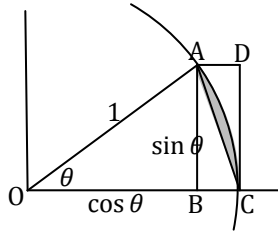
ทำแบบเดียวกันกับ a_{90} จะได้ $\sqrt{1 + a_{90}} - \sqrt{1 - a_{90}} = \sqrt{2}\sqrt{1 - a_1}$... (2)

$$\begin{aligned} (1) + (2) : \frac{\sqrt{1 + a_1}}{\sqrt{1 + a_1}} - \frac{\sqrt{1 - a_1}}{\sqrt{1 + a_1}} + \frac{\sqrt{1 + a_{90}}}{\sqrt{1 + a_{90}}} - \frac{\sqrt{1 - a_{90}}}{\sqrt{1 + a_{90}}} &= \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - a_{90}}}{\sqrt{1 + a_1}} + \frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - a_1}}{\sqrt{1 + a_{90}}} \\ &= (1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - a_{90}} + (1 + \sqrt{2})\sqrt{1 - a_1} \\ &= (1 + \sqrt{2})(\sqrt{1 - a_1} + \sqrt{1 - a_{90}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ทำแบบเดียวกันกับคู่อื่นๆ จะได้} \quad \sqrt{1 + a_2} + \sqrt{1 + a_{89}} &= (1 + \sqrt{2})(\sqrt{1 - a_2} + \sqrt{1 - a_{89}}) \\ \sqrt{1 + a_3} + \sqrt{1 + a_{88}} &= (1 + \sqrt{2})(\sqrt{1 - a_3} + \sqrt{1 - a_{88}}) \\ &\vdots \\ \sqrt{1 + a_{45}} + \sqrt{1 + a_{46}} &= (1 + \sqrt{2})(\sqrt{1 - a_{45}} + \sqrt{1 - a_{46}}) \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\sqrt{1 + a_1} + \sqrt{1 + a_2} + \dots + \sqrt{1 + a_{90}}}{\sqrt{1 - a_1} + \sqrt{1 - a_2} + \dots + \sqrt{1 - a_{90}}} = \frac{(1 + \sqrt{2})(\sqrt{1 - a_1} + \sqrt{1 - a_2} + \dots + \sqrt{1 - a_{90}})}{\sqrt{1 - a_1} + \sqrt{1 - a_2} + \dots + \sqrt{1 - a_{90}}} = 1 + \sqrt{2}$$

34. 4571


 จะหาค่าประมาณของ $\operatorname{cosec} \theta$ ก่อน โดยคิดจากค่าประมาณของ $\sin \theta$

 พิจารณาวงกลมหนึ่งหน่วย ที่มี $OA = OC = 1$ และ ให้ θ เป็นมุมใน Q_1 ดังรูป

 จะได้ $AB = \sin \theta$ และ $OB = \cos \theta$

 จากนิยามของมุมเรเดียน จะได้ ความยาวส่วนโค้ง $\widehat{AC} = \theta$

 จะเห็นว่า ส่วนโค้ง $\widehat{AC}$ ยาวกว่า เส้นตรง $\overline{AC}$ ยาวกว่า เส้นตรง $\overline{AB}$

 ดังนั้น $\theta > \sin \theta \dots (*)$

และจาก พื้นที่ $\triangle ADC$ $>$ พื้นที่เซกเมนต์ AC ที่แรเงา

จะได้ $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC$ $>$ พื้นที่ $\triangle$ ส่วนโค้ง OAC - พื้นที่ $\triangle$ ส่วนตรง OAC

$$\frac{1}{2} \cdot BC \cdot AB > \frac{\theta}{2\pi} \pi r^2 - \frac{1}{2} \cdot OC \cdot AB$$

$$\frac{1}{2} \cdot (OC - OB) \cdot \sin \theta > \frac{\theta}{2\pi} \pi (1^2) - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin \theta$$

$$\frac{1}{2} \cdot (1 - \cos \theta) \cdot \sin \theta > \frac{\theta}{2} - \frac{\sin \theta}{2}$$

$$(1 - \cos \theta) \cdot \sin \theta > \theta - \sin \theta$$

เปลี่ยน $\cos$ เป็น $\sin$ ด้วยสูตร $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$

$$\left(1 - \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot \sin \theta > \theta - \sin \theta$$

$$2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta > \theta - \sin \theta$$

จาก (*) จะได้ $\frac{\theta}{2} > \sin \frac{\theta}{2}$ และ $\theta > \sin \theta$

ดังนั้น $2 \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \theta > 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta$

$$\frac{\theta^3}{2} > 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta > \theta - \sin \theta$$

 ใช้ $2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cdot \sin \theta$ เป็นตัวเชื่อม จะสรุปได้ว่า $\frac{\theta^3}{2} > \theta - \sin \theta \rightarrow$ ย้ายข้าง จะได้ $\sin \theta > \theta - \frac{\theta^3}{2}$

 ต่อยรวมกับ (*) จะได้ $\theta > \sin \theta > \theta - \frac{\theta^3}{2}$

แทน $\theta = \frac{1}{2557}$ จะได้ $\frac{1}{2557} > \sin \frac{1}{2557} > \frac{1}{2557} - \frac{1}{2(2557)^3}$

เพราะ $\frac{1}{2(2557)^3} < \frac{1}{(2557)(2558)}$ และ ลบน้อย จะมีค่ามาก

$$> \frac{1}{2557} - \frac{1}{(2557)(2558)} = \frac{2558 - 1}{(2557)(2558)} = \frac{2557}{(2557)(2558)} = \frac{1}{2558}$$

 หมายเหตุ : จริงๆแล้วต้องได้ $\theta - \frac{\theta^3}{6}$
 แต่ผมคิดวิธีพิสูจน์ที่ใช้ความรู้ ม.ปลาย
 ไม่ออก ถ้าใครรู้ช่วยบอกด้วยนะครับ

 ดังนั้น $\frac{1}{2557} > \sin \frac{1}{2557} > \frac{1}{2558}$ กลับเศษส่วน ต้องกลับ มากกว่า เป็น น้อยกว่า ด้วย

 จะได้ $2557 < \operatorname{cosec} \frac{1}{2557} < 2558$ ดังนั้น $f(2557) = 2558$

 ทำแบบเดียวกัน โดยแทน $\theta = \frac{1}{2558}$ สุดท้ายจะได้ $2558 < \operatorname{cosec} \frac{1}{2558} < 2559$ ดังนั้น $f(2558) = 2559$

 จะเห็นว่า ทุกครั้งที่คิดค่า f ตัวเลขจะเพิ่มขึ้น 1 เสมอ ดังนั้น $\underbrace{(f \circ f \circ \dots \circ f)}_{2014 \text{ ตัว}}(2557) = 2557 + 2014 = 4571$

 35. $\frac{1}{1007}$

 จากเงื่อนไขที่ (2) ให้ $\frac{w - \bar{w}z_j}{1 - z_j} = k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

$$\begin{aligned} w - \bar{w}z_j &= k - kz_j \\ w - k &= \bar{w}z_j - kz_j \\ w - k &= (\bar{w} - k)z_j \\ \frac{w - k}{\bar{w} - k} &= z_j \end{aligned}$$

 แทนค่า $w = x + iy$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{x + iy - k}{x - iy - k} &= z_j \\ \frac{(x - k) + iy}{(x - k) - iy} &= z_j \end{aligned}$$

เนื่องจาก k เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $(x - k) + iy$ กับ $(x - k) - iy$ จะเป็นสังยุคกันเสมอ

นั่นคือ ถ้าให้ $v_j = (x - k) + iy$ จะได้ $\bar{v}_j = (x - k) - iy$ และจะได้ $z_j = \frac{v_j}{(\bar{v}_j)}$ และ $\frac{1}{z_j} = \frac{(\bar{v}_j)}{v_j}$

ดังนั้น $\left| \sum_{j=1}^{2014} \frac{1}{z_j} \right| = \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} + \dots + \frac{1}{z_{2014}} \right|$

จากสมบัติ $|z| = |\bar{z}|$ $\left(\begin{array}{l} \text{กระจายสังยุคในการบวก} \\ \text{กระจายสังยุคในการหาร} \end{array} \right)$ $= \left| \frac{(\bar{v}_1)}{v_1} + \frac{(\bar{v}_2)}{v_2} + \frac{(\bar{v}_3)}{v_3} + \dots + \frac{(\bar{v}_{2014})}{v_{2014}} \right|$

กระจายสังยุคในการหาร $= \left| \overline{\left(\frac{v_1}{(\bar{v}_1)} + \frac{v_2}{(\bar{v}_2)} + \frac{v_3}{(\bar{v}_3)} + \dots + \frac{v_{2014}}{(\bar{v}_{2014})} \right)} \right|$

และสังยุคซ้อน 2 ครั้ง จะกลับไปที่เท่าเดิม $= \left| \frac{v_1}{(\bar{v}_1)} + \frac{v_2}{(\bar{v}_2)} + \frac{v_3}{(\bar{v}_3)} + \dots + \frac{v_{2014}}{(\bar{v}_{2014})} \right|$

$= \left| z_1 + z_2 + z_3 + \dots + z_{2014} \right|$

$= \left| \sum_{j=1}^{2014} z_j \right|$

ดังนั้น $\left| \sum_{j=1}^{2014} z_j \right| = \left| \sum_{j=1}^{2014} \frac{1}{z_j} \right| = \frac{1}{1007}$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สุทธิเกียรติ ชาติธรรมรักษ์ สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ คุณ Punyapat Makul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร