ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 54)
วันอาทิตย์ที่ 27 พฤศจิกายน 2554 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 15 เป็นข้อสอบแบบเลือกคำตอบ ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้า p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ
ประพจน์ $[(q \vee r) \wedge (p \vee r) \wedge (q \vee {\sim}r)] \vee [(q \vee {\sim}p) \wedge (p \vee {\sim}r) \wedge (q \vee p)]$
สมมูลกับประพจน์ในข้อใดต่อไปนี้
ก. p ข. q ค. r ง. $q \vee r$

2. ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A, B, C เป็นสับเซตใดๆของ $\mathcal{U}$ ซึ่ง $A \cap B \subset C$ และ $A \cap C \subset B$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
ก. $B \cap C \subset A$ ข. $A - B = A - C$
ค. $B \cup C \subset A'$ ง. $B - C = B - A$

3. สับเซต A ของ $\mathbb{R}$ ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x \in A[x^2(x^4 - 3x^2 + 1) < 3]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
ก. $(-3, -2)$ ข. $(-2, -1)$ ค. $(-1, 0)$ ง. $(1, 2)$

4. กำหนดให้ $f(x)=\sqrt{5-x^2}$ และ $g(x)=\sqrt{4-x}$ โดเมนของ $f\circ g$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
ก. $(-\infty, 4)$ ข. $[-1, \infty)$ ค. $[-1, 4]$ ง. $(-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a\log_{250} 5+\frac{b}{\log_2 250}=3$ ค่าของ $a+2b$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้
ก. 13 ข. 15 ค. 17 ง. 18

6. พิจารณาไฮเพอร์โบลาที่มีแกนตามขวางอยู่บนเส้นตรง $y=5$ สัมผัสเส้นตรง $x=4$ และ $x=-4$ และตัดแกน x ที่จุด $(6, 0)$ และ $(-6, 0)$ ข้อใดต่อไปนี้คือจุดตัดจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลากับเส้นตรง $x=8$
ก. $(8, 3+\sqrt{60})$ ข. $(8, 5+\sqrt{50})$ ค. $(8, 3+\sqrt{50})$ ง. $(8, 5+\sqrt{60})$

7. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ใดๆ ซึ่ง $A^3 = \underline{0}$ และ $A^2 \neq \underline{0}$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้

   1) A ไม่มีอินเวอร์สการคูณ

   2) $\det(\mathrm{I} - A) \neq 0$ โดยที่ I แทนเมทริกซ์เอกลักษณ์ขนาด 3×3

   ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

   ก. ข้อ 1) และ 2) จริง
   ข. ข้อ 1) จริง และ ข้อ 2) ไม่จริง
   ค. ข้อ 1) ไม่จริง และ ข้อ 2) จริง
   ง. ข้อ 1) และ ข้อ 2) ไม่จริง

8. กำหนดให้ $\vec{u} \neq 0$, $\vec{v} \neq 0$, $|\vec{u}| = \sqrt{2}|\vec{v}|$ และ $\vec{u} - \vec{v}$ ตั้งฉากกับ $\vec{u} - 2\vec{v}$

   มุมระหว่าง $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   ก. $\arccos\left(\frac{3\sqrt{2}}{5}\right)$
   ข. $\arccos\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$
   ค. $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
   ง. $\arccos\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

9. ในรูปสามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง มุม A มีขนาดเป็นสามเท่าของมุม B

   ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมตรงข้ามมุม A, B และ C ตามลำดับ

   ค่าของ $\cos \mathrm{B}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

   ก. $\frac{2c}{3a-2b}$
   ข. $\frac{c}{2(3b-a)}$
   ค. $\frac{2c}{4b-a}$
   ง. $\frac{c}{2(a-b)}$

10. กำหนดให้ w และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้

(1) $|w|^2 = |z+w|$

(2) $\frac{1}{z}+\frac{1}{w} = \mathrm{i}$

(3) $|z-w| = 1$

ค่าที่เป็นไปได้ค่าหนึ่งของ $|z|$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}}$ ข. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ค. $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ง. $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

11. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดย $a_1 = 0$ และ $a_n - a_{n-1} = n-1$ ทุกจำนวนเต็ม $n \geq 2$ ค่าของ $\sum_{n=1}^{25} a_n$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 2400 ข. 2500 ค. 2600 ง. 2700

12. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเมทริกซ์จัตุรัสขนาด 5×5 ซึ่ง $\det A = 2$, $\det B = 3$, $\det C = 4$ และ $\operatorname{adj}(\operatorname{adj} AB) = 108CD$ ค่าของ $\det D$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 12 ข. 16 ค. 24 ง. 48

13. สำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ กำหนดให้ $A(n)$ เป็นพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = nx - x^2$ แกน y และเส้นสัมผัสโค้งนี้ที่จุด $x = n$
จำนวนเต็มบวก n ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $A(n)$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ของจำนวนเต็ม ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2 ค. 3 ง. 4

14. กำหนดให้ผลบวกของกำลังสองของค่ามาตรฐานของเงินเดือนพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งในปี 2554 มีค่าเท่ากับ 42 และผลบวกของเงินเดือนของพนักงานบริษัทแห่งนี้ในปี 2554 มีค่าเท่ากับ $1{,}000{,}000$ บาท ในปีถัดไป (ปี 2555) เงินเดือนพนักงานแต่ละคนเพิ่มขึ้นจากเดิม 5% จงพิจารณาว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเงินเดือนพนักงานบริษัทแห่งนี้ในปี 2555 ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ (จำนวนของพนักงานของบริษัทแห่งนี้ในปี 2554 และปี 2555 มีค่าเท่ากัน)

ก. $20{,}000$ ข. $25{,}000$ ค. $30{,}000$ ง. $35{,}000$

15. จัดคน 10 คน ซึ่งรวมสมศักดิ์ มนตรี สุภาพ ให้นั่งรอบโต๊ะกลมในงานเลี้ยงอย่างสุ่ม ความน่าจะเป็นที่สมศักดิ์และมนตรีนั่งติดกัน และสุภาพไม่นั่งติดกับสองคนนี้ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{9}$ ข. $\frac{2}{9}$ ค. $\frac{1}{6}$ ง. $\frac{1}{3}$

ตอนที่ 2 ข้อ 16 - 25 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 3 คะแนน

16. กำหนดให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $f\big(f(x)\big) = 5 - x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x จงหาค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $f(0) + f(5)$

17. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{\, (x, y \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \mid x \neq y$ และ $x^2 - x = y^2 - y \,\}$ จงหาโดเมนของ r

18. จงหาคู่อันดับของจำนวนเต็มบวก (x, y) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $2x^2 + 5y^2 \; = \; 11(xy - 11)$

19. จงหาเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ที่ทำให้อสมการ $2\log_x\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \log_x a + \log_x b$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริงบวก a และ b

20. กำหนดให้สัญลักษณ์ $\lfloor x \rfloor$ หมายถึง จำนวนเต็มที่มากที่สุดซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ x (ตัวอย่างเช่น $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$) จงหาเลขสามหลักสุดท้ายของ $\left\lfloor\frac{10^{84}}{10^{28}+8}\right\rfloor$

21. กำหนดให้ $a_n = \sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$ และ $b_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$ จงหาค่าของ $\lim_{n\to\infty} \frac{3nb_n+n^2}{a_n}$

22. นิยามลำดับ (a_n) โดย $a_1 = 1$ และสำหรับจำนวนเต็ม $n \geq 1$ ให้ a_n และ a_{n+1} เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้สมการในตัวแปร x $2\arcsin(x + a_{n+1}) = 2\pi - \arccos(x + a_n)$ มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n a_{n+1}}$

23. กำหนดให้ a, b เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ฟังก์ชัน $f(x) = x^2 - ax - ab$ มีเส้นสัมผัสที่จุด $x = a + b$ เป็นเส้นตรง $y = -x + 5$ จงหาค่าของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

24. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1| = |z_2|$ ถ้า $z_1 - z_2 = a + \mathrm{i}$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง จงหา $\mathrm{Im}\left(\frac{z_1 \cdot z_2}{|z_1 \cdot z_2|}\right)$ (ตอบในรูปของ a)

25. กำหนดข้อมูลสองชุดดังต่อไปนี้ ข้อมูลชุดแรก คือ $x_1 , x_2 , \ldots , x_{20}$

ข้อมูลชุดที่สอง คือ $y_1 , y_2 , \ldots , y_{30}$

ถ้าข้อมูลชุดแรกและข้อมูลชุดที่สองมีความแปรปรวนเป็น 9 และ 16 ตามลำดับ และถ้าผลต่างของค่าเฉลี่ยของข้อมูลสองชุดนี้มีค่าเป็น 10 แล้ว จงหาความแปรปรวนของข้อมูลผสม $x_1 , x_2 , \ldots , x_{20} , y_1 , y_2 , \ldots , y_{30}$

ตอนที่ 3 ข้อ 26 - 35 เป็นข้อสอบแบบเติมคำตอบ ข้อละ 4 คะแนน

26. ให้ P เป็นพาราโบลาที่มีจุดโฟกัสที่จุด $(1, -2)$ และเส้นตรง $x - y = 0$ เป็นไดเรกตริกซ์ กำหนดให้ A และ B เป็นจุดปลายทั้งสองข้างของเลตัสเรคตรัมของพาราโบลา P ถ้ากำหนดให้ C มีพิกัดเป็น $(2554, 2554)$ แล้ว จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC

27. บนเครื่องบินที่มี 60 แถว แต่ละแถวมี 6 ที่นั่ง ถ้าต้องการจัดผู้โดยสารนั่งบนที่นั่ง โดยมีเงื่อนไขว่า

1) ในแต่ละแถวไม่จำเป็นต้องมีคนนั่งครงทุกที่นั่ง

2) สำหรับสองแถวใดๆ ตำแหน่งที่มีคนนั่งต้องต่างกันอย่างน้อย 1 ตำแหน่งเสมอ

สามารถจัดผู้โดยสารนั่งบนที่นั่งในเครื่องบินลำนี้ได้มากที่สุดกี่คน

28. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเต็มเรียงติดกัน 3 จำนวน $(a < b < c)$ ซึ่งมีสมบัติว่า มีจำนวนเฉพาะ p ที่ทำให้ a , $b + 10$, $c + p$ เป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่า a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

29. มีตะกร้า 2 ใบ ตะกร้าใบแรกมีลูกบอลสีขาว 2 ลูก สีดำ 1 ลูก ตะกร้าใบที่สองมีลูกบอลสีขาว 1 ลูก สีดำ 2 ลูก สุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูกจากตะกร้าใบแรก แล้วใส่ลงในตะกร้าใบที่สอง จากนั้นสุ่มหยิบลูกบอล 1 ลูกจากตะกร้าใบที่สองใส่คืนกลับในตะกร้าใบแรก จงหาความน่าจะเป็นที่เมื่อหลังจากการสุ่มหยิบลูกบอลทั้งสองครั้งแล้ว จำนวนลูกบอลแต่ละสีในตะกร้าทั้งสองใบมีจำนวนเท่าเดิม

30. กำหนดรูป $\Delta\mathrm{ABC}$ และ $\Delta\mathrm{AEF}$ เป็นรูปสามเหลี่ยมในระนาบ xy โดยที่ B เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน EF ถ้า $|\overline{\mathrm{AB}}| = |\overline{\mathrm{EF}}| = 1$, $|\overline{\mathrm{BC}}| = 6$, $|\overline{\mathrm{CA}}| = \sqrt{33}$ และ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AF}} = 2$ แล้ว จงหาค่าของ $\cos\theta$ โดยที่ θ เป็นขนาดของมุมระหว่าง $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ และ $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

31. กำหนดให้ $a_n = 1 + \frac{8}{n^2}$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n

จงหาจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน $\sum_{n=1}^{98} \sqrt{a_{2n-1} + a_{2n+1}}$

32. กำหนดให้ $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ซึ่งทำให้ $\sin x = 0.10abc\ldots$

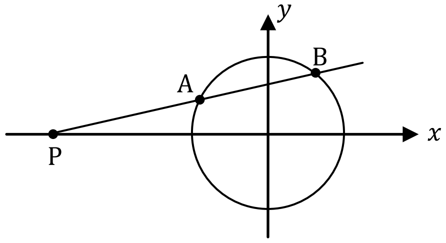
โดยที่ $a, b, c, \ldots$ เป็นเลขโดด (นั่นคือ $a, b, c, \ldots \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$)

ถ้า $\cos x = 0.mnk\ldots$ โดยที่ m, n, k เป็นเลขโดด จงหาสามสิ่งอันดับ (m, n, k) ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

33. กำหนดให้ w เป็นรากเชิงซ้อนของสมการ $z^4 - z^3 + z + 1 = 0$ จงหาค่าของ $\left|w + \frac{1}{w}\right|$

34. จงหาค่าของ $\frac{1}{\cos^2 10°}+\frac{1}{\sin^2 20°}+\frac{1}{\sin^2 40°}$

35. กำหนดให้ $r>0$ และ $h<0$ เป็นค่าคงตัวซึ่ง $|h|>r$ พิจารณาวงกลม $x^2+y^2=r^2$ และจุด $\mathrm{P}=(h,0)$ จากจุด P ลากส่วนของเส้นตรงไปตัดกัวงกลมที่จุด A และ B ตามลำดับ



ถ้าให้จุด H เป็นจุดที่อยู่บนส่วนของเส้นตรง PB ซึ่งทำให้ $|\overline{\mathrm{PH}}|$ เป็นค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิกของ $|\overline{\mathrm{PA}}|$ และ $|\overline{\mathrm{PB}}|$ จงหาสมการทางเดินของจุด H เมื่อส่วนของเส้นตรงข้างต้นแปรเปลี่ยนไป (ตอบในรูปของ r และ h)

<u>เฉลย</u>

1. ข	8. ง	15. ค	22. 0.5	29. $\frac{7}{12}$
2. ข	9. ง	16. 5	23. $3, -7$	30. $\frac{2}{3}$
3. ค	10. -	17. $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$	24. $\frac{-2a}{1+a^2}$	31. 141
4. ค	11. ค	18. $(14, 27)$	25. 37.2	32. $993, 994$
5. ข	12. ง	19. $(0, 1)$	26. 4.5	33. $\sqrt[4]{8}$
6. ง	13. ค	20. 063	27. 189	34. 12
7. ก	14. ข	21. 16	28. $11, -121$	35. $x = \frac{r^2}{h}$ $\lvert y\rvert \le -\frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}$

<u>แนวคิด</u>

1. ข

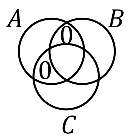
$\equiv [(q \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee r)] \vee [(q \vee \mathrm{F}) \wedge (p \vee {\sim}r)] \quad \equiv q \wedge [(p \vee r) \vee (p \vee {\sim}r)] \quad \equiv q$

2. ข

$A \cap B \subset C$ แปลว่า $A \cap B \cap C = A \cap B$

$A \cap C \subset B$ แปลว่า $A \cap C \cap B = A \cap C$

จะได้ $A \cap B = A \cap C = A \cap B \cap C$ วาดรูปได้



3. ค

$x^6 - 3x^4 + x^2 - 3 < 0 \;\rightarrow\; (x^4+1)\big(x+\sqrt{3}\big)\big(x-\sqrt{3}\big) < 0 \;\rightarrow\; (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

4. ค

$4 - x \ge 0$ และ $5 - (4 - x) \ge 0$ ได้ $[-1, 4]$

5. ข

$5^a 2^b = 250^3 = 5^9 2^3 \;\rightarrow\; a = 9\,,\; b = 3$

6. ง

$(h, k) = (0, 5)\,,\; a = 4 \;\rightarrow\; \frac{x^2}{4^2} - \frac{(y-5)^2}{b^2} = 1 \;\rightarrow$ ผ่าน $(6, 0)$ ได้ $b = \sqrt{20} \;\rightarrow\; (8, 5 \pm \sqrt{60})$

7. ก

$\det A^3 = (\det A)^3 = 0 \;\rightarrow\; \det A = 0 \;\rightarrow$ 1) ถูก

$\det(\mathrm{I} - A^3) = \det \mathrm{I} \neq 0 \rightarrow \det[(\mathrm{I} - A)(\mathrm{I} + A + A^2)] \neq 0 \;\rightarrow$ 2) ถูก

8. ง

ตั้งฉากกัน จะดอทกันได้ 0 ได้ $|\vec{u}|^2 - 3|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta + 2|\vec{v}|^2 = 0$

ได้ $\cos\theta = \frac{|\vec{u}|^2 + 2|\vec{v}|^2}{3|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

9. ง

จากกฎของ sin : $\frac{a}{\sin 3B}=\frac{b}{\sin B} \rightarrow \frac{a}{3-4\sin^2 B}=b \rightarrow \frac{a}{4\cos^2 B-1}=b \rightarrow a=b(4\cos^2 B-1)$

จากรูปสามเหลี่ยม : $c=b\cos 3B+a\cos B$ $=b(4\cos^3 B-3\cos B)+a\cos B$

$=[b(4\cos^2 B-1-2)+a]\cos B$

$=[b(4\cos^2 B-1)-2b+a]\cos B$

$=[\quad a \quad -2b+a]\cos B$

ได้ $\cos B=\frac{c}{2(a-b)}$

10. $\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

จาก (2) $|w+z|=|wz\mathrm{i}|=|w||z|$ จาก (1) ได้ $|w||z|=|w|^2$ ได้ $|w|=0$ หรือ $|w|=|z|$

จากสูตร $|z+w|^2+|z-w|^2=2|z|^2+2|w|^2$

ถ้า $|w|=0$ ได้ $0+1=2|z|^2$ ได้ $|z|=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ถ้า $|w|=|z|$ ได้ $|z|^4+1=4|z|^2 \rightarrow |z|^4-4|z|^2+1=0 \rightarrow |z|^2=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=2\pm\sqrt{3}$

ได้ $|z|=\sqrt{\frac{3}{2}}\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

11. ค

$a_n=(n-1)+a_{n-1}=(n-1)+(n-2)+a_{n-2}=\ldots=(n-1)+\cdots+0=\frac{n^2-n}{2}$

$\sum\frac{n^2-n}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{(25)(26)(51)}{6}-\frac{(25)(26)}{2}\right)=2600$

12. ง

$(\det AB)^{16}=108^5\det CD \rightarrow \det D=\frac{(2\cdot 3)^{16}}{108^5\cdot 4}=48$

13. ค

เส้นโค้ง ชัน $y'=n-2x \rightarrow$ เส้นสัมผัสที่ $x=n$ มีสมการคือ $\frac{y-0}{x-n}=n-2n \rightarrow y=-nx+n^2$

พื้นที่ $=\int_0^n(-nx+n^2)-(nx-x^2)\ dx=\int_0^n x^2-2nx+n^2\ dx=\frac{n^3}{3}-n\cdot n^2+n^2\cdot n=\frac{n^3}{3}$

14. ข

$\sum z^2=42=N \rightarrow \bar{x}=\frac{1{,}000{,}000}{42} \rightarrow$ ตอบ $\frac{1{,}000{,}000}{42}\times\frac{105}{100}=25{,}000$

15. ค

มัดสมศักดิ์กับมนตรีตอกไว้ สับในมัดได้ 2 แบบ สุภาพเลือกได้ 6 $\rightarrow \frac{2\cdot 6\cdot 7!}{9!}=\frac{1}{6}$

16. 5

จาก $f\big(f(0)\big)=5$ แปลว่าถ้าให้ $f(0)=k$ ได้ $f(k)=5$

จาก $f\big(f(k)\big)=5-k$ แปลว่า $f(5)=5-k$ จะได้ $f(0)+f(5)=k+5-k=5$

17. $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{2}\right\}$
$x^2-y^2-x+y=0 \rightarrow (x-y)(x+y)-(x-y)=0$
แต่ $x\neq y$ เอา $x-y$ หารตลอด ได้ $x+y-1=0$ แต่ $x\neq y$ ดังนั้น $x+x-1\neq 0$ ได้ $x\neq \frac{1}{2}$

18. $(14,27)$
$(2x-y)(x-5y)=-121=AB$ ได้ $y=\frac{A-2B}{9}, x=\frac{5A-B}{9} \rightarrow A$ เป็นบวก B เป็นลบ
แทน $AB=(121)(-1)$, $(11)(-11)$, $(1)(-121)$ ได้ $(1)(-121)$ อันเดียว

19. $(0,1)$
$\log_x \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \leq \log_x ab$; เนื่องจาก $\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geq ab$ (เพราะ $a^2-2ab+b^2\geq 0$)
ดังนั้น $0<x<1$

20. 063
$\left\lfloor\frac{10^{84}}{10^{28}+8}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{10^{84}+8^3-8^3}{10^{28}+8}\right\rfloor = \left\lfloor\frac{(10^{28}+8)(10^{56}-8\cdot 10^{28}+64)-8^3}{10^{28}+8}\right\rfloor = \left\lfloor 10^{56}-8\cdot 10^{28}+64-\frac{8^3}{10^{28}+8}\right\rfloor$

21. 16
$a_n=\sum k^3+3k^2+2k \rightarrow$ ตัวกำลังสูงสุด ได้จาก $\sum k^3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \rightarrow$ ได้ $\frac{n^4}{4}$
$b_n=\sum 4k^2-4k+1 \rightarrow$ ตัวกำลังสูงสุดของ $3nb_n+n^2$ คือ $3n\sum 4k^2=(12n)\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)=4n^4$
ได้คำตอบ $=\frac{4n^4}{n^4/4}=16$

22. 0.5
$\arccos \in [0,\pi]$ จะได้ $2\pi-\arccos \in [\pi,2\pi]$ จะได้ $2\arcsin(x+a_{n+1})$ ต้องอยู่ใน $[\pi,2\pi]$
แต่ $\arcsin \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ แปลว่า $\arcsin(x+a_{n+1})=\frac{\pi}{2}$ และ $\arccos(x+a_n)=\pi$
จะได้ $x+a_{n+1}=1$ และ $x+a_n=-1 \rightarrow a_{n+1}=2+a_n$
$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots\right)=\frac{1}{2}$

23. $3,-7$
ถ้า $x=a+b$ ได้ $y=(a+b)^2-a(a+b)-ab=a^2+2ab+b^2-a^2-ab-ab=b^2$
$f'(x)=2x-a$ ได้ $f'(a+b)=a+2b$ ได้เส้นตรงคือ $\frac{y-b^2}{x-(a+b)}=a+2b$
จัดรูป ได้ $y=(a+2b)x-a^2-3ab-b^2$ ได้ $a+2b=-1$ และ $-a^2-3ab-b^2=5$
แทน $a=-2b-1$ ได้ $-(-2b-1)^2-3(-2b-1)b-b^2=5 \rightarrow b^2-b-6=0 \rightarrow b=-2,3$
$a=3,-7$

24. $\frac{-2a}{1+a^2}$
ให้ $|z_1|=|z_2|=r$ จะได้ $z_1=r\angle\theta_1$, $z_2=r\angle\theta_2$
$z_1-z_2=r(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)-r(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)=a+\mathrm{i}$
ได้ $r(\cos\theta_1-\cos\theta_2)=r\left(-2\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)=a$

และ $r(\sin\theta_1 - \sin\theta_2) = r\left(2\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right) = 1$ จับสองสมการหารกัน ได้ $-\tan\frac{\theta_1+\theta_2}{2} = a$

$\mathrm{Im}\left(\frac{z_1\cdot z_2}{|z_1\cdot z_2|}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{r^2\angle(\theta_1+\theta_2)}{r^2}\right) = \sin(\theta_1+\theta_2) = \frac{-2a}{1+a^2}$ (ใช้สูตร $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$)

25. 37.2

ให้ $\bar{x} = k$ ได้ $\bar{y} = k \pm 10$ ได้ค่าเฉลี่ยรวม $= \frac{20k+30(k\pm10)}{50} = k \pm 6$

จากสูตรความแปรปรวน ได้ $\frac{\sum x^2}{20} - k^2 = 9$ และ $\frac{\sum y^2}{30} - (k\pm10)^2 = 16$

ได้ $\sum x^2 = 20k^2 + 180$, $\sum y^2 = 30(k\pm10)^2 + 480 = 30k^2 \pm 600k + 3480$

ได้ ผลบวกกำลังสอง $= 50k^2 \pm 600k + 3660$

ได้ $v_{\text{รวม}} = \frac{50k^2 \pm 600k + 3660}{50} - (k\pm 6)^2 = k^2 \pm 12k + 73.2 - k^2 \mp 12k + 36 = 37.2$

26. 4.5

โฟกัส ห่าง ไดเรคตริกซ์ $= \frac{|1-(-2)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \rightarrow c = \frac{3}{2\sqrt{2}} \rightarrow \mathrm{AB} = 4c = \frac{6}{\sqrt{2}} =$ ฐาน

จุด C ห่างไดเรคตริกซ์ $= \frac{2554-2554}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 0$ ดังนั้น จุด C อยู่บนไดเรคตริกซ์พอดี $\rightarrow$ จุด C ห่าง AB $= 2c = \frac{3}{\sqrt{2}} =$ สูง

ได้พื้นที่ $= \frac{1}{2} \times \frac{6}{\sqrt{2}} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = 4.5$

27. 189

6 คน ได้ $\binom{6}{6} = 1$ แบบ ; 5 คน ได้ $\binom{6}{5} = 6$ แบบ ; 4 คน ได้ $\binom{6}{4} = 15$ แบบ ; 3 คน ได้ $\binom{6}{3} = 20$ แบบ ;

2 คน ได้ $\binom{6}{2} = 15$ แบบ ; 1 คน ได้ $\binom{6}{1} = 6$ แบบ $\rightarrow$ เกิน 60 ละ $\rightarrow$ ได้ $1+6+15+20+15+3 = 60$

ได้จำนวนคน $= 1(6)+6(5)+15(4)+20(3)+15(2)+3(1) = 189$

28. $11, -121$

ได้ $\frac{(a+1)+10}{a} = \frac{(a+2)+p}{(a+1)+10}$ จัดรูป ได้ $121 = a(p-20)$ ได้ $a = \pm1, \pm11, \pm121$

แทน แล้วเอาเฉพาะที่ได้ p เป็นจำนวนเฉพาะ ได้ $(a,p) = (11,31), (-121,19)$

(ถ้ายอมให้จำนวนลบเป็นจำนวนเฉพาะได้ จะมี $(-1,-101)$ อีกตัว)

29. $\frac{7}{12}$

$n(S)$: ครั้งแรกเลือกได้ 3 แบบ ครั้งสองมี 4 ลูกให้เลือก ได้ $n(S) = 3 \times 4$

$n(E)$: กรณี ครั้งแรก ได้สีขาว $\rightarrow 2 \times (1+1) = 4$; กรณี ครั้งแรก ได้สีดำ $\rightarrow 1 \times (2+1) = 3 \rightarrow$ ตอบ $\frac{4+3}{12}$

30. $\frac{2}{3}$

จาก $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = |\overrightarrow{\mathrm{EF}}||\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cos\theta = 6\cos\theta$

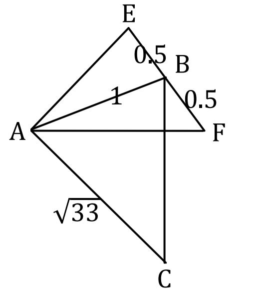
และจาก $\overrightarrow{\mathrm{EF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (\overrightarrow{\mathrm{AF}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}) = \overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$= (\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}) - (\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}) = 2 - (\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})$

จะได้ $6\cos\theta = 2 - (\overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})$ ...(1)

จาก $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AE}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}) \rightarrow 2\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\rightarrow 2 = \overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ ...(2)



จาก $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right) \rightarrow 2\,\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-\left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$

$\rightarrow 1+33-36 = -2 = \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}$ (3)

$$\begin{aligned}(2)+(3):0 &= \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= \left(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AC}\right)+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}\\ &= 2+\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

จะได้ $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC} = -2$ แทนใน (1) ได้ $\cos\theta = \frac{2}{3}$

31. 141

$a_{2n-1}+a_{2n+1} = 1+\frac{8}{(2n-1)^2}+1+\frac{8}{(2n+1)^2}$ = ใช้แรงลุย = $\frac{2\left[(2n-1)^2(2n+1)^2+4\left((2n+1)^2+(2n-1)^2\right)\right\}}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

$= \frac{2\left[16n^4-8n^2+1+4\left(8n^2+2\right)\right\}}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{2\left[16n^4+24n^2+9\right\}}{(2n-1)^2(2n+1)^2} = \frac{2\left(4n^2+3\right)^2}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$

ได้ $\sqrt{a_{2n-1}+a_{2n+1}} = \frac{\sqrt{2}\left(4n^2+3\right)}{4n^2-1} = \sqrt{2}\left(1+\frac{4}{4n^2-1}\right) = \sqrt{2}\left(1+\frac{2}{2n-1}-\frac{2}{2n+1}\right)$

ได้ $\sum_{n=1}^{98}\sqrt{a_{2n-1}+a_{2n+1}} = \sqrt{2}\left(98+\frac{2}{1}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{5}+\frac{2}{5}-\frac{2}{6}+\cdots+\frac{2}{195}-\frac{2}{197}\right)$

$= (1.414)\left(100-\frac{2}{197}\right) = 141.4-\frac{2.828}{197} \rightarrow 141$

32. 993, 994

$\sin x \in [0.10, 0.11) \rightarrow \sin^2 x \in [0.01, 0.0121) \rightarrow 1-\sin^2 x \in (0.9879, 0.99]$

$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ $\rightarrow$ ถอดรูทแบบตั้งหาร ได้ $\cos x \in (0.993, 0995)$

33. $\sqrt[4]{8}$

$$\begin{aligned} z^4-z^3+z+1 &= 0\\ z^2-z+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2} &= 0\\ z^2+\frac{1}{z^2}-z+\frac{1}{z} &= 0\\ \left(z-\frac{1}{z}\right)^2+2-z+\frac{1}{z} &= 0\\ \left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)+2 &= 0\end{aligned}$$

$z-\frac{1}{z} = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(2)}}{2(1)} = \frac{1\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$

$z^2-2+\frac{1}{z^2} = \frac{1\pm2\sqrt{7}\mathrm{i}-7}{4} = \frac{-6\pm2\sqrt{7}\mathrm{i}}{4} = \frac{-3\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$

$z^2+2+\frac{1}{z^2} = \frac{-3\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}+4 = \frac{5\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}$

$\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 = \left|\frac{5\pm\sqrt{7}\mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{25+7}}{2} = \sqrt{8}$

จะได้ $\left|z+\frac{1}{z}\right| = \sqrt[4]{8}$

34. 12

$\frac{1}{\cos^2 10^\circ}+\frac{1}{\sin^2 20^\circ}+\frac{1}{\sin^2 40^\circ} = \frac{1}{\sin^2 80^\circ}+\frac{1}{\sin^2 20^\circ}+\frac{1}{\sin^2 40^\circ}$

จะหาสมการกำลังสาม $ax^3+bx^2+cx+d=0$ ที่มีคำตอบคือ $\frac{1}{\sin^2 20^\circ}, \frac{1}{\sin^2 40^\circ}, \frac{1}{\sin^2 80^\circ}$

แล้วใช้สูตรผลบวกราก $-\frac{b}{a}$ ก็จะได้คำตอบของข้อนี้

เนื่องจากต้องการสมการกำลังสาม เราจะพยายามใช้ $\sin 3A = 3\sin A-4\sin^3 A$

โดยเราจะจัดรูป $\frac{1}{\sin^2 20^\circ}, \frac{1}{\sin^2 40^\circ}, \frac{1}{\sin^2 80^\circ}$ ให้เป็นรูปที่ $\sin 3A$ มีค่าเท่ากัน

ถ้าให้ $3A = 2n\pi+\theta$ จะได้ $A = \frac{2\pi}{3}n+\frac{\theta}{3}$ ดังนั้น ต้องให้ แต่ละมุมห่างกัน $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$

จะได้ $\frac{1}{\sin^2 40^\circ} = \frac{1}{\sin^2 140^\circ} = \frac{1}{\sin^2 120^\circ+20^\circ}$ และ $\frac{1}{\sin^2 80^\circ} = \frac{1}{\sin^2 260^\circ} = \frac{1}{\sin^2 240^\circ+20^\circ}$

ดังนั้น เราจะสร้างสมการกำลังสามที่มี $\frac{1}{\sin^2 20^\circ}, \frac{1}{\sin^2 140^\circ}, \frac{1}{\sin^2 260^\circ}$ เป็นคำตอบ

ให้ $x = \frac{1}{\sin^2\theta}$ จะได้ $\sin\theta = \frac{1}{\pm\sqrt{x}}$

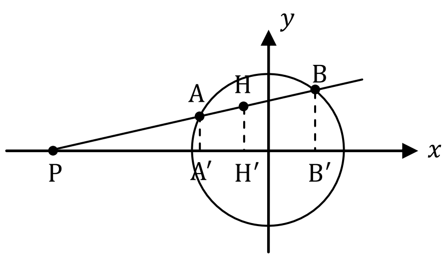
จะได้ $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin\theta\,(3 - 4\sin^2\theta) = \frac{1}{\pm\sqrt{x}}\left(3 - \frac{4}{x}\right)$

ถ้า $\theta = 20°, 140°, 260°$ จะได้ $\sin 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ เท่ากันหมด ดังนั้น $\frac{1}{\pm\sqrt{x}}\left(3 - \frac{4}{x}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ยกกำลังสอง ได้ $\frac{1}{x}\left(9 - \frac{24}{\mathrm{x}} - \frac{16}{\mathrm{x}^2}\right) = \frac{3}{4}$ คูณ x^3 ตลอด แล้วจัดรูปได้ $3x^3 - 36x^2 + 96x + 64 = 0$

ได้ผลบวกราก $= -\frac{-36}{3} = 12$

35. $x = \frac{r^2}{h}$, $|y| \le -\frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}$



จากสามเหลี่ยมคล้าย ให้ $\frac{\mathrm{PA}'}{\mathrm{PA}} = \frac{\mathrm{PH}'}{\mathrm{PH}} = \frac{\mathrm{PB}'}{\mathrm{PB}} = k$

จะได้ $\mathrm{PA}' = k\cdot\mathrm{PA}$, $\mathrm{PH}' = k\cdot\mathrm{PH}$, $\mathrm{PB}' = k\cdot\mathrm{PB}$

จากค่าเฉลี่ยมฮาร์มอนิก $\mathrm{PH} = \frac{2}{\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}}$

คูณ k สองข้าง จะได้ $k\cdot\mathrm{PH} = \frac{2k}{\frac{1}{\mathrm{PA}}+\frac{1}{\mathrm{PB}}} = \frac{2}{\frac{1}{k\cdot\mathrm{PA}}+\frac{1}{k\cdot\mathrm{PB}}}$

จะได้ $\mathrm{PH}' = \frac{2}{\frac{1}{\mathrm{PA}'}+\frac{1}{\mathrm{PB}'}}$

นั่นคือ PH' เป็นค่าเฉลี่ยมฮาร์มอนิก ของ PA' กับ PB' ด้วย

เราจะหาค่าเฉลี่ยมฮาร์มอนิก ของ PA' กับ PB' เพื่อให้ได้ PH' เพื่อให้ได้พิกัด x ของ H' เพื่อให้ได้พิกัด x ของ H

ให้เส้นตรง PB มีความชัน m จะได้สมการ PB คือ $\frac{y-0}{x-h} = m$ ได้ $y = m(x-h)$

เราจะหาจุด A กับ B โดยการแก้ระบบสมการ $y = m(x-h)$ กับ $x^2 + y^2 = r^2$

แทน $y = m(x-h)$ ในสมการวงกลม ได้ $x^2 + m^2x^2 - 2m^2hx + m^2h^2 = r^2$

จัดรูปเป็นสมการกำลังสองที่มี x เป็นตัวแปร ได้ $(m^2+1)x^2 - (2m^2h)x + (m^2h^2 - r^2) = 0$

จากสูตรผลบวกผลคูณราก จะได้ผลบวกคำตอบ $= -\frac{-2m^2h}{m^2+1} = \frac{2m^2h}{m^2+1}$ และผลคูณคำตอบ $= \frac{m^2h^2-r^2}{m^2+1}$

ดังนั้น ถ้าให้พิกัด x ของ A และ B คือ a และ b จะได้ $a+b = \frac{2m^2h}{m^2+1}$ และ $ab = \frac{m^2h^2-r^2}{m^2+1}$

และจากรูป จะได้ พิกัด x ของ A' และ B' คือ a และ b ด้วย

จะได้ $\mathrm{PA}' = a - h$ และ $\mathrm{PB}' = b - h$ ดังนั้น $\mathrm{PH}' = \frac{2}{\frac{1}{a-h}+\frac{1}{b-h}} = \frac{2(a-h)(b-h)}{b-h+a-h} = \frac{2\left(ab-(a+b)h+h^2\right)}{a+b-2h}$

$$= \frac{2\left(\frac{m^2h^2-r^2}{m^2+1} - \left(\frac{2m^2h}{m^2+1}\right)h + h^2\right)}{\frac{2m^2h}{m^2+1} - 2h} = \frac{2\left(m^2h^2-r^2-2m^2h^2+m^2h^2+h^2\right)}{2m^2h-2m^2h-2h} = \frac{r^2-h^2}{h}$$

จะได้ พิกัด x ของ H' คือ $\frac{r^2-h^2}{h} + h = \frac{r^2}{h} =$ พิกัด x ของ H ด้วย

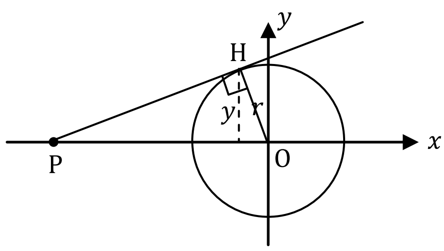
ถัดมา หาพิกัด y ของ H เนื่องจาก H ต้องอยู่บนเส้น PB และเนื่องจาก PB ต้องตัดวงกลม

ดังนั้น จุด H จะมีพิกัด y ได้มากที่สุด เมื่อ PB สัมผัสวงกลม ดังรูป

โดย จุด A , B , H จะเป็นจุดเดียวกัน

จากรูป จะได้ $\mathrm{PO} = -h$, $\mathrm{PH} = \sqrt{h^2 - r^2}$

จากสามเหลี่ยมคล้าย จะได้ $\frac{y}{r} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PO}} = \frac{\sqrt{h^2-r^2}}{-h}$



จะได้ พิกัด y มากสุด $= -\frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}$

และเนื่องจาก จุด H จะมีพิกัด y ได้น้อยที่สุด เมื่อ PB สัมผัสวงกลมทางด้านล่าง

นั่นคือ y น้อยสุด $= -\left(-\frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}\right) = \frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}$ เขียนสั้นๆได้เป็น $|y| \le -\frac{r\sqrt{h^2-r^2}}{h}$