

ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 56)

วันอาทิตย์ที่ 24 พฤศจิกายน 2556

ตอนที่ 1

1. กำหนดให้ $A = \{x \in \mathbb{R} : 3x^5 - 2x^4 - 7x^3 + x = 10\}$, $B = \{2\}$ และ $C = \left\{\frac{2}{3}\right\}$

จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $A \cup B \notin \mathcal{P}(A)$

(2) $\{A, A - C\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) เป็นเท็จ

2. ณเดชน์ ญาญา และ เจเจ เข้าร่วมแข่งขันตอบปัญหาคณิตศาสตร์ซึ่งมีทั้งหมด 12 ข้อ ก่อนวันแข่งขัน ทั้งสามคนและอาจารย์เอ (ผู้ฝึกสอน) ประชุมประเมินสถานการณ์ แต่ละคนประเมินดังนี้

ณเดชน์ : “ญาญาคงตอบถูกมากกว่าผมอย่างน้อยสองข้อ”

ญาญา : “หนูคงทำถูกไม่เกินห้าข้อ”

เจเจ : “อย่างมากผมคงทำได้เท่ากับณเดชน์”

อาจารย์เอ : “ครูมั่นใจว่ารวมกันแล้วพวกคุณคงทำได้ถูกมากกว่า 18 ข้อ”

เมื่อผลการแข่งขันออกมาปรากฏว่านักเรียนทั้งสามคนรวมทั้งอาจารย์ประเมินสถานการณ์ผิด ใครทำถูกน้อยที่สุด

ก. ณเดชน์

ข. เจเจ

ค. ณเดชน์และเจเจ

ง. ข้อมูลไม่เพียงพอ

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(1) \forall x, y \in \mathbb{R}, ||x| + |y|| + ||x| - |y|| = |x + y| + |x - y|$$

$$(2) \forall x, y \in \mathbb{R}, \frac{x+y-|x-y|}{2} \leq x \leq \frac{x+y+|x-y|}{2}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) เป็นเท็จ

4. กำหนดการดำเนินการ * บนเซตของจำนวนจริง เป็นไปตามกฎต่อไปนี้

$$(1) 2 * 2 = \frac{3}{2}$$

$$(2) 2a * b = (a * b) + \frac{1}{2} \text{ ทุกจำนวนจริงบวก } a \text{ และ } b$$

$$(3) a^2 * b = b^2 * a \text{ ทุกจำนวนจริงบวก } a \text{ และ } b$$

จงพิจารณาว่า $1 * 1$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0

ข. $\frac{1}{2}$

ค. 1

ง. $\frac{3}{2}$

5. กำหนดความสัมพันธ์ r_1 และ r_2 ดังต่อไปนี้

$$r_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \log_{2556}(2x + y) + xy = 3y + 3\},$$

$$r_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 4x^2 + 8xy + 5y^2 + 4x + 8y + 5 = 0\}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $r_1 \cap r_2 = \emptyset$

ข. $r_1 \subseteq r_2$

ค. $r_2 \subseteq r_1$

ง. $r_1 \cup r_2 \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$

6. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงที่สอดคล้องกับสมการ $2 + \sqrt{2^{2x+y+1} - 16^x - 4^y} = \log_3(x + y)$
แล้ว $x^2 + y$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 3

ข. 8

ค. 15

ง. 24

7. กำหนดให้ U เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A, B และ C เป็นสับเซตของ U ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $A - (A - B) = B$

ข. $A - (B - A) = A - B$

ค. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

ง. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

8. ผลสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีค่าเฉลี่ยคือ 65 คะแนน ต่อมาภายหลังตรวจพบว่า มีการกรอกคะแนนของนักเรียนผิดไป 3 คน คือ คนแรกกรอกคะแนนมากกว่าคะแนนจริงไป 5 คะแนน คนที่สองกรอกคะแนนน้อยกว่าคะแนนจริงไป 3 คะแนน และคนที่สามกรอกคะแนนมากกว่าคะแนนจริงไป 1 คะแนน หลังจากแก้ไขแล้วพบว่าค่าเฉลี่ยของคะแนนทั้งหมดคือ 64.95 นักเรียนห้องนี้มีกี่คน

ก. 40 คน

ข. 50 คน

ค. 60 คน

ง. 100 คน

9. ถ้าให้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล X และ Y เป็นไปตามสมการ $Y = a + bX$ โดยที่ $b < 0$ ถ้าความแปรปรวนของ X และ Y มีค่าเท่ากัน และ ผลรวมของค่าเฉลี่ยของ X และ Y มีค่าเท่ากับ 5 จงหาค่าของ X เมื่อ $Y = 2$
- ก. -2 ข. -3 ค. 3 ง. ข้อมูลไม่เพียงพอ

10. กำหนดให้ $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,1)$ และ $\vec{w} = (a,b,c)$ โดยที่ $a \neq 0$ ถ้า $\vec{w}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยซึ่ง $\vec{w}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ และมุมระหว่าง $\vec{w}$ กับ $\vec{v}$ เท่ากับ $\pi/4$ แล้ว $ab + c^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
- ก. $\frac{2}{9}$ ข. $\frac{1}{3}$ ค. $\frac{4}{9}$ ง. $\frac{2}{3}$

11. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์

(2) $\int_1^9 \frac{x-1}{x+\sqrt{x}} dx = 2$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) เป็นเท็จ

12. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) มีจำนวนจริงบวก $a \neq b$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $a + \frac{1}{\sqrt{b}} = b + \frac{1}{\sqrt{a}}$

(2) มีจำนวนจริงบวก $a \neq b$ ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $a - \frac{1}{\sqrt{b}} = b - \frac{1}{\sqrt{a}}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) เป็นเท็จ

13. กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$ ถ้า $\tan(2\theta) = \frac{m}{n}$ โดยที่ $m, n \geq 0$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ตรงกับค่าของ $\tan \theta$

ก. $\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$

ข. $\frac{n+\sqrt{n^2+m^2}}{m}$

ค. $\frac{m}{n+\sqrt{n^2+m^2}}$

ง. ไม่มีข้อใดถูกต้อง

14. กำหนดให้สมการ $C(x, y) = Ax^2 + By^2 + Cx + Ey + F = 0$ แทนภาคตัดกรวยไม่ลดรูปใดๆ และสมการ $L(x, y) = ax + by + c = 0$ แทนเส้นตรงใดๆ จงพิจารณาว่าภาคตัดกรวย $C(x, y) = 0$ ในข้อใดต่อไปนี้ ทำให้ข้อความ

"ถ้าระบบสมการ $\begin{cases} C(x, y) = 0 \\ L(x, y) = 0 \end{cases}$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ $x = x_0$ และ $y = y_0$

แล้ว จะได้ว่า เส้นตรง $L(x, y) = 0$ สัมผัสภาคตัดกรวย $C(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) "

เป็นจริง

ก. วงรี

ข. พาราโบลา

ค. ไฮเพอร์โบลา

ง. มีข้อถูกมากกว่า 1 ข้อ

15. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) โฟกัสของไฮเพอร์โบลา $xy = 1$ คือ $(2,2)$ และ $(-2,-2)$

(2) ถ้า A เป็นเมทริกซ์ขนาด 2556×1 ซึ่ง A ไม่เป็นเมทริกซ์ศูนย์ แล้ว $\det(AA^T) = 0$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ข้อความ (1) และ (2) เป็นจริง

ข. ข้อความ (1) เป็นจริง ข้อความ (2) เป็นเท็จ

ค. ข้อความ (1) เป็นเท็จ ข้อความ (2) เป็นจริง

ง. ข้อความ (1) และ (2) เป็นเท็จ

ตอนที่ 2

16. ข้อมูลชุดหนึ่งคือ $x_1, x_2, \dots, x_n$ เป็นลำดับเลขคณิต โดยเรียงจากน้อยไปหามาก ถ้าค่าเฉลี่ยคือ 51 และค่าที่น้อยที่สุดของข้อมูลคือ 11 จงหาพิสัยของข้อมูลชุดนี้

17. จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของ $p + q$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเฉพาะซึ่ง $p + q$ หาร pq ลงตัว

18. ให้ $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาจำนวนเต็มบวก n ต่ำสุดที่ทำให้ w เป็นรากของสมการ $(z + 1)^n - z^n = 0$

19. จงหาจำนวนวิธีในการเขียน 648,000 เป็นผลคูณ xy ของจำนวนเต็มบวก x และ y สองจำนวน โดยที่ x หาร y ลงตัว

20. ให้ A เป็นจำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ $z^{2556} = \bar{z}$ และ B เป็นผลบวกของรากทั้งหมดซึ่งมีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับ 0 ของสมการ $z^{2556} = \bar{z}$ จงหาค่าของ $A - B$

21. กำหนดให้ $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก 100 จำนวนเรียงติดกัน จงหาค่าน้อยที่สุดที่เป็นจำนวนเต็มของ $\sqrt{a_2 + a_3 + \dots + a_{99}} - \sqrt{a_1 + a_{100}}$

22. ส่วนสูงของประชากรในประเทศหนึ่ง มีการแจกแจงแบบปกติ ถ้า 97.72% ของคนในประเทศ มีความสูงเกิน 166 ซม. และ 15.87% ของคนในประเทศ มีความสูงเกิน 178 ซม. จงหาค่าเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคนในประเทศนี้ (กำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน สำหรับ $Z \leq 2$ มีค่าเท่ากับ 0.9772 และสำหรับ $Z \leq -1$ มีค่าเท่ากับ 0.1587)

23. สำหรับ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ และ $A \subseteq \mathbb{R}$ นิยาม $f[A] = \{f(x) : x \in A\}$

ถ้า $f(x) = x^2 - 0.5$, $B = [-5, 0]$, $C = [0, 5]$ และ $r \in f[B] \cap f[C] \cap f[B \cap C]$ แล้ว

$1 + r + r^2 + r^3 + \dots$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. ในงานวัดประจำปี มีการออกร้านและชิงช้าสวรรค์ ซึ่งประกอบด้วยกระเช้า 10 กระเช้า แต่ละกระเช้านั่งได้เพียง 1 คน เมื่อเริ่มต้นกระเช้าทุกตัวว่างอยู่ มีเด็ก 5 คน เข้าแถวรอขึ้นชิงช้าสวรรค์ เด็กแต่ละคนสามารถเลือกนั่งกระเช้าใดก็ได้ ใครมาก่อนมีสิทธิ์เลือกก่อน จงหาความน่าจะเป็นที่เด็กคนที่ 4 และ คนที่ 5 ที่เข้าแถวอยู่ จะได้ขึ้นกระเช้าที่ไม่อยู่เรียงติดกัน

25. จงหาค่าของ $4 \sin 20^\circ + \tan 20^\circ$

ตอนที่ 3

26. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC ซึ่งมีด้านตรงข้ามมุม A มุม B และ มุม C เท่ากับ a, b, c ตามลำดับ

ถ้า $b^2 + c^2 - bc = a^2$ และ $\frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3}$ แล้ว $\tan B$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

27. จงหาสมการเส้นตรงในรูป $y = ax + b$ ซึ่งผ่านจุด $(\frac{1}{2}, 2)$ สัมผัสกับกราฟของฟังก์ชัน $y = 2 - \frac{x^2}{2}$ และตัดกับกราฟของฟังก์ชัน $y = \sqrt{4 - x^2}$ ที่จุดสองจุดที่แตกต่างกัน

28. กำหนดให้ $p(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์ทุกตัวเป็นจำนวนเต็มบวก

ถ้า $p(1) = 88$ และ $p(100) = 62307152908$ แล้ว จงหาค่าของ $p(-1)$

29. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งสอดคล้องกับสมการ

$$\sin(2A - B) + \sin(2B - C) + \sin(2C - A) = 0$$

แล้ว $\cos(2A - B) + \cos(2B - C) + \cos(2C - A)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

30. กำหนดให้ $A = \left\{ \cos x + \cos y : \tan x \cdot \tan y = 2, x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \right\}$
จงเขียนเซต A ในรูปของช่วง

31. จงหาสามสิ่งอันดับ (a, b, p) ทั้งหมด ซึ่ง a, b เป็นจำนวนเต็ม และ p เป็นจำนวนเฉพาะและสอดคล้อง
- $$\frac{a}{1+b} - \frac{b}{1+a} = \frac{p^2}{1+a+b+ab}$$

32. กำหนดให้ $M = \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{50 \cdot 99}$ และ $N = \frac{1}{51 \cdot 100} + \frac{1}{52 \cdot 99} + \frac{1}{53 \cdot 98} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 51}$
จงหาค่าของ $\frac{M}{N}$

33. รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\angle ACB$ กว้าง 45° ให้ D เป็นจุดบนด้าน AC ซึ่งทำให้ $AD = (2 + 2\sqrt{3})DC$
ถ้า $\angle ADB$ กว้าง 60° แล้ว $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

$$(1) \ a_1 = 1 \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = 2012$$

(2) $a_{2n-1}, a_{2n}, a_{2n+1}$ เป็นลำดับเรขาคณิต และ $a_{2n}, a_{2n+1}, a_{2n+2}$ เป็นลำดับเลขคณิต ทุกจำนวนเต็มบวก n

จงหาค่าของ a_{2013}

35. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน 10 จำนวนที่แตกต่างกันหมดและมีสมบัติว่า $\{ wz : w, z \in A \} = A$

ให้ $f(A)$ เป็นผลคูณทั้งหมดของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของสมาชิกสองตัวใดๆ ของ A

นั่นคือ ถ้า $A = \{z_1, z_2, \dots, z_{10}\}$ แล้ว $f(A) = |z_1 - z_2||z_1 - z_3| \dots |z_2 - z_3| \dots |z_9 - z_{10}|$

จงหาผลบวกของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $f(A)$

เฉลย

- | | | | |
|------|--------|----------------------------|---|
| 1. ค | 10. ก | 19. 24 | 28. 4 |
| 2. ก | 11. ง | 20. 2559 | 29. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ |
| 3. ก | 12. ค | 21. 66 | 30. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$ |
| 4. ก | 13. ค | 22. 174, 4 | 31. (2, 1, 2), (2, -2, 2), |
| 5. ค | 14. ก | 23. $\frac{2}{3}$ | (-3, -2, 2), (-3, 1, 2) |
| 6. ค | 15. ค | 24. $\frac{7}{9}$ | 32. 151 |
| 7. ค | 16. 80 | 25. $\sqrt{3}$ | 33. 0 |
| 8. ค | 17. 4 | 26. $\frac{1}{2}$ | 34. 2.25 |
| 9. ง | 18. 6 | 27. $y = -x + \frac{5}{2}$ | 35. 119683 |

แนวคิด

1. ค

ข้อนี้ ต้องอย่าเพิ่งรีบแก้สมการใน A แต่ให้ดูก่อนว่า (1) กับ (2) จะจริงหรือไม่จริงเมื่อไหร่

(1) จากนิยามของเพาเวอร์เซต $A \cup B \in \mathcal{P}(A)$ เมื่อ $A \cup B \subset A$ ซึ่งจะจริงเมื่อ $B \subset A$

ลองแทน $x = 2$ ในสมการใน A จะได้ $96 - 32 - 56 + 2 = 10$ จริง

ดังนั้น $B \subset A$ ดังนั้น $A \cup B \in \mathcal{P}(A) \rightarrow$ (1) ผิด

(2) $\{A, A - C\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ เมื่อ $\{A, A - C\} \subset \mathcal{P}(A)$ ซึ่งจะจริงเมื่อ $A \in \mathcal{P}(A)$ และ $A - C \in \mathcal{P}(A)$

$A \in \mathcal{P}(A)$ จริงเสมออยู่แล้ว, $A - C \in \mathcal{P}(A)$ จะจริงเมื่อ $A - C \subset A$ ซึ่งจะจริงเสมอเช่นกัน $\rightarrow$ (2) ถูก

2. ก

จากที่ เจเจ พุดผิด แสดงว่า เจเจ > ณเดชน์ ... (1)

จากที่ ญาญา พุดผิด แสดงว่า ญาญา ≥ 6 ... (2)

จากที่ ครู พุดผิด แสดงว่าสามคนรวมกัน ≤ 18 แต่ญาญา ≥ 6 ดังนั้นสองคนที่เหลือต้องรวมกัน ≤ 12

แต่ เจเจ > ณเดชน์ ดังนั้น ณเดชน์ จะได้ $< \frac{12}{2} = 6$ นั่นคือ ณเดชน์จะได้ อย่างมากแค่ 5 ข้อเท่านั้น ... (3)

จาก (1), (2), (3) จะได้ ณเดชน์ ได้คะแนนน้อยที่สุด

3. ก

(1) ทั้งสองฝั่งเป็นบวก $\rightarrow$ สามารถยกกำลังสองทั้งสองข้างได้ และใช้สมบัติ $|k|^2 = k^2$

$$\begin{aligned} \text{ฝั่งซ้าย ยกกำลังสอง จะได้} &= (|x| + |y|)^2 + 2(|x| + |y|)(|x| - |y|) + (|x| - |y|)^2 \\ &= x^2 + 2|xy| + y^2 + 2|x^2 - y^2| + x^2 - 2|xy| + y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2|x^2 - y^2| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ฝั่งขวา ยกกำลังสอง จะได้} &= (x + y)^2 + 2(x + y)(x - y) + (x - y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 + 2|x^2 - y^2| + x^2 - 2xy + y^2 \\ &= 2x^2 + 2y^2 + 2|x^2 - y^2| \end{aligned}$$

เท่ากัน ดังนั้น (1) ถูก (จุดที่น่าสังเกตคือ ฝั่งซ้าย $2|xy|$ จะตัดกัน ในขณะที่ฝั่งขวา $2xy$ จะตัดกัน)

(2) คูณ 2 ตลอด จะได้ $x + y - |x - y| \leq 2x \leq x + y + |x - y|$

$-x - y$ ตลอด จะได้ $-|x - y| \leq x - y \leq |x - y|$ ซึ่งเป็นจริง (เนื่องจาก $-|a| \leq a \leq |a|$)

4. ก

จาก (2) แทน $a = 1, b = 1$ จะได้ $2 * 1 = (1 * 1) + \frac{1}{2}$ ดังนั้น $1 * 1 = (2 * 1) - \frac{1}{2} \dots(4)$

จาก (2) แทน $a = 2, b = 1$ จะได้ $4 * 1 = (2 * 1) + \frac{1}{2}$ ดังนั้น $2 * 1 = (4 * 1) - \frac{1}{2} \dots(5)$

จาก (3) แทน $a = 2, b = 1$ จะได้ $4 * 1 = 1 * 2 \dots(6)$

จาก (2) แทน $a = 1, b = 2$ จะได้ $2 * 2 = (1 * 2) + \frac{1}{2}$ ดังนั้น $1 * 2 = (2 * 2) - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$

แทนค่ากลับไป จาก (6) จะได้ $4 * 1 = 1$ และจาก (5) จะได้ $2 * 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

และจาก (4) จะได้ $1 * 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

5. ค

แก้ r_2 ก่อน จัดเป็นสมการกำลังสองที่มี x เป็นตัวแปร จะได้ $4x^2 + (8y + 4)x + (5y^2 + 8y + 5) = 0 \dots(1)$

สมการนี้จะมีคำตอบเมื่อ $b^2 - 4ac \geq 0$ นั่นคือ $(8y + 4)^2 - 4(4)(5y^2 + 8y + 5) \geq 0$

$$\begin{aligned} \text{หาร } 4^2 \text{ ตลอด จะกลายเป็น } & (2y + 1)^2 - (5y^2 + 8y + 5) \geq 0 \\ & 4y^2 + 4y + 1 - 5y^2 - 8y - 5 \geq 0 \\ & -y^2 - 4y - 4 \geq 0 \\ & y^2 + 4y + 4 \leq 0 \\ & (y + 2)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

แต่ผลกำลังสองเป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $(y + 2)^2 \leq 0$ ได้กรณีเดียว คือ $(y + 2)^2 = 0$ ซึ่งจะได้ $y = -2$

แทนใน (1) จะได้ $4x^2 - 12x + 9 = 0 \rightarrow (2x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$ ดังนั้น r_2 มีตัวเดียว คือ $(\frac{3}{2}, -2)$

เนื่องจาก $-2 \notin \mathbb{R}^+$ ดังนั้น ข้อ ง. ผิดแน่นอน

ลองแทน $(\frac{3}{2}, -2)$ ใน r_1 ดู จะได้ $\log_{2556} 1 + (-3) = (-6) + 3 \rightarrow -3 = -3$ ได้สมการที่เป็นจริง

ดังนั้น $(\frac{3}{2}, -2) \in r_1$ ดังนั้น ข้อ ก ผิด และ ข้อ ค ถูก

ถัดมา จะแสดงว่าข้อ ข ผิด โดยจะหา (a, b) อื่นที่ไม่ใช่ $(\frac{3}{2}, -2)$ ที่ทำให้ r_1 เป็นจริง

เช่น ถ้า $2x + y = 2556$ แล้ว สมการ r_1 จะกลายเป็น $1 + xy = 3y + 3 \rightarrow xy = 3y + 2$

แทนค่า $y = 2556 - 2x$ จะได้ $x(2556 - 2x) = 3(2556 - 2x) + 2$

หาร 2 ตลอด เหลือ $x(1278 - x) = 3(1278 - x) + 1$ กระจายได้ $1278x - x^2 = 3834 - 3x + 1$

จะได้ $0 = x^2 - 1281x + 3835$ ซึ่งสมการนี้มีคำตอบแน่นอน เพราะ $(-1281)^2 - 4(1)(3835) \geq 0$

ดังนั้น r_1 มีมากกว่า 1 คำตอบ ในขณะที่ r_2 มีแค่คำตอบเดียว ดังนั้น ข้อ ข จึงผิด

6. ค

$$\begin{aligned} \text{ข้อนี้ต้องสังเกตว่า ในรูป ทำเป็นกำลังสองสมบูรณ์ได้} & = -(16^x + 4^y - 2^{2x+y+1}) \\ & = -(2^{4x} + 2^{2y} - 2 \cdot 2^{2x} 2^y) \\ & = -(2^{2x} - 2^y)^2 \end{aligned}$$

เนื่องจากในรูปห้ามติดลบ ดังนั้น $-(2^{2x} - 2^y)^2 \geq 0$ คูณ -1 ตลอด ได้ $(2^{2x} - 2^y)^2 \leq 0$

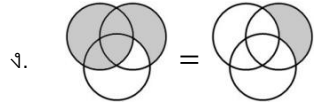
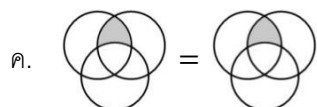
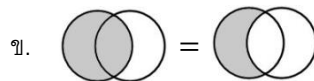
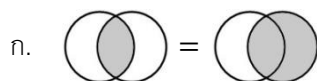
แต่ผลกำลังสองต้อง ≥ 0 ดังนั้น เป็นไปได้แบบเดียว คือ $2^{2x} - 2^y = 0$ จะได้ $2x = y$

แทนค่า ในรูป $= 0$ และ $y = 2x$ จะได้ $2 = \log_3(x + 2x) \rightarrow 3x = 3^2 \rightarrow x = 3$

และจะได้ $y = 2(3) = 6$ ดังนั้น $x^2 + y = 3^2 + 6 = 15$

7. ค

วาดรูปจะได้ดังนี้



ดังนั้น ข้อ ค ถูกต้อง

8. ค

ให้มี N คน ตอนแรกได้ค่าเฉลี่ย 65 ดังนั้น ผลรวมคะแนน (แบบผิดๆ) คือ $65N$

กรอกผิด 3 คน มากไป 5, น้อยไป 3, มากไป 1 ดังนั้น ถ้ารวม 3 คน จะได้ มากไป $5 - 3 + 1 = 3$ คะแนน

ดังนั้น ผลรวมคะแนนที่ถูกต้อง คือ $65N - 3$ ดังนั้น $65N - 3 = 64.95N$

แก้สมการจะได้ $N = \frac{3}{0.05} = 60$ คน

9. ง

สมการ $Y = a + bX$ ที่โจทย์ให้ จะใช้หา Y เมื่อทราบ X แต่ปรากฏว่าโจทย์กลับกำหนดค่า Y แล้วให้หา X จึงไม่แน่ใจว่าโจทย์ต้องการให้ทำแบบไหน

นอกจากนี้ ถ้าสังเกตข้อมูลสองชุด

x_i	y_i
1	4
2	3
3	2

กับ

x_i	y_i
1	3
2	4
3	2

(ชุดหลัง แสลับ 3 กับ 4 ใน y)

จะเห็นว่าทั้งสองชุด มี $\bar{x} + \bar{y} = \frac{1+2+3}{3} + \frac{4+3+2}{3} = 2 + 3 = 5$

และ ความแปรปรวนของ x และ y มีค่าเท่ากัน เพราะ 2, 3, 4 เกิดจากการบวก 1 ให้ทุกตัวใน 1, 2, 3

การบวกข้อมูลทุกตัวด้วยค่าคงที่ และการสลับข้อมูล จะไม่ทำให้ การกระจายเปลี่ยน

ดังนั้น ข้อมูลทั้งสองชุดนี้ มีสมบัติเหมือนกับที่โจทย์กำหนด แต่ได้คำตอบต่างกัน ดังนี้

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	4	1	4
2	3	4	6
3	2	9	6
6	9	14	16

$$\begin{aligned} 9 &= 3a + 6b \\ 16 &= 6a + 14b \\ \rightarrow a &= 5, b = -1 \\ \rightarrow Y &= 5 - X \end{aligned}$$

ถ้า $Y = 2$ จะได้ $X = 3$

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	3	1	3
2	4	4	8
3	2	9	6
6	9	14	17

$$\begin{aligned} 9 &= 3a + 6b \\ 17 &= 6a + 14b \\ \rightarrow a &= 4, b = -0.5 \\ \rightarrow Y &= 4 - 0.5X \end{aligned}$$

ถ้า $Y = 2$ จะได้ $X = 4$

ดังนั้น จึงตอบข้อ ง ข้อมูลไม่เพียงพอ

อย่างไรก็ตาม ถ้าแก้โจทย์ข้อนี้ได้น้อย โดยย้ายออกจากเรื่องความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ไปเป็นเรื่องความสัมพันธ์เฉยๆ

ถ้าเปลี่ยนโจทย์เป็น กำหนดให้ x_i, y_i ทุกคู่ สอดคล้องกับสมการ $y = a + bx$ จะยังพหาคำตอบได้

จากสมบัติของการกระจาย การบวก a จะไม่ทำให้การกระจายเปลี่ยน แต่การคูณ b จะทำให้การกระจายเป็น $|b|$ เท่า

แต่โจทย์กำหนดให้ความแปรปรวนของ x_i และ y_i เท่ากัน ดังนั้น การกระจายของ x_i และ y_i จะเท่ากันด้วย

จึงสรุปได้ว่า $|b| = 1$ แต่โจทย์บอกว่า $b < 0$ จึงได้ $b = -1$

ดังนั้น $y = a - x$ จากสมบัติของค่าเฉลี่ย จะได้ $\bar{y} = a - \bar{x}$ ด้วย ดังนั้น $\bar{x} + \bar{y} = a$

แต่โจทย์บอกว่า $\bar{x} + \bar{y} = 5$ จึงได้ $a = 5$ ดังนั้น สมการคือ $y = 5 - x$ ดังนั้น ถ้า $y = 2$ จะได้ $x = 3$

10. ก

$\vec{w}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u}$ ดังนั้น จะดอทกันได้ $0 \rightarrow 2a + 1b + 0c = 0$ จะได้ $2a + b = 0 \dots(1)$

และจากสูตรการดอท จะได้ $\vec{w} \cdot \vec{v} = |\vec{w}||\vec{v}| \cos \theta = (1)(\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}) \cos \frac{\pi}{4} = (1)(\sqrt{2}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1$

แต่ $\vec{w} \cdot \vec{v} = 1a + 0b + 1c = a + c$ ด้วย ดังนั้น $a + c = 1 \dots(2)$

และจาก $|\vec{w}| = 1$ ดังนั้น $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1 \dots(3)$

จาก (1) จะได้ $b = -2a$ และจาก (2) จะได้ $c = 1 - a$ แทนใน (3) จะได้ $\sqrt{a^2 + (-2a)^2 + (1-a)^2} = 1$

แก้สมการ จะได้ $6a^2 - 2a = 0 \rightarrow a = 0, \frac{1}{3}$ แต่โจทย์บอก $a \neq 0$ ดังนั้น $a = \frac{1}{3} \rightarrow b = -\frac{2}{3}, c = \frac{2}{3}$

ดังนั้น $ab + c^2 = -\frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

11. ง

(1) ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ จะได้จากการแก้สมการ $f'(x) = 0$

ใช้สูตรดิฟเฟอเรนเชียล จะได้ $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})(1) - (x)\left(\frac{1}{2}(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}(2x)\right)}{x^2+1} = 0$

คูณ $x^2 + 1$ ตลอด และจัดรูป จะได้ $\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = 0$

คูณตลอดด้วย $\sqrt{x^2 + 1}$ จะได้ $x^2 + 1 - x^2 = 0$ ตัด x^2 เหลือ $1 = 0$ ซึ่งเป็นเท็จเสมอ

ดังนั้น จะไม่มี x ที่ทำให้ $f'(x) = 0$ ได้ $\rightarrow$ ไม่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ $\rightarrow$ (1) ผิด

$$\begin{aligned} (2) \int_1^9 \frac{x-1}{x+\sqrt{x}} dx &= \int_1^9 \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} dx \\ &= \int_1^9 \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_1^9 1 - x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= x - 2x^{\frac{1}{2}} \Big|_1^9 = (9 - 2(3)) - (1 - 2) = 4 \rightarrow (2) ผิด \end{aligned}$$

12. ค

(1) ย้ายรูปไปฝั่งเดียวกัน ได้ $a - b = \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}}$

เนื่องจาก a, b เป็นบวก แยกฝั่งซ้ายได้ $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$

เนื่องจาก $a \neq b$ ตัด $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ ทั้งสองฝั่ง $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{-1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$

จะเห็นว่าฝั่งซ้ายเป็นบวกเสมอ แต่ฝั่งขวาเป็นลบเสมอ จึงเป็นไปไม่ได้ $\rightarrow$ (1) ผิด

(2) ถ้าทำเหมือนข้อ (1) จะได้ $\sqrt{a} + \sqrt{b} = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{b}}$ ซึ่งควรวีธีนี้จะไม่อะไรขัดแย้ง เพราะเป็นบวกทั้งสองฝั่ง เราต้องหาวามี a, b ที่ทำให้สมการนี้จริงหรือไม่ เราจะลองแทน $b = 1$ ดู ถ้าหา $a \in \mathbb{R}^+$ ได้ แสดงว่าข้อนี้จริง

ถ้า $b = 1$ จะได้ $\sqrt{a} + 1 = \frac{1}{\sqrt{a}}$ จัดเป็นสมการกำลังสองที่มี $\sqrt{a}$ เป็นตัวแปร จะได้ $\sqrt{a}^2 + \sqrt{a} - 1 = 0$

จากสูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ จะได้ $\sqrt{a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-1)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

แต่ $\sqrt{a}$ เป็นบวก ดังนั้น ใช้ได้แค่ $\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ จะเห็นได้ว่า $a = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2$ ดังนั้น (2) ถูก

13. ค

ให้ $\tan \theta = x$ และ จากสูตร $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ จะได้ $\frac{m}{n} = \frac{2x}{1-x^2}$

จัดเป็นสมการกำลังสองที่มี x เป็นตัวแปร จะได้ $0 = mx^2 + 2nx - m$

จากสูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ จะได้ $x = \frac{-2n \pm \sqrt{4n^2 - 4m(-m)}}{2m}$ จัดรูป และตัด 2 ทั้งเศษและส่วน จะได้ $\frac{-n \pm \sqrt{n^2 + m^2}}{m}$

แต่ $0 < \theta < \frac{\pi}{8}$ ดังนั้น $\tan \theta$ เป็นบวก เหลือ $\frac{-n + \sqrt{n^2 + m^2}}{m}$ จะเห็นว่าไม่มีตัวเล็กลงให้กา

ลองจัดรูป โดยเอาคอนจูเกตคูณ $\frac{-n + \sqrt{n^2 + m^2}}{m} = \frac{\sqrt{n^2 + m^2} - n}{m} \times \frac{\sqrt{n^2 + m^2} + n}{\sqrt{n^2 + m^2} + n} = \frac{n^2 + m^2 - n^2}{m(\sqrt{n^2 + m^2} + n)} = \frac{m}{\sqrt{n^2 + m^2} + n}$

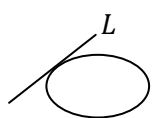
14. ก

ระบบสมการมีคำตอบเดียว แปลว่า มีจุดตัดระหว่าง C กับ L แค่จุดเดียว

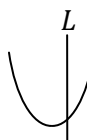
ดังนั้น เราต้องดูว่ากราฟในข้อไหน ที่ “ถ้าตัดแค่จุดเดียว แล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดสัมผัส”

“ถ้าระบบสมการ $\begin{cases} C(x, y) = 0 \\ L(x, y) = 0 \end{cases}$ มีคำตอบเพียงคำตอบเดียวคือ $x = x_0$ และ $y = y_0$

แล้ว จะได้ว่า เส้นตรง $L(x, y) = 0$ สัมผัสภาคตัดกรวย $C(x, y) = 0$ ที่จุด (x_0, y_0) ”



ถ้าเส้นตรง ตัด วงรี
แค่จุดเดียว จะต้อง
เป็นจุดสัมผัส



พาราโบลา ตัดจุด
เดียวโดยไม่ต้ง
เป็นจุดสัมผัสได้



ไฮเพอร์โบลา ตัดจุดเดียว
โดยไม่ต้องเป็นจุดสัมผัส
ได้เหมือนกัน ถ้าเส้นตรง
ขนานกับเส้นกำกับ

จะเห็นว่า มีวงรีเท่านั้น ที่ถ้าตัดแค่จุดเดียว แล้ว จุดนั้นต้องเป็นจุดสัมผัส

15. ค

(1) จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา จะมีสมบัติว่า ทุกจุดบนกราฟ ต้องมีผลต่างของระยะไปยังโฟกัสทั้งสอง เท่ากัน

จุดที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา $xy = 1$ เช่น $(1, 1), (2, \frac{1}{2})$

ผลต่างระยะ จาก $(1, 1)$ ไป $(2, 2)$ และ $(-2, -2)$ คือ $|\sqrt{1^2 + 1^2} - \sqrt{3^2 + 3^2}| = 2\sqrt{2}$

ผลต่างระยะ จาก $(2, \frac{1}{2})$ ไป $(2, 2)$ และ $(-2, -2)$ คือ $|\sqrt{0^2 + (\frac{3}{2})^2} - \sqrt{4^2 + (\frac{5}{2})^2}| = \left| \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{89}{4}} \right| = \frac{\sqrt{89} - 3}{2}$

จะเห็นว่า ระยะไม่เท่ากัน ดังนั้น $(2, 2)$ และ $(-2, -2)$ ไม่ใช่จุดโฟกัส $\rightarrow$ (1) ผิด

(2) ให้ $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{2556} \end{bmatrix}$ ดังนั้น $A^T = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_{2556}]$

ดังนั้น $AA^T = \begin{bmatrix} a_1 a_1 & a_1 a_2 & a_1 a_3 & \dots & a_1 a_{2556} \\ a_2 a_1 & a_2 a_2 & a_2 a_3 & \dots & a_2 a_{2556} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2556} a_1 & a_{2556} a_2 & a_{2556} a_3 & \dots & a_{2556} a_{2556} \end{bmatrix}$

จะเห็นว่า ถ้าเอาแถว 2 คูณ $-\frac{a_1}{a_2}$ แล้วบวกเข้ากับแถวแรก จะทำให้แถวแรกเป็น 0 หมวด จะได้ $\det = 0 \rightarrow$ (2) ถูก

16. 80

ค่าเฉลี่ย = $\frac{\text{ทุกตัวบวกกัน}}{\text{จำนวนตัว}} = \frac{S_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} = 51$

ค่าน้อยสุด = $a_1 = 11$ ดังนั้น $\frac{11 + a_n}{2} = 51$ จะได้ $a_n = 2(51) - 11 = 91 =$ ค่ามากที่สุด

ดังนั้น พิสัย = $91 - 11 = 80$

17. 4

ถ้า p และ q ไม่มีตัวไหน = 2 จะได้ว่า p และ q เป็นคี่ ดังนั้น $\frac{pq}{p+q} = \frac{\text{คี่} \times \text{คี่}}{\text{คี่} + \text{คี่}} = \frac{\text{คี่}}{\text{คู่}}$ จะไม่มีทางหารลงตัว

ดังนั้น ต้องมีตัวหนึ่ง = 2 สมมติให้ $p = 2$ จะได้ $\frac{2q}{2+q}$ ต้องหารลงตัว

$$\frac{2q}{2+q} = \frac{2(2+q)-4}{2+q} = 2 - \frac{4}{2+q} \quad \text{ดังนั้น} \quad \frac{4}{2+q} \quad \text{ต้องหารลงตัว} \quad \text{เนื่องจาก } q \text{ ต้องเป็นจำนวนเฉพาะ จะได้ } q = 2 \text{ ได้เท่านั้น}$$

ดังนั้น $p + q = 2 + 2 = 4$

18. 6

w เป็นราก แสดงว่า ต้องแทนในสมการแล้วเป็นจริง $\rightarrow \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1\right)^n - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 0$

รวมตัวหน้า และย้ายข้าง ได้ $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n$

ฝั่งซ้าย ทำ $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ เป็นเชิงขั้ว จะได้ $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ และ $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

เนื่องจาก $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ อยู่ Q_1 ดังนั้น $\theta = 60^\circ$ ดังนั้น $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \angle 60^\circ$

ดังนั้น $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 1^n \angle 60^\circ n = 1 \angle 60^\circ n$

ทำฝั่งขวา $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ เป็นเชิงขั้ว จะได้ $r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$ และ $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$

เนื่องจาก $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ อยู่ Q_2 ดังนั้น $\theta = 120^\circ$ ดังนั้น $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = 1 \angle 120^\circ$

ดังนั้น $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^n = 1^n \angle 120^\circ n = 1 \angle 120^\circ n$

ฝั่งซ้าย จะเท่ากับฝั่งขวาได้ แสดงว่า $60^\circ n$ กับ $120^\circ n$ ต้องวนรอบมาทับเป็นมุมเดียวกัน

นั่นคือ $120^\circ n = 360^\circ k + 60^\circ n$ เมื่อ $k \in \mathbb{I}$ ย้ายข้างได้ $60^\circ n = 360^\circ k \rightarrow n = 6k$ จะได้ n ต่ำสุดคือ 6

19. 24

แยกตัวประกอบ 648,000 จะได้ $8 \times 81 \times 10^3 = 2^6 3^4 5^3$

x ต้องหาร $2^6 3^4 5^3$ ลงตัว ดังนั้น x ต้องอยู่ในรูป $2^a 3^b 5^c$ เมื่อ $0 \leq a \leq 6, 0 \leq b \leq 4, 0 \leq c \leq 3$

เนื่องจาก $xy = 2^6 3^4 5^3$ ดังนั้น $y = 2^{6-a} 3^{4-b} 5^{3-c}$

จะเห็นว่า x หาร y ลงตัว เมื่อ $a \leq 6 - a, b \leq 4 - b$ และ $c \leq 3 - c$

นั่นคือจะได้ $a = 0, 1, 2, 3, b = 0, 1, 2$ และ $c = 0, 1$

ดังนั้น a เลือกได้ 4 แบบ b เลือกได้ 3 แบบ และ c เลือกได้ 2 แบบ ดังนั้น จะมีจำนวน $4 \times 3 \times 2 = 24$ แบบ

20. 2559

ให้ $z = r \angle \theta$ จากสมบัติของรูปเชิงขั้ว จะได้ฝั่งซ้าย $z^{2556} = r^{2556} \angle 2556\theta$ และฝั่งขวา $\bar{z} = r \angle -\theta$

จะได้สมการคือ $r^{2556} \angle 2556\theta = r \angle -\theta$ ซึ่งจะเป็นจริงเมื่อ $r = 0$ หรือ $(r^{2556} = r \text{ และ } 2556\theta = -\theta)$

กรณี $r = 0$ จะได้คำตอบคือ $z = 0$

กรณี $r \neq 0$ จะได้ $r^{2556} = r$ และ $2556\theta = -\theta$ เนื่องจาก $r \neq 0$ หารสมการแรกด้วย r จะได้ $r^{2555} = 1$

เนื่องจาก $r \in \mathbb{R}$ และ 2555 เป็นเลขคี่ ดังนั้น จะได้ $r = 1$ เท่านั้น

จากสูตร $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = r^2 = 1$ จะได้ $\bar{z} = \frac{1}{z}$ แทนในสมการโจทย์ จะได้ $z^{2556} = \frac{1}{z}$ นั่นคือ $z^{2557} = 1$
 ดังนั้น จะได้ z คือรากที่ 2557 ของ 1 ซึ่งจะมีทั้งหมด 2557 คำตอบ

รวมกับ $z = 0$ อีกหนึ่งคำตอบ จะได้จำนวนคำตอบทั้งหมด = 2558 คำตอบ ดังนั้น $A = 2558$

ถัดมา หา B : ผลบวกรากที่ส่วนจินตภาพไม่เป็น 0 = ผลบวกรากทั้งหมด - ผลบวกรากที่ส่วนจินตภาพเป็น 0

จากสูตรผลบวกราก สมการ $z^{2557} = 1$ จะมีผลบวกราก $= -\frac{0}{1} = 0$

รวมกับ $z = 0$ อีกหนึ่งคำตอบ จะได้ผลบวกรากทั้งหมด $= 0 + 0 = 0$

และ รากที่ส่วนจินตภาพเป็น 0 ก็คือรากที่เป็นจำนวนจริง

เนื่องจาก 2557 เป็นเลขคี่ ดังนั้นสมการ $z^{2557} = 1$ จะมีรากที่เป็นจำนวนจริงแค่ $z = 1$ เท่านั้น

ดังนั้น รากที่เป็นจำนวนจริง จะมีแค่ 0 กับ 1 ดังนั้น $B = 0 - (0 + 1) = -1$

ดังนั้น $A - B = 2558 - (-1) = 2559$

21. 66

จะได้ลำดับนี้เป็นลำดับเลขคณิต ดังนั้นจะมีสมบัติว่า $a_1 + a_{100} = a_2 + a_{99} = a_3 + a_{98} = \dots = a_{50} + a_{51} = k$

จะเห็นว่า $a_2 + a_3 + \dots + a_{99} = (a_2 + a_{99}) + (a_3 + a_{98}) + \dots + (a_{50} + a_{51})$

$$\begin{aligned} \text{ซึ่งมีทั้งหมด } 50 - 2 + 1 = 49 \text{ วงเล็บ ดังนั้น } \sqrt{a_2 + a_3 + \dots + a_{99}} - \sqrt{a_1 + a_{100}} &= \sqrt{49k} - \sqrt{k} \\ &= 7\sqrt{k} - \sqrt{k} = 6\sqrt{k} \end{aligned}$$

โจทย์ต้องการค่าน้อยสุดที่เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น เราต้องหาค่า k น้อยสุดที่ถอดรูทลงตัว

จาก $k = a_1 + a_{100} = a_1 + (a_1 + 99d) = a_1 + (a_1 + 99(1)) = 2a_1 + 99$

เนื่องจากลำดับนี้ต้องเป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น k จะเป็นเลขคี่ ตั้งแต่ 101 ขึ้นไป

จะได้ k น้อยสุดที่ถอดรูทลงตัวคือ 121 ซึ่งจะได้คำตอบ $= 6\sqrt{121} = 66$

22. 174, 4

เนื่องจากพื้นที่ที่ได้โค้งปกติ จะสมมาตรในบริเวณ Z เป็นบวกกับ Z เป็นลบ

ถ้า พื้นที่ $Z \leq 2$ มีค่าเท่ากับ 0.9772 แสดงว่า พื้นที่ $Z \geq -2$ มีค่าเท่ากับ 0.9772 ด้วย

แสดงว่า 97.72% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่ามาตรฐาน ≥ -2

แต่โจทย์บอกว่า 97.72% ของข้อมูลทั้งหมด มีค่าสูง ≥ 166

ดังนั้น 166 จะคิดเป็นค่ามาตรฐานได้เท่ากับ -2 จะได้ $\frac{166 - \bar{x}}{s} = -2 \rightarrow 166 - \bar{x} = -2s \dots (1)$

ทำนองเดียวกัน พื้นที่ $Z \leq -1$ มีค่าเท่ากับ 0.1587 ดังนั้น พื้นที่ $Z \geq 1$ มีค่าเท่ากับ 0.1587 ด้วย

แสดงว่า 15.87% มีค่ามาตรฐาน ≥ 1 ดังนั้น 178 คิดเป็นค่ามาตรฐานได้ 1

จะได้ $\frac{178 - \bar{x}}{s} = 1 \rightarrow 178 - \bar{x} = s \dots (2)$

(2) - (1) จะได้ $12 = 3s$ จะได้ $s = 4$ แทนใน (2) จะได้ $\bar{x} = 178 - 4 = 174$

23. $\frac{2}{3}$

$f[B]$ คือ ถ้า $x \in [-5, 0]$ แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเป็นอะไรได้บ้าง

$f[C]$ คือ ถ้า $x \in [0, 5]$ แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเป็นอะไรได้บ้าง

เนื่องจาก $B \cap C$ จะเหลือ 0 ตัวเดียว ดังนั้น $f[B \cap C]$ คือ ถ้า $x = 0$ แล้ว $f(x)$ จะมีค่าเป็นอะไรได้บ้าง

จะเห็นว่า $f[B \cap C]$ จะถูกรวมอยู่ใน $f[B]$ และ $f[C]$ เสมอ ดังนั้น $f[B] \cap f[C] \cap f[B \cap C] = f[B \cap C]$

จะเห็นว่าถ้า $x = 0$ จะได้ $f(0) = 0^2 - 0.5 = -0.5$ ดังนั้น $f[B] \cap f[C] \cap f[B \cap C] = \{-0.5\}$

ดังนั้น $r = -0.5$ จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ $1 + r + r^2 + r^3 + \dots = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1-(-0.5)} = \frac{1}{1.5} = \frac{2}{3}$

24. $\frac{7}{9}$

$P(\text{คนที่ 4 และ 5 ไม่ติดกัน}) = 1 - P(\text{คนที่ 4 และ 5 ติดกัน})$

หาจำนวนแบบทั้งหมดก่อน เอาเด็กคนแรกมาตอกไม้ให้วงหมุน เหลือกระเช้า 9 อัน ให้เด็ก 4 คนที่เหลือเลือก

จะได้จำนวนแบบทั้งหมด = $(9)(8)(7)(6)$ แบบ

จำนวนแบบที่คนที่ 4 กับ 5 ติดกัน จะเอาคนที่ 4 กับ 5 มัดติดกันเป็นคนใหม่ 1 คน กลายเป็นมีเด็ก 4 คน กระเช้า 9 อัน

เอาเด็กคนแรกมาตอกไม้ให้วงหมุน เหลือกระเช้า 8 อัน ให้เด็ก 3 คนเหลือนั่ง จะเลือกได้ $(8)(7)(6)$

และคนที่ 4 กับ 5 สลับภายในมัดได้อีก 2 แบบ จะได้จำนวนวิธีที่คนที่ 4 กับ 5 ติดกัน = $(8)(7)(6)(2)$

ดังนั้น $P(\text{คนที่ 4 และ 5 ไม่ติดกัน}) = 1 - \frac{(8)(7)(6)(2)}{(9)(8)(7)(6)} = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

25. $\sqrt{3}$

$$\begin{aligned} &= 4 \sin 20^\circ + \frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} &= \frac{\sin 40^\circ + 2 \sin 30^\circ \cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} &= \frac{\sin 40^\circ + \cos 10^\circ}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{2 \sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} &= \frac{\sin 40^\circ + \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ} \\ &= \frac{\sin 40^\circ + \sin 40^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} &= \frac{2 \sin 60^\circ \cos 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

26. $\frac{1}{2}$

จากกฎของ $\cos$ จะได้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ เทียบกับที่โจทย์ให้ จะได้ $\cos A = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $A = 60^\circ$

ดังนั้น $B + C$ เหลือ $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ จะได้ $C = 120^\circ - B$

โจทย์ให้ $\frac{c}{b}$ มา จากกฎของ $\sin$ จะได้ $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \rightarrow \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{c}{b} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \dots (*)$

แต่ $\sin C = \sin(120^\circ - B) = \sin 120^\circ \cos B - \cos 120^\circ \sin B = \frac{\sqrt{3} \cos B}{2} + \frac{\sin B}{2} = \frac{\sqrt{3} \cos B + \sin B}{2}$

แทนใน (*) จะได้ $\frac{\sqrt{3} \cos B + \sin B}{2 \sin B} = \frac{1}{2} + \sqrt{3} \rightarrow \sqrt{3} \cos B + \sin B = \sin B + 2\sqrt{3} \sin B$

ตัด $\sin B$ เหลือ $\sqrt{3} \cos B = 2\sqrt{3} \sin B \rightarrow \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $\tan B = \frac{1}{2}$

27. $y = -x + \frac{5}{2}$

จะได้ความชันเส้นสัมผัส คือ $y' = 0 - \frac{2x}{2} = -x$

ดังนั้น ถ้าสมมติให้สัมผัสที่จุด (p, q) จะได้ความชันเส้นสัมผัส $= -p =$ ความชันเส้นตรง จาก (p, q) ไป $(\frac{1}{2}, 2)$

นั่นคือ $\frac{q-2}{p-\frac{1}{2}} = -p$ จัดรูปจะได้ $q = -p^2 + \frac{p}{2} + 2 \dots (1)$

เนื่องจาก (p, q) อยู่บนกราฟ จึงต้องสอดคล้องกับสมการกราฟด้วย จะได้ $q = 2 - \frac{p^2}{2} \dots (2)$

จาก (1) และ (2) จะได้ $-p^2 + \frac{p}{2} + 2 = 2 - \frac{p^2}{2}$ จัดรูปจะได้ $p^2 - p = 0$ จะได้ $p = 0, 1$

แทนใน (2) หา q จะได้ (p, q) ที่เป็นไปได้คือ $(0, 2), (1, \frac{3}{2})$

ถัดมา เราจะดูว่าจุดไหนที่ได้เส้นตรงที่ตัด $y = \sqrt{4-x^2}$ สองจุด

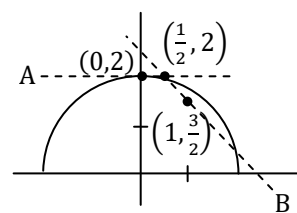
$y = \sqrt{4-x^2}$ จัดรูปจะได้ $y^2 + x^2 = 4$ แต่เนื่องจาก $y \geq 0$ ทำให้ $y \geq 0$

จึงได้เป็นครึ่งวงกลม รัศมี 2 ทางฝั่งบนดังรูป

จะเห็นว่าเส้นตรงจาก $(\frac{1}{2}, 2)$ ไป $(0, 2)$ จะสัมผัสวงกลม 1 จุด จะใช้ไม่ได้

ในขณะที่เส้นตรงจาก $(\frac{1}{2}, 2)$ ไป $(1, \frac{3}{2})$ จะตัดวงกลม 2 จุด ถูกต้อง ดังนั้น $(p, q) = (1, \frac{3}{2})$

จะได้ความชัน $= -p = -1$ ดังนั้น สมการคือ $\frac{y-\frac{1}{2}}{x-\frac{1}{2}} = -1$ ซึ่งจะจัดรูปได้ $y = -x + \frac{5}{2}$



28. 4

$p(x)$ จะมีดีกรีเกิน 5 ไม่ได้ ไม่งั้น $p(100)$ จะมี 100^6 ซึ่งจะมากกว่า 62307152908

ให้ $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$

จาก $p(1)$ จะได้ $a + b + c + d + e + f = 88$

จาก $p(100)$ จะได้ $a(100^5) + b(100^4) + c(100^3) + d(100^2) + e(100) + f = 62307152908$

จะเห็นว่า 62307152908 หารด้วย 100 เหลือเศษ 8 และทุกตัวใน $p(100)$ หารด้วย 100 ลงตัว ยกเว้น f

ดังนั้น f ต้องหารด้วย 100 เหลือเศษ 8 ด้วย ดังนั้น $f = 8, 108, 208, \dots$

แต่จาก $a + b + c + d + e + f = 88$ ดังนั้น $f < 88$ ดังนั้น $f = 8$

แทน $f = 8$ ในสมการของ $p(100)$ ย้าย 8 ไปลบ และหารตลอดด้วย 100

จะเหลือ $a(100^4) + b(100^3) + c(100^2) + d(100) + e = 623071529$

ดูเศษจากการหารด้วย 100 แบบเดิม จะได้ $e = 29, d = 15, c = 7, b = 23, a = 6$

จะได้ $p(x) = 6x^5 + 23x^4 + 7x^3 + 15x^2 + 29x + 8$

ดังนั้น $p(-1) = -6 + 23 - 7 + 15 - 29 + 8 = 4$

29. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

โดยไม่เสียย่นย่อให้ A เป็นมุมยอด และ $B = C$ เป็นมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่ว

จะได้ $A = 180^\circ - (B + C) = \pi - 2B$ และ $B \in (0^\circ, 90^\circ)$ ไม่งั้นจะไม่เป็นสามเหลี่ยม

ดังนั้น $\sin(2A - B) + \sin(2B - C) + \sin(2C - A)$

$$= \sin(2(\pi - 2B) - B) + \sin(2B - B) + \sin(2B - (\pi - 2B))$$

$$= \sin(2\pi - 5B) + \sin B + \sin(4B - \pi)$$

$$= \sin(-5B) + \sin B - \sin 4B$$

$$= 2 \sin\left(\frac{-5B+B}{2}\right) \cos\left(\frac{-5B-B}{2}\right) - \sin 4B$$

$$= -2 \sin 2B \cos(-3B) - \sin 4B$$

$$= -2 \sin 2B \cos 3B - 2 \sin 2B \cos 2B$$

$$= -2 \sin 2B (\cos 3B + \cos 2B)$$

ดังนั้น $-2 \sin 2B (\cos 3B + \cos 2B) = 0$ เนื่องจาก $B \in (0^\circ, 90^\circ)$ ดังนั้น $\sin 2B$ จะไม่เป็น 0

หารตลอดด้วย $-2 \sin 2B$ เหลือ $\cos 3B + \cos 2B = 0 \rightarrow \cos 3B = -\cos 2B = \cos(\pi - 2B)$

จาก $\cos x = \cos y$ เมื่อ $x = 2n\pi \pm y$ และเรามี $\cos(\pi - 2B) = \cos 3B$ ดังนั้น $\pi - 2B = 2n\pi \pm 3B$

กรณี $\pi - 2B = 2n\pi - 3B$ จะได้ $B = 2n\pi + \pi$ ซึ่งจะไม่อยู่ในช่วง $(0^\circ, 90^\circ)$ ดังนั้น กรณีนี้จะไม่มีการตอบ

กรณี $\pi - 2B = 2n\pi + 3B$ จะได้ $B = \frac{\pi - 2n\pi}{5} = \frac{180^\circ - 360^\circ n}{5}$

แต่ $B \in (0^\circ, 90^\circ)$ จะได้คำตอบเดียวคือ $B = \frac{180^\circ}{5} = 36^\circ$

ดังนั้น $A = 180^\circ - (36^\circ + 36^\circ) = 108^\circ$ และ $B = C = 36^\circ$

$$\begin{aligned}\text{ดังนั้น } \cos(2A - B) + \cos(2B - C) + \cos(2C - A) \\ &= \cos(216^\circ - 36^\circ) + \cos 36^\circ + \cos(72^\circ - 108^\circ) \\ &= \cos 180^\circ + \cos 36^\circ + \cos(-36^\circ) \\ &= -1 + 2 \cos 36^\circ \quad \dots(*)\end{aligned}$$

$\cos 36^\circ$ จะหาจากการที่ $36^\circ = \frac{\pi}{5}$ และจาก $\frac{2\pi}{5} + \frac{3\pi}{5} = \pi$ ดังนั้น $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$

$$\text{ดังนั้น } 2 \sin \frac{\pi}{5} \cos \frac{\pi}{5} = 3 \sin \frac{\pi}{5} - 4 \sin^3 \frac{\pi}{5}$$

เนื่องจาก $\sin \frac{\pi}{5} \neq 0$ ดังนั้น หารลดด้วย $\sin \frac{\pi}{5}$ เหลือ $2 \cos \frac{\pi}{5} = 3 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5}$

เปลี่ยน $\sin$ เป็น $\cos$ จะได้ $2 \cos \frac{\pi}{5} = 3 - 4(1 - \cos^2 \frac{\pi}{5})$

ให้ $\cos \frac{\pi}{5} = x$ จะได้ $2x = 3 - 4(1 - x^2)$ จัดรูปได้ $0 = 4x^2 - 2x - 1$

$$\text{จะได้ } x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \text{ แต่ } \cos \frac{\pi}{5} \text{ เป็นบวก จะได้ } \frac{1 + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{แทนใน } (*) \text{ จะได้คำตอบคือ } -1 + 2 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{4} \right) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$30. \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$\text{จาก } \tan x \cdot \tan y = 2 \rightarrow \sin x \sin y = 2 \cos x \cos y$$

$$\text{แปลงผลคูณเป็นผลบวกได้ } \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} = 2 \left(\frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \right)$$

$$\text{จัดรูป และย้าย } \cos(x+y) \text{ กับ } \cos(x-y) \text{ ไปอยู่คนละฝั่ง จะได้ } \cos(x+y) = -\frac{\cos(x-y)}{3} \quad \dots(*)$$

$$\text{จาก } \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\text{ใช้สูตร } \cos \frac{A}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}} \text{ และเนื่องจาก } \cos \frac{x+y}{2} \text{ และ } \cos \frac{x-y}{2} \text{ เป็นบวกในช่วง } x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{จะได้ } 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = 2 \sqrt{\frac{1 + \cos(x+y)}{2}} \sqrt{\frac{1 + \cos(x-y)}{2}} = \sqrt{(1 + \cos(x+y))(1 + \cos(x-y))}$$

$$\text{แทนค่า } \cos(x+y) \text{ จาก } (*) \text{ และให้ } \cos(x-y) = a \text{ จะได้ } = \sqrt{\left(1 - \frac{a}{3}\right)(1 + a)} = \sqrt{-\frac{a^2}{3} + \frac{2a}{3} + 1}$$

$$\text{จาก } x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ จะได้ } x - y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \text{ ดังนั้น } \cos(x-y) \in (0, 1] \text{ ดังนั้น } a \in (0, 1]$$

$$\text{ดังนั้น เราต้องหาช่วงค่าที่เป็นไปได้ของ } \sqrt{-\frac{a^2}{3} + \frac{2a}{3} + 1} \text{ เมื่อ } a \in (0, 1]$$

$$\text{พิจารณาจุดขอบ: แทน } a = 0 \text{ ได้ } \sqrt{-\frac{0^2}{3} + \frac{2(0)}{3} + 1} = 1, \text{ แทน } a = 1 \text{ ได้ } \sqrt{-\frac{1^2}{3} + \frac{2(1)}{3} + 1} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{จากพาราโบลา จะได้ } -\frac{a^2}{3} + \frac{2a}{3} + 1 \text{ มีค่ามากที่สุดเมื่อ } a = \frac{-\frac{2}{3}}{2(-\frac{1}{3})} = 1 = \text{จุดขอบพอดี}$$

$$\text{ดังนั้น เมื่อ } a \in (0, 1] \text{ จะได้ } \sqrt{-\frac{a^2}{3} + \frac{2a}{3} + 1} \in \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$$

$$31. (2, 1, 2), (2, -2, 2), (-3, -2, 2), (-3, 1, 2)$$

$$\text{ลบเศษส่วนทางซ้าย จะได้ } \frac{a(1+a) - b(1+b)}{(1+b)(1+a)} \text{ และแยกตัวส่วนทางขวา จะได้ } \frac{p^2}{(1+a)+b(1+a)} = \frac{p^2}{(1+a)(1+b)}$$

$$\text{ตัดส่วน } (1+b)(1+a) \text{ ทั้งสองฝั่ง เหลือ } a(1+a) - b(1+b) = p^2$$

เนื่องจาก a และ $1+a$ เป็นสองจำนวนติดกัน จะมีตัวหนึ่งเป็นคู่ ดังนั้น ผลคูณ $a(1+a)$ จะเป็นคู่เสมอ

ทำนองเดียวกัน ผลคูณ $b(1+b)$ ก็เป็นคู่ด้วย ดังนั้น p^2 ต้องเป็นเลขคู่ ซึ่งจะได้ $p = 2$ เท่านั้น $\rightarrow p^2 = 4$

$$\text{ฝั่งซ้าย กระจายและแยกตัวประกอบ จะได้ } = a + a^2 - b - b^2 = (a - b) + (a^2 - b^2)$$

$$= (a - b) + (a - b)(a + b) = (a - b)(1 + a + b) = 4$$

เนื่องจาก 1 เป็นคี่ ดังนั้น $a - b$ กับ $1 + a + b$ จะมีตัวหนึ่งเป็นคู่ ตัวหนึ่งเป็นคี่

แยกตัวประกอบ 4 เป็น คู่ คูณ คี่ คูณได้สี่แบบ คือ $(1)(4)$, $(4)(1)$, $(-1)(-4)$ และ $(-4)(-1)$

กรณี $(1)(4)$ จะได้ $a - b = 1$ และ $1 + a + b = 4$ แก้ได้ $a = 2, b = 1$

กรณี $(4)(1)$ จะได้ $a - b = 4$ และ $1 + a + b = 1$ แก้ได้ $a = 2, b = -2$

กรณี $(-1)(-4)$ จะได้ $a - b = -1$ และ $1 + a + b = -4$ แก้ได้ $a = -3, b = -2$

กรณี $(-4)(-1)$ จะได้ $a - b = -4$ และ $1 + a + b = -1$ แก้ได้ $a = -3, b = 1$

รวมกับ $p = 2$ จะได้คำตอบคือ $(2, 1, 2), (2, -2, 2), (-3, -2, 2)$ และ $(-3, 1, 2)$

32. 151

ข้อนี้ ไม่จำเป็นต้องหาค่าของ M และ N จนถึงที่สุด แค่ต้องจัดรูปแล้วหวังว่ารูปอย่างง่ายของ M และ N จะตัดกันได้

หา M จะเห็นว่า ถ้าเอา 2 คูณทั้งเศษและส่วน ตัวส่วนจะกลายเป็นเลขเรียงกัน และจะแยกเป็นผลลบของเศษส่วนได้

$$\begin{aligned} M &= \frac{2}{2 \cdot 1} + \frac{2}{4 \cdot 3} + \frac{2}{6 \cdot 5} + \cdots + \frac{2}{100 \cdot 99} \\ &= 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{1} + \frac{1-2}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1-2}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1-2}{6} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1-2}{100} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{เปลี่ยน } -1 \text{ เป็น } 1 - 2 \\ \text{แยกตัวที่เป็นลบไปไว้ข้างหลัง} \end{array} \right\} \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{6} + \cdots + \frac{2}{100} \right) \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{50} \right) \right] \quad \left. \begin{array}{l} \text{ตัด 50 พจน์แรกได้} \end{array} \right\} \\ &= 2 \left[\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{100} \right] \end{aligned}$$

ถัดมา หา N สังเกตว่าตัวเลขทุกคู่ รวมกันได้ 151 ดังนั้น เราจะคูณ $\frac{151}{151}$ แล้วกระจาย 151 เข้าไป

$$\begin{aligned} N &= \frac{151}{151} \left(\frac{1}{51 \cdot 100} + \frac{1}{52 \cdot 99} + \frac{1}{53 \cdot 98} + \cdots + \frac{1}{100 \cdot 51} \right) \\ &= \frac{1}{151} \left(\frac{151}{51 \cdot 100} + \frac{151}{52 \cdot 99} + \frac{151}{53 \cdot 98} + \cdots + \frac{151}{100 \cdot 51} \right) \\ &= \frac{1}{151} \left(\frac{51+100}{51 \cdot 100} + \frac{52+99}{52 \cdot 99} + \frac{53+98}{53 \cdot 98} + \cdots + \frac{100+51}{100 \cdot 51} \right) \\ &= \frac{1}{151} \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{51} + \frac{1}{99} + \frac{1}{52} + \frac{1}{98} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{51} + \frac{1}{100} \right) \\ &= \frac{2}{151} \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \cdots + \frac{1}{100} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{มี } \frac{1}{51}, \frac{1}{52}, \dots, \frac{1}{100} \text{ ตัวละ 2 ครั้ง} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } \frac{M}{N} = \frac{2 \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right)}{\frac{2}{151} \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \frac{1}{53} + \cdots + \frac{1}{100} \right)} = 2 \times \frac{151}{2} = 151$$

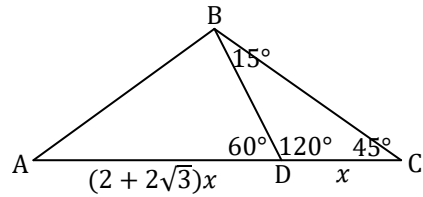
33. 0

จาก $\angle ADB = 60^\circ$ จะได้ $\angle CDB = 120^\circ$ จาก $\angle ACB = 45^\circ$ จะได้ $\angle DBC = 15^\circ$ วาดได้ดังรูปหา BD โดยใช้กฎของ sin ที่ $\triangle BDC$ จะได้ $\frac{BD}{\sin 45^\circ} = \frac{x}{\sin 15^\circ}$

$$\text{จาก } \sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{ดังนั้น } BD = \left(\frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ} \right) x = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} \right) x = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \right) x = \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} \right) x$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \right) x = \left(\frac{2(\sqrt{3}+1)}{2} \right) x = (\sqrt{3}+1)x$$

สังเกตว่า AD กับ BD จะคล้ายกัน นั่นคือ $\frac{BD}{AD} = \frac{(\sqrt{3}+1)x}{(2+2\sqrt{3})x} = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ$ ดังนั้น $\angle ABD = 90^\circ$ ดังนั้น $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DB} = |\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{DB}| \cos 90^\circ = 0$ 

34. 2.25

ข้อนี้ เราจะใช้ 2 สูตร คือ ถ้า x, y, z เป็นลำดับเรขาคณิต จะได้ $\frac{z}{y} = \frac{y}{x}$ ดังนั้น $z = \frac{y^2}{x}$ ถ้า x, y, z เป็นลำดับเลขคณิต จะได้ $z - y = y - x$ ดังนั้น $z = 2y - x$ $a_1 = 1$, สมมติให้ $a_2 = r$ a_1, a_2, a_3 เป็นเรขาคณิต $\rightarrow a_3 = \frac{r^2}{1} = r^2$ a_2, a_3, a_4 เป็นเลขคณิต $\rightarrow a_4 = 2r^2 - r = r(2r - 1)$ a_3, a_4, a_5 เป็นเรขาคณิต $\rightarrow a_5 = \frac{(r(2r-1))^2}{r^2} = (2r - 1)^2$ a_4, a_5, a_6 เป็นเลขคณิต $\rightarrow a_6 = 2(2r - 1)^2 - r(2r - 1)$

$$= (2r - 1)(2(2r - 1) - r) = (2r - 1)(3r - 2)$$

 a_5, a_6, a_7 เป็นเรขาคณิต $\rightarrow a_7 = \frac{((2r-1)(3r-2))^2}{(2r-1)^2} = (3r - 2)^2$ a_6, a_7, a_8 เป็นเลขคณิต $\rightarrow a_8 = 2(3r - 2)^2 - (2r - 1)(3r - 2)$

$$= (3r - 2)(2(3r - 2) - (2r - 1)) = (3r - 2)(4r - 3)$$

:

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_8} + \dots = \frac{1}{r} + \frac{1}{r(2r-1)} + \frac{1}{(2r-1)(3r-2)} + \frac{1}{(3r-2)(4r-3)} + \dots$$

จะเห็นว่าทุกตัว แยกเป็นผลลบ แล้วจะได้ข้างบน $= r - 1$ ดังนั้น ต้องหาร $r - 1$ ให้ค่าเท่าเดิม

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_{2n}} &= \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2r-1} \right) + \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{3r-2} \right) + \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{3r-2} - \frac{1}{4r-3} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{r-1} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{2r-1} + \frac{1}{2r-1} - \frac{1}{3r-2} + \frac{1}{3r-2} - \frac{1}{4r-3} + \dots \right) \\ &= \frac{1}{r-1} = 2012 \text{ ดังนั้น } r = \frac{1}{2012} + 1 = \frac{2013}{2012} \end{aligned}$$

จากแบบรูป $a_3 = r^2 = (1r - 0)^2$, $a_5 = (2r - 1)^2$, $a_7 = (3r - 2)^2$

$$\text{จะได้ } a_{2013} = (1006r - 1005)^2 = \left(1006 \left(\frac{2013}{2012} \right) - 1005 \right)^2 = (1016.5 - 1005)^2 = 2.25$$

35. 119683

สมมติให้จำนวนเชิงซ้อนทั้ง 10 ตัวนั้น เขียนเป็นเชิงขั้ว เรียง r จากน้อยไปมาก ได้เป็น $r_1 \angle \theta_1, r_2 \angle \theta_2, \dots, r_{10} \angle \theta_{10}$ เนื่องจาก จำนวนที่ > 1 ยิ่งยกกำลังจะยิ่งมาก และจำนวนที่ $\in (0,1)$ ยิ่งยกกำลังจะยิ่งน้อย

ดังนั้น $r_{10} > 1$ ไม่ได้ เพราะ $(r_{10} \angle \theta_{10})(r_{10} \angle \theta_{10}) = r_{10}^2 \angle 2\theta_{10}$ จะมี r มากกว่า r_{10} และจะไม่อยู่ใน A

และ $0 < r_1 < 1$ ไม่ได้ เพราะ $(r_1 \angle \theta_1)(r_1 \angle \theta_1) = r_1^2 \angle 2\theta_1$ จะมี r น้อยกว่า r_1 และจะไม่อยู่ใน A

ดังนั้น ถ้า $r_1 \neq 0$ จะสรุปได้ทันทีว่า r ทุกตัว ต้อง $= 1$ หหมด (เพราะ $r_1 < 1$ ไม่ได้ และ $r_{10} > 1$ ไม่ได้)

แต่ถ้า $r_1 = 0$ จะได้สิบตัวนั้นคือ $0, r_2 \angle \theta_2, r_3 \angle \theta_3, \dots, r_{10} \angle \theta_{10}$

เลื่อนมาทำแบบเดิมที่ r_2 แทน แต่คราวนี้ $r_2 \neq 0$ แล้ว ไม่งั้นจะซ้ำกับ r_1

จะได้ $r_2 < 1$ ไม่ได้ เพราะ $(r_2 \angle \theta_2)(r_2 \angle \theta_2) = r_2^2 \angle 2\theta_2$ จะมี r อยู่ระหว่าง 0 กับ r_2 และจะไม่อยู่ใน A

ดังนั้น $r_2, r_3, \dots, r_{10}$ ต้องเป็น 1 หหมด (เพราะ $r_2 < 1$ ไม่ได้ และ $r_{10} > 1$ ไม่ได้)

สรุป สิบตัวนั้น จะเป็นไปได้ 2 แบบ คือ $r_1 = r_2 = \dots = r_{10} = 1$ หรือ $r_1 = 0, r_2 = r_3 = \dots = r_{10} = 1$

กรณี 1: $r_1 = r_2 = \dots = r_{10} = 1$

สมมติให้ สิบตัวนั้น เขียนเรียงตาม $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$ จากน้อยไปมาก ได้เป็น $1 \angle \theta_1, 1 \angle \theta_2, \dots, 1 \angle \theta_{10}$

โดยที่ $0^\circ \leq \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{10} < 360^\circ \dots (1)$

เอา $1 \angle \theta_{10}$ คูณทุกตัวเป็น $1 \angle \theta_1 + \theta_{10}, 1 \angle \theta_2 + \theta_{10}, \dots, 1 \angle \theta_{10} + \theta_{10}$ จากสมบัติในโจทย์ ทุกตัวต้องยังอยู่ใน A

ถ้า $\theta_1 > 0$ จะได้ $\theta_1 + \theta_{10} > \theta_{10}$ แต่ θ_{10} ใหญ่สุด ดังนั้น $\theta_1 + \theta_{10}$ ต้อง $\geq 360^\circ$ วนกลับไปเป็นมุมเล็กๆ

ไม่งั้น $1 \angle \theta_1 + \theta_{10}$ จะไม่อยู่ใน A ดังนั้น $360^\circ \leq \theta_1 + \theta_{10} < \theta_2 + \theta_{10} < \dots < \theta_{10} + \theta_{10} < 720^\circ$

ลบ 360° ตลอด ได้ $0^\circ \leq \theta_1 + \theta_{10} - 360^\circ < \theta_2 + \theta_{10} - 360^\circ < \dots < \theta_{10} + \theta_{10} - 360^\circ < 360^\circ \dots (2)$

จาก (1) และ (2) และจากสมบัติของ A จะได้แต่ละตัวใน (1) จับคู่ตัวต่อตัวได้กับแต่ละตัวใน (2)

ดังนั้น $\theta_1 + \theta_{10} - 360^\circ = \theta_1$ จะได้ $\theta_{10} = 360^\circ$ ขัดแย้งกับที่ $\theta_{10} < 360^\circ$ ดังนั้น $\theta_1 > 0$ ไม่ได้

แสดงว่า $\theta_1 = 0$ ดังนั้น $0^\circ = \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{10} < 360^\circ$

ทำแบบเดียวกันกับ θ_2 แต่คราวนี้ $\theta_2 > 0$ แน่แน่นอนแล้ว

เนื่องจาก $1 \angle \theta_2 + \theta_{10}$ ต้องยังอยู่ใน A และ θ_{10} ใหญ่สุด ดังนั้น $\theta_2 + \theta_{10}$ ต้อง $\geq 360^\circ$ วนกลับไปเป็นมุมเล็กๆ

ดังนั้น $360^\circ \leq \theta_2 + \theta_{10} < \theta_3 + \theta_{10} < \dots < \theta_{10} + \theta_{10} < 720^\circ$

ลบ 360° ตลอด ได้ $0^\circ \leq \theta_2 + \theta_{10} - 360^\circ < \theta_3 + \theta_{10} - 360^\circ < \dots < \theta_{10} + \theta_{10} - 360^\circ < 360^\circ \dots (3)$

จาก (1) และ (3) และจากสมบัติของ A และจาก $\theta_{10} < 360^\circ$ เราจะจับคู่ แต่ละตัวใน (1) กับ (3) ได้แบบเดียว

คือ $\theta_2 + \theta_{10} - 360^\circ = \theta_1, \theta_3 + \theta_{10} - 360^\circ = \theta_2, \theta_4 + \theta_{10} - 360^\circ = \theta_3, \dots, \theta_{10} + \theta_{10} - 360^\circ = \theta_9$

จับทุกสมการบวกกัน $\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_9$ จะฝั่งซ้ายและขวาจะตัดกันได้ และแทน $\theta_1 = 0$ จะได้ $\theta_{10} = \frac{9(360^\circ)}{10} = 9(36^\circ)$

แทนค่า θ_{10} กลับไป จะหา θ ต่างๆได้เป็นทอดๆ คือ $\theta_2 = 36^\circ, \theta_3 = 2(36^\circ), \theta_4 = 3(36^\circ), \dots, \theta_9 = 8(36^\circ)$

ดังนั้น $A = \{1 \angle 0^\circ, 1 \angle 36^\circ, 1 \angle 2(36^\circ), \dots, 1 \angle 9(36^\circ)\}$ จะเห็นว่า A คือ รากที่ 10 ของ 1 นั่นเอง

ดังนั้น A คือ รากของสมการ $z^{10} - 1 = 0$

ถัดมา จะหา $|z_1 - z_2| |z_1 - z_3| \dots |z_2 - z_3| \dots |z_9 - z_{10}|$

เนื่องจาก สมการที่มี $z_1, z_2, \dots, z_{10}$ เป็นราก ต้องอยู่ในรูป $k(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{10}) = 0$

เทียบกับสมการ $z^{10} - 1 = 0$ เราจะได้ $k = 1$ และ $(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_{10}) = z^{10} - 1$

แต่ $z_1 = 1 \angle 0^\circ = 1$ ดังนั้น ฝั่งซ้ายคือ $(z - 1)(z - z_2) \dots (z - z_{10})$

ฝั่งขวา $z^{10} - 1$ แยกตัวประกอบได้เป็น $(z - 1)(z^9 + z^8 + z^7 + \dots + z + 1)$

ตัด $z - 1$ ทั้งสองข้าง จะเหลือ $(z - z_2) \dots (z - z_{10}) = z^9 + z^8 + z^7 + \dots + z + 1$

แทน $z = z_1 = 1$ จะได้ $(z_1 - z_2)(z_1 - z_3) \dots (z_1 - z_{10}) = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = 10 \dots (4)$

เนื่องจาก $1\angle 0^\circ, 1\angle 36^\circ, 1\angle 72^\circ, \dots, 1\angle 324^\circ$ เป็นลำดับเรขาคณิต ที่มี $z_2 = 1\angle 36^\circ$ เป็นอัตราส่วนร่วม
ดังนั้น ถ้าเอา z_2 คูณ z_i จะได้ตัวถัดไป คือ z_{i+1} เสมอ

และ z_2 คูณ $z_{10} = 1\angle 36^\circ \times 1\angle 324^\circ = 1\angle 360^\circ = 1$ ย้อนกลับไปเป็น z_1

ดังนั้น เราจะเอาสมการ (4) คูณ z_2 ให้แต่ละวงเล็บ ให้ z_i เลื่อนไป 1 อันดับ เนื่องจากมี 9 วงเล็บ จึงต้องคูณ $(z_2)^9$

จะได้ $(z_2 - z_3)(z_2 - z_4) \dots (z_2 - z_{10})(z_2 - z_1) = 10(z_2)^9 \dots (5)$

เอา (5) คูณ $(z_2)^9$ อีกรอบ จะได้ $(z_3 - z_4)(z_3 - z_5) \dots (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = 10(z_2)^{18} \dots (6)$

ทำแบบนี้ไปเรื่อยๆ จะถึง $(z_{10} - z_1)(z_{10} - z_2) \dots (z_{10} - z_8)(z_{10} - z_9) = 10(z_2)^{72} \dots (13)$

เอาสมการ (4), (5), (6), ..., (13) มาคูณกัน แล้วใส่ค่าสัมบูรณ์ทั้งสองฝั่ง

ฝั่งขวา เนื่องจาก $|z_2| = 1$ ดังนั้น $|z_2|^k$ จะเป็น 1 ด้วย ดังนั้น ฝั่งขวาจะเหลือแค่ 10^{10}

ฝั่งซ้าย จะมีเป็นคู่ เช่น จะมีทั้ง $|z_1 - z_2|$ และ $|z_2 - z_1|$ ซึ่งสองค่านี้จะมีค่าเท่ากัน

ดังนั้น ถ้าใส่รูปทั้งสองข้าง จะได้ค่าที่โจทย์ต้องการ ดังนั้น $f(A) = \sqrt{10^{10}}$

กรณี 2: $r_1 = 0$ และ $r_2 = r_3 = \dots = r_{10} = 1$

ทำแบบเดียวกับกรณีแรก แต่คราวนี้เอาแค่ $r_2, r_3, \dots, r_{10}$ มาคิด จะเหลือ 9 ตัว

ทำแบบกรณีแรก จะได้ $r_2, r_3, \dots, r_{10}$ คือ $1\angle 0^\circ, 1\angle 40^\circ, 1\angle 80^\circ, \dots, 1\angle 320^\circ$

และจะได้ 9 ตัวนี้ จะมีผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของผลต่าง $= \sqrt{9^9}$

และเมื่อรวม $r_1 = 0$ เพิ่มเข้าไปอีก

จะมีผลคูณของค่าสัมบูรณ์ของผลต่าง เพิ่มอีก $|0 - 1\angle 0^\circ| |0 - 1\angle 40^\circ| \dots |0 - 1\angle 320^\circ|$
 $= |1\angle 0^\circ| |1\angle 40^\circ| \dots |1\angle 320^\circ| = 1$ (เพราะทุกตัวมี $r = 1$)

ดังนั้น กรณีนี้ จะมี $f(A) = \sqrt{9^9} \times 1 = \sqrt{9^9}$

รวม 2 กรณี จะได้ $f(A)$ มีค่าได้ 2 ค่าเท่านั้น คือ $\sqrt{10^{10}}$ และ $\sqrt{9^9}$

ดังนั้น ตอบ $\sqrt{10^{10}} + \sqrt{9^9} = 10^5 + 3^9 = 119683$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนั่นยา เสนามนตรี และ คุณ จอมยุทธ์หน้าใหม่ สำหรับข้อสอบนะครับ

ขอบคุณ คุณ Korrawat Pruegsanusak ที่ช่วยแก้จุดบกพร่องในข้อ 35 (ผมลืม 0 ในกรณีที่ 2)

ขอบคุณ คุณ Sorawit Turk ที่ช่วยแก้จุดบกพร่องในข้อ 11 (ผมตีฟผลหารผิด)

ขอบคุณ เว็บ www.mathcenter.net และทุกท่านที่ช่วยโพสเฉลยให้ผมได้มีโอกาสตรวจคำตอบ โดยเฉพาะข้อ 35 จาก

คุณ passer-by ด้วยครับ