ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 68)
วันอาทิตย์ที่ 2 พฤศจิกายน 2568 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $C \subset A - B$, $D \subset B - A$, $n(A \cup D) = 45$, $n(B \cup C) = 67$, $n(A \cup B) = 100$ และ $n(C \cup D) = 3$ จงหาค่าของ $n(A \cap B)$

2. ให้ $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$ และ $B = \{2, 5, 7\}$ นิยามความสัมพันธ์
$$r = \{ (x, y) \in A \times B \mid x + y \in A - B \}$$
จงหาผลรวมของสมาชิกในโดเมนของ r

3. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่เส้นกำกับทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน ถ้าจุดยอดของ H อยู่ห่างกัน $20\sqrt{2}$ หน่วย แล้ว โฟกัสของ H อยู่ห่างกันกี่หน่วย

4. ให้ a เป็นจำนวนจริง สมมติว่าพหุนาม $x^3 - 7x^2 - 42x + a$ มีรากเป็นจำนวนจริง 3 ราก ซึ่งรากทั้งสามเรียงตัวกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ a

5. พิจารณาการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก จำนวน 1 ครั้ง ถ้าแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคี่ทั้ง 2 หน้า จะได้คะแนนเป็นผลคูณของแต้มทั้งสอง และถ้าแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่อย่างน้อย 1 หน้า จะได้คะแนนเป็นผลบวกของแต้มทั้งสอง ให้ E เป็นค่าคาดหมายของคะแนนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูกดังกล่าวจำนวน 1 ครั้ง จงหาค่าของ $100E$

6. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็ม 25 จำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมด สมมติว่าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเป็นจำนวนเต็ม จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของความแปรปรวนของประชากรของข้อมูลชุดนี้

7. ให้ p_1, p_2, p_3, p_4 และ p_5 เป็นประพจน์ สมมติว่า $\sim(p_1 \to p_2) \wedge (\sim p_3 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (p_1 \to p_5)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ให้ n เป็นจำนวนของประพจน์ p_1, p_2, p_3, p_4 และ p_5 ที่มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาผลรวมของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ n

8. ให้ $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x|^3 - 2x^2 - 11|x| + 12 \leq 0 \}$ ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของสมาชิกของเซต S ตามลำดับ จงหาค่าของ $100a + b$

9. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าอยู่ในเซต $\{ 1, 2, 3, \dots, 10 \}$ สมมติว่า
$P(X = k+1) = 2 \cdot P(X = k)$ สำหรับแต่ละ $k \in \{ 1, 2, 3, \dots, 9 \}$
จงหาค่าของ $\frac{1}{P(X=6) - P(X=1)}$

10. บริษัทของเล่นแห่งหนึ่งเปิดขายกล่องสุ่มที่ประกอบด้วยตุ๊กตา 4 ชนิด ได้แก่ A , A' , B และ B' โดยเมื่อซื้อกล่องสุ่ม 1 กล่อง จะได้ตุ๊กตา 2 ตัว ตัวหนึ่งจะเป็นชนิด A หรือ A' และอีกตัวจะเป็นชนิด B หรือ B' โดยที่ A' และ B' จะไม่อยู่ในกล่องสุ่มเดียวกัน

สมมติว่าบริษัทผลิตตุ๊กตา A และ B อย่างละ 500 ตัว ตุ๊กตา A' และ B' อย่างละ 100 ตัว และตุ๊กตาทั้งหมดที่ผลิตจะถูกบรรจุลงกล่องสุ่มตามเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดโดยไม่มีเศษเหลือ

ให้ $\frac{a}{b}$ เป็นความน่าจะเป็นของการซื้อกล่องสุ่ม 2 กล่องแล้วได้ตุ๊กตาครบทั้ง 4 ชนิด โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $a+b$

<u>ตอนที่ 2</u> มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

11. เกม “สมาคม” มีผู้เล่นทั้งหมด 2000 คน แต่ละคนได้รับลูกเต๋าเป็นรูปทรง 20 หน้าคนละ 1 ลูก โดยลูกเต๋าแต่ละลูกมีแต้ม $1, 2, 3, \ldots, 20$ ปรากฏอยู่แต้มละหนึ่งหน้า และสมมติว่าแต่ละแต้มมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน ขั้นตอนการเล่นเกมมีดังนี้

1) ผู้เล่นแต่ละคนทอดลูกเต๋าของตัวเองจำนวน 1 ครั้ง ผู้เล่นที่ได้หน้าลูกเต๋าเป็นเลขสองหลักจะต้องออกจากเกมทันที
2) ผู้เล่นที่ยังอยู่ในเกมทอดลูกเต๋าของตัวเองอีก 1 ครั้ง ผู้เล่นที่ได้หน้าลูกเต๋าเป็นเลขสองหลักจะต้องออกจากเกมทันที จากนั้นจะถือว่าจบเกม

จงหาค่าคาดหมายของจำนวนผู้เล่นที่เหลืออยู่หลังจากจบเกม

12. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 4$ จงหาผลรวมของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลคูณ $(a_1 + 2)(a_1 + 4)$

13. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้
    - ไม่มีสองจำนวนใดมีค่าเท่ากัน
    - จำนวนหลักไม่เกิน 4 หลัก
    - เลขโดดในแต่ละหลัก (ในฐานสิบ) เป็น 3, 6 หรือ 9 เท่านั้น (เช่น $9,\ 33,\ 963$ และ 9336)

    จงหาควอร์ไทล์ที่ 3 ของข้อมูลชุดนี้

14. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ระบบสมการ
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= b \\ -2x + 2y - z &= -b \\ 4x + 5y + az &= 6 \end{aligned}$$
มีคำตอบเป็นอนันต์ จงหาค่าของ $100a + b$

15. ถ้าค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของสมาชิกของเซต $\{\, \theta \in [0, 2\pi] \mid \cos(7\theta) = \sin(2\theta) \,\}$ คือ $\frac{a\pi}{b}$ โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a + b$

16. เพรียงหินชนิดหนึ่งมีเพศเป็นเพศผู้หรือเพศเมียเท่านั้นและไม่สามารถเป็นทั้งสองเพศพร้อมกันได้ นอกจากนี้เพรียงหินแต่ละตัวสามารถเปลี่ยนเพศไปมาระหว่างเพศผู้และเพศเมียได้ เมื่อเพรียงหินชนิดนี้มีอายุ t เดือน (นับตั้งแต่เวลาที่ฟักออกจากไข่) ความน่าจะเป็นที่เพรียงชนิดนี้จะมีเพศเป็นเพศเมียคือ $p(t) = \frac{2^t - 1}{2^t + 1}$ "อายุเต็มวัย" ของเพรียงหินชนิดนี้หมายถึงอายุที่เพรียงหินมีโอกาสเป็นเพศผู้และเพศเมียเท่ากัน

สมมติว่าในแต่ละปี เพรียงหินชนิดนี้ออกไข่เพียงครั้งเดียว โดยแต่ละตัวจะออกไข่เป็นจำนวนมาก และลูก ๆ ของเพรียงหินทั้งหมดนี้ฟักออกจากไข่ในเวลาเดียวกัน

นักวิจัยสัตว์ทะเลชื่อฟิลิปได้ไปศึกษาลูก ๆ ของเพรียงหินชนิดนี้ในเวลาที่พวกมันโตเต็มวัยพอดี เขาได้กลับมาทำการศึกษาอีกครั้งหลังจากผ่านไป 2 เดือนเต็ม และพบว่ากลุ่มของเพรียงหินที่ฟิลิปเคยศึกษามีความน่าจะเป็นที่จะมีเพศเป็นเพศผู้เท่ากับ $\frac{a}{b}$ โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a + b$

17. ให้ a เป็นจำนวนจริง พิจารณาจุด $A(0,0,a)$, $B(1,5,3)$, $C(1,2,0)$ และ $D(2,1,4)$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สมมติว่าเส้นตรง AB ตัดกับเส้นตรง CD จงหาค่าของ a^2

18. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับสมการ
$P\big(P(x)-P(0)\big) = x^2P(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
จงหาผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $P(10)$

19. ให้ $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ และ $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = (x-3)(x+2)$ ตามลำดับ
จงหาจำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $f \circ (g \circ (f \circ (g \circ f)))$

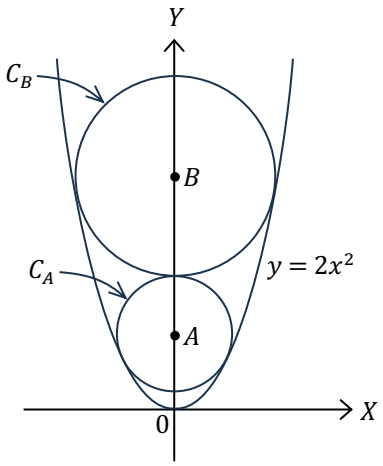
20. ให้ $\mathcal{F}$ เป็นเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั้งหมดจาก $\{1,2,3,4,5\}$ ไป $\{1,2,3,4,5\}$
สำหรับแต่ละ $f \in \mathcal{F}$ นิยาม $E(f) = \sum_{i=1}^{5} 2^i \delta_i(f)$ โดยที่ $\delta_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } f(i) = i \\ 0 & \text{เมื่อ } f(i) \neq i \end{cases}$
สมมติว่า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นสมาชิกทั้งหมดที่แตกต่างกันของ $\mathcal{F}$ จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{n} E(f_k)$

ตอนที่ 3 มี 6 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน

21. ให้ n เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{5n}(4n) = \log_{75}(24\sqrt{5})$ จงหาค่าของ n^3

22. ให้ u เป็นผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $z^2 + iz|z+2| = |z| = 1$ จงหาค่าของ $\left|u\sqrt{3} + 4i\right|^2$

23. พิจารณาพาราโบลา P ที่มีสมการเป็น $y = 2x^2$ ให้ C_A เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $A\left(0, \frac{5}{4}\right)$ และสัมผัสกับพาราโบลา P ให้ C_B เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $B(0, k)$ นอกจากนี้ วงกลม C_B สัมผัสกับวงกลม C_A และสัมผัสกับพาราโบลา P ดังรูป ถ้า $k = \frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a + b$



24. จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของผลคูณ xyz เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วงเปิด $(-9, 9)$ และสอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) &= 0 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi y}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi z}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

25. ให้ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่นิยามโดย $a_0 = \frac{1}{10}$ และ

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^3$$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

หากทราบว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$

26. สำหรับพหุนาม $p(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนดสัญลักษณ์

- $p^{(0)}(x) = p(x)$
- $p^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[p^{n-1}(x)]$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

ให้ $P(x) = (x+2)(x^2+2^2)(x^3+2^3)\ldots(x^{100}+2^{100})$

นิยาม $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$

จงหาจำนวนตัวประกอบบวกทั้งหมดของ $Q(1) - Q(-1)$

เฉลย

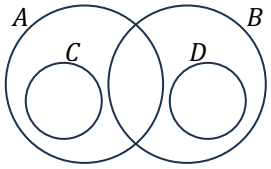
1. 9	8. 396	15. 1910	22. 7
2. 12	9. 33	16. 213	23. 1304
3. 40	10. 1897	17. 49	24. 96
4. 216	11. 405	18. 200	25. 1000
5. 775	12. 20	19. 20	26. 5150
6. 52	13. 6987	20. 1488	
7. 6	14. 803	21. 45	

แนวคิด

1. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $C \subset A - B$, $D \subset B - A$, $n(A \cup D) = 45$, $n(B \cup C) = 67$, $n(A \cup B) = 100$ และ $n(C \cup D) = 3$ จงหาค่าของ $n(A \cap B)$

ตอบ 9

จาก $C \subset A - B$ และ $D \subset B - A$ จะวาดแผนภาพได้ดังรูป



ซึ่งจะได้ว่า $n(A \cup D) = n(A) + n(D) = 45$ ...(1)

$n(B \cup C) = n(B) + n(C) = 67$ ...(2)

$n(C \cup D) = n(C) + n(D) = 3$ ...(3)

$(1) + (2) - (3)$: $n(A) + n(D) + n(B) + n(C) - \big(n(C) + n(D)\big) = 45 + 67 - 3$

$n(A) + n(B) = 109$ $(*)$

ใช้สูตร Inclusive – Exclusive ที่ A และ B : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (จาก $(*)$)

$100 = 109 - n(A \cap B)$

$n(A \cap B) = 9$

2. ให้ $A = \{1, 2, 4, 5, 6, 10\}$ และ $B = \{2, 5, 7\}$ นิยามความสัมพันธ์

$$r = \{ (x, y) \in A \times B \mid x + y \in A - B \}$$

จงหาผลรวมของสมาชิกในโดเมนของ r

ตอบ 12

$A - B = \{1, 4, 6, 10\} \rightarrow$ ต้องหา $x \in A$ และ $y \in B$ ซึ่ง $x + y = 1, 4, 6$ หรือ 10

ไม่มี $\boxed{2} + 2$ $\boxed{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}} + 5$ $\boxed{5} + 5$

จะได้ผลรวมโดเมนคือ $2 + 1 + 4 + 5 = 12$

3. ให้ H เป็นไฮเพอร์โบลาที่เส้นกำกับทั้งสองเส้นตั้งฉากกัน ถ้าจุดยอดของ H อยู่ห่างกัน $20\sqrt{2}$ หน่วย แล้ว โฟกัสของ H อยู่ห่างกันกี่หน่วย

ตอบ 40

จุดยอดห่างกัน $20\sqrt{2}$ หน่วย $\rightarrow$ จะได้ระยะจากจุดศูนย์กลาง ถึงจุดยอด $= \frac{20\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$

เส้นกำกับตั้งฉากกัน $\rightarrow$ เป็นไฮเพอร์โบลามุมฉาก $\rightarrow$ ครึ่งแกนตามขวาง (a) $=$ ครึ่งแกนสังยุค (b) $= 10\sqrt{2}$

จะได้ระยะโฟกัส $(c) = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\left(10\sqrt{2}\right)^2 + \left(10\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{200 + 200} = 20$

ดังนั้น โฟกัสทั้งสองอยู่ห่างกัน $= 2(20) = 40$

4. ให้ a เป็นจำนวนจริง สมมติว่าพหุนาม $x^3 - 7x^2 - 42x + a$ มีรากเป็นจำนวนจริง 3 ราก ซึ่งรากทั้งสามเรียงตัวกันเป็นลำดับเรขาคณิต จงหาค่าของ a

ตอบ 216

ให้ลำดับเรขาคณิตที่เป็นรากของพหุนามนี้คือ k , kr , kr^2

จากสมบัติของผลบวกผลคูณราก จะได้

ผลบวกราก : $k + kr + kr^2 = -(-7)$ ...(1)

ผลบวกของราก 2 ตัวคูณกัน : $(k)(kr) + (k)(kr^2) + (kr)(kr^2) = -42$ ...(2)

ผลคูณราก $(k)(kr)(kr^2) = -a$ ...(3)

จาก (2) ดึงตัวร่วม kr จะได้ : $(kr)(k + kr + kr^2) = -42$

$(kr)(\quad 7 \quad) = -42$ (จาก (1))

$kr = -6$

จาก (3) : $(kr)^3 = -a$

$(-6)^3 = -a$

$216 = a$

5. พิจารณาการทอดลูกเต๋าเที่ยงตรง 2 ลูก จำนวน 1 ครั้ง ถ้าแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคี่ทั้ง 2 หน้า จะได้คะแนนเป็นผลคูณของแต้มทั้งสอง และถ้าแต้มบนหน้าลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่อย่างน้อย 1 หน้า จะได้คะแนนเป็นผลบวกของแต้มทั้งสอง ให้ E เป็นค่าคาดหมายของคะแนนที่ได้จากการทอดลูกเต๋า 2 ลูกดังกล่าวจำนวน 1 ครั้ง จงหาค่าของ $100E$

ตอบ 775

แต่ละลูกออกแต้มได้ 6 แบบ โยน 2 ลูก จะมีจำนวนแบบทั้งหมด $= 6 \times 6 = 36$ แบบ

จะหาผลรวมคะแนนที่เกิดจากการบวกแต้มทั้งสองของ 36 แบบนี้ก่อน แล้วค่อยแก้คะแนนของแบบที่เป็นคี่ทั้ง 2 หน้า

เนื่องจากหน้า 1 ถึง 6 จะออกใน 36 แบบนี้อย่างเท่า ๆ กัน → ลูกเต๋าแต่ละลูกจะออกหน้า 1 ถึง 6 หน้าละ $\frac{36}{6} = 6$ ครั้ง

และมีลูกเต๋า 2 ลูก จะได้ผลรวมคะแนน คือ $(2)(6)(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 252$ ...(1)

แต่แบบที่เป็นคี่ทั้ง 2 หน้า ต้องใช้ผลคูณแต้ม ไม่ใช่ผลบวก → จะหักผลบวกแต้มของกลุ่มนี้ออก แล้วบวกผลคูณไปแทน

พิจารณาแบบที่เป็นคี่ทั้ง 2 หน้า → มีแต้มคี่ 3 แบบ (1, 3, 5) โยน 2 ลูก จะมีจำนวนแบบทั้งหมด $= 3 \times 3 = 9$ แบบ

หน้า 1, 3, 5 จะออกใน 9 แบบนี้อย่างเท่า ๆ กัน → ลูกเต๋าและละลูกจะออกหน้า 1, 3, 5 หน้าละ $\frac{9}{3} = 3$ ครั้ง

และมีลูกเต๋า 2 ลูก จะได้ผลรวมคะแนนที่รวมผิดไป คือ $(2)(3)(1 + 3 + 5) = 54$ ...(2)

ซึ่งผลรวมคะแนนของแบบที่เป็นคี่ทั้ง 2 หน้าคือ

$(1\times1) + (1\times3) + (1\times5) + (3\times1) + (3\times3) + (3\times5) + (5\times1) + (5\times3) + (5\times5)$

$= (1)(1 + 3 + 5) + (3)(1 + 3 + 5) + (5)(1 + 3 + 5)$ (ดึงตัวร่วมกลุ่มเล็ก)

$= (1 + 3 + 5)(1 + 3 + 5)$ (ดึงตัวร่วมกลุ่มใหญ่)

$= (\quad 9 \quad)(\quad 9 \quad) = 81$ ...(3)

จาก (1), (2) และ (3) จะได้ผลรวมคะแนนที่ถูกต้อง คือ $252 - 54 + 81 = 279$

จะได้ค่าคาดหมาย $E = \frac{279}{36} = \frac{31}{4}$ ดังนั้น $100E = 100 \times \frac{31}{4} = 775$

6. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็ม 25 จำนวนที่แตกต่างกันทั้งหมด สมมติว่าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเป็นจำนวนเต็ม จงหาค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของความแปรปรวนของประชากรของข้อมูลชุดนี้

ตอบ 52

ความแปรปรวนประชากร หาได้จากสูตร $\frac{\sum(x_i - \mu)^2}{N}$

เนื่องจากข้อมูลทุกตัวเป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกัน และ ค่าเฉลี่ยก็เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x_i - \mu$ จะเป็นจำนวนเต็มที่แตกต่างกันด้วย → $(x_i - \mu)^2$ ที่น้อยที่สุดที่เป็นไปได้คือ 0^2

ถัดมาคือ 1^2 และ $(-1)^2$

ถัดมาคือ 2^2 และ $(-2)^2$

⋮

ถัดมาคือ 12^2 และ $(-12)^2$ } ครบ 25 ตัว

(ตัวอย่างข้อมูลเช่น $-12, -11, -10, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, 10, 11, 12$)

จะได้ความแปรปรวนน้อยสุด $= \frac{0^2+1^2+(-1)^2+2^2+(-2)^2+\ldots+12^2+(-12)^2}{25}$

$= \frac{2(1^2+2^2+\ldots+12^2)}{25}$

$= \frac{2}{25}\cdot\frac{12(12+1)(2\cdot12+1)}{6} = 52$

$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

7. ให้ p_1, p_2, p_3, p_4 และ p_5 เป็นประพจน์ สมมติว่า $\sim(p_1 \to p_2) \wedge (\sim p_3 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (p_1 \to p_5)$ มีค่าความจริงเป็นจริง ให้ n เป็นจำนวนของประพจน์ p_1, p_2, p_3, p_4 และ p_5 ที่มีค่าความจริงเป็นจริง จงหาผลรวมของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของ n

ตอบ 6

$\sim(p_1 \to p_2) \wedge (\sim p_3 \vee p_4 \vee p_5) \wedge (p_1 \to p_5)$

T $\wedge$ T $\wedge$ T

$\sim$ F

T $\to$ F

T $\to$ T

$\sim p_3 \vee p_4 \vee$ T

p_3 กับ p_4 เป็นอะไรก็ได้ $\vee$ T จะได้ T เสมอ

ย้อนหาค่าความจริงดู

จะพบว่า $p_1 \equiv$ T , $p_2 \equiv$ F และ $p_5 \equiv$ T

ส่วน p_3 กับ p_4 เป็นอะไรก็ได้

นั่นคือจะมีประพจน์ที่เป็นจริง อย่างน้อย 2 ประพจน์ (p_1 กับ p_5) และอย่างมาก 4 ประพจน์ (เพิ่ม p_3 กับ p_4 ที่เป็น T ได้) จะได้ผลรวมค่าต่ำสุดและสูงสุดคือ $2+4 = 6$

8. ให้ $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x|^3 - 2x^2 - 11|x| + 12 \leq 0 \}$ ถ้า a และ b เป็นค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดที่เป็นไปได้ของสมาชิกของเซต S ตามลำดับ จงหาค่าของ $100a+b$

ตอบ 396

เนื่องจาก $|x|^2 = x^2$ จึงเขียนอสมการได้เป็น $|x|^3 - 2|x|^2 - 11|x| + 12 \leq 0$

$k^3 - 2k^2 - 11k + 12 \leq 0$ ให้ $k = |x|$ ...(*)

แยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ : ลองแทน $k = 1$ จะได้ $1^3 - 2(1^2) - 11(1) + 12 = 0 \to$ ใช้ได้

หารสังเคราะห์

1	1	−2	−11	12
		1	−1	−12
	1	−1	−12	0

→ แยกได้เป็น $(k-1)(k^2-k-12) \leq 0$

$(k-1)(k-4)(k+3) \leq 0$

− + − +

−3 1 4

แต่จาก (*) $k = |x|$ ดังนั้น k เป็นลบไม่ได้ → จะเหลือแค่ $k \in [1,4]$

จะได้ $|x| \in [1,4]$ นั่นคือ x ต้องอยู่ในช่วง $[-4,-1]$ หรือ $[1,4]$

ดังนั้น ค่าสูงสุดของ x คือ 4 และค่าต่ำสุดคือ -4 จะได้ $100a+b = 100(4)+(-4) = 396$

9. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าอยู่ในเซต $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ สมมติว่า

$P(X = k+1) = 2 \cdot P(X = k)$ สำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, 3, \dots, 9\}$

จงหาค่าของ $\frac{1}{P(X=6) - P(X=1)}$

ตอบ 33

$P(X = k+1) = 2 \cdot P(X = k)$ คือ ความน่าจะเป็นจะเพิ่มทีละ 2 เท่า เมื่อค่า X เพิ่มขึ้น 1

นั่นคือ ถ้าให้ ความน่าจะเป็นเมื่อ $X = 1$ คือ a

จะได้ ความน่าจะเป็นเมื่อ $X = 2$ คือ $2a$

ความน่าจะเป็นเมื่อ $X = 3$ คือ 2^2a

$\vdots$

ความน่าจะเป็นเมื่อ $X = 10$ คือ 2^9a

ลำดับเรขาคณิต : $a_1 = a$, $r = 2$, $a_n = a_1r^{n-1}$

ความน่าจะเป็นของทุกกรณีต้องรวมกันเป็น 1 นั่นคือ $a + 2a + 2^2a + \dots + 2^9a = 1$

อนุกรมเรขาคณิต : $S_n = \frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

$\frac{a(2^{10}-1)}{2-1} = 1$

$a = \frac{1}{2^{10}-1}$ ...(*)

จากสูตร $a_n = a_1r^{n-1}$ จะได้ ความน่าจะเป็นเมื่อ $X = 6$ คือ 2^5a

ดังนั้น $P(X = 6) - P(X = 1) = 2^5a - a$

$= a(2^5 - 1)$

จาก (*) $= \frac{2^5-1}{2^{10}-1} = \frac{2^5-1}{(2^5-1)(2^5+1)} = \frac{1}{2^5+1}$

จะได้ $\frac{1}{P(X=6) - P(X=1)} = 2^5 + 1 = 33$

10. บริษัทของเล่นแห่งหนึ่งเปิดขายกล่องสุ่มที่ประกอบด้วยตุ๊กตา 4 ชนิด ได้แก่ A , A' , B และ B' โดยเมื่อซื้อกล่องสุ่ม 1 กล่อง จะได้ตุ๊กตา 2 ตัว ตัวหนึ่งจะเป็นชนิด A หรือ A' และอีกตัวจะเป็นชนิด B หรือ B' โดยที่ A' และ B' จะไม่อยู่ในกล่องสุ่มเดียวกัน

สมมติว่าบริษัทผลิตตุ๊กตา A และ B อย่างละ 500 ตัว ตุ๊กตา A' และ B' อย่างละ 100 ตัว และตุ๊กตาทั้งหมดที่ผลิตจะถูกบรรจุลงกล่องสุ่มตามเงื่อนไขข้างต้นทั้งหมดโดยไม่มีเศษเหลือ

ให้ $\frac{a}{b}$ เป็นความน่าจะเป็นของการซื้อกล่องสุ่ม 2 กล่องแล้วได้ตุ๊กตาครบทั้ง 4 ชนิด โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $a + b$

ตอบ 1897

เนื่องจาก A' และ B' จะไม่อยู่ด้วยกัน จะเหลือแค่ 3 แบบ คือ AB , AB' , $A'B$

จะเห็นว่า B' ต้องอยู่กับ A เท่านั้น $\rightarrow$ ต้องใช้ A จำนวน 100 ตัว ไปอยู่กับ B' ทั้ง 100 ตัว

A' ต้องอยู่กับ B เท่านั้น $\rightarrow$ ต้องใช้ B จำนวน 100 ตัว ไปอยู่กับ A' ทั้ง 100 ตัว

เหลือ A และ B อย่างละ $500 - 100 = 400$ ตัว บรรจุลงกล่อง AB จำนวน 400 กล่องได้พอดี

นั่นคือ จะมี AB จำนวน 400 กล่อง และมี AB' กับ $A'B$ อย่างละ 100 กล่อง รวมทั้งหมด 600 กล่อง

จำนวนแบบทั้งหมด : สุ่ม 2 กล่อง จาก 600 กล่อง ได้ $\binom{600}{2} = \frac{600\times599}{2} = 300 \times 599$ แบบ

จำนวนแบบที่ได้ตุ๊กตาครบ 4 ชนิด : ต้องได้กล่อง AB' กับ $A'B$ อย่างละกล่องเท่านั้น

มีกล่อง AB' กับ $A'B$ อย่างละ 100 กล่อง $\rightarrow$ ได้ 100×100 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{100\times100}{300\times599} = \frac{100}{1797} \rightarrow 100 + 1797 = 1897$

11. เกม “สมาคม” มีผู้เล่นทั้งหมด 2000 คน แต่ละคนได้รับลูกเต๋าเป็นรูปทรง 20 หน้าคนละ 1 ลูก โดยลูกเต๋าแต่ละลูกมีแต้ม $1, 2, 3, \dots, 20$ ปรากฏอยู่แต้มละหนึ่งหน้า และสมมติว่าแต่ละแต้มมีโอกาสเกิดขึ้นเท่ากัน ขั้นตอนการเล่นเกมมีดังนี้
    1) ผู้เล่นแต่ละคนทอดลูกเต๋าของตัวเองจำนวน 1 ครั้ง ผู้เล่นที่ได้หน้าลูกเต๋าเป็นเลขสองหลักจะต้องออกจากเกมทันที
    2) ผู้เล่นที่ยังอยู่ในเกมทอดลูกเต๋าของตัวเองอีก 1 ครั้ง ผู้เล่นที่ได้หน้าลูกเต๋าเป็นเลขสองหลักจะต้องออกจากเกมทันที จากนั้นจะถือว่าจบเกม

    จงหาค่าคาดหมายของจำนวนผู้เล่นที่เหลืออยู่หลังจากจบเกม

<u>ตอบ</u> 405

ให้การเล่นของผู้เล่นแต่ละคน เป็นการทดลองสุ่มย่อย ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนจำนวนผู้เล่นที่เหลือหลังจบเกม
จะเห็นว่า X มีการแจกแจงแบบทวินาม

มีผู้เล่น 2000 คน จะได้ $n = 2000$

ผู้เล่นแต่ละคนจะรอดจนจบเกม ก็ต่อเมื่อทอดลูกเต๋าได้เลขหลักเดียวทั้งสองครั้ง

เลขหลักเดียว มี $1, 2, 3, \dots, 9$ จากทั้งหมด 20 หน้า จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{9}{20}$

ต้องได้ 2 ครั้ง $\rightarrow$ ความน่าจะเป็นที่ผู้เล่นคนหนึ่ง จะเหลือรอดจนจบเกม $p = \frac{9}{20} \times \frac{9}{20}$

จากสูตรค่าคาดหมายของการแจกแจงแบบทวินาม จะได้ค่าคาดหมาย $\mu_X = np = 2000 \times \frac{9}{20} \times \frac{9}{20} = 405$

12. ให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = 4$
    จงหาผลรวมของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของผลคูณ $(a_1 + 2)(a_1 + 4)$

<u>ตอบ</u> 20

ให้อัตราส่วนร่วม $= r$ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \dots = \frac{a_1}{1-r} = 2$ (โจทย์กำหนด)

$a_1 = 2(1-r) \quad \dots (*)$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3 = a_1^3 + (a_1 r)^3 + (a_1 r^2)^3 + \dots$

$= a_1^3 + a_1^3 r^3 + a_1^3 r^6 + \dots \rightarrow$ มีพจน์แรกคือ a_1^3 และแต่ละพจน์ คูณเพิ่มทีละ r^3 (= อัตราส่วนร่วม)

ใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $= \frac{a_1^3}{1-r^3} = 4$ (โจทย์กำหนด)

จาก $(*)$ $\frac{(2(1-r))^3}{1-r^3} = 4$

$\frac{2^3(1-r)^3}{(1-r)(1+r+r^2)} = 4$

$\frac{2(1-r)^2}{1+r+r^2} = 1$

$2 - 4r + 2r^2 = 1 + r + r^2$

$r^2 - 5r + 1 = 0$

ใช้สูตรคำตอบของสมการ จะได้ $r = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

แต่อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะมีค่าได้เมื่อ $|r| < 1$ ซึ่งจะเห็นว่า $\frac{5+\sqrt{21}}{2} > 1$ จึงใช้ไม่ได้ จะเหลือแค่ $r = \frac{5-\sqrt{21}}{2}$

แทนใน $(*)$ จะได้ $a_1 = 2\left(1 - \frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)$

$= 2 - \left(5 - \sqrt{21}\right)$

$= \sqrt{21} - 3$

ดังนั้น $(a_1 + 2)(a_1 + 4) = \left(\sqrt{21} - 1\right)\left(\sqrt{21} + 1\right)$

$= \sqrt{21}^2 - 1^2 = 20$

13. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้
- ไม่มีสองจำนวนใดมีค่าเท่ากัน
- จำนวนหลักไม่เกิน 4 หลัก
- เลขโดดในแต่ละหลัก (ในฐานสิบ) เป็น $3, 6$ หรือ 9 เท่านั้น (เช่น $9,\ 33,\ 963$ และ 9336)

จงหาควอร์ไทล์ที่ 3 ของข้อมูลชุดนี้

ตอบ 6987

นับก่อนว่าข้อมูลชุดนี้มีกี่จำนวน

จำนวน 1 หลัก : มี $3, 6, 9$ ทั้งหมด 3 จำนวน

จำนวน 2 หลัก : แต่ละหลักเลือก $3, 6$ หรือ 9 ได้หลักละ 3 แบบ มีทั้งหมด $3^2 = 9$ จำนวน

จำนวน 3 หลัก : มีทั้งหมด $3^3 = 27$ จำนวน

จำนวน 4 หลัก : มีทั้งหมด $3^4 = 81$ จำนวน

รวมทั้งหมด จะมี $3 + 9 + 27 + 81 = 120$ จำนวน

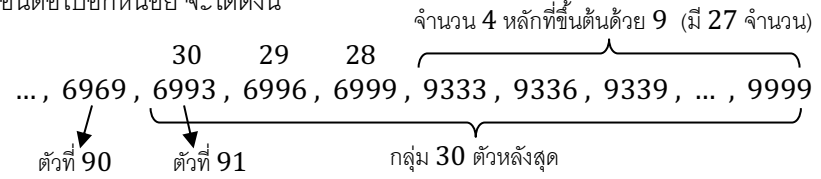
จากสูตรตำแหน่งควอไทล์ $\frac{r}{4} \times (N+1)$ จะได้ Q_3 จะอยู่ตัวที่ $\frac{3}{4} \times (120+1) = 90.75$

$=$ ตัวที่ $90 + 0.75$(ตัวที่ $91 -$ ตัวที่ 90) ...$(*)$

ต้องหาตัวที่ 90 และ 91 จาก 120 ตัว $\rightarrow$ นับจากหลังมาหน้าจะง่ายกว่า (ตัวที่ 91 คือตัวแรกของ 30 ตัวหลังสุด)

เริ่มจากกลุ่มที่มากที่สุด คือ "จำนวน 4 หลักที่ขึ้นต้นด้วย 9" $\rightarrow$ เลือก 3 หลักที่เหลือได้หลักละ 3 แบบ มีทั้งหมด $3^3 = 27$ จำนวน

นับย้อนต่อไปอีกหน่อย จะได้ดังนี้



แทนใน $(*)$ จะได้ $6969 + 0.75(6993 - 6969) = 6987$

14. ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ระบบสมการ
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= b \\ -2x + 2y - z &= -b \\ 4x + 5y + az &= 6 \end{aligned}$$
มีคำตอบเป็นอนันต์ จงหาค่าของ $100a + b$

ตอบ 803

แปลงระบบสมการเป็นเมทริกซ์แต่งเติม แล้วใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อเปลี่ยนสามเหลี่ยมซ้ายล่างให้เป็น 0

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & b \\ -2 & 2 & -1 & -b \\ 4 & 5 & a & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & b \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & a-6 & 6-2b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_3 \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & b \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & a-8 & 6-2b \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -2R_2 + R_3 \end{array}$$

แปลงกลับเป็นระบบสมการ จะได้
$$\begin{aligned} 2x + y + 3z &= b && \ldots(1) \\ 3y + 2z &= 0 && \ldots(2) \\ (a-8)z &= 6 - 2b && \ldots(3) \end{aligned}$$

จาก (3) ถ้า $a - 8 \neq 0$ จะหา z ได้ค่าเดียวเสมอ และเมื่อแทน z กลับไปใน (2) และ (1) ก็จะหา y และ x ได้ ซึ่งจะทำให้ระบบสมการไม่มีคำตอบเป็นอนันต์ ดังนั้น $a - 8$ ต้องเป็น 0 $\rightarrow a = 8$

ทำให้ฝั่งขวาของ (3) คือ $6 - 2b$ ต้องเป็น 0 ด้วย ไม่งั้น (3) จะเป็นจริงไม่ได้ ระบบสมการจะไม่มีคำตอบ $\rightarrow b = 3$

นั่นคือ z เป็นอะไรก็ได้ (3) จะเป็นจริงเสมอ $(0 = 0)$ และเมื่อแทน z กลับไปใน (2) และ (1) ก็จะหา y และ x ได้เสมอ ทำให้ระบบสมการมีคำตอบเป็นอนันต์ และจะได้ $100a + b = 100(8) + 3 = 803$

15. ถ้าค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของสมาชิกของเซต $\{\,\theta \in [0,2\pi] \mid \cos(7\theta) = \sin(2\theta)\,\}$ คือ $\frac{a\pi}{b}$ โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a+b$

ตอบ 1910

$\cos(7\theta) = \sin(2\theta)$

$\cos(7\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)$ ← โคฟังก์ชัน : sin กับ cos เท่ากัน เมื่อมุมรวมกันได้ $\frac{\pi}{2}$

$\cos A = \cos B$ เมื่อ $B = 2n\pi \pm A$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

$\frac{\pi}{2}-2\theta = 2n\pi \pm 7\theta$

$\frac{\pi}{2}-2n\pi = 2\theta \pm 7\theta$

$\frac{1-4n}{2}\cdot\pi = (2\pm 7)\theta$

$\frac{1-4n}{2(2\pm 7)}\cdot\pi = \theta$ → ต้องการ θ สูงสุดในช่วง $[0,2\pi]$ → $\frac{1-4n}{2(2\pm 7)} \le 2$

กรณี $\frac{1-4n}{2(2+7)} \le 2$ ...(1)

$1-4n \le 36$

$n \ge -8.75$

ใกล้ 2 ที่สุดเมื่อ $n=-8$

แทนใน (1) : $\frac{1-4(-8)}{2(2+7)} = \frac{33}{18} = \frac{11}{6}$

กรณี $\frac{1-4n}{2(2-7)} \le 2$ ...(2)

$1-4n \ge -20$

$n \le 5.25$

ใกล้ 2 ที่สุดเมื่อ $n=5$

แทนใน (2) : $\frac{1-4(5)}{2(2-7)} = \frac{-19}{-10} = \frac{19}{10}$

ย้ายข้างเลขลบแบบคูณหาร ต้องกลับ มากกว่า ↔ น้อยกว่า

เนื่องจาก $110 < \frac{11}{6} \times \frac{19}{10} < 114$ ดังนั้น ค่าสูงสุดของ θ คือ $\frac{19\pi}{10}$ จะได้คำตอบคือ $100(19)+10 = 1910$

16. เพรียงหินชนิดหนึ่งมีเพศเป็นเพศผู้หรือเพศเมียเท่านั้นและไม่สามารถเป็นทั้งสองเพศพร้อมกันได้ นอกจากนี้เพรียงหินแต่ละตัวสามารถเปลี่ยนเพศไปมาระหว่างเพศผู้และเพศเมียได้ เมื่อเพรียงหินชนิดนี้มีอายุ t เดือน (นับตั้งแต่เวลาที่ฟักออกจากไข่) ความน่าจะเป็นที่เพรียงชนิดนี้จะมีเพศเป็นเพศเมียคือ $p(t) = \frac{2^t-1}{2^t+1}$ "อายุเต็มวัย" ของเพรียงหินชนิดนี้หมายถึงอายุที่เพรียงหินมีโอกาสเป็นเพศผู้และเพศเมียเท่ากัน

สมมติว่าในแต่ละปี เพรียงหินชนิดนี้ออกไข่เพียงครั้งเดียว โดยแต่ละตัวจะออกไข่เป็นจำนวนมาก และลูก ๆ ของเพรียงหินทั้งหมดนี้ฟักออกจากไข่ในเวลาเดียวกัน

นักวิจัยสัตว์ทะเลชื่อฟิลิปได้ไปศึกษาลูก ๆ ของเพรียงหินชนิดนี้ในเวลาที่พวกมันโตเต็มวัยพอดี เขาได้กลับมาทำการศึกษาอีกครั้งหลังจากผ่านไป 2 เดือนเต็ม และพบว่ากลุ่มของเพรียงหินที่ฟิลิปเคยศึกษามีความน่าจะเป็นที่จะมีเพศเป็นเพศผู้เท่ากับ $\frac{a}{b}$ โดยที่ $\frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a+b$

ตอบ 213

เนื่องจากความน่าจะเป็นของทุกกรณีรวมกันต้องเป็น 1 → โตเต็มวัย เมื่อโอกาสเป็นเพศผู้และเพศเมียเท่ากัน $= \frac{1}{2}$

สมมติให้โตเต็มวัยที่อายุ k เดือน จะได้ $\frac{2^k-1}{2^k+1} = \frac{1}{2}$

$2(2^k)-2 = 2^k+1$

$2^k = 3$ ...(*)

ผ่านไป 2 เดือน จะมีอายุ $k+2$ เดือน → ความน่าจะเป็นที่จะเป็นเพศเมีย $= \frac{2^{k+2}-1}{2^{k+2}+1} = \frac{2^k\cdot 2^2-1}{2^k\cdot 2^2+1}$ จาก (*)

$= \frac{(3)(2^2)-1}{(3)(2^2)+1} = \frac{11}{13}$

จะได้ความน่าจะเป็นที่จะเป็นเพศผู้ $= 1-\frac{11}{13} = \frac{2}{13}$ → ดังนั้น $100a+b = 100(2)+13 = 213$

17. ให้ a เป็นจำนวนจริง พิจารณาจุด $A(0,0,a)$, $B(1,5,3)$, $C(1,2,0)$ และ $D(2,1,4)$ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ สมมติว่าเส้นตรง AB ตัดกับเส้นตรง CD จงหาค่าของ a^2

ตอบ 49

$\overleftrightarrow{AB}$ จะตัดกับ $\overleftrightarrow{CD}$ เมื่อ A, B, C และ D ทั้ง 4 จุด อยู่บนระนาบเดียวกัน และ $\overleftrightarrow{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$

A, B, C และ D จะอยู่บนระนาบเดียวกัน เมื่อ ทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่เกิดจาก $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ และ $\overrightarrow{CD}$ มีปริมาตรเป็น 0

$$\overrightarrow{CA} = \begin{bmatrix} 0-1 \\ 0-2 \\ a-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ a \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CB} = \begin{bmatrix} 1-1 \\ 5-2 \\ 3-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

จากสูตรปริมาตร $= \left|\overrightarrow{CA} \cdot \left(\overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CD}\right)\right| = \left|\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (3)(4)-(3)(-1) \\ (3)(1)-(0)(4) \\ (0)(-1)-(3)(1) \end{bmatrix}\right|$

$$= \left|\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}\right|$$

$$= |(-1)(15) + (-2)(3) + a(-3)| = |-21 - 3a| = 0$$

$$-7 = a$$

ต้องเช็คว่า $\overleftrightarrow{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overleftrightarrow{CD}$ ด้วย : $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 5-0 \\ 3-(-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{bmatrix} 2-1 \\ 1-2 \\ 4-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ → ไม่ขนานกัน

จะได้ $a^2 = (-7)^2 = 49$

18. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงและสอดคล้องกับสมการ

$P\big(P(x) - P(0)\big) = x^2P(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

จงหาผลรวมของค่าสัมบูรณ์ของค่าที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ $P(10)$

ตอบ 200

แทน x ด้วย 0 จะได้ $P\big(P(0) - P(0)\big) = 0^2P(0)$

$P(\quad 0 \quad) = 0$ ...(∗) → แทนในสมการโจทย์ จะเหลือ $P\big(P(x)\big) = x^2P(x)$

กรณีที่ $P(x)$ เป็นพหุนามศูนย์ คือ $P(x) = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

จะเห็นว่า ทำให้สมการโจทย์เป็นจริง (ได้ $0 = 0$) ดังนั้น $P(x) = 0$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการโจทย์

กรณีที่ $P(x)$ ไม่ใช่พหุนามศูนย์ → $P(x)$ จะหาดีกรีได้ สมมติให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี n

สังเกตว่า $P\big(P(x)\big)$ จะมีดีกรีเพิ่มเป็นทวีคูณ เพราะถูกยกกำลัง n สองรอบ $(x^n)^n = x^{n^2}$

ในขณะที่ $x^2P(x)$ จะมีดีกรีเพิ่มขึ้นแค่ 2 เพราะ $x^2 \cdot x^n = x^{n+2}$

ดังนั้น $P\big(P(x)\big) = x^2P(x)$ ได้ เมื่อ $n^2 = n + 2$

$$n^2 - n - 2 = 0$$

$$(n-2)(n+1) = 0$$

$n = 2, \cancel{-1}$ (เลขชี้กำลังในพหุนามเป็นลบไม่ได้)

ดังนั้น $P(x)$ ต้องมีดีกรี 2 : ให้ $P(x) = ax^2 + bx + c$ เมื่อ $a \neq 0$

แทน $x = 0$ จะได้ $P(0) = a(0^2) + b(0) + c = c$

แต่จาก $(*)$ $P(0) = 0$ จะสรุปได้ว่า $c = 0$ → เหลือ $P(x) = ax^2 + bx$

แทนใน $P\big(P(x)\big) = x^2P(x)$

$$P(ax^2 + bx) = x^2(ax^2 + bx)$$

$$a(ax^2 + bx)^2 + b(ax^2 + bx) = ax^4 + bx^3$$

$$\underbrace{a(ax^2 + bx)^2 + bax^2}_{x \text{ กำลัง } 2 \text{ ขึ้นไป}} + \underbrace{b^2x}_{x \text{ กำลัง } 1 \text{ เพียงตัวเดียว}} = ax^4 + bx^3 \quad ...(**)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ของ x กำลัง 1 จะเห็นว่าฝั่งซ้ายคือ b^2x ในขณะที่ฝั่งขวาไม่มี x กำลัง 1 เลย

จึงสรุปได้ว่า $b^2 = 0$ จะได้ $b = 0$ → แทนใน $(**)$: $a(ax^2)^2 = ax^4$

$$a^3x^4 = ax^4$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้ $a^3 = a$

$a^3 - a = 0$

$a(a-1)(a+1) = 0$

$a = \cancel{0}, 1, -1$ 0 ใช้ไม่ได้ เพราะ $P(x)$ จะไม่ใช่ดีกรี 2

รวมคำตอบจากทุกกรณี จะได้ $P(x) = 0, x^2, -x^2$

จะได้ผลรวมค่าสัมบูรณ์ของ $P(10)$ คือ $|0| + |10^2| + |-10^2| = 200$

19. ให้ $f: [0,\infty) \to \mathbb{R}$ และ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = (x-3)(x+2)$ ตามลำดับ จงหาจำนวนเต็มที่เล็กที่สุดที่อยู่ในโดเมนของฟังก์ชัน $f \circ (g \circ (f \circ (g \circ f)))$

ตอบ 20

$$\begin{aligned}
f \circ (g \circ (f \circ (g \circ f)))(x) &= f(\,g(f(\quad g(f(x))\quad))\,) \\
&= f(\,g(f(\quad g(\sqrt{x})\quad))\,) \\
&= f(\,g(f((\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)))\,) \\
&= f\left(g\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}\right)\right) \\
&= f\left(\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}-3\right)\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}+2\right)\right) \\
&= \sqrt{\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}-3\right)\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}+2\right)}
\end{aligned}$$

ในรูทต้องไม่ติดลบ $\to \left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}-3\right)\underbrace{\left(\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)}+2\right)}_{\text{เป็นบวกเสมอ หารตลอดเพื่อตัดทิ้งได้}} \geq 0$

เหลือวงเล็บแรก :

$$\begin{aligned}
\sqrt{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2)} &\geq 3 \\
(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+2) &\geq 9 \quad \text{(} \geq 0 \text{ ทั้งสองฝั่ง } \to \text{ ยกกำลังสองได้)} \\
\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} - 6 &\geq 9 \\
\sqrt{x}^2 - \sqrt{x} + \tfrac{1}{4} &\geq 15 + \tfrac{1}{4} \quad \text{(เติม } \tfrac{1}{4} \text{ ทั้งสองข้าง เพื่อให้ฝั่งซ้ายเข้าสูตร } \text{น}^2 + 2\text{นล} + \text{ล}^2\text{)} \\
\left(\sqrt{x} - \tfrac{1}{2}\right)^2 &\geq \tfrac{61}{4}
\end{aligned}$$

$\sqrt{x} - \frac{1}{2} \geq \frac{\sqrt{61}}{2}$ หรือ $\sqrt{x} - \frac{1}{2} \leq -\frac{\sqrt{61}}{2}$

$\sqrt{x} \geq \frac{1+\sqrt{61}}{2}$ $\sqrt{x} \leq \frac{1-\sqrt{61}}{2}$ ✕

$x \geq \left(\frac{1+\sqrt{61}}{2}\right)^2$ (เป็นไปไม่ได้ เพราะฝั่งซ้ายเป็นบวกหรือศูนย์ แต่ฝั่งขวาติดลบ)

$= \frac{1+61+2\sqrt{61}}{4}$ $\sqrt{61}$ จะมีค่าอยู่ระหว่าง 7 ($=\sqrt{49}$) กับ 8 ($=\sqrt{64}$)

$= \frac{31+\sqrt{61}}{2} = \frac{31+7 \text{ กว่าๆ}}{2} = \frac{38 \text{ กว่าๆ}}{2} = 19 \text{ กว่าๆ} \to$ จำนวนเต็มที่เล็กที่สุดคือ 20

20. ให้ $\mathcal{F}$ เป็นเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั้งหมดจาก $\{1,2,3,4,5\}$ ไป $\{1,2,3,4,5\}$
สำหรับแต่ละ $f \in \mathcal{F}$ นิยาม $E(f) = \sum_{i=1}^{5} 2^i \delta_i(f)$ โดยที่ $\delta_i(f) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } f(i) = i \\ 0 & \text{เมื่อ } f(i) \neq i \end{cases}$
สมมติว่า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นสมาชิกทั้งหมดที่แตกต่างกันของ $\mathcal{F}$ จงหาค่าของ $\sum_{k=1}^{n} E(f_k)$

ตอบ 1488

$$\sum_{k=1}^{n} E(f_k) = E(f_1) + E(f_2) + E(f_3) + \ldots + E(f_n)$$
$$\begin{aligned} &= 2^1\delta_1(f_1) + 2^2\delta_2(f_1) + 2^3\delta_3(f_1) + 2^4\delta_4(f_1) + 2^5\delta_5(f_1) && \to E(f_1) \\ &+ 2^1\delta_1(f_2) + 2^2\delta_2(f_2) + 2^3\delta_3(f_2) + 2^4\delta_4(f_2) + 2^5\delta_5(f_2) && \to E(f_2) \\ &+ 2^1\delta_1(f_3) + 2^2\delta_2(f_3) + 2^3\delta_3(f_3) + 2^4\delta_4(f_3) + 2^5\delta_5(f_3) && \to E(f_3) \\ &+ \ldots \\ &+ 2^1\delta_1(f_n) + 2^2\delta_2(f_n) + 2^3\delta_3(f_n) + 2^4\delta_4(f_n) + 2^5\delta_5(f_n) && \to E(f_n) \end{aligned}$$

จับกลุ่มใหม่ตามการยกกำลังของ 2 แล้วดึงตัวร่วม 2 ที่ยกกำลังเท่ากันออกมา

$$\begin{aligned} &= 2^1\big(\delta_1(f_1) + \delta_1(f_2) + \delta_1(f_3) + \ldots + \delta_1(f_n)\big) \\ &+ 2^2\big(\delta_2(f_1) + \delta_2(f_2) + \delta_2(f_3) + \ldots + \delta_2(f_n)\big) \\ &+ 2^3\big(\delta_3(f_1) + \delta_3(f_2) + \delta_3(f_3) + \ldots + \delta_3(f_n)\big) \\ &+ 2^4\big(\delta_4(f_1) + \delta_4(f_2) + \delta_4(f_3) + \ldots + \delta_4(f_n)\big) \\ &+ 2^5\big(\delta_5(f_1) + \delta_5(f_2) + \delta_5(f_3) + \ldots + \delta_5(f_n)\big) \quad \ldots(*) \end{aligned}$$

พิจารณาวงเล็บแรกที่มี 2^1 คูณอยู่ (ของ δ_1) คือ $\delta_1(f_1) + \delta_1(f_2) + \delta_1(f_3) + \ldots + \delta_1(f_n)$
เนื่องจาก $\delta_1(f)$ จะเป็น 1 เมื่อ $f(1) = 1$ นอกนั้นเป็น 0
ดังนั้น $\delta_1(f_1) + \delta_1(f_2) + \delta_1(f_3) + \ldots + \delta_1(f_n)$ จะเท่ากับ "จำนวน $f \in \mathcal{F}$ ที่ $f(1) = 1$"
→ จะนับจำนวนฟังก์ชัน 1:1 จาก $\{1,2,3,4,5\}$ ไป $\{1,2,3,4,5\}$ ที่ $f(1) = 1$
2, 3, 4, 5 โยงไปยังตัวที่เหลือ ที่ไม่ซ้ำกับตัวก่อนหน้า จะโยงได้ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ แบบ
ดังนั้น $\delta_1(f_1) + \delta_1(f_2) + \delta_1(f_3) + \ldots + \delta_1(f_n) = 24$

ทำนองเดียวกัน วงเล็บที่มี 2^2 คูณอยู่ (ของ δ_2) คือ $\delta_2(f_1) + \delta_2(f_2) + \delta_2(f_3) + \ldots + \delta_2(f_n)$ จะเท่ากับจำนวน $f \in \mathcal{F}$ ที่ $f(2) = 2$ (เพราะ $\delta_2(f)$ จะเป็น 1 เมื่อ $f(2) = 2$ นอกนั้นเป็น 0)
→ 1, 3, 4, 5 โยงไปยังตัวที่เหลือ ที่ไม่ซ้ำกับตัวก่อนหน้า จะโยงได้ $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ แบบ เช่นกัน
ดังนั้น $\delta_2(f_1) + \delta_2(f_2) + \delta_2(f_3) + \ldots + \delta_2(f_n) = 24$

จะเห็นว่าวงเล็บอื่น ที่มี 2^3, 2^4 และ 2^5 คูณอยู่ ก็จะคิดในลักษณะเดียวกันได้ 24 เช่นกัน
แทน 24 ใน (*) จะได้ $= 2^1(24) + 2^2(24) + 2^3(24) + 2^4(24) + 2^5(24)$
$= (2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(24) = (62)(24) = 1488$

21. ให้ n เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $\log_{5n}(4n) = \log_{75}\left(24\sqrt{5}\right)$
จงหาค่าของ n^3

ตอบ 45

ใช้สูตร $\log_N M = \frac{\log M}{\log N}$ จะแปลงสมการได้เป็น $\frac{\log 4n}{\log 5n} = \frac{\log 24\sqrt{5}}{\log 75}$
เศษส่วนเท่ากัน แสดงว่าเศษส่วนหนึ่ง จะต้องสามารถถูกตัดด้วยค่า k ทั้งเศษและส่วน จนกลายเป็นอีกเศษส่วนหนึ่งได้
นั่นคือ $\log 4n = k \log 24\sqrt{5}$ และ $\log 5n = k \log 75$

$$\begin{aligned} \log 4n &= \log\left(24\sqrt{5}\right)^k & \log 5n &= \log 75^k \\ 4n &= \left(24\sqrt{5}\right)^k \quad \ldots(1) & 5n &= 75^k \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

$$(2)\div(1): \quad \frac{5n}{4n} = \frac{75^k}{(24\sqrt{5})^k} \quad\Rightarrow\quad \frac{\sqrt{5}^2}{2^2} = \left(\frac{\sqrt{5}^3}{2^3}\right)^k$$
$$\frac{5}{4} = \left(\frac{75}{24\sqrt{5}}\right)^k \qquad \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{3k}$$
$$\frac{5}{4} = \left(\frac{5\sqrt{5}}{8}\right)^k \qquad 2 = 3k$$
$$\frac{2}{3} = k$$

แทนค่า k ใน (2) : $5n = 75^{\frac{2}{3}}$ ยกกำลัง 3 ตลอด

$$5^3n^3 = 75^2$$
$$n^3 = \frac{75^2}{5^3} = 45$$

22. ให้ u เป็นผลบวกของจำนวนเชิงซ้อนทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $z^2 + iz|z+2| = |z| = 1$ จงหาค่าของ $\left|u\sqrt{3}+4i\right|^2$

<u>ตอบ</u> 7

ให้ $z = x + yi$ จะได้ $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = 1$

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2 \quad ...(*)$$

และจาก $z^2 + iz|z+2| = 1$ เพราะ $z\cdot\bar{z} = |z|^2 = 1^2 = 1$

$z^2 + iz|z+2| = z\cdot\bar{z}$ หารตลอดด้วย z (เนื่องจาก $|z|=1$ ดังนั้น $z\neq 0$)

$z + i|z+2| = \bar{z}$

$x + yi + i|z+2| = x - yi$

$i|z+2| = -2yi$

$|x+yi+2| = -2y$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2} = -2y$

$(x+2)^2 + y^2 = (-2y)^2$ เมื่อ $-2y \geq 0$ ...(**)

$(x+2)^2 = 3y^2$ จาก $(*)$

$x^2 + 4x + 4 = 3(1-x^2)$

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

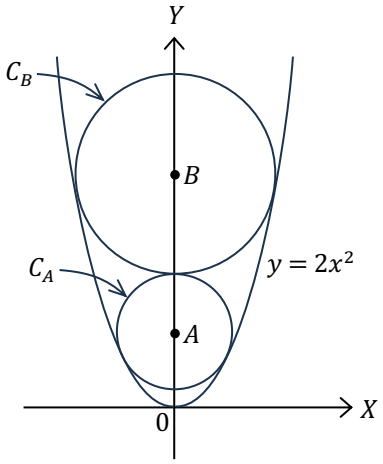
$(2x+1)^2 = 0$

$x = -\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ แทนใน $(*)$: $y^2 = 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$ จะได้ $y = \cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}$

ดังนั้น $\left|u\sqrt{3}+4i\right|^2 = \left|\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\sqrt{3}+4i\right|^2$

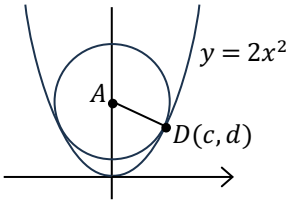
$$= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i + 4i \right|^2$$
$$= \left| -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i \right|^2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{28}{4} = 7$$

23. พิจารณาพาราโบลา P ที่มีสมการเป็น $y = 2x^2$ ให้ C_A เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$ และสัมผัสกับพาราโบลา P ให้ C_B เป็นวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $B(0,k)$ นอกจากนี้ วงกลม C_B สัมผัสกับวงกลม C_A และสัมผัสกับพาราโบลา P ดังรูป ถ้า $k = \frac{a}{b}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ จงหาค่าของ $100a + b$



ตอบ 1304

สมมติให้พาราโบลาสัมผัสวงกลม C_A ในจุดภาค 1 ที่ $D(c,d)$ ดังรูป



จากสมบัติของวงกลม รัศมี $\overline{AD}$ จะตั้งฉากกับเส้นสัมผัส $\rightarrow$ ความชันคูณกันได้ -1

จากพิกัด $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$ จะได้ ความชัน $AD = \frac{d-\frac{5}{4}}{c-0} = \frac{d-\frac{5}{4}}{c}$ ...(1)

ดิฟสมการพาราโบลา เพื่อหาความชันเส้นสัมผัส $y = 2x^2$

$y' = 4x$

จะได้ความชันเส้นสัมผัสที่ $D(c,d)$ คือ $4c$ ...(2)

(1) กับ (2) คูณกันได้ -1 : $\frac{d-\frac{5}{4}}{c} \cdot 4c = -1$

$d - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$

$d = 1$

แทน $y = d = 1$ ในพาราโบลา $y = 2x^2$ เพื่อหา c

$1 = 2c^2$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = c$ (จตุภาคที่ 1 ทำให้ $c > 0$)

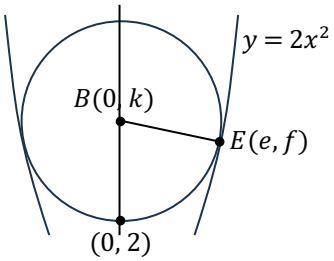
จะได้พิกัด $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right)$ $\rightarrow$ รัศมี $C_A = AD = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-0\right)^2 + \left(1-\frac{5}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4}$

$\rightarrow$ ขยับ $A\left(0,\frac{5}{4}\right)$ ขึ้นไป $\frac{3}{4}$ จะได้จุดสัมผัสของวงกลมทั้งสอง คือ $\left(0,\ \frac{5}{4}+\frac{3}{4}\right) = (0,2)$

$\rightarrow$ จากพิกัด $B(0,k)$ จะได้รัศมีของ C_B คือ $k-2$ เมื่อ $k > 2$ ...(*)

ทำแบบเดียวกันกับ C_B :

สมมติให้พาราโบลาสัมผัสวงกลม C_B ในจุดภาค 1 ที่ $E(e,f)$ ดังรูป



จะได้ความชัน $BE = \frac{f-k}{e-0} = \frac{f-k}{e}$ ...(3)

และจากความชันเส้นสัมผัสพาราโบลาที่เคยหา $y' = 4x$

จะได้ความชันเส้นสัมผัสที่ $E(e,f)$ คือ $4e$ ...(4)

(3) คูณ (4) ได้ -1 : $\frac{f-k}{e} \cdot 4e = -1$

$f - k = -\frac{1}{4}$

$f = k - \frac{1}{4}$

แทน $y = f = k - \frac{1}{4}$ ในพาราโบลา $y = 2x^2$ เพื่อหา e

$k - \frac{1}{4} = 2e^2$

$\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{8}} = e$ (จตุภาคที่ 1 ทำให้ $e > 0$)

จะได้พิกัด $E\left(\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{8}},\ k-\frac{1}{4}\right)$ $\rightarrow$ รัศมี $C_B = BE = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{8}}-0\right)^2 + \left(k-\frac{1}{4}-k\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{8} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{16}}$

แต่จาก $(*)$ รัศมีของ C_B คือ $k-2$ ดังนั้น $k-2 = \sqrt{\frac{k}{2}-\frac{1}{16}}$ เมื่อ $k>2$

$$k^2-4k+4 = \frac{k}{2}-\frac{1}{16}$$
$$k^2-\frac{9}{2}k+\frac{65}{16} = 0$$
$$\left(k-\frac{5}{4}\right)\left(k-\frac{13}{4}\right) = 0$$

เพราะ $k>2$ $\Rightarrow$ $k = \cancel{\frac{5}{4}}, \frac{13}{4} \rightarrow 100(13)+4 = 1304$

24. จงหาค่าสูงสุดที่เป็นไปได้ของผลคูณ xyz เมื่อ x, y และ z เป็นจำนวนจริงที่อยู่ในช่วงเปิด $(-9, 9)$ และสอดคล้องกับระบบสมการ

$$x+y+z = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi x}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi y}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi z}{3}\right) = 0$$

<u>ตอบ</u> 96

จะแยกตัวประกอบสมการที่สอง แล้วจับแต่ละตัว $= 0$

แทน $\frac{\pi x}{2}$, $\frac{\pi y}{2}$ และ $\frac{\pi z}{2}$ ด้วย A, B และ C จะได้ $\sin A + \sin B + \sin C = 0$

จาก $x+y+z = 0$
$x+y = -z$
$\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi y}{2} = -\frac{\pi z}{2}$
$A+B = -C$

$2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 0$

$2\sin\frac{-C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + \sin C = 0$ ใช้สูตรมุมสองเท่าให้ดึงตัวร่วม $\sin\frac{C}{2}$ ได้

$-2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2} + 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} = 0$

$-2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2} - \cos\frac{C}{2}\right) = 0$

$2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right) = 0$

$2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{-(A+B)}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\right) = 0$

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right)\right) = 0$

ใช้สูตร $\cos(\text{sum}) - \cos(\text{diff})$

$2\sin\frac{C}{2}\left(-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) = 0$

$-4\sin\frac{\pi x}{4}\sin\frac{\pi y}{4}\sin\frac{\pi z}{4} = 0$

ดังนั้น $\frac{\pi x}{4}$ หรือ $\frac{\pi y}{4}$ หรือ $\frac{\pi z}{4}$ ต้องอยู่ในรูป $n\pi$ นั่นคือ x หรือ y หรือ z ต้องหารด้วย 4 ลงตัว

ค่าในช่วง $(-9, 9)$ ที่หารด้วย 4 ลงตัว จะมีแค่ $-8, -4, 0, 4, 8$

ทำแบบเดียวกันกับสมการที่ 3 จะได้ x หรือ y หรือ z ต้องหารด้วย 6 ลงตัว ซึ่งจะมีแค่ $-6, 0, 6$

แต่ 0 ใช่ไม่ได้ เพราะจะทำให้ผลคูณ xyz เป็น 0

ดังนั้น ถ้าไม่สนเครื่องหมายบวกลบ จะต้องมีตัวหนึ่งเป็น 6 อีกตัวหนึ่งเป็น 4 หรือ 8

และตัวสุดท้ายต้องทำให้ $x+y+z = 0$

จะเห็นว่ามีแค่ 2 แบบที่ผลคูณ xyz เป็นบวก คือ $-6, 8, -2$ และ $6, -4, -2$

ซึ่งจะได้ค่า xyz ที่มากที่สุดคือ $(8)(-6)(-2) = 96$

25. ให้ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่นิยามโดย $a_0 = \frac{1}{10}$ และ

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^3 \text{ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก } n$$

หากทราบว่า $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$ แล้ว จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$

ตอบ 1000

จาก $a_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^3$ จะได้ $a_n = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 \quad \dots(*)$

เมื่อขยับ n เพิ่มไป 1 จะได้ $a_{n+1} = a_0^3 + a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_{n-1}^3 + a_n^3$ (จาก $(*)$)

$$= a_n + a_n^3$$

$$= a_n(1 + a_n^2)$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + a_n^2 \quad \dots(**)$$

ดังนั้น $\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{a_n}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \frac{a_n^2}{a_{n+1}} = \frac{1+a_n^2-1}{a_{n+1}} = \frac{\frac{a_{n+1}}{a_n}-1}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n\, a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}$

เติม 1 เข้าไป ให้ใช้ $(**)$ ได้

จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + \cdots + \frac{1}{a_N} - \frac{1}{a_{N+1}}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{N+1}}\right) = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{a_0^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{10}\right)^3}$$

โจทย์กำหนดให้ $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

$$= 1000$$

26. สำหรับพหุนาม $p(x)$ ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนดสัญลักษณ์

- $p^{(0)}(x) = p(x)$
- $p^{(n)}(x) = \frac{d}{dx}[p^{n-1}(x)]$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

ให้ $P(x) = (x+2)(x^2+2^2)(x^3+2^3)\dots(x^{100}+2^{100})$

นิยาม $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$

จงหาจำนวนตัวประกอบบวกทั้งหมดของ $Q(1) - Q(-1)$

ตอบ 5150

ให้ $P(x)$ กระจายแล้วเขียนในรูปพหุนามได้เป็น $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$ ถ้าดิฟไปเรื่อยๆ จะได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
P^{(0)}(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots \\
P^{(1)}(x) &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + 6a_5x^5 + \dots \\
P^{(2)}(x) &= 2a_2 + 3\cdot2a_3x + 4\cdot3a_4x^2 + 5\cdot4a_5x^3 + 6\cdot5a_5x^4 + \dots \\
P^{(3)}(x) &= 3\cdot2a_3 + 4\cdot3\cdot2a_4x + 5\cdot4\cdot3a_5x^2 + 6\cdot5\cdot4a_5x^3 + \dots \\
P^{(4)}(x) &= 4\cdot3\cdot2a_4 + 5\cdot4\cdot3\cdot2a_5x + 6\cdot5\cdot4\cdot3a_5x^2 + \dots \\
&\vdots
\end{aligned}$$

แทนผลดิฟนี้ใน $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P^{(2n)}(x)}{(2n)!}$ จะได้

$$\begin{aligned} Q(x) &= \tfrac{P^{(0)}(x)}{0!} + \tfrac{P^{(2)}(x)}{2!} + \tfrac{P^{(4)}(x)}{4!} + \dots \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots \\ &\quad + \tfrac{2}{2!}a_2 + \tfrac{3\cdot2}{2!}a_3x + \tfrac{4\cdot3}{2!}a_4x^2 + \tfrac{5\cdot4}{2!}a_5x^3 + \tfrac{6\cdot5}{2!}a_5x^4 + \dots \\ &\quad + \tfrac{4\cdot3\cdot2}{4!}a_4 + \tfrac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!}a_5x + \tfrac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!}a_5x^2 + \dots \\ &\quad + \vdots \end{aligned}$$

สังเกตว่า สัมประสิทธิ์ส่วนที่เป็นตัวเลข จะอยู่ในรูป $\frac{n \text{ คูณถอยไป } r \text{ ตัว}}{r!}$ ซึ่งจะเท่ากับ $\binom{n}{r}$ → เช่น $\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3}{4!} = \binom{6}{4}$

เขียน $Q(x)$ ใหม่ในรูป $\binom{n}{r}$ พร้อมกับแทน $x = 1$ และ -1 เพื่อหา $Q(1) - Q(-1)$ ตามที่โจทย์ถาม จะได้

$$\begin{aligned} Q(1) &= a_0 + a_1 + \tbinom{2}{0}a_2 + \tbinom{3}{0}a_3 + \tbinom{4}{0}a_4 + \tbinom{5}{0}a_5 + \tbinom{6}{0}a_6 + \dots \\ &\quad + \tbinom{2}{2}a_2 + \tbinom{3}{2}a_3 + \tbinom{4}{2}a_4 + \tbinom{5}{2}a_5 + \tbinom{6}{2}a_6 + \dots \\ &\quad + \tbinom{4}{4}a_4 + \tbinom{5}{4}a_5 + \tbinom{6}{4}a_6 + \dots \\ &\quad + \vdots \end{aligned}$$

เมื่อแทน $x = -1$ พจน์ที่เป็น $x^{คี่}$ จะกลายเป็นลบ

$$\begin{aligned} Q(-1) &= a_0 - a_1 + \tbinom{2}{0}a_2 - \tbinom{3}{0}a_3 + \tbinom{4}{0}a_4 - \tbinom{5}{0}a_5 + \tbinom{6}{0}a_6 - \dots \\ &\quad + \tbinom{2}{2}a_2 - \tbinom{3}{2}a_3 + \tbinom{4}{2}a_4 - \tbinom{5}{2}a_5 + \tbinom{6}{2}a_6 - \dots \\ &\quad + \tbinom{4}{4}a_4 - \tbinom{5}{4}a_5 + \tbinom{6}{4}a_6 - \dots \\ &\quad + \vdots \end{aligned}$$

$Q(1) - Q(-1)$ จะหักพจน์เลขคู่ที่เหมือนกันออก เหลือ

$$\begin{aligned} &= 2a_1 + 2\tbinom{3}{0}a_3 + 2\tbinom{5}{0}a_5 + 2\tbinom{7}{0}a_7 + \dots \\ &\quad + 2\tbinom{3}{2}a_3 + 2\tbinom{5}{2}a_5 + 2\tbinom{7}{2}a_7 + \dots \\ &\quad + 2\tbinom{5}{4}a_5 + 2\tbinom{7}{4}a_7 + \dots \\ &\quad + \vdots \\ &= 2a_1 + 2\left(\tbinom{3}{0} + \tbinom{3}{2}\right)a_3 + 2\left(\tbinom{5}{0} + \tbinom{5}{2} + \tbinom{5}{4}\right)a_5 + 2\left(\tbinom{7}{0} + \tbinom{7}{2} + \tbinom{7}{4} + \tbinom{7}{6}\right)a_7 + \dots \\ &\qquad 1 + 3 \;\vdots\; 1 + 10 + 5 \;\vdots\; 1 + 21 + 35 + 7 \\ &\qquad = 4 = 2^2 \;\vdots\; = 16 = 2^4 \;\vdots\; = 64 = 2^6 \\ &= 2a_1 + 2^3a_3 + 2^5a_5 + 2^7a_7 + \dots \quad \dots(*) \end{aligned}$$

จากบรรทัดแรก $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + \dots$

แทน $x = 2$: $P(2) = a_0 + 2a_1 + 2^2a_2 + 2^3a_3 + 2^4a_4 + 2^5a_5 + 2^6a_6 + \dots \quad \dots(1)$

แทน $x = -2$: $P(-2) = a_0 - 2a_1 + 2^2a_2 - 2^3a_3 + 2^4a_4 - 2^5a_5 + 2^6a_6 + \dots \quad \dots(2)$

$(1) - (2)$: $P(2) - P(-2) = 2(2a_1 + 2^3a_3 + 2^5a_5 + \dots)$ ↘ จาก $(*)$

$\frac{P(2)-P(-2)}{2} = Q(1) - Q(-1) \quad \dots(**)$

โจทย์กำหนดให้ $P(x) = (x+2)(x^2+2^2)(x^3+2^3)\dots(x^{100}+2^{100})$

ดังนั้น $P(2) = 2^2 \; 2^3 \; 2^4 \; \dots \; 2^{101} = 2^{\frac{100(2+101)}{2}} = 2^{5150}$

และ $P(-2) = 0$ (เพราะวงเล็บแรกได้ $-2 + 2 = 0$ คูณกับอะไรที่เหลือ ก็ได้ 0)

แทนใน $(**)$ จะได้ $Q(1) - Q(-1) = \frac{2^{5150} - 0}{2} = 2^{5149}$

ซึ่งจะมีตัวประกอบบวกคือ $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{5149}$ ทั้งหมด 5150 จำนวน

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร