ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 67)
วันอาทิตย์ที่ 10 พฤศจิกายน 2567 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ จงหาจำนวนสับเซต A ทั้งหมดของ $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $n(A) < n(A')$

2. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^3 + \frac{1}{z^3} = z^2 + \frac{1}{z^2} \right\}$

3. สมมติว่ายูเนียนของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{25 - x^2} + \sqrt[4]{y - 4} = 3 \right\}$ เท่ากับ $[a, b] \cup [c, d]$ จงหาค่าของ $a + b + c + d$

4. ในอาณาจักรแห่งหนึ่ง มีประชากรทั้งหมด $15{,}000$ คน ทุกคนในอาณาจักรนี้เป็น “ผู้พิทักษ์แห่งลม” หรือ “ปราชญ์แห่งแสง” หรืออาจเป็นทั้งสองอย่างพร้อมกัน จากการสำรวจสำมะโนประชากร พบว่า
   - ทุกคนที่เป็นผู้พิทักษ์แห่งลมจะต้องไม่เป็นคนที่พูดความจริงเสมอ เนื่องจากพวกเขามีภารกิจในการรักษาความสงบและคอยปกปิดความลับที่แท้จริงของอาณาจักร
   - หากใครไม่เป็นคนที่พูดความจริงเสมอ คนผู้นั้นจะไม่สามารถเป็นปราชญ์แห่งแสงได้ เนื่องจากปราชญ์แห่งแสงมีภารกิจในการเปิดเผยความจริงและนำแสงสว่างมาสู่อาณาจักร
   - มีคนที่พูดความจริงเสมอเพียง $6{,}000$ คน

   จงหาผลต่างระหว่างจำนวนผู้พิทักษ์แห่งลมและปราชญ์แห่งแสงในอาณาจักรแห่งนี้

5. กำหนดให้ $P(x) = \left(x^{10^0} + x^{10^1} + x^{10^2} + \cdots + x^{10^9}\right)^9$
   ให้ A เป็นจำนวนหลักของ $P'(1)$ และ B เป็นผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของ $P'(1)$ เมื่อเขียนในฐานสิบ
   จงหาค่าของ $A + B$

6. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}} - x\sqrt{2}\right)$

7. กำหนดให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว สมมติว่า $z^3 = 8$ และ $0 < \theta < \pi$ จงหาค่าของ $2024r + \cos\theta + \cos(2\theta) + \cos(3\theta) + \cdots + \cos(2567\theta)$

8. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติโดยที่ $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ และ $|3\vec{u} + 2\vec{v}| = 6$ จงหาค่าของ $|\vec{u} \times \vec{v}|^2$

9. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตของสะสม 6 แบบ โดยสุ่มผลิตของสะสมต่างแบบกัน 2 ชิ้นแล้วบรรจุในซองทึบ ให้ p แทนความน่าจะเป็นในการผลิตของสะสมบรรจุซองจำนวน 3 ซองแล้วได้ของสะสมครบทุกแบบ จงหาค่าของ $900p$

10. จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต

$$\left\{9x^2-16y^2 \,\middle|\, x,y \text{ เป็นจำนวนจริงซึ่ง } \sqrt{(x+25)^2+y^2}-\sqrt{(x-25)^2+y^2}=40\right\}$$

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

11. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวน 7 จำนวน ได้แก่ $3, 2, 11, 10, 13, 9$ และ x
จงหาค่า x ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากัน

12. นิยามฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+3}}$ สำหรับทุก $x\geq 0$ สมมติว่า $f^{-1}(2)=a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$
โดยที่ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง b และ d เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่าของ $a+b+c+d$

13. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็น 0 หรือ 1 และ $\det A \neq 0$
จงหาว่า A มีสมาชิกเป็น 1 ได้มากสุดกี่ตัว

14. ร้านค้าแห่งหนึ่งมีจำนวนลูกค้าในแต่ละวันเป็นตัวแปรสุ่ม N โดยค่าของ N ที่เป็นไปได้คือ $40, 41, \ldots, 50$ และแต่ละค่าเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน สมมติว่าแต่ละวันจะมีฝนตก มีเมฆมาก หรือมีแดดออก เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น โดยมีความน่าจะเป็นคือ $10\%, 60\%$ และ 30% ตามลำดับ นอกจากนี้
- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่ฝนตกมีค่าเป็น $\frac{1}{5}$
- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่มีเมฆมากมีค่าเป็น $\frac{1}{20}$
- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่มีแดดออกมีค่าเป็น $\frac{1}{10}$

สมมติว่าจำนวนลูกค้าที่เข้าร้านไม่ขึ้นกับสภาพอากาศ และในแต่ละวันลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มไม่เกิน 1 คัน (โดยร้านค้าจะเตรียมจำนวนร่มไว้พอขายเสมอ) ถ้าร่มราคาคันละ 100 บาท จงหาค่าคาดหมายของรายได้จากการขายร่มในแต่ละวันของร้านค้าแห่งนี้

15. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ และ $C = \{3, 4\}$
ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C
จงหาจำนวนของคู่อันดับของฟังก์ชัน (f, g) ทั้งหมดที่ทำให้ $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

16. พิจารณาชุดข้อมูล $3, 6, 9, 12, \ldots, 3n$ ถ้าข้อมูลที่มีค่า x หายไประหว่างเก็บข้อมูล ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $n-1$ ตัวที่เหลือมีค่าเป็น $\frac{88}{3}$ แล้ว จงหาค่าของ x

17. กรวยสำหรับดื่มน้ำใบหนึ่งเป็นกรวยตรง มีรัศมี 3.5 เซนติเมตร และสูง 9 เซนติเมตร ตู้กดน้ำสำหรับกรวยนี้มีอัตราการไหลของน้ำคงที่ พบว่าใช้เวลาทั้งหมด 7.2 วินาทีในการเติมน้ำให้เต็มกรวยพอดี (โดยขณะเติมน้ำ ปากกรวยจะต้องขนานกับพื้นราบเสมอ) สำหรับแต่ละ $t \in [0, 7.2]$ ให้ $f(t)$ เป็นความสูงของน้ำในกรวย (หน่วยเซนติเมตร) เมื่อผ่านไป t วินาทีหลังจากเริ่มเปิดน้ำ จงหาค่าของ $\int_0^{72} f\left(\frac{x}{10}\right)\, dx$

18. กำหนดให้ $A = \{3, 8, 9\}$, $B = \{0, 1\}$ และ $C = \{2, 4\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต

$$\{\, (x, y) \in A \times \mathbb{N} \mid \forall w \in B\ \forall z \in C[(x - y > w) \wedge (x - y \geq z)] \,\}$$

19. กำหนดให้ $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| - |z - 8 - 6i| = 8 \}$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก k

$$B_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{2567}{k} \right\}$$

จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวก k ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ตัวที่ทำให้ $A \cap B_k \neq \emptyset$

20. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ สมมติว่า k เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$(I + 9A)^{99} = I + kA^2$$

จงหาผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของ k เมื่อเขียนในฐานสิบ

<u>ตอนที่ 3</u> มี 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน

21. กำหนดให้ $S = \left\{ |z| \,\middle|\, z \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ } |z^2 + 5z| = 6 \right\}$

สมมติว่า $S = [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup \ldots \cup [a_{2k-1}, a_{2k}]$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_{2k-1} < a_{2k}$

จงหาค่าของ $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + (2k-1)a_{2k-1} + (2k)a_{2k}$

22. สำหรับจำนวนจริง x ให้ $\lfloor x \rfloor$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x เช่น $\lfloor 20.24 \rfloor = 20$ และ $\lfloor 3 \rfloor = 3$ จงหาค่าของอนุกรมลู่เข้า

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}}$$

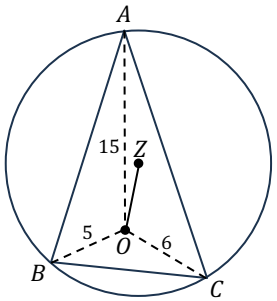
คำแนะนำ : สำหรับลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ของจำนวนจริงและลำดับเพิ่มแท้ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ของจำนวนเต็มบวก ถ้าอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{b_n} a_k$

23. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2567 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน และเป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ $P(x) = 0$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์

- $P^{(0)}(x) = P(x)$
- $P^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[P^{(n-1)}(x)\right]$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \ldots, k$ ให้ n_i เป็นจำนวนเต็มบวกเล็กสุดที่ $P^{(n_i)}(x_i) \neq 0$
จงหาค่า k ที่ทำให้ผลคูณ $n_1 n_2 n_3 \ldots n_k$ มีค่ามากที่สุด

24. ให้ O เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่ $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB$ สมมติว่า $OA = 15,\ OB = 5$ และ $OC = 6$ ถ้า Z แทนจุดศูนย์กลางวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C แล้ว จงหาค่าของ OZ^2



25. ให้ F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -4x$ และสำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \ldots, 90$ ให้ ℓ_n เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด F และทำมุม n องศาในทิศทวนเข็มนาฬิกากับแกนสมมาตรของพาราโบลาดังกล่าว นอกจากนี้ ให้ d_n เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายเป็นจุดตัดทั้งสองของ ℓ_n กับพาราโบลา จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{90} \frac{8}{d_n}$

เฉลย

1. 93	8. 27	15. 480	22. 110
2. 5	9. 24	16. 42	23. 856
3. 80	10. 3,600	17. 486	24. 31
4. 3,000	11. 22	18. 9	25. 91
5. 108	12. 24	19. 285	
6. 506	13. 7	20. 891	
7. 4,047	14. 360	21. 38	

แนวคิด

1. กำหนดให้ $\mathcal{U}=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ จงหาจำนวนสับเซต A ทั้งหมดของ $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติว่า $n(A)<n(A')$

ตอบ 93

เนื่องจาก A' คือส่วนที่เหลือนอกเหนือจาก A ดังนั้น $n(A)<n(A')$ เมื่อ A มีจำนวนสมาชิกน้อยกว่าครึ่งหนึ่งของ $\mathcal{U}$
เนื่องจาก $\mathcal{U}$ มีสมาชิก 8 ตัว ดังนั้น A ต้องมีสมาชิกน้อยกว่า 4 ตัว นั่นคือ $n(A)=0,1,2,3$
สับเซตของ $\mathcal{U}$ ที่มีสมาชิก r ตัว จะได้จากการเลือก r ตัว จากสมาชิกทั้งหมด 8 ตัวของ $\mathcal{U}$ จะมีจำนวนแบบ $=\binom{8}{r}$ แบบ
ดังนั้น จะมี A ที่เป็นไปได้ทั้งหมด $\binom{8}{0}+\binom{8}{1}+\binom{8}{2}+\binom{8}{3} = 1+8+\frac{8\cdot7}{1\cdot2}+\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}$
$= 1+8+28+56 = 93$ แบบ

2. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต $\left\{ z\in\mathbb{C} \,\middle|\, z^3+\frac{1}{z^3}=z^2+\frac{1}{z^2} \right\}$

ตอบ 5

$$\begin{aligned} z^3+\tfrac{1}{z^3} &= z^2+\tfrac{1}{z^2} \\ z^3-z^2-\tfrac{1}{z^2}+\tfrac{1}{z^3} &= 0 \\ z^2(z-1)-\tfrac{1}{z^3}(z-1) &= 0 \\ \left(z^2-\tfrac{1}{z^3}\right)(z-1) &= 0 \\ \left(\tfrac{z^5-1}{z^3}\right)(z-1) &= 0 \end{aligned}$$

จะได้ $z^5=1$ หรือ $z=1$ โดยที่ $z\neq0$
แต่จะเห็นว่า $z=1$ ทำให้สมการ $z^5=1$ เป็นจริง และ $z=0$ ไม่ทำให้สมการ $z^5=1$ เป็นจริง
นั่นคือ คำตอบของสมการ $z^5=1$ จะรวม $z=1$ ไปด้วยแล้ว และไม่รวม $z=0$
ดังนั้น คำตอบของสมการนี้ จะเหมือนกับคำตอบของสมการ $z^5=1$ ซึ่งจากสมบัติของราก จะมี 5 คำตอบ

3. สมมติว่ายูเนียนของโดเมนและเรนจ์ของความสัมพันธ์ $\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \,\middle|\, \sqrt{25-x^2}+\sqrt[4]{y-4}=3 \right\}$ เท่ากับ $[a,b]\cup[c,d]$ จงหาค่าของ $a+b+c+d$

ตอบ 80

หาโดเมน : $\sqrt{25-x^2}+\sqrt[4]{y-4} = 3$

$\sqrt{25-x^2} = 3-\sqrt[4]{y-4}$ ↘ $\sqrt[4]{\ } \geq 0$ เสมอ

ในรูทต้อง ≥ 0 → $\sqrt{25-x^2} \leq 3$

$0 \leq 25-x^2 \leq 9$ ↘ ลบ 25 ตลอด แล้ว คูณ -1 ตลอด (ต้องสลับ น้อยกว่า → มากกว่า)

$25 \geq x^2 \geq 16$

$25 \geq x^2$ มีคำตอบคือ $[-5,5]$ และ $x^2 \geq 16$ มีคำตอบคือ $(-\infty,-4]\cup[4,\infty)$

อินเตอเซกกัน จะได้โดเมนคือ $[-5,-4] \cup [4,5]$ ...(1)

หาเรนจ์ : $\sqrt{25-x^2} + \sqrt[4]{y-4} = 3$

$\sqrt[4]{y-4} = 3 - \sqrt{25-x^2}$

ใน $\sqrt[4]{\ }$ ต้อง ≥ 0 $\quad \sqrt[4]{y-4} \leq 3$ $\quad$ $\sqrt{\ } \geq 0$ เสมอ

$0 \leq y-4 \leq 81$

$4 \leq y \leq 85$ $\rightarrow$ จะได้เรนจ์คือ $[4,85]$ ...(2)

(1) ยูเนียน (2) จะได้เป็น $[-5,-4] \cup [4,85]$

เทียบกับ $[a,b] \cup [c,d]$ จะได้ $a+b+c+d = (-5)+(-4)+4+85 = 80$

4. ในอาณาจักรแห่งหนึ่ง มีประชากรทั้งหมด $15{,}000$ คน ทุกคนในอาณาจักรนี้เป็น “ผู้พิทักษ์แห่งลม” หรือ “ปราชญ์แห่งแสง” หรืออาจเป็นทั้งสองอย่างพร้อมกัน จากการสำรวจสำมะโนประชากร พบว่า
   - ทุกคนที่เป็นผู้พิทักษ์แห่งลมจะต้องไม่เป็นคนที่พูดความจริงเสมอ เนื่องจากพวกเขามีภารกิจในการรักษาความสงบและคอยปกปิดความลับที่แท้จริงของอาณาจักร
   - หากใครไม่เป็นคนที่พูดความจริงเสมอ คนผู้นั้นจะไม่สามารถเป็นปราชญ์แห่งแสงได้ เนื่องจากปราชญ์แห่งแสงมีภารกิจในการเปิดเผยความจริงและนำแสงสว่างมาสู่อาณาจักร
   - มีคนที่พูดความจริงเสมอเพียง $6{,}000$ คน

   จงหาผลต่างระหว่างจำนวนผู้พิทักษ์แห่งลมและปราชญ์แห่งแสงในอาณาจักรแห่งนี้

ตอบ $3{,}000$

จะแทน “ผู้พิทักษ์แห่งลม” ด้วย “ลม” และแทน “ปราชญ์แห่งแสง” ด้วย “แสง”

พิจารณาคนพูดความจริงเสมอ $6{,}000$ คน

$\rightarrow$ จากข้อมูลข้อแรก “ลม” ต้องไม่พูดความจริงเสมอ ดังนั้น $6{,}000$ คนนี้ จะเป็น “ลม” ไม่ได้

$\rightarrow$ ทุกคนต้องเป็น “ลม” หรือ “แสง” (หรืออาจเป็นทั้งสองอย่าง) ดังนั้น ถ้าเป็น “ลม” ไม่ได้ จะต้องเป็น “แสง” เท่านั้น

$\rightarrow$ สรุปได้ทันทีว่า $6{,}000$ คนนี้ ต้องเป็น “แสง”

ที่เหลือจาก $6{,}000$ คน (มีทั้งหมด $15{,}000$ คน) คือ $9{,}000$ คน จะไม่เป็นคนที่พูดความจริงเสมอ

$\rightarrow$ จากข้อมูลข้อสอง คนที่ไม่พูดความจริงเสมอ จะเป็น “แสง” ไม่ได้

$\rightarrow$ สรุปได้ทันทีว่า $9{,}000$ คนนี้ ต้องเป็น “ลม”

จึงมี “แสง” $6{,}000$ คน และมี “ลม” $9{,}000$ คน รวมได้ $15{,}000$ คน จึงไม่มีคนที่เป็นทั้งสองอย่าง

จะได้ผลต่างระหว่าง “ลม” และ “แสง” คือ $9{,}000 - 6{,}000 = 3{,}000$ คน

5. กำหนดให้ $P(x) = \left(x^{10^0} + x^{10^1} + x^{10^2} + \cdots + x^{10^9}\right)^9$

   ให้ A เป็นจำนวนหลักของ $P'(1)$ และ B เป็นผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของ $P'(1)$ เมื่อเขียนในฐานสิบ

   จงหาค่าของ $A+B$

ตอบ 108

ใช้กฎลูกโซ่ จะได้

$P'(x) = 9\left(x^{10^0} + x^{10^1} + \cdots + x^{10^9}\right)^8 \left(10^0 x^{10^0-1} + 10^1 x^{10^1-1} + 10^2 x^{10^2-1} + \cdots + 10^9 x^{10^9-1}\right)$

$P'(1) = 9(1 + 1 + \cdots + 1)^8 (10^0 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^9)$

$= 9(10)^8 (1{,}111{,}111{,}111)$ ($1{,}111{,}111{,}111$ มี 10 หลัก)

$= 999{,}999{,}999{,}900{,}000{,}000$ ($999{,}999{,}999{,}900{,}000{,}000$ มี 10 หลัก และ 8 หลัก)

ดังนั้น $P'(1)$ มี 18 หลัก และมีผลบวกเลขโดด $= 9 \times 10 = 90$ จะได้ $A+B = 18+90 = 108$

6. จงหาค่าของ $\lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}-x\sqrt{2}\right)$

ตอบ 506

$$\lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}-x\sqrt{2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}-x\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}+x\sqrt{2}}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}+x\sqrt{2}}$$ ← คูณคอนจูเกตเพื่อกำจัดรูท

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(x^2+\sqrt{x^4+2024}-2x^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}+x\sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(\sqrt{x^4+2024}-x^2\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^4+2024}+x^2}{\sqrt{x^4+2024}+x^2}$$ ← คูณคอนจูเกตเพื่อกำจัดรูท

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(x^4+2024-x^4\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+2024}}+x\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^4+2024}+x^2}$$

$$= \lim_{x\to\infty} x^3\sqrt{2}\left(2024\right)\cdot\frac{1}{x\left(\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{2024}{x^4}}}+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{1}{x^2\left(\sqrt{1+\frac{2024}{x^4}}+1\right)}$$ ← ดึง x กำลังสูงสุด ออกจากส่วน เพื่อตัดกับเศษ $x\to\infty$ เป็นบวก

$$= \lim_{x\to\infty} \sqrt{2}\left(2024\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{2024}{x^4}}}+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2024}{x^4}}+1}$$

$$= \sqrt{2}\left(2024\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+0}}+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}$$

$$= \sqrt{2}\left(2024\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = 506$$

7. กำหนดให้ $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้ว สมมติว่า $z^3=8$ และ $0<\theta<\pi$ จงหาค่าของ $2024r+\cos\theta+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(2567\theta)$

ตอบ 4,047

หารากที่ 3 ของ 8 → เขียน 8 ในรูปเชิงขั้วได้เป็น $8\operatorname{cis}0°$ → จะได้รากแรกคือ $\sqrt[3]{8}\operatorname{cis}\frac{0°}{3} = 2\operatorname{cis}0°$

อีก 2 รากที่เหลือ จะได้จากการเพิ่มมุมทีละ $\frac{360°}{3}=120°$ → จะได้อีก 2 รากที่เหลือคือ $2\operatorname{cis}120°$ และ $2\operatorname{cis}240°$

โจทย์ต้องการ $0<\theta<\pi$ → มี $2\operatorname{cis}120°$ เท่านั้น ที่มุมอยู่ระหว่าง 0 กับ $180°$ → $r=2$ และ $\theta=120°$

เนื่องจาก $3\theta=360°$ วนกลับมาที่ $0°$ ดังนั้นลำดับ $\theta, 2\theta, 3\theta, \ldots$ จะวนซ้ำทุกๆ 3 ตัว

และจะเห็นว่า $\cos\theta+\cos(2\theta)+\cos(3\theta) = \cos120°+\cos240°+\cos0°$

$$= \left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+1 = 0$$

และเนื่องจาก 2567 หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 ดังนั้น $\cos\theta+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(2567\theta)$ จะจับกลุ่มซ้ำ 3 ตัวบวกกันเป็น 0 รัวๆ โดยจะเหลือ 2 ตัวท้าย ซึ่งจะมีผลบวก $= \left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $2024r+\cos\theta+\cos(2\theta)+\cos(3\theta)+\cdots+\cos(2567\theta) = 2024(2)+(-1) = 4047$

8. กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติโดยที่ $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ และ $|3\vec{u}+2\vec{v}|=6$ จงหาค่าของ $|\vec{u}\times\vec{v}|^2$

ตอบ 27

$$|3\vec{u}+2\vec{v}|^2 = |3\vec{u}|^2+|2\vec{v}|^2+2(3\vec{u}\cdot2\vec{v})$$
$$|3\vec{u}+2\vec{v}|^2 = |3\vec{u}|^2+|2\vec{v}|^2+12|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$
$$6^2 = (3\cdot2)^2+(2\cdot3)^2+12(2)(3)\cos\theta$$
$$-\frac{1}{2} = \cos\theta$$

$$|\vec{u}\times\vec{v}|^2 = (|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta)^2$$
$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2\sin^2\theta$$
$$= |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2(1-\cos^2\theta)$$
$$= 2^2\,3^2\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right) = 27$$

9. โรงงานแห่งหนึ่งผลิตของสะสม 6 แบบ โดยสุ่มผลิตของสะสมต่างแบบกัน 2 ชิ้นแล้วบรรจุในซองทึบ ให้ p แทนความน่าจะเป็นในการผลิตของสะสมบรรจุซองจำนวน 3 ซองแล้วได้ของสะสมครบทุกแบบ จงหาค่าของ $900p$

ตอบ 24

จำนวนแบบทั้งหมด : เลือก 2 แบบจาก 6 แบบ ได้ $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$ แบบ
สุ่ม 3 ซอง จะได้จำนวนแบบ $= 15^3$ แบบ

จำนวนแบบที่อยากได้ : ซองแรก เลือก 2 แบบจาก 6 แบบ ได้ $\binom{6}{2} = 15$ แบบ
ซองที่สอง ต้องไม่ซ้ำกับซองแรก จะเหลือ 4 แบบให้เลือก $\rightarrow$ เหลือ $\binom{4}{2} = \frac{4\times3}{2} = 6$ แบบ
ซองที่สาม เลือกไม่ได้แล้ว ต้องใส่ 2 แบบที่เหลือ
จะได้จำนวนแบบท $= 15 \times 6$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $p = \frac{15\times6}{15^3} = \frac{2}{5\times15} \rightarrow 900p = \frac{2}{5\times15}\times 900 = 24$

10. จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของเซต

$$\left\{9x^2 - 16y^2 \;\middle|\; x, y \text{ เป็นจำนวนจริงซึ่ง } \sqrt{(x+25)^2+y^2} - \sqrt{(x-25)^2+y^2} = 40\right\}$$

ตอบ 3,600

$\sqrt{(x+25)^2+y^2} = \sqrt{(x-(-25))^2+(y-0)^2}$ = ระยะจากจุด (x,y) ไป $(-25,0)$
$\sqrt{(x-25)^2+y^2} = \sqrt{(x-25)^2+(y-0)^2}$ = ระยะจากจุด (x,y) ไป $(25,0)$

ดังนั้น เงื่อนไขของเซตนี้คือ ระยะจากจุด (x,y) ไป $(-25,0)$ มากกว่า ระยะจากจุด (x,y) ไป $(25,0)$ อยู่ 40
ซึ่งจะคล้ายกับสมบัติของไฮเพอร์โบลา “ผลต่างของระยะจากจุดบนกราฟไปจุดโฟกัส จะเท่ากับความยาวแกนตามขวาง”
ดังนั้น เงื่อนไขของเซตนี้ จะ “เป็นส่วนหนึ่งของ” กราฟไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดโฟกัส $(\pm25,0)$ และมีแกนตามขวางยาว 40
(ผลต่าง คือ ตัวมากตั้งลบตัวน้อย แต่เงื่อนไขของเซตนี้ เอาระยะไป $(-25,0)$ เป็นตัวตั้งเท่านั้น)

จะได้ $c = 25$ และ $a = \frac{40}{2} = 20$ ดังนั้น $b = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$

ดังนั้น เงื่อนไขของเซตนี้ จะสอดคล้องกับสมการ $\frac{x^2}{20^2} - \frac{y^2}{15^2} = 1$

$$\frac{3^2x^2 - 4^2y^2}{60^2} = 1$$
$$9x^2 - 16y^2 = 3600$$

11. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวน 7 จำนวน ได้แก่ $3, 2, 11, 10, 13, 9$ และ x
จงหาค่า x ที่ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่ามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากัน

ตอบ 22

มัธยฐาน จะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4$

เรียงข้อมูล 4 ตัวแรก แบบยังไม่มี x จะได้ $2, 3, 9, 10 \rightarrow$ หากเพิ่ม x เข้าไป ตำแหน่งของข้อมูลหลังจาก x จะเลื่อนเพิ่มไป 1 ตำแหน่ง ดังนั้น มัธยฐาน จะมีค่าได้ตั้งแต่ 9 ถึง 10 เท่านั้น

ดังนั้น ค่าเฉลี่ย จะมีค่าได้ตั้งแต่ 9 ถึง 10 ด้วย $\rightarrow 9 \le \frac{3+2+11+10+13+9+x}{7} \le 10$

$$63 \le 48 + x \le 70$$
$$15 \le x \le 22$$

ดังนั้น x จะอยู่ในตำแหน่งท้ายๆ ไม่กระทบกับ 4 ตัวแรก $\rightarrow$ จะได้มัธยฐาน $= 10$

แก้สมการ $\frac{3+2+11+10+13+9+x}{7} = 10$ จะพบว่าตัวเลขเหมือนกับอสมการด้านขวาที่เพิ่งแก้ไป $\rightarrow x = 22$

12. นิยามฟังก์ชัน $f(x)=\sqrt{x\sqrt{2}+\sqrt{x^2+3}}$ สำหรับทุก $x\geq 0$ สมมติว่า $f^{-1}(2)=a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ โดยที่ a,b,c,d เป็นจำนวนเต็ม ซึ่ง b และ d เป็นจำนวนเฉพาะ จงหาค่าของ $a+b+c+d$

ตอบ 24

ให้ $f^{-1}(2)=k$ จะได้ $f(k)=2$

$$\begin{aligned}\sqrt{k\sqrt{2}+\sqrt{k^2+3}} &= 2\\ k\sqrt{2}+\sqrt{k^2+3} &= 4\\ \sqrt{k^2+3} &= 4-k\sqrt{2}\\ k^2+3 &= 16-8\sqrt{2}k+2k^2\\ 0 &= k^2-8\sqrt{2}k+13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4-k\sqrt{2} &\geq 0\\ 2\sqrt{2} &\geq k \quad ...(*)\end{aligned}$$

ใช้สูตรคำตอบสมการกำลังสอง $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ จะได้ $k=\frac{-(-8\sqrt{2})\pm\sqrt{(-8\sqrt{2})^2-4(1)(13)}}{2(1)}$

$$=\frac{8\sqrt{2}\pm\sqrt{128-52}}{2}=4\sqrt{2}\pm\sqrt{19}$$

เช็คเงื่อนไข : $4\sqrt{2}+\sqrt{19}>2\sqrt{2}\rightarrow$ ไม่ผ่าน $(*)$

$k>0$

$$\begin{aligned}4\sqrt{2}-\sqrt{19} &< 2\sqrt{2} \quad ?\\ \sqrt{32}-\sqrt{19} &< 2\sqrt{2}\\ 32-2\sqrt{32\cdot 19}+19 &< 8\\ 44 &< 2\sqrt{32\cdot 19}\\ 11 &< \sqrt{8\cdot 19}\\ 121 &< 152 \quad \checkmark\end{aligned}$$

ดังนั้น $k=4\sqrt{2}-\sqrt{19}$ เทียบกับ $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ จะได้ $a+b+c+d=4+2+(-1)+19=24$

13. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ขนาด 3×3 ที่สมาชิกแต่ละตัวเป็น 0 หรือ 1 และ $\det A\neq 0$ จงหาว่า A มีสมาชิกเป็น 1 ได้มากสุดกี่ตัว

ตอบ 7

ไม่มี 0 เลย หรือ มี 0 หนึ่งตัว ไม่ได้แน่นอน เพราะจะมีสองแถวที่เป็น 1 ทั้งแถวเหมือนกัน ทำให้ det เป็น 0

ถ้าให้มี 0 สองตัว $\rightarrow$ พยายามหลบให้ไม่มีแถวหรือหลักซ้ำกัน

จะเห็นว่า $\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=(1+1+0)-(1+0+0)=1\neq 0$

ดังนั้น A จะมี 1 ได้มากที่สุด 7 ตัว

14. ร้านค้าแห่งหนึ่งมีจำนวนลูกค้าในแต่ละวันเป็นตัวแปรสุ่ม N โดยค่าของ N ที่เป็นไปได้คือ $40, 41, \ldots, 50$ และแต่ละค่าเกิดขึ้นด้วยความน่าจะเป็นเท่ากัน สมมติว่าแต่ละวันจะมีฝนตก มีเมฆมาก หรือมีแดดออก เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น โดยมีความน่าจะเป็นคือ $10\%, 60\%$ และ 30% ตามลำดับ นอกจากนี้

- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่ฝนตกมีค่าเป็น $\frac{1}{5}$
- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่มีเมฆมากมีค่าเป็น $\frac{1}{20}$
- ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มในวันที่มีแดดออกมีค่าเป็น $\frac{1}{10}$

สมมติว่าจำนวนลูกค้าที่เข้าร้านไม่ขึ้นกับสภาพอากาศ และในแต่ละวันลูกค้าแต่ละคนจะซื้อร่มไม่เกิน 1 คัน (โดยร้านค้าจะเตรียมจำนวนร่มไว้พอขายเสมอ) ถ้าร่มราคาคันละ 100 บาท จงหาค่าคาดหมายของรายได้จากการขายร่มในแต่ละวันของร้านค้าแห่งนี้

ตอบ 360

เนื่องจากจำนวนลูกค้า ไม่ขึ้นกับสภาพอากาศ $\rightarrow$ จะแยกคิดค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้า แล้วค่อยเอามาคูณทีหลังได้

นั่นคือ ค่าคาดหมายรายได้ = ค่าคาดหมายของจำนวนร่มที่ขายได้ × ราคาร่ม
= ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าซื้อร่ม × ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้า × ราคาร่ม ...(∗)

ความน่าจะเป็นที่ลูกค้าซื้อร่ม ต้องแบ่งคิดตามอากาศ $= 10\% \times \frac{1}{5} + 60\% \times \frac{1}{20} + 30\% \times \frac{1}{10}$
$= 2\% + 3\% + 3\% = 8\%$

ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้า $\rightarrow 40, 41, \dots, 50$ มี $50 - 40 + 1 = 11$ จำนวน

เนื่องจากแต่ละจำนวนมีความน่าจะเป็นเท่ากัน $\rightarrow$ ความน่าจะเป็นของแต่ละค่า $= \frac{1}{11}$

จะได้ค่าคาดหมายของจำนวนลูกค้า $= \frac{1}{11} \cdot 40 + \frac{1}{11} \cdot 41 + \dots + \frac{1}{11} \cdot 50$
$= \frac{1}{11}(40 + 41 + \cdots + 50)$
$= \frac{1}{11}\left(\frac{11}{2}(40 + 50) \right) = 45$ คน

แทนใน $(*)$ จะได้ ค่าคาดหมายรายได้ $= 8\% \times 45 \times 100 = \frac{8}{100} \times 45 \times 100 = 360$ บาท

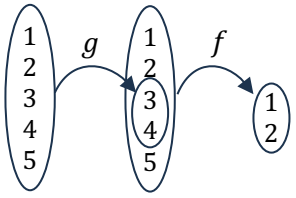
15. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ และ $C = \{3, 4\}$
ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ g เป็นฟังก์ชันจาก A ไป C
จงหาจำนวนของคู่อันดับของฟังก์ชัน (f, g) ทั้งหมดที่ทำให้ $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ตอบ 480

$f \circ g$ คือ g โยงก่อน แล้ว f โยงต่อ

g โยงจาก $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ไป $C = \{3, 4\}$

f โยงจาก $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ไป $B = \{1, 2\}$ จะวาด $f \circ g$ ได้ดังรูป



จะเห็นว่า $f \circ g$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง เมื่อ ทั้ง 3 และ 4 ในชั้นกลาง ถูก g โยงไปครบ
และ f โยง 3 และ 4 ต่อ ไปที่ทั้ง 1 และ 2 ในชั้นทางขวา

จำนวนแบบของ g ที่โยงไปทั้ง 3 และ 4 = จำนวนแบบทั้งหมด − จำนวนแบบที่โยงไป 3 เท่านั้น หรือ 4 เท่านั้น

5 ตัวในชั้นทางซ้าย เลือกโยงไป 3 หรือ 4 ได้ตัวละ 2 แบบ

โยงไป 3 เท่านั้น ได้ 1 แบบ
โยงไป 4 เท่านั้น ได้ 1 แบบ

$= 2^5 - 2 = 30$ แบบ

จำนวนแบบที่ f โยง 3 และ 4 ไปที่ทั้ง 1 และ 2 : เลือกโยง 3 ไปที่ 1 หรือ 2 ได้ 2 แบบ
โยง 4 ไปตัวที่เหลือ ที่ 3 ไม่ได้โยงไป เลือกไม่ได้ (ได้ 1 แบบ)
ตัวที่เหลือ 1, 2, 5 เลือกโยงไป 1 หรือ 2 ก็ได้ ได้ตัวละ 2 แบบ
จะได้จำนวนแบบ $= 2 \times 1 \times 2^3 = 16$

จะได้จำนวนแบบของ f และ g ทั้งหมด $= 30 \times 16 = 480$ แบบ

16. พิจารณาชุดข้อมูล $3, 6, 9, 12, \dots, 3n$ ถ้าข้อมูลที่มีค่า x หายไประหว่างเก็บข้อมูล ทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล $n - 1$ ตัวที่เหลือมีค่าเป็น $\frac{88}{3}$ แล้ว จงหาค่าของ x

ตอบ 42

x คือข้อมูลที่หายไป ดังนั้น $x =$ ผลบวกข้อมูลทุกตัว − ผลบวกข้อมูล $n - 1$ ตัวที่เหลือ ...$(*)$

ข้อมูล $n - 1$ ตัวที่เหลือ มีค่าเฉลี่ย $\frac{88}{3}$ ดังนั้น ผลบวก $n - 1$ ตัวที่เหลือ $= \frac{88(n-1)}{3}$

แต่ข้อมูลทุกตัวหารด้วย 3 ลงตัว ดังนั้น $\frac{88(n-1)}{3}$ ต้องหารด้วย 3 ลงตัวด้วย

จะสรุปได้ว่า $n - 1$ ต้องหารด้วย 9 ลงตัว $\rightarrow$ ให้ $n = 9k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

จะได้ผลบวก $n - 1$ ตัวที่เหลือ $= \frac{88(9k+1-1)}{3} = 88(3k)$

ผลบวกของทุกตัว $= 3 + 6 + 9 + \cdots + 3n = 3(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{3(9k+1)(9k+2)}{2}$

แทนใน $(*)$ จะได้ $x = \frac{3(9k+1)(9k+2)}{2} - 88(3k)$ ...$(**)$

แต่ x เป็นข้อมูลตัวหนึ่งใน $3, 6, 9, 12, \ldots, 3n$ ดังนั้น
$$\begin{aligned} 3 &\le x &&\le 3n \\ 3 &\le \tfrac{3(9k+1)(9k+2)}{2} - 88(3k) &&\le 3(9k+1) \\ 1 &\le \tfrac{(9k+1)(9k+2)}{2} - 88k &&\le 9k+1 \\ 88k+1 &\le \tfrac{(9k+1)(9k+2)}{2} &&\le 97k+1 \\ 176k+2 &\le 81k^2+27k+2 &&\le 194k+2 \\ 149k &\le 81k^2 &&\le 167k \\ 149 &\le 81k &&\le 167 \end{aligned}$$
เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม จึงสรุปได้ว่า $k = 2$

แทนใน $(**)$ จะได้ $x = \frac{3(18+1)(18+2)}{2} - 88(6) = 570 - 528 = 42$

17. กรวยสำหรับดื่มน้ำใบหนึ่งเป็นกรวยตรง มีรัศมี 3.5 เซนติเมตร และสูง 9 เซนติเมตร ตู้กดน้ำสำหรับกรวยนี้มีอัตราการไหลของน้ำคงที่ พบว่าใช้เวลาทั้งหมด 7.2 วินาทีในการเติมน้ำให้เต็มกรวยพอดี (โดยขณะเติมน้ำ ปากกรวยจะต้องขนานกับพื้นราบเสมอ) สำหรับแต่ละ $t \in [0, 7.2]$ ให้ $f(t)$ เป็นความสูงของน้ำในกรวย (หน่วยเซนติเมตร) เมื่อผ่านไป t วินาทีหลังจากเริ่มเปิดน้ำ จงหาค่าของ $\int_0^{72} f\left(\frac{x}{10}\right) dx$

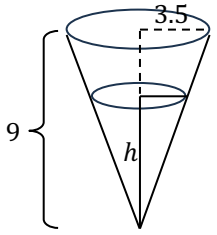
ตอบ 486

กรวยมีปริมาตร $= \frac{1}{3}\pi(3.5)^2(9)$ ลบ.ซม. ใช้เวลา 7.2 วินาที จะได้น้ำเต็มกรวย

ดังนั้น เมื่อผ่านไป t วินาที จะได้ปริมาตรน้ำ $= \frac{t}{7.2} \cdot \frac{1}{3}\pi(3.5)^2(9)$ ...$(*)$

สมมติให้น้ำในกรวยสูง h ซม. เมื่อผ่านไป t วินาที

จากสามเหลี่ยมคล้าย ขณะที่น้ำสูง h ซม. จะได้รัศมีของผิวน้ำ $= \frac{3.5}{9}h$ ซม.



จะได้ปริมาตรน้ำ $= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3.5}{9}h\right)^2 h = \frac{t}{7.2} \cdot \frac{1}{3}\pi(3.5)^2(9)$ จาก $(*)$
$$\begin{aligned} h^3 &= \tfrac{t}{7.2} \cdot 9^3 \\ h &= 9 \cdot \sqrt[3]{\tfrac{t}{7.2}} \end{aligned}$$

ดังนั้น $f(t) = 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{t}{7.2}}$ จะได้ $\int_0^{72} f\left(\frac{x}{10}\right) dx = \int_0^{72} 9 \cdot \sqrt[3]{\frac{x}{10(7.2)}}\, dx$
$$\begin{aligned} &= \tfrac{9}{\sqrt[3]{72}} \cdot \tfrac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} \Big|_0^{72} \\ &= \tfrac{9}{\sqrt[3]{72}} \cdot \tfrac{3}{4}\left(72^{\frac{4}{3}}\right) = 9 \cdot \tfrac{3}{4} \cdot 72 = 486 \end{aligned}$$

18. กำหนดให้ $A = \{3, 8, 9\}$, $B = \{0, 1\}$ และ $C = \{2, 4\}$ จงหาจำนวนสมาชิกของเซต
$$\{ (x, y) \in A \times \mathbb{N} \mid \forall w \in B\ \forall z \in C[(x - y > w) \wedge (x - y \ge z)] \}$$

ตอบ 9

คือ $x = 3, 8, 9$ และ y เป็นจำนวนนับ

โดยที่ $x - y$ ต้องมากกว่าทุกตัวใน B และ มากกว่าหรือเท่ากับทุกตัวใน C

ดังนั้น $x - y$ ต้องมากกว่า 1 และ มากกว่าหรือเท่ากับ 4

(เพราะตัวมากสุดใน B และ C คือ 1 และ 4 ตามลำดับ)

นั่นคือ $x - y$ ต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 4

$x = 3$ จะหา y ที่เป็นจำนวนนับไม่ได้ $x = 8$ จะมี $y = 4, 3, 2, 1$ $x = 9$ จะมี $y = 5, 4, 3, 2, 1$

รวมทุกกรณี จะมี (x, y) ทั้งหมด 9 แบบ

19. กำหนดให้ $A = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| - |z-8-6i| = 8 \}$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก k

$$B_k = \left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, |z| = \frac{2567}{k} \right\}$$

จงหาว่ามีจำนวนเต็มบวก k ที่แตกต่างกันทั้งหมดกี่ตัวที่ทำให้ $A \cap B_k \neq \emptyset$

ตอบ 285

ให้ $z = x + yi$ จะได้ $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$ = ระยะทางจาก (x,y) ไปยัง $(0,0)$

และ $|z-8-6i| = |x-8+(y-6)i| = \sqrt{(x-8)^2+(y-6)^2}$ = ระยะทางจาก (x,y) ไปยัง $(8,6)$

ดังนั้น เงื่อนไขของ A คือ ระยะจากจุด (x,y) ไป $(0,0)$ − ระยะจากจุด (x,y) ไป $(8,6) = 8$

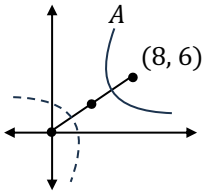
จะคล้ายกับสมบัติของไฮเพอร์โบลา “ผลต่างของระยะจากจุดบนกราฟไปจุดโฟกัสทั้งสอง เท่ากับความยาวแกนตามขวาง”

ดังนั้น A จะคล้ายกับไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดโฟกัส $(0,0)$ และ $(8,6)$

และมีแกนตามขวางยาว 8 ...(*)

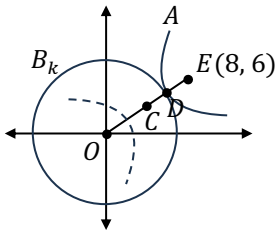
เงื่อนไขของ A จะเอาระยะจากจุด (x,y) ไป $(0,0)$ เป็นตัวตั้ง

ดังนั้น A จะเป็นไฮเพอร์โบลา เส้นที่อยู่ห่างจาก $(0,0)$ มากกว่า $(8,6)$ ดังรูป



เงื่อนไขของ B_k คือ $|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \frac{2567}{k}$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $\frac{2567}{k}$

จะเห็นว่า $A \cap B_k \neq \emptyset$ เมื่อวงกลม B_k ใหญ่พอจะมาแตะเส้นกราฟของ A ดังรูป



นั่นคือ รัศมี $\frac{2567}{k} > OC + CD$

$$\frac{2567}{k} > \frac{OE}{2} + \frac{\text{แกนตามขวาง}}{2}$$

$$\frac{2567}{k} > \frac{\sqrt{8^2+6^2}}{2} + \frac{8}{2} \quad \text{จาก (*)}$$

$$\frac{2567}{9} > k$$

$\frac{2567}{9}$ ได้ 285 กว่าๆ ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก k ตั้งแต่ $1, 2, \ldots, 285$ ทั้งหมด 285 จำนวน

20. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ และ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ สมมติว่า k เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ

$$(I+9A)^{99} = I + kA^2$$

จงหาผลบวกของเลขโดดทั้งหมดของ k เมื่อเขียนในฐานสิบ

ตอบ 891

จะเห็นว่า $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-2 & 2-1 \\ -4+2 & -2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} = A$

สังเกตรูปแบบการซ้ำของ $(I+9A)^n$

$$\begin{aligned}
(I+9A)^2 &= (I+9A)(I+9A) \\
&= I + 9A + 9A + 9(9)A \\
&= I + 9A + 9(10)A \qquad = I + 99A \\
(I+9A)^3 &= (I+99A)(I+9A) \\
&= I + 9A + 99A + 99(9)A \\
&= I + 9A + 99(10)A \qquad = I + 999A \\
(I+9A)^4 &= (I+999A)(I+9A) \\
&= I + 9A + 999A + 999(9)A \\
&= I + 9A + 999(10)A \quad = I + 9999A \\
&\vdots
\end{aligned}$$

จะเห็นว่าเราสามารถทำซ้ำแบบนี้ต่อไปได้เรื่อยๆ ดังนั้น $(I+9A)^{99} = I + \overbrace{999\ldots9}^{99 \text{ ตัว}}A = 1 + kA$

จะได้ k คือ 9 เรียงกัน 99 ตัว $\rightarrow$ ผลบวกเลขโดด $= 9(99) = 891$

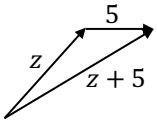
21. กำหนดให้ $S = \left\{ |z| \,\middle|\, z \text{ เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ } |z^2+5z| = 6 \right\}$
สมมติว่า $S = [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4] \cup \ldots \cup [a_{2k-1}, a_{2k}]$ เมื่อ $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_{2k-1} < a_{2k}$
จงหาค่าของ $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + \ldots + (2k-1)a_{2k-1} + (2k)a_{2k}$

ตอบ 38

ข้อนี้ สนใจแค่ค่า $|z|$ → ต้องเปลี่ยนตัวแปร ให้อยู่ในรูป $|z|$:

$$\begin{aligned} |z^2+5z| &= 6 \\ |z(z+5)| &= 6 \\ |z||z+5| &= 6 \\ |z+5| &= \tfrac{6}{|z|} \quad \ldots(*) \end{aligned}$$

เนื่องจากการบวกจำนวนเชิงซ้อน สามารถมองเป็นรูปสามเหลี่ยมได้
ดังนั้น เราสามารถระบุขอบเขตของ $|z+5|$ ด้วยสมบัติของสามเหลี่ยมได้
ในสามเหลี่ยมใดๆ ด้านแต่ละด้าน ต้องไม่ยาวกว่าผลบวกของอีกสองด้าน
และ ต้องไม่สั้นกว่าผลต่างของอีกสองด้าน



(ไม่งั้น จุดปลายของด้านที่สาม จะวกกลับมาต่อกับจุดเริ่มของด้านแรกไม่ได้)
นั่นคือ ถ้า a, b และ c เป็นความยาวด้านของสามเหลี่ยมแล้ว $a \le b + c$ และ $a \ge b - c$
และ $a \ge c - b$
(เพราะไม่รู้ว่า b ยาวกว่า c หรือไม่)

$$\begin{aligned} a &\le b+c \\ |z+5| &\le |z|+5 \quad \text{จาก } (*) \\ \tfrac{6}{|z|} &\le |z|+5 \\ 0 &\le |z|^2+5|z|-6 \\ 0 &\le (|z|+6)(|z|-1) \\ |z| &\in (-\infty,-6) \cup [1,\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &\ge b-c \\ |z+5| &\ge |z|-5 \\ \tfrac{6}{|z|} &\ge |z|-5 \\ 0 &\ge |z|^2-5|z|-6 \\ 0 &\ge (|z|-1)(|z|-6) \\ |z| &\in [1,6] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &\ge c-b \\ |z+5| &\ge 5-|z| \\ \tfrac{6}{|z|} &\ge 5-|z| \\ |z|^2-5|z|+6 &\ge 0 \\ (|z|-2)(|z|-3) &\ge 0 \\ |z| &\in (-\infty,2] \cup [3,\infty) \end{aligned}$$

เมื่อรวมทั้ง 3 เงื่อนไข จะได้ $|z| \in [1,2] \cup [3,6]$ → ตอบ $1 + 2(2) + 3(3) + 4(6) = 38$

22. สำหรับจำนวนจริง x ให้ $\lfloor x \rfloor$ เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่มีค่าไม่เกิน x เช่น $\lfloor 20.24 \rfloor = 20$ และ $\lfloor 3 \rfloor = 3$
จงหาค่าของอนุกรมลู่เข้า

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}}$$

คำแนะนำ : สำหรับลำดับ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ของจำนวนจริงและลำดับเพิ่มแท้ $b_1, b_2, b_3, \ldots$ ของจำนวนเต็มบวก
ถ้าอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ลู่เข้า แล้ว $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{b_n} a_k$

ตอบ 110

เมื่อ $1 \le k \le 9$: จะได้ $\lfloor \log k \rfloor = 0$ ดังนั้น $\frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}} = \frac{99 \cdot 0}{100^0} = 0$

เมื่อ $10 \le k \le 99$: จะได้ $\lfloor \log k \rfloor = 1$ ดังนั้น $\frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}} = \frac{99 \cdot 1}{100^1}$
มี $99 - 10 + 1 = 90$ ตัว → จะได้ผลบวก $= 90 \cdot \frac{99 \cdot 1}{100^1} = \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10}$

เมื่อ $100 \le k \le 999$: จะได้ $\lfloor \log k \rfloor = 2$ ดังนั้น $\frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}} = \frac{99 \cdot 2}{100^2}$
มี $999 - 100 + 1 = 900$ ตัว → จะได้ผลบวก $= 900 \cdot \frac{99 \cdot 2}{100^2} = \frac{9 \cdot 99 \cdot 2}{10^2}$

เมื่อ $1000 \le k \le 9999$: จะได้ $\lfloor \log k \rfloor = 3$ ดังนั้น $\frac{99 \cdot \lfloor \log k \rfloor}{100^{\lfloor \log k \rfloor}} = \frac{99 \cdot 3}{100^3}$

มี $9999 - 1000 + 1 = 9000$ ตัว $\rightarrow$ จะได้ผลบวก $= 9000 \cdot \frac{99 \cdot 3}{100^3} = \frac{9 \cdot 99 \cdot 3}{10^3}$

$\vdots$

ซึ่งจากคำแนะนำที่โจทย์ให้ เราจะหาผลบวกทีละ 9 , 99 , 999 , 9999 , ... ตัว เพื่อหาอนุกรมอนันต์ที่โจทย์ถามได้

$$k = \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 2}{10^2} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 3}{10^3} + \dots$$

เป็นอนุกรมผสม ต้องคูณ $\frac{1}{10}$ ตลอด ให้ตำแหน่งเลื่อน

$$\frac{k}{10} = \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10^2} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 2}{10^3} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 3}{10^4} + \dots$$

เอาบรรทัดแรก ลบด้วยบรรทัดที่สอง จะกำจัดส่วนที่เป็นอนุกรมเลขคณิตได้

$$\frac{9k}{10} = \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10^2} + \frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10^3} + \dots$$

อนุกรมเรขาคณิตอนันต์ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r}$

$$\frac{9k}{10} = \frac{\frac{9 \cdot 99 \cdot 1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 99$$

$$k = 110$$

23. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 2567 ที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง สมมติว่า $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ เป็นจำนวนจริงที่แตกต่างกัน และเป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ $P(x) = 0$ เมื่อกำหนดสัญลักษณ์

- $P^{(0)}(x) = P(x)$
- $P^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[P^{(n-1)}(x)\right]$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็มบวก n

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, 3, \dots, k$ ให้ n_i เป็นจำนวนเต็มบวกเล็กสุดที่ $P^{(n_i)}(x_i) \neq 0$

จงหาค่า k ที่ทำให้ผลคูณ $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ มีค่ามากที่สุด

<u>ตอบ</u> 856

เนื่องจาก x_i เป็นคำตอบของสมการ $P(x) = 0$ ดังนั้น $P(x)$ ต้องมี $(x - x_i)$ เป็นตัวประกอบ

ในการหา n_i เราจะหาว่าต้องดิฟ $P(x)$ ไปกี่ครั้ง จึงจะทำให้ $P^{(n_i)}(x_i)$ เลิกเป็น 0

สังเกตว่า ตราบใดที่ดิฟแล้วยังเหลือ $(x - x_i)$ คูณอยู่ในทุกพจน์ แล้ว $P^{(n_i)}(x_i)$ ก็จะยังเป็น 0 อยู่

เนื่องจากการดิฟแต่ละครั้ง เลขชี้กำลังของ x จะลดลงทีละ 1

ดังนั้น ยิ่ง $(x - x_i)$ ถูกยกกำลังมาก ก็จะยิ่งต้องดิฟหลายครั้ง กว่า $(x - x_i)$ จะหายไปหมด

เช่น ถ้า $P(x) = (x - x_i)^2 Q(x)$

$P'(x) = (x - x_i)^2 Q'(x) + 2(x - x_i)Q(x)$ $\rightarrow$ มี $(x - x_i)$ คูณอยู่ในทุกตัวที่บวกกัน ดังนั้น $P'(x_i)$ จะยังเป็น 0 อยู่

ถ้าดิฟต่อ เนื่องจาก $(x - x_i)^2 Q'(x)$ มี $(x - x_i)^2$ อยู่เหมือนเดิม

ดังนั้น ดิฟแล้ว ก็จะยังมี $(x - x_i)$ คูณอยู่ในทุกตัวที่บวกกันเหมือนเดิม

แต่ $(x - x_i)$ ใน $2(x - x_i)Q(x)$ เหลือแค่กำลัง 1 แล้ว

ถ้าดิฟต่อ จะได้ $2(x - x_i)Q'(x) + 2Q(x)$ จะเห็นว่า $2Q(x)$ ไม่มี $x - x_i$ คูณอยู่แล้ว

ดังนั้น ต้องดิฟ 2 ครั้ง จึงจะทำให้ $P^{(2)}(x_i)$ เลิกเป็น 0

จะเห็นว่า การดิฟแต่ละครั้ง จะมีพจน์หนึ่งที่เลขชี้กำลังของ $(x - x_i)$ จะลดลงเรื่อยๆ

จึงสรุปได้ว่า ต้องดิฟ $(x - x_i)^m Q(x)$ ทั้งหมด m ครั้ง จึงจะทำให้ $P^{(m)}(x_i)$ เลิกเป็น 0

เนื่องจาก $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ เป็นคำตอบทั้งหมดของสมการ $P(x) = 0$

ดังนั้น $P(x)$ ต้องอยู่ในรูป $a(x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_k)^{m_k}$

ต้องดิฟ m_i ครั้ง จึงจะทำให้ $P^{(m_i)}(x_i)$ เลิกเป็น 0 $\rightarrow$ $n_i = m_i$ นั่นเอง

เนื่องจาก $P(x)$ มีดีกรี 2567 ดังนั้น $m_1 + m_2 + \dots + m_k = 2567$

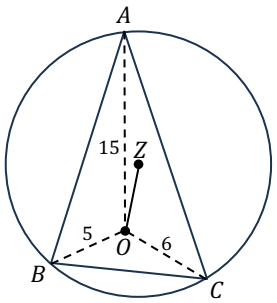
ต้องหาค่า k ที่ทำให้ $m_1 m_2 m_3 \dots m_k$ มีค่ามากที่สุด

สังเกตว่า ถ้าเอาตัวเลขที่มากกว่า 1 มาคูณกัน จะมากกว่าหรือเท่ากับ เอาสองตัวนั้นมาบวกกันเสมอ $(ab \geqslant a + b)$

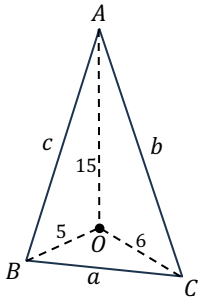
ดังนั้น ยิ่งแตก 2567 เป็นผลบวกของตัวเลขที่มากกว่า 1 ได้มากเท่าไหร่ จะยิ่งทำให้ผลคูณมีค่ามากขึ้น

เนื่องจาก 2 และ 3 ไม่สามารถแตกเป็นผลบวกของเลขที่มากกว่า 1 ได้ และ เนื่องจาก $2\times2\times2 < 3\times3$
ดังนั้น ต้องแตก 2567 เป็นผลบวกของ 3 ให้ได้มากที่สุด แล้วส่วนที่เหลือ ค่อยแตกเป็นผลบวกของ 2
เนื่องจาก $2567 = 3(855) + 2(1)$ จึงต้องมี 3 อยู่ 855 ตัว และมี 2 อยู่ 1 ตัว $\rightarrow$ มี m_i ทั้งหมด 856 ตัว

24. ให้ O เป็นจุดภายในรูปสามเหลี่ยม ABC โดยที่ $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB$ สมมติว่า $OA = 15,\ OB = 5$ และ $OC = 6$ ถ้า Z แทนจุดศูนย์กลางวงกลมที่ผ่านจุด A, B และ C แล้ว จงหาค่าของ OZ^2



<u>ตอบ</u> 31



แบ่งมุมรอบจุด O เป็นสามส่วน จะได้ $\angle BOC = \angle COA = \angle AOB = \frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$
หาความยาวด้านทั้ง 3 ของสามเหลี่ยมด้วยกฎของ cos จะได้

$a^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6)\cos 120^\circ$
$= 25 + 36 - 60\left(-\frac{1}{2}\right)$ $\rightarrow a = \sqrt{91} = \sqrt{7}\sqrt{13}$

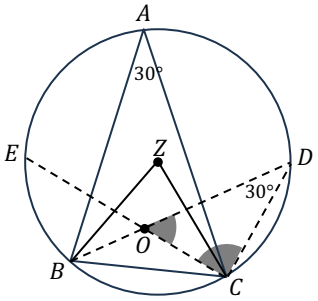
$b^2 = 15^2 + 6^2 - 2(15)(6)\cos 120^\circ$
$= 3^2\left(5^2 + 2^2 - 2(5)(2)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ $\rightarrow b = 3\sqrt{39} = 3\sqrt{3}\sqrt{13}$

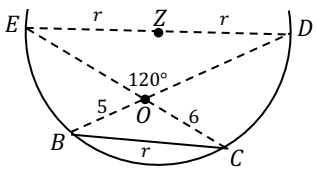
$c^2 = 15^2 + 5^2 - 2(15)(5)\cos 120^\circ$
$= 5^2\left(3^2 + 1^2 - 2(3)(1)\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ $\rightarrow c = 5\sqrt{13}$

เมื่อรู้ด้านทั้งสาม จะใช้กฎของ cos เพื่อหามุมของสามเหลี่ยม ABC ได้
ถ้าจะหาแค่มุม สามารถหาจากสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน โดยการทอน $\sqrt{13}$ ออกทุกด้าน เหลือ $\sqrt{7}$, $3\sqrt{3}$ และ 5 ได้
(ต้องลองทั้ง 3 มุม : $\frac{7+25-27}{2(\sqrt{7})(5)}$, $\frac{7+27-5}{2(\sqrt{7})(3\sqrt{3})}$, $\frac{27+25-7}{2(3\sqrt{3})(5)}$ แล้วดูว่ามุมไหนถอด cos ได้)

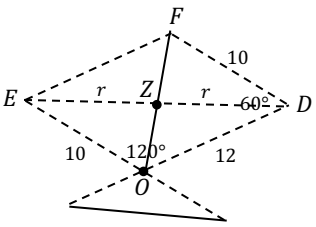
จะเห็นว่า $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{27+25-7}{2(3\sqrt{3})(5)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้น $\angle A = 30^\circ$

ต่อ $\overline{BO}$ และ $\overline{CO}$ ไปที่ D และ E ดังรูป
พิจารณา ΔDOC จะได้ $\angle D = \angle A = 30^\circ$
และ $\angle DOC = 180^\circ - \angle BOC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
จะเหลือ $\angle DCO = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ$
ดังนั้น $\angle DCE = 90^\circ$ ด้วย ทำให้ $\overline{ED}$ ต้องเป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง และผ่าน Z
พิจารณา ΔZBC จะได้ $\angle Z = 2(\angle A) = 2(30^\circ) = 60^\circ$
เนื่องจาก Z เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้ $ZB = ZC$ ทำให้ ΔZBC เป็น Δ ด้านเท่า
ดังนั้น $BC = ZB = ZC = ZE = ZD$





ลาก $\overline{ED}$ ผ่าน Z ดังรูป จากสมบัติของวงกลม จะได้ $\angle E = \angle B$ และ $\angle D = \angle C$
และ $\angle EOD = \angle BOC = 120^\circ$
ดังนั้น ΔOED คล้ายกับ ΔOBC ซึ่งจะได้ว่า $\frac{OE}{5} = \frac{OD}{6} = \frac{ED}{BC} = \frac{2r}{r} = 2$
ดังนั้น $OE = 10$ และ $OD = 12$



ต่อ $\overline{OZ}$ ออกไปยาวหนึ่งเท่าที่ F จะได้ สี่เหลี่ยม $ODFE$ เป็นด้านขนาน (เพราะเส้นแทยงมุมแบ่งครึ่งซึ่งกันและกัน)

จะได้ $FD = 10$ และ $\angle FDO = 180° - 120° = 60°$

ใช้กฎของ cos จะได้ $OF^2 = 10^2 + 12^2 - 2(10)(12)\cos 60°$
$= 100 + 144 - 120 = 124$

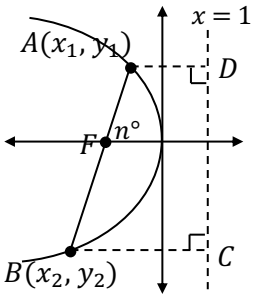
ดังนั้น $OZ^2 = \left(\frac{OF}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{124}}{2}\right)^2 = 31$

25. ให้ F เป็นจุดโฟกัสของพาราโบลา $y^2 = -4x$ และสำหรับแต่ละ $n = 1, 2, \ldots, 90$ ให้ ℓ_n เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด F และทำมุม n องศาในทิศทวนเข็มนาฬิกากับแกนสมมาตรของพาราโบลาดังกล่าว นอกจากนี้ให้ d_n เป็นความยาวของส่วนของเส้นตรงที่มีจุดปลายเป็นจุดตัดทั้งสองของ ℓ_n กับพาราโบลา จงหาค่าของ $\sum_{n=1}^{90} \frac{8}{d_n}$

<u>ตอบ</u> 91

เป็นพาราโบลาแบบตะแคงซ้าย เมื่อเทียบกับรูปสมการ $y^2 = -4cx$ จะได้ $c = 1$

ดังนั้น พิกัดของ F คือ $(-1, 0)$ และเส้นไดเรคตริกมีสมการคือ $x = 1$



ให้ ℓ_n ตัดพาราโบลาตามรูป จะได้ $d_n = AB$
$= AF + FB$ (สมบัติพาราโบลา)
$= AD + BC$
$= (1 - x_1) + (1 - x_2)$
$= 2 - (x_1 + x_2)$ ...(*)

ℓ_n ผ่าน $(-1, 0)$ และทำมุม $n°$ จะมีความชัน $= \tan n°$ จะได้สมการ ℓ_n คือ $\frac{y-0}{x-(-1)} = \tan n°$
$y = (\tan n°)(x + 1)$

หาจุดตัด → แทน ℓ_n ในสมการพาราโบลา จะได้ $(\tan^2 n°)(x + 1)^2 = -4x$
$(\tan^2 n°)x^2 + (2\tan^2 n° + 4)x + \tan^2 n° = 0$

ใช้สูตรผลบวกคำตอบ $-\frac{b}{a}$ จะได้ผลบวกคำตอบ $x_1 + x_2 = -\frac{2\tan^2 n°+4}{\tan^2 n°} = -2 - \frac{4}{\tan^2 n°}$

แทนใน (*) จะได้ $d_n = 2 - \left(-2 - \frac{4}{\tan^2 n°}\right) = 4 + \frac{4\cos^2 n°}{\sin^2 n°} = \frac{4(\sin^2 n° + \cos^2 n°)}{\sin^2 n°} = \frac{4}{\sin^2 n°}$

จะได้ $\sum_{n=1}^{90} \frac{8}{d_n} = \sum_{n=1}^{90} \frac{8\sin^2 n°}{4} = \sum_{n=1}^{90} 2\sin^2 n° = 2(\sin^2 1° + \sin^2 2° + \cdots + \sin^2 90°)$ ...(**)

จะเห็นว่า $\sin^2 1° + \sin^2 89° = \sin^2 1° + \cos^2 1° = 1$
$\sin^2 2° + \sin^2 88° = \sin^2 2° + \cos^2 2° = 1$
$\vdots$
$\sin^2 44° + \sin^2 46° = \sin^2 44° + \cos^2 44° = 1$
} 44 คู่

ดังนั้น $(**) = 2(44 + \sin^2 45° + \sin^2 90°) = 2\left(44 + \frac{1}{2} + 1\right) = 91$