

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (เม.ย. 64)

วันอาทิตย์ที่ 4 เมษายน 2564 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้อง จำนวน 25 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 75 คะแนน

1. สมมติว่า รถยนต์ยี่ห้อหนึ่งมีราคาลดลงปีละ 20% ของราคาในปีก่อนหน้า

ถ้ากลางปี พ.ศ. 2564 รถยนต์ยี่ห้อนี้คันหนึ่งมีราคา 1,000,000 บาท

แล้วในกลางปีใด รถยนต์คันนี้จึงจะมีราคาต่ำกว่า 400,000 บาท เป็นปีแรก

- |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|
| 1. พ.ศ. 2566 | 2. พ.ศ. 2567 | 3. พ.ศ. 2568 |
| 4. พ.ศ. 2569 | 5. พ.ศ. 2570 |              |

2. ให้เอกภพสัมพัทธ์  $U = \{ 2, 3, 4 \}$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก)  $\exists x[ x + 1 \leq 5 \leftrightarrow 2x > 1 ]$

ข)  $\forall x[ x^2 > 1 ] \rightarrow \exists x[ x - 3 > 1 ]$

ค)  $\exists x[ x + 2 = x^2 \rightarrow x^2 < 0 ]$

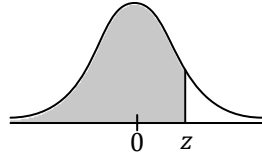
จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

- ข้อความ ก) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) และ ข) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) และ ค) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ข) และ ค) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) ข) และ ค) มีค่าความจริงเป็นจริง

3. ให้  $\mathbb{Z}$  แทนเซตของจำนวนเต็ม ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $\left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left| \frac{x-1}{x+3} \right| = \frac{1-x}{x+3} \right\}$  เท่ากับเท่าใด

- |       |  |       |
|-------|--|-------|
| 1. -5 | 2. -3  | 3. -2 |
| 4. 0  | 5. จำนวนสมาชิกในเซตนี้เป็นจำนวนอนันต์ และหาผลบวกไม่ได้ |       |

4. ในการสอบชิงทุนการศึกษาของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ผู้ที่สอบผ่านข้อเขียนต้องมีคะแนนสอบตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 85 ขึ้นไป ถ้าคะแนนของการสอบครั้งนี้มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 80 คะแนน และความแปรปรวนเท่ากับ 9 คะแนน<sup>2</sup> แล้วผู้ที่สอบผ่านข้อเขียนจะต้องได้คะแนนสอบอย่างน้อยกี่คะแนน กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ดังนี้



$z$	0.85	1.04
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน	0.80	0.85

1. 82.55      2. 83.12      3. 85.00      4. 87.65      5. 89.36

5. ให้เวกเตอร์  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  และ  $|\vec{u}| \neq |\vec{v}|$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก) มุมระหว่าง  $3\vec{u}$  และ  $3\vec{v}$  มีขนาดเป็น 3 เท่าของมุมระหว่าง  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$   
 ข) มุมระหว่าง  $\vec{u} - \vec{v}$  และ  $\vec{v} - \vec{u}$  มีขนาด  $180^\circ$   
 ค) มุมระหว่าง  $\vec{u} + \vec{v}$  และ  $\vec{u} - \vec{v}$  มีขนาด  $90^\circ$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น      2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น  
 3. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น      4. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น  
 5. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

6. เซตคำตอบของอสมการ  $\frac{4^x + 69}{1 + 2^{x+2}} \leq 5$  เป็นสับเซตของเซตใด

1.  $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$       2.  $(-\infty, 3]$       3.  $[3, 16]$   
 4.  $(2, 6)$       5.  $(1, 5)$

7. ให้ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก) แอมพลิจูดของ  $f$  เท่ากับ 0.5
  - ข)  $f\left(\frac{2\pi}{7}\right) < f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$
  - ค) ถ้า  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $f(x + n\pi) = f(x)$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

8. ให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ  $A, B, C$  เป็นสับเซตของ  $U$

ถ้า  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$

$n(A) = n(B) = n(C) = 10, n(U) = 30$

และ  $n((A \cup B \cup C)') = 6$

แล้ว  $n((A \cup B) \cap C')$  เท่ากับเท่าใด

1. 14
2. 16
3. 17
4. 20
5. 23

9. ถ้า  $x^2 - 4x + 5$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3 + ax^2 + bx + 30$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าใด

1. -29
2. -18
3. -17
4. 1
5. 19

10. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $3 - i$  เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ  $x^2 + ax + b = 0$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าใด

1. 2                      2. 4                      3. 7                      4. 8                      5. 10

11. ให้  $z_1, z_2, z_3, z_4$  เป็นรากที่ 4 ที่แตกต่างกันของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง โดยที่  $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ,  $\operatorname{Re}(z_2) > 0$  และ  $\operatorname{Im}(z_3) > 0$   $(z_4)^3$  เท่ากับเท่าใด

1.  $4\sqrt{3} + 4i$                       2.  $4 + 4\sqrt{3}i$                       3.  $4 - 4\sqrt{3}i$   
 4.  $-4\sqrt{3} - 4i$                       5.  $-4 - 4\sqrt{3}i$

12. คำตอบของสมการ  $1 + \frac{5^x}{1+5^x} + \frac{5^{2x}}{(1+5^x)^2} + \frac{5^{3x}}{(1+5^x)^3} + \dots = \frac{26}{25}$  เท่ากับเท่าใด

1. -2                      2. -1                      3. 0                      4. 1                      5. 2

13. ถ้า  $(a, b)$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $3x - y + 4 = 0$  และ  $(a, b)$  อยู่ใกล้กับจุด  $(-2, 3)$  ที่สุดแล้ว  $a$  เท่ากับเท่าใด

1.  $-1$                       2.  $-\frac{1}{2}$                       3.  $-\frac{1}{3}$                       4.  $-\frac{1}{8}$                       5.  $0$

14. กำหนดไฮเพอร์โบลา  $16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 103 = 0$

ให้  $F$  เป็นโฟกัสที่อยู่ในจุดภาคที่ 2 และให้  $C$  เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้ สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $C$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $F$  คือข้อใด

1.  $(x + 4)^2 = -12(y - 1)$                       2.  $(x + 4)^2 = -20(y - 1)$   
 3.  $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$                       4.  $(y - 1)^2 = -16(x + 4)$   
 5.  $(y - 1)^2 = -20(x + 4)$

15. กำหนดรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีจุดยอดที่  $A(-2, -4, -4)$ ,  $B(0, -2, 0)$  และ  $C(0, 0, 2)$  รูปสามเหลี่ยม  $ABC$  มีพื้นที่ที่ี่ตารางหน่วย

1.  $1$                       2.  $\sqrt{3}$                       3.  $2$                       4.  $2\sqrt{3}$                       5.  $4\sqrt{3}$

16. ให้เมทริกซ์  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$  และ  $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก)  $\det(B) = 3 \det(A)$
- ข)  $\det(AC) = 0$
- ค)  $\det(A + C) = \det(A) + \det(C)$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

- 1. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- 2. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- 3. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น
- 4. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น
- 5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

17. ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งมีข้อมูลทั้งหมด 21 ตัว และข้อมูลชุดนี้มีฐานนิยม 1 ค่า เท่านั้น

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก) ถ้าตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก 1 ตัว และเพิ่มข้อมูลที่มีค่าเท่ากับฐานนิยมแทนที่ข้อมูลที่ตัดออก แล้วข้อมูลที่ได้จะมีฐานนิยมเท่าเดิม
- ข) ถ้าตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก 1 ตัว แล้วข้อมูลที่ได้จะมีมัธยฐานมากขึ้น
- ค) ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 2 ตัว ที่มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต แล้วข้อมูลที่ได้จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากขึ้น

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

- 1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- 2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- 3. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
- 4. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น
- 5. ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

18. ฟาร์มแมวแห่งหนึ่งมีแมว 3 สายพันธุ์ ได้แก่ เก้าแต้ม วิเชียรมาศ และขาวมณี รวมทั้งหมด 12 ตัว

โดยอัตราส่วนของจำนวนแมวพันธุ์ เก้าแต้ม ต่อ วิเชียรมาศ ต่อ ขาวมณี เป็น 3 : 2 : 1

ถ้าสุ่มเลือกแมวจากฟาร์มแห่งนี้มา 3 ตัว แล้วความน่าจะเป็นที่สุ่มได้แมวพันธุ์เก้าแต้มอย่างน้อย 1 ตัว เท่ากับเท่าใด

- 1.  $\frac{1}{11}$
- 2.  $\frac{9}{22}$
- 3.  $\frac{9}{11}$
- 4.  $\frac{10}{11}$
- 5.  $\frac{19}{20}$

19. สุ่มหยิบจำนวนเต็ม 2 จำนวน ที่ต่างกัน ในเซต  $\{1, 2, 3, \dots, 150\}$  โดยหยิบทั้ง 2 จำนวนพร้อมกัน ความน่าจะเป็นที่แต่ละจำนวนจะเป็นจำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัว เท่ากับเท่าใด

1.  $\frac{1}{4}$                       2.  $\frac{25}{149}$                       3.  $\frac{1}{9}$                       4.  $\frac{1}{36}$                       5.  $\frac{4}{149}$

20. สำนักงานเขตแห่งหนึ่งจัดที่นั่งสำหรับผู้มาขอทำบัตรประชาชน โดยเป็นเก้าอี้ 11 ตัว ที่วางเรียงกันเป็นแถว หน้ากระดานหนึ่งแถว เพื่อเป็นการป้องกันการระบาดของโรคโควิด-19 จึงไม่ให้มีการนั่งเก้าอี้ติดกัน ถ้าในช่วงเวลาหนึ่งมีผู้มาขอทำบัตรประชาชน 5 คน แล้วจะมีวิธีการจัดที่นั่งให้ทั้ง 5 คน ได้ทั้งหมดกี่วิธี

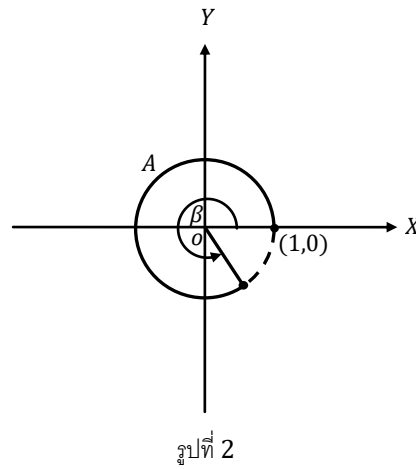
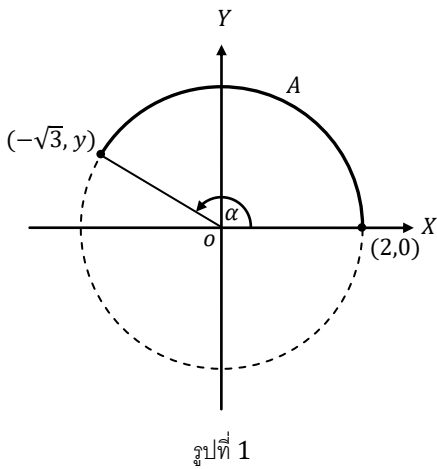
1.  $\frac{11!}{6!}$                       2.  $\frac{11!}{5!6!}$                       3.  $\frac{7!}{2!}$                       4.  $\frac{7!}{5!2!}$                       5.  $5!$

21. ซุ้มเกมจับสลากในงานกาชาดมีกล่องใบหนึ่งบรรจุสลาก 9 ใบ โดยมีหมายเลข  $1, 2, 3, \dots, 9$  กำกับไว้ใบละหนึ่งหมายเลขไม่ซ้ำกัน ในการเล่นเกมแต่ละครั้ง ผู้เล่นต้องจ่ายเงิน 90 บาท ก่อนเพื่อจับสลากพร้อมกันสองใบ ถ้าผลคูณของหมายเลขสลากที่ได้เป็นจำนวนคู่ ผู้เล่นจะได้เงินรางวัล 180 บาท ถ้าผลคูณของหมายเลขสลากที่ได้เป็นจำนวนคี่ ผู้เล่นจะไม่ได้รับเงินรางวัลใดๆ ในการเล่นเกมแต่ละครั้ง ข้อสรุปใดถูกต้อง

1. โดยเฉลี่ยแล้ว เท่าทุน                      2. โดยเฉลี่ยแล้ว ได้กำไรครั้งละ 40 บาท  
 3. โดยเฉลี่ยแล้ว ได้กำไรครั้งละ 90 บาท                      4. โดยเฉลี่ยแล้ว ขาดทุนครั้งละ 40 บาท  
 5. โดยเฉลี่ยแล้ว ขาดทุนครั้งละ 90 บาท

22. ให้ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง  
 ถ้า  $f(0) = 3$  และ  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$  แล้ว  $f(1)$  เท่ากับเท่าใด
1.  $-1$
  2.  $1$
  3.  $3$
  4.  $5$
  5.  $7$

23. ให้  $A$  แทนความยาวของส่วนโค้งของวงกลมที่วัดจากจุด  $(2, 0)$  ไปยังจุด  $(-\sqrt{3}, y)$  โดยที่  $y > 0$   
 และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาด  $\alpha$  เรเดียน ดังรูปที่ 1  
 ให้มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว  $A$  หน่วย มีขนาด  $\beta$  เรเดียน ดังรูปที่ 2



$\cos \alpha + \sin \beta$  เท่ากับเท่าใด

1.  $-\sqrt{3}$
  2.  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
  3.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
  4.  $1$
  5.  $\sqrt{3}$
24. ให้  $a_n$  เป็นลำดับซึ่ง  $a_1 = 1, a_2 = 3$  และ  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  เมื่อ  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$   
 ค่าของ  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$  เท่ากับเท่าใด
1. หาผลบวกไม่ได้ เพราะอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก
  2.  $\frac{3}{4}$
  3.  $1$
  4.  $\frac{4}{3}$
  5.  $2$



25. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ซึ่ง  $f(0) = 10$ ,  $f(3) = 9$

$$\text{และ } f'(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x^2 + a & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases} \text{ โดยที่ } a \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$a$  เท่ากับเท่าใด

1. 4                      2. 2                      3. 0                      4. -2                      5. -4

ตอนที่ 2 แบบบรรยายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน รวม 25 คะแนน

26. ให้  $L$  เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ  $-2$  และสัมผัสพาราโบลา  $y = 17 - x^2$  พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน  $X$  แกน  $Y$  และเส้นตรง  $L$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย

27. ให้  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก  $A$  ไปทั่วถึง  $A$  โดยกำหนดค่าของฟังก์ชันเพียงบางค่า ดังตารางต่อไปนี้

$x$	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-1	1	2
0	2	1
1	0	$a$

$50 + 5a + f(-2)$  เท่ากับเท่าใด

28. ให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) ถ้า $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \vee \sim q)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง	(15)
ข) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับ $(p \wedge q) \rightarrow r$	(30)

จากข้อความ ก) และ ข) ข้างต้น

ผลบวกของจำนวนที่อยู่ในวงเล็บทางขวามือของทุกข้อความที่ถูกต้องเท่ากับเท่าใด

(หากข้อความทั้งสองไม่ถูกต้อง ให้ถือว่าผลบวกเท่ากับ 0)

29. นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 50 คน ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีนักเรียนเข้าสอบทั้งหมด 49 คน ขาดสอบ 1 คน โดยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของนักเรียน 49 คน เท่ากับ 10 คะแนน ต่อมา นักเรียนที่ขาดสอบได้ขอสอบในภายหลัง เมื่อนำคะแนนของนักเรียนที่ขาดสอบมาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วย พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่มีการเปลี่ยนแปลง ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 50 คน เท่ากับกี่คะแนน<sup>2</sup>

30. จำนวนจริง  $x$  ที่มีค่าน้อยที่สุดซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

$$\frac{(2 \log_3 x) - 4}{\log_3 \left(\frac{x}{9}\right)} = \log_3(x^7) - \left(\frac{1}{\log_x 3}\right)^2 - 8 \quad \text{เท่ากับเท่าใด}$$

เฉลย

- |      |       |       |       |         |
|------|-------|-------|-------|---------|
| 1. 4 | 7. 3  | 13. 2 | 19. 5 | 25. 5   |
| 2. 3 | 8. 1  | 14. 5 | 20. 3 | 26. 81  |
| 3. 3 | 9. 3  | 15. 4 | 21. 2 | 27. 43  |
| 4. 2 | 10. 2 | 16. 1 | 22. 4 | 28. 15  |
| 5. 2 | 11. 5 | 17. 1 | 23. 1 | 29. 98  |
| 6. 5 | 12. 1 | 18. 4 | 24. 4 | 30. 243 |

แนวคิด

1. สมมติว่า รถยนต์ยี่ห้อหนึ่งมีราคาลดลงปีละ 20% ของราคาในปีก่อนหน้า  
 ถ้ากลางปี พ.ศ. 2564 รถยนต์ยี่ห้อนี้คันหนึ่งมีราคา 1,000,000 บาท  
 แล้วในกลางปีใด รถยนต์คันนี้จึงจะมีราคาต่ำกว่า 400,000 บาท เป็นปีแรก

1. พ.ศ. 2566                                      2. พ.ศ. 2567                                      3. พ.ศ. 2568  
 4. พ.ศ. 2569                                      5. พ.ศ. 2570

ตอบ 4

ลดลงปีละ 20% แปลว่าราคาของปีถัดไป จะเหลือแค่ 80% ของราคาในปีก่อนหน้า

$$1,000,000, \quad 1,000,000 \times \frac{80}{100}, \quad 1,000,000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^2, \dots$$

เมื่อผ่านไป  $n$  ปี จะได้ราคาคือ  $1,000,000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n$

ซึ่งจะต่ำกว่า 400,000 บาท เมื่อ  $1,000,000 \times \left(\frac{80}{100}\right)^n < 400,000$   
 $0.8^n < 0.4$

$n$	$0.8^n$
1	0.8
2	0.64
3	0.512
4	0.4096
5	0.32768

โดยยกกำลังฐาน 0.8 ไปเรื่อยๆ จะเห็นว่า  $0.8^n < 0.4$  เป็นครั้งแรก เมื่อ  $n = 5$   
 นั่นคือ ราคาจะต่ำกว่า 400,000 บาท เป็นครั้งแรก เมื่อผ่านไป 5 ปี  
 คิดเป็นปี พ.ศ. 2564 + 5 = 2569

2. ให้เอกภพสัมพัทธ์  $U = \{ 2, 3, 4 \}$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก)  $\exists x[ x + 1 \leq 5 \leftrightarrow 2x > 1 ]$   
 ข)  $\forall x[ x^2 > 1 ] \rightarrow \exists x[ x - 3 > 1 ]$   
 ค)  $\exists x[ x + 2 = x^2 \rightarrow x^2 < 0 ]$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

- ข้อความ ก) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) และ ข) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) และ ค) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ข) และ ค) เท่านั้น ที่มีค่าความจริงเป็นจริง
- ข้อความ ก) ข) และ ค) มีค่าความจริงเป็นจริง

ตอบ 3

ก) ไล่แทนทีละตัว  $\exists x [x + 1 \leq 5 \leftrightarrow 2x > 1]$

$$x = 2 : \begin{array}{ccc} 2 + 1 \leq 5 & \leftrightarrow & 2(2) > 1 \\ \text{T} & & \text{T} \\ & \leftrightarrow & \\ & \text{T} & \end{array}$$

→ มี  $x = 2$  ที่แทนแล้วจริง ดังนั้น ก) จริง

ข)  $2^2, 3^2, 4^2$  ทุกตัวมากกว่า 1 ดังนั้น  $\forall x [x^2 > 1]$  เป็นจริง

$x - 3 > 1$  คือ  $x > 4$  ซึ่งจะเห็นว่าไม่มีตัวไหนใน  $U$  เลย ที่มากกว่า 4 ดังนั้น  $\exists x [x - 3 > 1]$  เป็นเท็จ

ดังนั้น  $\forall x [x^2 > 1] \rightarrow \exists x [x - 3 > 1] \equiv \text{T} \rightarrow \text{F} \equiv \text{F}$  เป็นเท็จ

ค) ไล่แทนทีละตัว  $\exists x [x + 2 = x^2 \rightarrow x^2 < 0]$

$$x = 2 : \begin{array}{ccc} 2 + 2 = 2^2 & \rightarrow & 2^2 < 0 \\ \text{T} & & \text{F} \end{array}$$

F

$$x = 3 : \begin{array}{ccc} 3 + 2 = 3^2 & \rightarrow & 3^2 < 0 \\ \text{F} & & \text{F} \end{array}$$

T

→ มี  $x = 3$  ที่แทนแล้วจริง ดังนั้น ค) จริง

3. ให้  $\mathbb{Z}$  แทนเซตของจำนวนเต็ม ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต  $\left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \left| \frac{x-1}{x+3} \right| = \frac{1-x}{x+3} \right\}$  เท่ากับเท่าใด

1. -5

2. -3

3. -2

4. 0

5. จำนวนสมาชิกในเซตนี้เป็นจำนวนอนันต์ และหาผลบวกไม่ได้

ตอบ 3

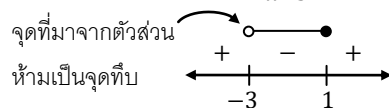
$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| = \frac{1-x}{x+3}$$

$$\left| \frac{x-1}{x+3} \right| = \frac{-(x-1)}{x+3}$$

$$\text{ให้ } \frac{x-1}{x+3} = a \quad \left( \begin{array}{l} \left| \frac{x-1}{x+3} \right| = -\frac{x-1}{x+3} \\ |a| = -a \end{array} \right.$$

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์  $|a| = -a$  ก็ต่อเมื่อ  $a \leq 0$

$$\frac{x-1}{x+3} \leq 0$$

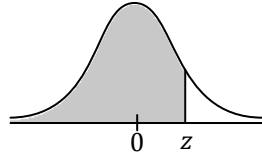


จุดที่มาจากตัวส่วน  
ห้ามเป็นจุดทึบ

→ เฉพาะจำนวนเต็ม จะได้  $x = -2, -1, 0, 1$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ผลบวก} &= (-2) + (-1) + 0 + 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

4. ในการสอบชิงทุนการศึกษาของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่ง ผู้ที่สอบผ่านข้อเขียนต้องมีคะแนนสอบตั้งแต่เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 85 ขึ้นไป ถ้าคะแนนของการสอบครั้งนี้มีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 80 คะแนน และความแปรปรวนเท่ากับ 9 คะแนน<sup>2</sup> แล้วผู้ที่สอบผ่านข้อเขียนจะต้องได้คะแนนสอบอย่างน้อยกี่คะแนน กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ดังนี้



$z$	0.85	1.04
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน	0.80	0.85

1. 82.55      2. 83.12      3. 85.00      4. 87.65      5. 89.36

ตอบ 2

เปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 85 คือ พื้นที่ = 0.85 → จากตาราง จะได้  $z = 1.04$

แปลง  $z$  กลับไปเป็นคะแนนสอบด้วยสูตร  $z = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$  โจทย์ให้ความแปรปรวน  $s^2 = 9$   
 $1.04 = \frac{x_i - 80}{3}$  จะได้  $s = 3$   
 $83.12 = x_i$

5. ให้เวกเตอร์  $\vec{u} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v} \neq \vec{0}$  และ  $|\vec{u}| \neq |\vec{v}|$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก) มุมระหว่าง  $3\vec{u}$  และ  $3\vec{v}$  มีขนาดเป็น 3 เท่าของมุมระหว่าง  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$   
 ข) มุมระหว่าง  $\vec{u} - \vec{v}$  และ  $\vec{v} - \vec{u}$  มีขนาด  $180^\circ$   
 ค) มุมระหว่าง  $\vec{u} + \vec{v}$  และ  $\vec{u} - \vec{v}$  มีขนาด  $90^\circ$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น      2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น  
 3. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น      4. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น  
 5. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอบ 2

- ก)  $3\vec{u}$  และ  $3\vec{v}$  คือ  $\vec{u}$  และ  $\vec{v}$  ที่เพิ่มขนาดเป็น 3 เท่า แต่ทิศเหมือนเดิม

ดังนั้น มุมระหว่าง  $3\vec{u}$  และ  $3\vec{v}$  จะมีขนาดเท่าเดิม → ก) ผิด

- ข) เนื่องจาก  $\vec{u} - \vec{v} = -(\vec{v} - \vec{u})$  ดังนั้น  $\vec{u} - \vec{v}$  และ  $\vec{v} - \vec{u}$  เป็นเวกเตอร์ที่มีทิศตรงข้ามกัน

จึงทำมุม  $180^\circ$  กัน ดังรูป → ข) ถูก



- ค) ตั้งฉากกัน จะตอบกันได้ 0 :  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$   
 $= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$

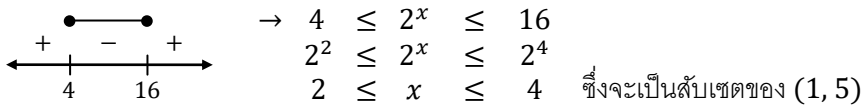
เนื่องจาก  $|\vec{u}| \neq |\vec{v}|$  จึงสรุปไม่ได้ว่าผลตอบเป็น 0 ดังนั้น  $\vec{u} + \vec{v}$  และ  $\vec{u} - \vec{v}$  ไม่ตั้งฉากกัน → ค) ผิด

6. เซตของคำตอบของสมการ  $\frac{4^x + 69}{1 + 2^{x+2}} \leq 5$  เป็นสับเซตของเซตใด

1.  $(-\infty, 2] \cup [4, \infty)$       2.  $(-\infty, 3]$       3.  $[3, 16]$   
 4.  $(2, 6)$       5.  $(1, 5)$

ตอบ 5

$$\begin{aligned} \frac{4^x + 69}{1 + 2^{x+2}} &\leq 5 && \text{ผลยกกำลังฐาน 2 จะเป็นบวกเสมอ} \\ 4^x + 69 &\leq 5(1 + 2^{x+2}) && \rightarrow \text{ย้าย } 1 + 2^{x+2} \text{ ขึ้นมาคูณได้} \\ (2^2)^x + 69 &\leq 5 + 5(2^x \cdot 2^2) && \text{โดยไม่ต้องกลับเครื่องหมาย } \leq \\ 2^{2x} + 69 &\leq 5 + 20(2^x) \\ 2^{2x} - 20(2^x) + 64 &\leq 0 \\ (2^x - 4)(2^x - 16) &\leq 0 \end{aligned}$$



7. ให้ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  พิจารณาข้อความต่อไปนี้

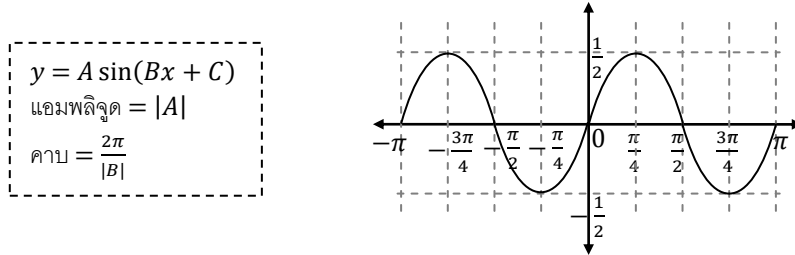
- ก) แอมพลิจูดของ  $f$  เท่ากับ 0.5  
 ข)  $f\left(\frac{2\pi}{7}\right) < f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$   
 ค) ถ้า  $n$  เป็นจำนวนเต็ม แล้ว  $f(x + n\pi) = f(x)$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

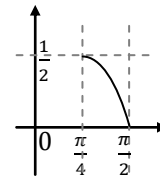
1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น      2. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น  
 3. ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น      4. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น  
 5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

ตอบ 3

ก)  $f(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$  จะมีกราฟเป็นกราฟ  $\sin$  ที่มีแอมพลิจูด =  $\frac{1}{2}$  (ก. ถูก) และมีคาบ =  $\frac{2\pi}{2} = \pi$  ดังรูป



- ข) เนื่องจาก  $\frac{\pi}{4} < \frac{2\pi}{7} < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$  ดังนั้น  $f$  จะเป็นกราฟในช่วงดังรูป  
 จะเห็นว่า  $f$  เป็นช่วงขาลง  $\rightarrow x$  มากขึ้น จะได้  $f(x)$  น้อยลง  
 เนื่องจาก  $\frac{2\pi}{7} < \frac{2\pi}{5}$  ดังนั้น  $f\left(\frac{2\pi}{7}\right) > f\left(\frac{2\pi}{5}\right) \rightarrow$  ข. ผิด



- ค) เนื่องจากคาบ =  $\pi$  แสดงว่าเมื่อ  $x$  เพิ่มขึ้นทีละ  $\pi$  จะได้  $f(x)$  วนกลับไปมีค่าเท่าเดิม  
 นั่นคือ  $f(x) = f(x + \pi) = f(x + 2\pi) = f(x + 3\pi) = \dots \rightarrow$  ค. ถูก

8. ให้  $U$  เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ  $A, B, C$  เป็นสับเซตของ  $U$

ถ้า  $A \cap B = B \cap C = A \cap C = A \cap B \cap C$

$n(A) = n(B) = n(C) = 10, n(U) = 30$

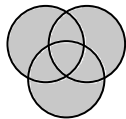
และ  $n((A \cup B \cup C)') = 6$

แล้ว  $n((A \cup B) \cap C')$  เท่ากับเท่าใด

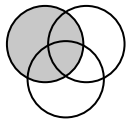
1. 14                      2. 16                      3. 17                      4. 20                      5. 23

**ตอบ 1**

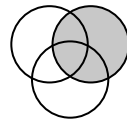
จาก  $n(U) = 30$  และ  $n((A \cup B \cup C)') = 6$  จะได้  $n(A \cup B \cup C) = 30 - 6 = 24$



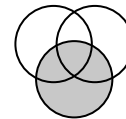
$n(A \cup B \cup C) = 24 \dots(1)$



$n(A) = 10 \dots(2)$



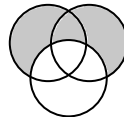
$n(B) = 10 \dots(3)$



$n(C) = 10 \dots(4)$

โจทย์ถาม  $n((A \cup B) \cap C')$

$= n((A \cup B) - C)$  ซึ่งหมายถึงส่วนพื้นที่ดังรูป



จะเห็นว่าส่วนส่วนที่โจทย์ถาม หาได้จากการหักแผนภาพ (1) ด้วยแผนภาพ (4)

$= 24 - 10 = 14$

9. ถ้า  $x^2 - 4x + 5$  เป็นตัวประกอบของ  $x^3 + ax^2 + bx + 30$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าใด

1. -29                      2. -18                      3. -17                      4. 1                      5. 19

**ตอบ 3**

เป็นตัวประกอบ แสดงว่า  $x^3 + ax^2 + bx + 30 = (x^2 - 4x + 5) \cdot P(x)$  เมื่อ  $P(x)$  เป็นพหุนาม

$\begin{matrix} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{พิจารณาพจน์กำลังสูงสุดของทั้งสองฝั่ง} & & \text{จะได้พจน์กำลังสูงสุดของ } P(x) \text{ คือ } \frac{x^3}{x^2} = x \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{พิจารณาพจน์ค่าคงที่ (ที่ไม่มี } x) \text{ ของทั้งสองฝั่ง} & & \text{จะได้พจน์ค่าคงที่ของ } P(x) \text{ คือ } \frac{30}{5} = 6 \end{matrix}$

ดังนั้น  $P(x) = x + 6$

จะได้  $x^3 + ax^2 + bx + 30 = (x^2 - 4x + 5) \cdot (x + 6)$   
 $= x^3 + 6x^2 - 4x^2 - 24x + 5x + 30$   
 $= x^3 + 2x^2 - 19x + 30$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้  $a = 2$  และ  $b = -19$  ดังนั้น  $a + b = 2 + (-19) = -17$

10. ถ้าจำนวนเชิงซ้อน  $3 - i$  เป็นคำตอบหนึ่งของสมการ  $x^2 + ax + b = 0$  โดยที่  $a$  และ  $b$  เป็นจำนวนจริง

แล้ว  $a + b$  เท่ากับเท่าใด

1. 2                      2. 4                      3. 7                      4. 8                      5. 10

**ตอบ 2**

ในสมการพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง ถ้า  $z$  เป็นคำตอบแล้วสังยุคของ  $z$  ก็จะเป็นคำตอบด้วย

เนื่องจาก  $3 - i$  เป็นคำตอบ ดังนั้น  $3 + i$  จะเป็นคำตอบด้วย

จากสูตรผลบวกผลคูณคำตอบ จะได้ ผลบวกคำตอบ =  $-a$  และ ผลคูณคำตอบ =  $b$

$$\begin{aligned} (3 - i) + (3 + i) &= -a & (3 - i)(3 + i) &= b \\ 6 &= -a & 3^2 - i^2 &= b \\ -6 &= a & 10 &= b \end{aligned}$$

$$\text{ดังนั้น } a + b = (-6) + 10 = 4$$

11. ให้  $z_1, z_2, z_3, z_4$  เป็นรากที่ 4 ที่แตกต่างกันของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง

โดยที่  $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$ ,  $\text{Re}(z_2) > 0$  และ  $\text{Im}(z_3) > 0$

$(z_4)^3$  เท่ากับเท่าใด

1.  $4\sqrt{3} + 4i$
2.  $4 + 4\sqrt{3}i$
3.  $4 - 4\sqrt{3}i$
4.  $-4\sqrt{3} - 4i$
5.  $-4 - 4\sqrt{3}i$

ตอบ 5

แปลงมุมเป็นหน่วยองศา จะได้  $\frac{\pi}{9} = \frac{180^\circ}{9} = 20^\circ$  ดังนั้น  $z_1 = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$

รากที่เหลือ จะได้จาก การเพิ่มมุมของ  $z_1$  ไปทีละ  $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$

ดังนั้น รากทั้งสี่ตัว คือ  $z_1 = 2(\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ)$   
 $z_2 = 2(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$   
 $z_3 = 2(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ)$   
 $z_4 = 2(\cos 290^\circ + i\sin 290^\circ)$  } เพิ่มมุมทีละ  $90^\circ$

จาก  $\text{Re}(z_2) > 0 \rightarrow \cos$  เป็นบวกใน  $Q_1$  หรือ  $Q_4$  เท่านั้น (จะมี  $20^\circ$  กับ  $290^\circ$ )

$\rightarrow$  แต่  $20^\circ$  เป็น  $z_1$  ไปแล้ว ดังนั้น  $z_2 = 2(\cos 290^\circ + i\sin 290^\circ)$

จาก  $\text{Im}(z_3) > 0 \rightarrow \sin$  เป็นบวกใน  $Q_1$  หรือ  $Q_2$  เท่านั้น (จะมี  $20^\circ$  กับ  $110^\circ$ )

$\rightarrow$  แต่  $20^\circ$  เป็น  $z_1$  ไปแล้ว ดังนั้น  $z_3 = 2(\cos 110^\circ + i\sin 110^\circ)$

จะเหลือ  $z_4 = 2(\cos 200^\circ + i\sin 200^\circ)$

จะได้  $(z_4)^3 = 2^3(\cos(3 \times 200^\circ) + i\sin(3 \times 200^\circ))$

$$= 8\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -4 - 4\sqrt{3}i$$

12. คำตอบของสมการ  $1 + \frac{5^x}{1+5^x} + \frac{5^{2x}}{(1+5^x)^2} + \frac{5^{3x}}{(1+5^x)^3} + \dots = \frac{26}{25}$  เท่ากับเท่าใด

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1
5. 2

ตอบ 1

$$\begin{array}{ccc} \times \frac{5^x}{1+5^x} & \times \frac{5^x}{1+5^x} & \times \frac{5^x}{1+5^x} \\ \curvearrowright & \curvearrowright & \curvearrowright \end{array}$$

จะเห็นว่า  $1 + \frac{5^x}{1+5^x} + \frac{5^{2x}}{(1+5^x)^2} + \frac{5^{3x}}{(1+5^x)^3} + \dots$  เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ที่มี  $r = \frac{5^x}{1+5^x}$

$5^x$  เป็นบวกเสมอ ดังนั้น  $\frac{5^x}{1+5^x}$  จะเป็นค่าบวกที่น้อยกว่าส่วน ดังนั้น  $\frac{5^x}{1+5^x} < 1$  จึงใช้สูตร  $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$  ได้



$$S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \left( 1 + \frac{5^x}{1+5^x} + \frac{5^{2x}}{(1+5^x)^2} + \frac{5^{3x}}{(1+5^x)^3} + \dots \right) = \frac{26}{25}$$

คูณไขว้  $\left( 1 - \frac{5^x}{1+5^x} \right)$

$$= \frac{26}{25} \left( 1 - \frac{5^x}{1+5^x} \right)$$

$$= 26 - \frac{26 \cdot 5^x}{1+5^x}$$

$$= 1$$

$26 \cdot 5^x = 1 + 5^x$   
 $25 \cdot 5^x = 1$   
 $5^{2+x} = 1$   
 $2+x = 0$   
 $x = -2$

13. ถ้า  $(a, b)$  เป็นจุดบนเส้นตรง  $3x - y + 4 = 0$  และ  $(a, b)$  อยู่ใกล้กับจุด  $(-2, 3)$  ที่สุดแล้ว  $a$  เท่ากับเท่าใด

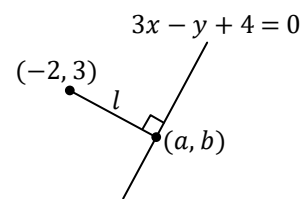
1.  $-1$       2.  $-\frac{1}{2}$       3.  $-\frac{1}{3}$       4.  $-\frac{1}{8}$       5.  $0$

ตอบ 2

จุดที่บนเส้นตรง ที่อยู่ใกล้กับอีกจุดที่สุด คือจุดที่ทำให้เกิดเส้นตั้งฉาก ดังรูป  
ตั้งฉากกัน ความชันจะคูณกันได้  $-1$

- ความชันของ  $l = \frac{b-3}{a-(-2)} = \frac{b-3}{a+2}$
- ความชันของ  $3x - y + 4 = 0$  คือ 3  
 $3x + 4 = y$   
 $\downarrow$   
 $m = 3$

ความชัน =  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



จะได้ผลคูณความชัน  $\frac{b-3}{a+2} \times 3 = -1$

$$3b - 9 = -a - 2$$

$$a + 3b = 7 \quad \dots(1)$$

และเนื่องจาก  $(a, b)$  อยู่บน  $3x - y + 4 = 0$

จะได้  $3a - b + 4 = 0$

$$3a - b = -4 \quad \dots(2)$$

$$(1) + 3 \times (2): a + 3b + 3(3a - b) = 7 + 3(-4)$$

$$10a = -5$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

14. กำหนดไฮเพอร์โบลา  $16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 103 = 0$

ให้  $F$  เป็นโฟกัสที่อยู่ในจุดภาคที่ 2 และให้  $C$  เป็นจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลานี้

สมการของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด  $C$  และโฟกัสอยู่ที่จุด  $F$  คือข้อใด

1.  $(x + 4)^2 = -12(y - 1)$
2.  $(x + 4)^2 = -20(y - 1)$
3.  $(y - 1)^2 = -12(x + 4)$
4.  $(y - 1)^2 = -16(x + 4)$
5.  $(y - 1)^2 = -20(x + 4)$

ตอบ 5

$$16x^2 - 9y^2 + 128x + 18y + 103 = 0$$

$$(16x^2 + 128x) + (-9y^2 + 18y) = -103$$

$$16(x^2 + 8x) - 9(y^2 - 2y) = -103$$

$$16(x^2 + 8x + 16) - 9(y^2 - 2y + 1) = -103 + 16(16) - 9(1)$$

$$16(x + 4)^2 - 9(y - 1)^2 = 144$$

$$\frac{(x+4)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

เป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน ที่มีจุดศูนย์กลาง  $C(-4, 1)$  และระยะโฟกัส  $c = \sqrt{9 + 16} = 5$   
 ดังนั้น จุดโฟกัสคือ  $(-4 \pm 5, 1) = (1, 1)$  และ  $(-9, 1) \rightarrow$  โฟกัสใน  $Q_2$  คือ  $F(-9, 1)$

นั่นคือ โจทย์ถามพาราโบลาที่มีจุดยอด  $(h, k) = (-4, 1)$  และ โฟกัส  $(-9, 1)$

จุดยอดกับโฟกัสมีพิกัด  $Y$  เท่ากัน และโฟกัสมีพิกัด  $X$  น้อยกว่า  $\rightarrow$  เป็นพาราโบลาเปิดซ้าย  $c = -4 - (-9) = 5$

แทนในรูปสมการพาราโบลาเปิดซ้าย

$$(y - k)^2 = -4c(x - h)$$

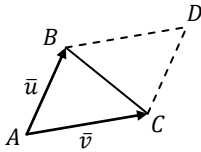
$$(y - 1)^2 = -4(5)(x - (-4))$$

$$(y - 1)^2 = -20(x + 4)$$

15. กำหนดรูปสามเหลี่ยม  $ABC$  ในระบบพิกัดฉากสามมิติ มีจุดยอดที่  $A(-2, -4, -4)$ ,  $B(0, -2, 0)$  และ  $C(0, 0, 2)$  รูปสามเหลี่ยม  $ABC$  มีพื้นที่ที่ตารางหน่วย

1. 1                      2.  $\sqrt{3}$                       3. 2                      4.  $2\sqrt{3}$                       5.  $4\sqrt{3}$

ตอบ 4



$\Delta ABC$  จะเป็นครึ่งหนึ่งของพื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก  $\overline{AB}$  และ  $\overline{AC}$

$$\overline{AB} = \begin{bmatrix} 0 - (-2) \\ -2 - (-4) \\ 0 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \overline{AC} = \begin{bmatrix} 0 - (-2) \\ 0 - (-4) \\ 2 - (-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

พื้นที่  $\square$  ด้านขนานที่เกิด  
จาก  $\vec{u}$  และ  $\vec{v} = |\vec{u} \times \vec{v}|$

$$\text{จะได้ } \square ABDC = \left| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} (2)(6) - (4)(4) \\ (4)(2) - (2)(6) \\ (2)(4) - (2)(2) \end{bmatrix} \right| = \left| \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + 4^2}$$

$$= 4\sqrt{1 + 1 + 1} = 4\sqrt{3}$$

ดังนั้น  $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

16. ให้เมทริกซ์  $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 3c_1 & 3c_2 & 3c_3 \end{bmatrix}$  และ  $C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix}$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก)  $\det(B) = 3 \det(A)$   
 ข)  $\det(AC) = 0$   
 ค)  $\det(A + C) = \det(A) + \det(C)$

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น                      2. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น  
 3. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น                      4. ข้อความ ข) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น  
 5. ข้อความ ก) ข) และ ค) ถูกต้อง

ตอบ 1

ก)  $B$  ได้จากการสลับแถว 1 กับ 2 และคูณ 3 เข้าไปที่แถว 3

การสลับแถว จะทำให้  $\det$  เป็นลบของของเดิม      การคูณ 3 ที่แถวหนึ่งๆ จะทำให้  $\det$  เป็น 3 เท่าของของเดิม  
 ดังนั้น  $\det(B) = -3 \det(A) \rightarrow$  ก) ผิด

ข)  $C$  มีแถว 2 เป็น 0 ทั้งแถว ซึ่งจะทำให้  $\det(C) = 0$

จากสมบัติของ  $\det$  จะได้ว่า  $\det(AC) = \det(A) \cdot \det(C)$

$$= \det(A) \cdot 0 = 0 \rightarrow$$
 ข) ถูก

ค) โดยทั่วไป  $\det$  กระจายในการบวกไม่ได้ แต่ในกรณีพิเศษบางกรณี อาจบังเอิญเท่ากันได้

$$A + C = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3b_1 & 3b_2 & 3b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 & 2a_2 & 2a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 + 3b_1 & c_2 + 3b_2 & c_3 + 3b_3 \end{bmatrix}$$

จะเห็นว่า  $A + C$  เหมือนกับเมทริกซ์ที่ได้จากการนำ  $A$  มาคูณ 2 เข้าไปที่แถว 1 (det เป็น 2 เท่าของของเดิม) และ นำแถวที่ 2 คูณ 3 แล้วบวกเพิ่มเข้าไปในแถว 3 (det เท่าเดิม)

ดังนั้น  $\det(A + C) = 2 \det(A)$

แต่  $\det(A) + \det(C) = \det(A) + 0 = \det(A)$  จึงไม่เท่ากับ  $\det(A + C) \rightarrow$  ค) ผิด

17. ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งมีข้อมูลทั้งหมด 21 ตัว และข้อมูลชุดนี้มีฐานนิยม 1 ค่าเท่านั้น พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก) ถ้าตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก 1 ตัว และเพิ่มข้อมูลที่มีค่าเท่ากับฐานนิยมแทนที่ข้อมูลที่ตัดออก แล้วข้อมูลที่ได้จะมีฐานนิยมเท่าเดิม
- ข) ถ้าตัดข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก 1 ตัว แล้วข้อมูลที่ได้จะมีมัธยฐานมากขึ้น
- ค) ถ้าเพิ่มข้อมูลอีก 2 ตัว ที่มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเลขคณิต แล้วข้อมูลที่ได้จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากขึ้น

จากข้อความ ก) ข) และ ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
4. ข้อความ ก) และ ข) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ ก) และ ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอบ 1

- ก) ฐานนิยม คือข้อมูลที่ "ซ้ำมากที่สุด" ดังนั้น การนำข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุดออก ส่วนใหญ่จะไม่มีผลกับฐานนิยม ยกเว้นกรณีที่ข้อมูลที่ซ้ำมากที่สุด จะเป็นข้อมูลที่มีค่าน้อยที่สุด

แต่การเพิ่มข้อมูลที่มีค่าเท่ากับฐานนิยมเข้ามา จะสามารถชดเชยความสูญเสียไปได้

ทำให้ฐานนิยมเดิม ยังคงซ้ำมากที่สุด และได้เป็นฐานนิยมเหมือนเดิม  $\rightarrow$  ก) ถูก

- ข) มัธยฐาน คือข้อมูลที่มีตำแหน่งอยู่ตรงกลาง เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก

การตัดข้อมูลน้อยสุดออก จะทำให้ "ตำแหน่งตรงกลาง" เลื่อนเล็กน้อย ซึ่งอาจทำให้มัธยฐานเพิ่มขึ้นได้

แต่ถ้าข้อมูลรอบๆ ตัวตรงกลาง บังเอิญมีค่าเท่ากัน ถึงตำแหน่งเปลี่ยน ก็มีสิทธิ์เปลี่ยนไปโดนข้อมูลที่มีค่าเท่าเดิมได้

มัธยฐานจึงอาจมีค่าเท่าเดิม ไม่จำเป็นต้องมากขึ้นเสมอไป  $\rightarrow$  ข) ผิด

- ค) ให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเดิมของ 21 ตัวแรกคือ  $\bar{x}$  ดังนั้น ผลรวมของ 21 ตัวแรกคือ  $21\bar{x}$

ถ้าเพิ่มข้อมูล 2 ตัวที่มีค่าเท่ากับ  $\bar{x}$  จะได้ผลรวมข้อมูลเพิ่มขึ้นเป็น  $21\bar{x} + \bar{x} + \bar{x} = 23\bar{x}$

และจะได้จำนวนข้อมูลเพิ่มขึ้นเป็น  $21 + 2 = 23$  ตัว

จะได้ค่าเฉลี่ยใหม่ =  $\frac{\text{ผลรวมข้อมูลใหม่}}{\text{จำนวนตัวใหม่}} = \frac{23\bar{x}}{23} = \bar{x}$  เท่าเดิม ไม่ได้เพิ่มขึ้น  $\rightarrow$  ค) ผิด



เก้าอี้ที่มีคนที่ 1 นั่ง จะเลือกเสียบได้ 7 ตำแหน่ง ดังรูป

เก้าอี้ที่มีคนที่ 2 นั่ง จะเสียบลงที่เดียวกับคนแรกไม่ได้ (ห้ามนั่งติดกัน)

ดังนั้น จะเหลือจุดที่เลือกเสียบได้ 6 ตำแหน่ง

ทำนองเดียวกัน เก้าอี้ที่มีคนที่ 3, 4 และ 5 นั่ง จะเลือกเสียบได้ 5, 4, และ 3 แบบ ตามลำดับ

$$\text{จะได้จำนวนแบบ} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{7!}{2!}$$

21. ชู้มเกมจับสลากในงานกาชาดมีกล่องใบหนึ่งบรรจุสลาก 9 ใบ โดยมีหมายเลข 1, 2, 3, ..., 9 กำกับไว้ใบละหนึ่งหมายเลขไม่ซ้ำกัน ในการเล่นเกมแต่ละครั้ง ผู้เล่นต้องจ่ายเงิน 90 บาท ก่อน เพื่อจับสลากพร้อมกันสองใบ ถ้าผลคูณของหมายเลขสลากที่ได้เป็นจำนวนคู่ ผู้เล่นจะได้เงินรางวัล 180 บาท ถ้าผลคูณของหมายเลขสลากที่ได้เป็นจำนวนคี่ ผู้เล่นจะไม่ได้รับเงินรางวัลใดๆ ในการเล่นเกมแต่ละครั้ง ข้อสรุปใดถูกต้อง

- |  |  |
|--|--|
| 1. โดยเฉลี่ยแล้ว เท่าทุน               | 2. โดยเฉลี่ยแล้ว ได้กำไรครั้งละ 40 บาท |
| 3. โดยเฉลี่ยแล้ว ได้กำไรครั้งละ 90 บาท | 4. โดยเฉลี่ยแล้ว ขาดทุนครั้งละ 40 บาท  |
| 5. โดยเฉลี่ยแล้ว ขาดทุนครั้งละ 90 บาท  |  |

ตอบ 2

จะหาค่าคาดหวังของเงินรางวัล มาเทียบกับเงินที่ต้องจ่าย

$$\begin{aligned} \text{จากเงินไขรางวัล จะได้ค่าคาดหวังของรางวัล} &= 180 \times P(\text{ผลคูณเป็นคู่}) + 0 \times P(\text{ผลคูณเป็นคี่}) \\ &= 180 \times P(\text{ผลคูณเป็นคู่}) \end{aligned} \quad \dots(*)$$

$$\text{หยิบ 2 ใบจาก 9 ใบ จะหยิบได้ทั้งหมด} \binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \text{ แบบ}$$

ผลคูณจะเป็นคู่ เมื่อมีอย่างน้อย 1 ใบ เป็นเลขคู่ ซึ่งนับยาก  $\rightarrow$  แบบตรงข้าม คือ มีแต่เลขคี่ จะนับง่ายกว่า

$$\text{นับแบบตรงข้าม} \rightarrow \text{มีเลขคี่ } 1, 3, 5, 7, 9 \text{ ทั้งหมด 5 ใบ หยิบ 2 ใบ จะหยิบได้} \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10 \text{ แบบ}$$

$$\text{ดังนั้น จำนวนแบบที่ผลคูณเป็นเลขคู่} = 36 - 10 = 26 \text{ แบบ} \rightarrow \text{จะได้ } P(\text{ผลคูณเป็นคู่}) = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$$

$$\text{แทนใน (*) จะได้ ค่าคาดหวังของรางวัล} = 180 \times \frac{13}{18} = 130 \text{ บาท}$$

$$\text{ดังนั้น โดยเฉลี่ยแล้ว จะได้รางวัลมากกว่าค่าเล่น (กำไร) ครั้งละ } 130 - 90 = 40 \text{ บาท}$$

22. ให้ฟังก์ชัน  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  โดยที่  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$  เมื่อ  $a, b$  และ  $c$  เป็นจำนวนจริง

ถ้า  $f(0) = 3$  และ  $f$  มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  และค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$  แล้ว  $f(1)$  เท่ากับเท่าใด

1. -1                      2. 1                      3. 3                      4. 5                      5. 7

ตอบ 4

$f$  เป็นพหุนามกำลัง 3 ที่มีค่าสูงสุด ต่ำสุด สัมพัทธ์ที่  $x = 1, -1$

$$\begin{aligned} \text{แสดงว่า } f'(x) \text{ ต้องอยู่ในรูป } d(x-1)(x+1) \text{ เมื่อ } d \text{ เป็นจำนวนจริง} \dots(*) \\ &= d(x^2 - 1) \\ &= dx^2 - d \end{aligned}$$

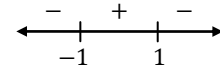
$$\text{อินทิเกรต } f'(x) \text{ จะได้ } f(x) = \frac{dx^3}{3} - dx + e \text{ เมื่อ } e \text{ เป็นจำนวนจริง} \dots(**)$$

$$\begin{aligned} \text{แทน } x = 0: \quad f(0) &= \frac{d(0^3)}{3} - d(0) + e \\ 3 &= \quad \quad \quad e \end{aligned}$$

และโจทย์กำหนดให้  $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$

เทียบสัมประสิทธิ์ของพจน์  $x^3$  กับ  $f(x)$  ใน (\*\*\*) จะได้  $\frac{d}{3} = -1$   
 $d = -3$

จะเห็นว่า  $d$  เป็นลบ ทำให้เครื่องหมายของ  $f'(x)$  ใน (\*) เป็นดังรูป

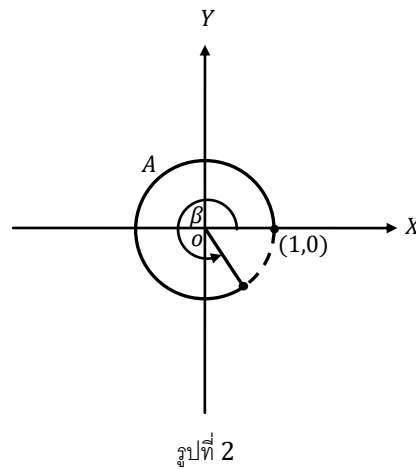
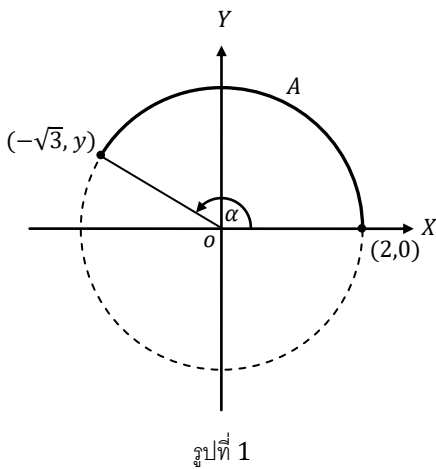


จะได้ สูงสุดสัมพัทธ์ที่  $x = -1$  และ ต่ำสุดสัมพัทธ์ที่  $x = 1$  ตรงตามที่โจทย์กำหนด

แทน  $x = 1, e = 3$  และ  $d = -3$  ใน (\*\*\*) จะได้  $f(1) = \frac{-3(1^3)}{3} - (-3)(1) + 3 = 5$

23. ให้  $A$  แทนความยาวของส่วนโค้งของวงกลมที่วัดจากจุด  $(2, 0)$  ไปยังจุด  $(-\sqrt{3}, y)$  โดยที่  $y > 0$   
 และมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมมีขนาด  $\alpha$  เรเดียน ดังรูปที่ 1

ให้มุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วย ที่รองรับด้วยส่วนโค้งที่ยาว  $A$  หน่วย มีขนาด  $\beta$  เรเดียน ดังรูปที่ 2



$\cos \alpha + \sin \beta$  เท่ากับเท่าใด

1.  $-\sqrt{3}$
2.  $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
3.  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 1
5.  $\sqrt{3}$

ตอบ 1

ระยะจาก  $(0, 0)$  ไป  $(-\sqrt{3}, y)$  จะเท่ากับรัศมีวงกลม  $\rightarrow \sqrt{(-\sqrt{3}-0)^2 + (y-0)^2} = 2$   
 $3 + y^2 = 4$   
 $y = 1$  (โจทย์ให้  $y > 0$ )

จากนิยาม ฟังก์ชันตรีโกณฯ จะหาได้ตรงๆ บนวงกลม 1 หน่วย

ดังนั้น จะอยู่รูปที่ 1 ลงครึ่งหนึ่ง รอบจุดกำเนิดก่อน

ซึ่งจะทำให้พิกัดและระยะต่างๆ ลดลงครึ่งหนึ่ง แต่มุม  $\alpha$  ยังเท่าเดิม ดังรูป

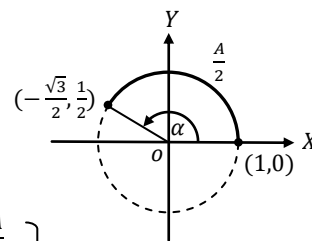
จากนิยาม จะได้  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$  และ  $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  ...(\*)

และจากนิยามการวัดมุมในหน่วยเรเดียน ในรูปที่ย่อแล้ว จะสรุปได้ว่า  $\alpha = \frac{A}{2}$

และเมื่อพิจารณารูปที่ 2 จะได้ว่า  $\beta = A$  } เมื่อใช้  $A$  เป็นตัวเชื่อม จะได้  $\beta = 2\alpha$

จะได้  $\sin \beta = \sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  จาก (\*)  
 $= 2 \left(\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น  $\cos \alpha + \sin \beta = -\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$



24. ให้  $a_n$  เป็นลำดับซึ่ง  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 3$  และ  $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$  เมื่อ  $n \in \{2, 3, 4, \dots\}$

ค่าของ  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$  เท่ากับเท่าใด

1. หาผลบวกไม่ได้ เพราะอนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่ออก
2.  $\frac{3}{4}$
3. 1
4.  $\frac{4}{3}$
5. 2

ตอบ 4

จะเขียน  $\frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$  ให้เป็นผลลบ โดยหวังว่าจะตัดข้ามพจน์ได้

$$\begin{aligned} \text{จาก } a_{n+1} &= a_n + a_{n-1} & \text{จะได้ } \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} &= \frac{a_{n+1} - a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \\ a_{n+1} - a_{n-1} &= a_n & &= \frac{a_{n+1}}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} \\ & & &= \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \sum_{n=2}^k \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} &= \sum_{n=2}^k \left( \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_{n+1}} \right) \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_4} - \frac{1}{a_6} + \frac{1}{a_5} - \frac{1}{a_7} + \dots + \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_{k+1}} \end{aligned}$$

จะเห็นว่าตัวเลขหักกับตัวตั้งของ 2 พจน์ถัดไปได้  $\rightarrow$  สุดท้ายจะเหลือตัวตั้ง 2 ตัวแรก กับตัวเลข 2 ตัวสุดท้าย  
 $\rightarrow$  เมื่อ  $k$  เข้าใกล้  $\infty$  จะได้ 2 ตัวสุดท้าย เข้าใกล้ 0 จึงตัดทิ้งได้

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{a_{n-1} \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

25. ให้  $f$  เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตของจำนวนจริง ซึ่ง  $f(0) = 10$ ,  $f(3) = 9$

$$\text{และ } f'(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{เมื่อ } x < 1 \\ x^2 + a & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases} \text{ โดยที่ } a \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

$a$  เท่ากับเท่าใด

1. 4
2. 2
3. 0
4. -2
5. -4

ตอบ 5

$$\text{อินทิเกรต } f'(x) \text{ ทั้งสองเงื่อนไข จะได้ } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + c_1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \frac{x^3}{3} + ax + c_2 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

(เนื่องจากแต่ละเงื่อนไขของ  $f(x)$  เป็นคนละสูตร ดังนั้น  $c_1$  กับ  $c_2$  จึงไม่จำเป็นต้องเท่ากัน)

แทน  $x = 0$ : ( $0 < 1 \rightarrow$  ใช้สูตรบน)

แทน  $x = 3$ : ( $3 \geq 1 \rightarrow$  ใช้สูตรล่าง)

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(0) &= \frac{0^3}{3} + \frac{a(0^2)}{2} + c_1 \\ 10 &= c_1 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } f(3) &= \frac{3^3}{3} + 3a + c_2 \\ 9 &= 9 + 3a + c_2 \\ -3a &= c_2 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$\text{แทน (1) และ (2) กลับไปใน } f(x) \text{ จะได้ } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} + 10 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ \frac{x^3}{3} + ax - 3a & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

และโจทย์ให้  $f$  ต่อเนื่อง ดังนั้นทั้งสองสูตร ต้องได้ค่าเท่ากันตรงรอยต่อระหว่างสูตร (ที่  $x = 1$ )

$$\begin{aligned} \frac{1^3}{3} + \frac{a(1^2)}{2} + 10 &= \frac{1^3}{3} + a(1) - 3a \\ \frac{1}{3} + \frac{a}{2} + 10 &= \frac{1}{3} + a - 3a \\ \frac{5a}{2} &= -10 \\ a &= -4 \end{aligned}$$

26. ให้  $L$  เป็นเส้นตรงซึ่งมีความชันเท่ากับ  $-2$  และสัมผัสพาราโบลา  $y = 17 - x^2$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน  $X$  แกน  $Y$  และเส้นตรง  $L$  เท่ากับกี่ตารางหน่วย

ตอบ 81

จุดที่  $L$  สัมผัสพาราโบลา จะเป็นจุดที่พาราโบลามีความชันเท่ากับ  $L$  ( $= -2$ )

ความชันของพาราโบลา จะหาได้จากการดิฟสมการพาราโบลา  $y = 17 - x^2$

$$\begin{aligned} y' &= -2x \\ -2 &= -2x && \left. \begin{array}{l} \text{หาจุดที่ความชัน} = -2 \\ \text{โดยแทน } y' = -2 \end{array} \right\} \\ 1 &= x \end{aligned}$$

ซึ่งบนพาราโบลา  $y = 17 - x^2$  เมื่อ  $x = 1$  จะได้  $y = 17 - 1^2 = 16$

ดังนั้น จุดที่  $L$  สัมผัสพาราโบลา คือ  $(1, 16)$

จากสูตร สมการเส้นตรงที่มีความชัน  $-2$  และผ่านจุด  $(1, 16)$  คือ  $\frac{y-16}{x-1} = -2$

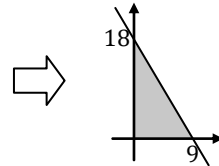
$$\begin{aligned} y - 16 &= -2x + 2 \\ y &= -2x + 18 \end{aligned}$$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยแกน  $X$  แกน  $Y$  และเส้นตรง  $L$  จะเป็น  $\Delta$  มุมฉากที่มีจุดมุมอยู่ที่จุดกำเนิดและจุดตัดแกน  $X$  แกน  $Y$

จุดตัดแกน  $X$  : แทน  $y = 0$                       จุดตัดแกน  $Y$  : แทน  $x = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= -2x + 18 && y = -2(0) + 18 \\ x &= 9 && y = 18 \end{aligned}$$

จะได้จุดตัดแกน  $X$  คือ  $(9, 0)$                       จะได้จุดตัดแกน  $Y$  คือ  $(0, 18)$



$$\begin{aligned} \text{จะได้พื้นที่} &= \frac{1}{2} \times \text{ฐาน} \times \text{สูง} \\ &= \frac{1}{2} \times 9 \times 18 = 81 \end{aligned}$$

27. ให้  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  และ  $f$  เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก  $A$  ไปทั่วถึง  $A$

โดยกำหนดค่าของฟังก์ชันเพียงบางค่า ดังตารางต่อไปนี้

$x$	$f(x)$	$f^{-1}(x)$
-1	1	2
0	2	1
1	0	$a$

$50 + 5a + f(-2)$  เท่ากับเท่าใด

ตอบ 43

จากคอลัมน์  $x$  และ  $f^{-1}(x)$  จะได้  $f^{-1}(-1) = 2$  ,  $f^{-1}(0) = 1$  ,  $f^{-1}(1) = a$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น} \quad -1 &= f(2) , & 0 &= f(1) , & 1 &= f(a) \\ f(2) &= -1 , & f(1) &= 0 , & f(a) &= 1 \end{aligned}$$



จาก  $f(2) = -1$  จะเพิ่มแถว  $x = 2$  ในตาราง  $f(x)$  ได้ดังรูป  
 จาก  $f(1) = 0$  มีแถว  $x = 1$  ในตารางอยู่แล้ว จึงไม่ได้ใช้ประโยชน์อะไร  
 จาก  $f(a) = 1$  จะเห็นว่าในตารางมีแถว  $f(-1) = 1$  อยู่  
 เนื่องจาก  $f$  เป็นหนึ่งต่อหนึ่ง จึงสรุปได้ว่า  $a = -1$

$x$	$f(x)$
-1	1
0	2
1	0
2	-1

สุดท้าย สังเกตว่ามีค่าที่ยังไม่ถูกจับคู่อยู่ คือ  $x = -2$  และ  $f(x) = -2$   
 เนื่องจาก  $f$  เป็นฟังก์ชันจาก  $A$  ไปทั่วถึง  $A$  ดังนั้น ค่าที่ยังไม่ถูกจับคู่ จะต้องถูกจับคู่  $\rightarrow$  จะได้  $f(-2) = -2$   
 ดังนั้น  $50 + 5a + f(-2) = 50 + 5(-1) + -2 = 43$

28. ให้  $p, q$  และ  $r$  เป็นประพจน์ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก) ถ้า $p \leftrightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $[(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \vee \sim q)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง	(15)
ข) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$ สมมูลกับ $(p \wedge q) \rightarrow r$	(30)

จากข้อความ ก) และ ข) ข้างต้น

ผลบวกของจำนวนที่อยู่ในวงเล็บทางขวามือของทุกข้อความที่ถูกต้องเท่ากับเท่าใด  
 (หากข้อความทั้งสองไม่ถูกต้อง ให้ถือว่าผลบวกเท่ากับ 0)

ตอบ 15

ก)  $p \leftrightarrow q$  เป็นจริง แสดงว่า  $p$  กับ  $q$  มีค่าความจริงเหมือนกัน ดังนั้น แทน  $q$  ทุกตัวด้วย  $p$  ได้

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } & [(p \leftrightarrow q) \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \vee \sim q)] \\ & \equiv [(p \leftrightarrow p) \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow (p \vee \sim p)] \\ & \equiv [T \vee (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [r \rightarrow T] \\ & \equiv T \leftrightarrow T \equiv T \quad \text{ดังนั้น ก) ถูก} \end{aligned}$$

ข)  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv? (p \wedge q) \rightarrow r$   
 $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r) \equiv? \sim(p \wedge q) \vee r$   
 $(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee r) \equiv? \sim p \vee \sim q \vee r$

จะเห็นว่าจัดรูปให้เหมือนกันไม่ได้ง่าย ๆ จึงน่าจะ~~จะ~~ไม่สมมูลกัน จะพยายามหา  $p, q, r$  ที่ทำให้สองฝั่งไม่เหมือนกันดู  
 ฝั่งซ้าย คือการ “และ” กันของ  $\sim p \vee q$  กับ  $\sim q \vee r$  ซึ่ง “และ” จะเป็นเท็จง่าย ขอแค่มีตัวหนึ่งเป็นเท็จ  
 ฝั่งขวา คือการ “หรือ” กันของ  $\sim p, \sim q$  กับ  $r$  ซึ่ง “หรือ” จะเป็นจริงง่าย ขอแค่มีตัวหนึ่งเป็นจริง  
 จะเห็นว่า ถ้า  $\sim p \vee q$  เป็นเท็จ (คือ  $p \equiv T, q \equiv F$ ) ฝั่งซ้ายจะเป็นเท็จ } ไม่เหมือนกัน  
 และถ้าให้  $r \equiv T$  ฝั่งขวาจะเป็นจริง

ดังนั้น  $p \equiv T, q \equiv F, r \equiv T$  จะเป็นตัวอย่างหนึ่งที่ทำให้  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$  ไม่เหมือนกับ  $(p \wedge q) \rightarrow r$

จึงสรุปได้ว่า  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$  ไม่สมมูลกับ  $(p \wedge q) \rightarrow r$  ดังนั้น ข) ผิด

จะได้ผลบวกจำนวนหลังข้อความที่ถูกต้อง (ก ถูกข้อความเดียว) = 15

29. นักเรียนห้องหนึ่งมีจำนวน 50 คน ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ มีนักเรียนเข้าสอบทั้งหมด 49 คน ขาดสอบ 1 คน โดยส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของนักเรียน 49 คน เท่ากับ 10 คะแนน ต่อมา นักเรียนที่ขาดสอบได้ขอสอบในภายหลัง เมื่อนำคะแนนของนักเรียนที่ขาดสอบมาคำนวณค่าเฉลี่ยเลขคณิตด้วย พบว่า ค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่มีการเปลี่ยนแปลง ความแปรปรวนของคะแนนสอบของนักเรียนทั้ง 50 คน เท่ากับกี่คะแนน<sup>2</sup>

**ตอบ 98**

ให้ค่าเฉลี่ยของ 49 คนแรก คือ  $\bar{x}$  ดังนั้น ผลรวมคะแนนของ 49 คนแรก คือ  $49\bar{x}$

ให้นักเรียนที่ขาดสอบ ได้คะแนน =  $k$  จะได้ผลรวมคะแนน 50 คน คือ  $49\bar{x} + k$

ค่าเฉลี่ย 50 คน ได้เท่าเดิม  $\rightarrow \frac{49\bar{x}+k}{50} = \bar{x}$   
 $49\bar{x} + k = 50\bar{x}$

$k = \bar{x} \rightarrow$  แสดงว่านักเรียนคนสุดท้าย ได้คะแนน =  $\bar{x}$

(หมายเหตุ: จะท้วงว่า ถ้าเพิ่มหรือลดข้อมูล แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตไม่เปลี่ยน แสดงว่าข้อมูลที่เพิ่มหรือลด มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ยเดิมก็ได้)

s ของ 49 คน = 10 คะแนน จะได้ความแปรปรวน =  $10^2 = 100$  คะแนน<sup>2</sup> ดังนั้น  $\frac{\sum_{i=1}^{49} (x_i - \bar{x})^2}{49} = 100$   
 $\sum_{i=1}^{49} (x_i - \bar{x})^2 = 4900$

เนื่องจากคนที่ 50 ได้คะแนน =  $\bar{x}$  ทำให้  $(x_{50} - \bar{x})^2 = (\bar{x} - \bar{x})^2 = 0$

ดังนั้น ถ้าเพิ่มคนที่ 50 เข้าไป จะได้  $\sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2 = 4900 + 0 = 4900$  เท่าเดิม

จะได้ความแปรปรวนของ 50 คน คือ  $\frac{\sum_{i=1}^{50} (x_i - \bar{x})^2}{50} = \frac{4900}{50} = 98$  คะแนน<sup>2</sup>

30. จำนวนจริง  $x$  ที่มีค่าน้อยที่สุดซึ่งเป็นคำตอบของสมการ

$\frac{(2 \log_3 x) - 4}{\log_3(\frac{x}{9})} = \log_3(x^7) - (\frac{1}{\log_x 3})^2 - 8$  เท่ากับเท่าใด

**ตอบ 243**

$\frac{(2 \log_3 x) - 4}{\log_3(\frac{x}{9})} = \log_3(x^7) - (\frac{1}{\log_x 3})^2 - 8$

$\frac{(2 \log_3 x) - 4}{\log_3 x - \log_3 9} = 7 \log_3 x - (\log_3 x)^2 - 8$

$\frac{2a - 4}{a - 2} = 7a - a^2 - 8$

$\frac{2(a - 2)}{a - 2} = 7a - a^2 - 8$

$2 = 7a - a^2 - 8$

ให้  $\log_3 x = a$

$a^2 - 7a + 10 = 0$   
 $(a - 2)(a - 5) = 0$   
 $a = \cancel{2}, 5$   
 $\log_3 x = 5$   
 $x = 3^5 = 243$

$a \neq 2$

**เครดิต**

ขอบคุณ อ. ปิ่ง GTRmath สำหรับเฉลยวิธีทำแบบละเอียด

ขอบคุณ คุณ Piyapan Sujarittham

และ คุณ Chonlakorn Chiewpanich ที่ช่วยตรวจคำตอบความถูกต้องของเอกสารครับ