ข้อสอบสมาคมคณิตศาสตร์แห่งประเทศไทย ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (พ.ย. 66)
วันอาทิตย์ที่ 19 พฤศจิกายน 2566 เวลา 9.00 - 12.00 น.

ตอนที่ 1 มี 10 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^7 จากการกระจายทวินามของ $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^8$ *(ตอบในรูปของจำนวนเต็ม)*

2. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่ทำให้มุมระหว่างเวกเตอร์ $(2,2,x-2)$ และ $(2,x-2,2)$ มีค่าเป็น $\frac{\pi}{3}$ จงหาผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทุกตัวใน S

3. กำหนดให้จุด A, B และ C มีพิกัดเป็น $A(0,1)$, $B(5,11)$ และ $C(2,m)$ ตามลำดับ จงหาค่า m ที่ทำให้ผลบวกของระยะทาง AC กับ CB มีค่าน้อยสุด

4. กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดยอดของกราฟของสมการ $4y^2 - 9x^2 + 54x - 32y + 19 = 0$ ถ้า O เป็นจุดกำเนิดแล้ว $697\cos^2(P\hat{O}Q)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ โดยที่ a^b เป็นจำนวนเต็ม จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1) $a \neq b$ (2) $a \neq -b$ (3) a^a เป็นจำนวนเต็ม (4) b^a เป็นจำนวนเต็ม
ข้อความที่เป็นจริงเสมอมีทั้งหมดกี่ข้อความ

6. ในการจัดตารางสอบเพื่อคัดเลือกนักเรียนทุน มีวิชาที่สอบ 3 วิชา คือ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และภาษาอังกฤษ แต่ละวิชาจะใช้เวลาสอบเต็มวัน โดยไม่มีการสอบมากกว่า 1 วิชาในวันเดียวกัน และต้องจัดการสอบ 3 วันภายในช่วงระยะเวลา 7 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่ในการจัดตารางสอบนี้ ไม่มีสองวิชาใด ที่สอบ 2 วันติดกันใน 7 วันดังกล่าว

7. ให้ $\leftarrow$ เป็นตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ นิยามประพจน์ $A \leftarrow B$ จากประพจน์ A และ B ให้มีค่าความจริงดังแสดงในตารางค่าความจริงต่อไปนี้

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \leftarrow B$	F	T	F	F

ให้ S_1 แทนประพจน์ A_1 และ
S_n แทนประพจน์ $S_{n-1} \leftarrow A_n$ เมื่อ $n \geq 2$
ถ้า S_{2566} มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $A_1, A_2, \ldots, A_{2566}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จอยู่ทั้งหมดกี่ประพจน์

8. ข้อมูลการเกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์ ณ สี่แยกแห่งหนึ่ง ในระยะเวลาหนึ่งเดือน โดยให้ X เป็นจำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์ ณ สี่แยกที่ศึกษา พบข้อมูลดังนี้

จำนวนการเกิดอุบัติเหตุ (x ครั้ง)	0	1	2	3	4	5	6
โอกาสพบ $X = x$ ครั้ง	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.05

จงหาโอกาสที่จะเกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์รวมกัน 4 ครั้งพอดี ในเวลา 2 เดือน

9. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตที่แตกต่างกัน และต่างก็เป็นสับเซตของเซต $\{1, 2, 3\}$
ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $2 \in C$, $3 \notin D$, $A \subset B$, $B \subset C$, $B \subset D$ และ $D \not\subset C$
จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดในเซต $D - (B \cap C)$

10. ให้ r เป็นความสัมพันธ์ ที่นิยามโดย $r = \{ (x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \}$ จงหาว่าความสัมพันธ์ r เป็นส่วนหนึ่งของภาคตัดกรวยชนิดใด *(วงกลม, วงรีที่ไม่ใช่วงกลม, พาราโบลา, ไฮเพอร์โบลา)*

ตอนที่ 2 มี 10 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน

11. กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่นิยามโดย $x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}$ ทุก $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ โดยที่ $x_0 = 1$ และ $x_1 = 2$ จงหาค่าของ x_{2023}

12. จงหาจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้ $\det \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \\ t & 1 & t & t^2 \\ t^2 & t & 1 & t \\ t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} = -512$

13. มีเหรียญอยู่ 4 เหรียญ ซึ่งมีรูปร่างเหมือนกัน โดยใน 4 เหรียญนี้ จะมีเหรียญปลอมจำนวนหนึ่งปนอยู่กับเหรียญจริง ซึ่งเหรียญปลอมจะหนัก 9 กรัม ในขณะที่เหรียญจริงหนัก 10 กรัม กำหนดให้ มีตาชั่งที่ชั่งน้ำหนักเป็นกรัมได้ เพื่อใช้ชั่งน้ำหนักของเหรียญเหล่านี้ โดยชั่งครั้งละกี่เหรียญก็ได้ จงหาจำนวนครั้งในการชั่งที่น้อยที่สุด ที่ทำให้สามารถแยกเหรียญจริงกับเหรียญปลอมออกจากกันได้

14. ให้ H เป็นกราฟไฮเพอร์โบลา $2y^2 - x^2 = 2$ และ
P เป็นกราฟพาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสเป็นจุดศูนย์กลางของ H และมีจุดยอดเป็นจุดยอดหนึ่งของ H
จงหารัศมีของวงกลมที่ผ่านจุดตัดทุกจุดของ H และ P

15. จงหาค่าสูงสุดของ $x + y$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 2025$

16. กำหนดให้ $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \} \cup \{ y \in \mathbb{R} \mid y^3 - 3y^2 - y + 1 = 0 \}$ จงหาว่าเซต S มีสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวกกี่จำนวน

17. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$

18. นาย ก. มีลูก 2 คน โดยมีอย่างน้อย 1 คน เป็นผู้ชายที่เกิดวันศุกร์ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้ง 2 คน ของนาย ก. เป็นผู้ชาย

19. จงหาค่า x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 68x + 999.9999 = 0$ (*ตอบในรูปทศนิยม*)

20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(\theta) = (\cot\theta - 3\cot 3\theta + 2)(1 + 2\cos 2\theta)$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

<u>ตอนที่ 3</u> มี 5 ข้อ ข้อละ 6 คะแนน

21. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดบนด้าน BC ให้ α เท่ากับมุม $D\hat{A}C$ และ β เท่ากับมุม $D\hat{A}B$ ถ้า $\frac{BD}{CD} = \frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ และ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ จงหาค่าของ $\frac{AC}{AB}$

22. กำหนดให้ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ นิยามโดย $f(x) = x^3 + 2$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ นิยาม
    (1) $f_1 = f$
    (2) $f_{n+1} = f \circ f_n$

    จงหาว่ามีจำนวนเต็ม x ทั้งหมดกี่จำนวน ในช่วงปิด $[2023, 2566]$ ที่ทำให้ $\left(f(x)\right)^{f(x)} - f_{f(x)}(x)$ หารด้วย 3 ลงตัว

23. จงหาคู่อันดับของจำนวนเชิงซ้อน (z, w) ทั้งหมด ที่มีสมบัติครบตามเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อ ต่อไปนี้
    (1) $|z| = 1$
    (2) $z + w = zw$
    (3) $|z - w| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

24. จงหาค่าของ $\int_0^1 (x+1)(2x+1)\dots(2566x+1)\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{2x+1}+\cdots+\frac{2566}{2566x+1}\right)dx$

25. จงหาผลรวมของรากทั้งหมด ที่อยู่ในช่วง $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ ของสมการ

$$(\sin x-\cos x)\left(\sin x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)\right)\left(\sin x-\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\right)=\frac{\sqrt{6}}{8}$$

เฉลย

1. -448
2. 104
3. 5
4. 441
5. 1
6. $\frac{2}{7}$
7. 2565
8. 0.1425
9. 1
10. พาราโบลา
11. 2
12. $3, -3$
13. 3
14. 4
15. 63
16. 4
17. -6
18. $\frac{13}{27}$
19. 21.51 และ 46.49
20. $2+4\sqrt{2}$
21. $\frac{3}{8}$
22. 271
23. $\left(i, \frac{1-i}{2}\right)$ และ $\left(-i, \frac{1+i}{2}\right)$
24. $2567! - 1$
25. $\frac{5\pi}{6}$

แนวคิด

1. จงหาสัมประสิทธิ์ของ x^7 จากการกระจายทวินามของ $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$ *(ตอบในรูปของจำนวนเต็ม)*

ตอบ -448

จากทฤษฎีบททวินาม $(a+b)^n$ จะมีพจน์ที่ $r+1$ คือ $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

ดังนั้น ในการกระจาย $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^8$ จะมีพจน์ที่ $r+1$ คือ $\binom{8}{r} (x^2)^{8-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r$

$$= \binom{8}{r} x^{16-2r} \frac{(-2)^r}{x^r} \quad = \binom{8}{r}(-2)^r x^{16-3r}$$

โจทย์ต้องการสัมประสิทธิ์ของ x^7 ดังนั้น ต้องหา r ที่ทำให้ $x^{16-3r} = x^7$ นั่นคือ $16 - 3r = 7$

$$9 = 3r$$
$$3 = r$$

แทน $r = 3$ ใน $\binom{8}{r}(-2)^r$ จะได้สัมประสิทธิ์ $= \binom{8}{3}(-2)^3 = \frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1} \cdot (-2)^3 = -448$

2. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดที่ทำให้มุมระหว่างเวกเตอร์ $(2, 2, x-2)$ และ $(2, x-2, 2)$ มีค่าเป็น $\frac{\pi}{3}$ จงหาผลบวกของกำลังสองของสมาชิกทุกตัวใน S

ตอบ 104

ให้ $\vec{u} = (2, 2, x-2)$ และ $\vec{v} = (2, x-2, 2)$

จะได้ $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(2) + (2)(x-2) + (x-2)(2)$

$$= \quad 4 \quad + \quad 2x - 4 \quad + \quad 2x - 4 \quad = 4x - 4$$

จะได้ $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (x-2)^2}$ และ $|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (x-2)^2 + 2^2}$

$= \sqrt{4 + 4 + x^2 - 4x + 4}$ (เหมือน $|\vec{u}|$)

$= \sqrt{x^2 - 4x + 12}$ $= \sqrt{x^2 - 4x + 12}$

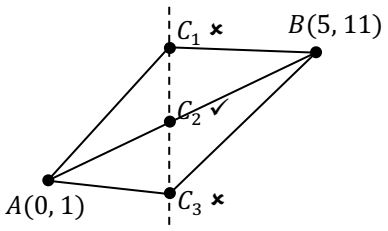
แทนในสูตร $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\,|\vec{v}| \cos\theta$

$$4x - 4 = \sqrt{x^2 - 4x + 12} \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 12} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$$
$$4x - 4 = (x^2 - 4x + 12) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$$
$$8x - 8 = x^2 - 4x + 12$$
$$0 = x^2 - 12x + 20$$
$$0 = (x-2)(x-10)$$
$$x = 2, 10$$

จะได้ $S = \{2, 10\}$ จะได้ผลบวกกำลังสอง $= 2^2 + 10^2 = 104$

3. กำหนดให้จุด A, B และ C มีพิกัดเป็น $A(0,1)$, $B(5,11)$ และ $C(2,m)$ ตามลำดับ จงหาค่า m ที่ทำให้ผลบวกของระยะทาง AC กับ CB มีค่าน้อยสุด

ตอบ 5



$AC + CB$ จะมีค่าน้อยสุด เมื่อ C อยู่บน $\overline{AB}$ ดังรูป
ซึ่งจะทำให้ $\overline{AC}$ มีความชันเท่ากับ $\overline{AB}$

ความชันเส้นตรงที่ผ่าน (x_1, y_1) และ (x_2, y_2) คือ $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

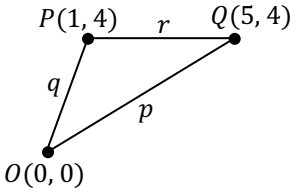
$$\begin{aligned}\frac{m-1}{2-0} &= \frac{11-1}{5-0}\\ m-1 &= \frac{10}{5}\cdot 2\\ m &= 4+1=5\end{aligned}$$

4. กำหนดให้ P และ Q เป็นจุดยอดของกราฟของสมการ $4y^2-9x^2+54x-32y+19=0$ ถ้า O เป็นจุดกำเนิดแล้ว $697\cos^2(P\hat{O}Q)$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอบ 441

$$\begin{aligned}4y^2-9x^2+54x-32y+19 &= 0\\ 4(y^2-8y)-9(x^2-6x) &= -19\\ 4(y^2-8y+4^2)-9(x^2-6x+3^2) &= -19+4(4^2)-9(3^2)\\ 4(y-4)^2-9(x-3)^2 &= -36\\ \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{(y-4)^2}{9} &= 1\end{aligned}$$

เป็นไฮพอร์โบลา แนวนอน มีจุดศูนย์กลาง $(h,k)=(3,4)$ และมี $a=\sqrt{4}=2$
จะได้จุดยอดคือ $(h\pm a,k) = (3\pm 2,4) = (1,4)$ และ $(5,4)$ $\rightarrow$ ให้ $P(1,4)$ และ $Q(5,4)$
วาด ΔPOQ ได้ดังรูป



จากสูตรระยะระหว่างจุด $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$ จะได้

$$\begin{aligned}p &= \sqrt{(5-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{41}\\ q &= \sqrt{(1-0)^2+(4-0)^2} = \sqrt{17}\\ r &= 5-1 = 4\end{aligned}$$

จากกฎของ cos จะได้ $r^2 = p^2+q^2-2pq\cos(P\hat{O}Q)$

$$\begin{aligned}4^2 &= \sqrt{41}^2+\sqrt{17}^2-2\sqrt{41}\sqrt{17}\cos(P\hat{O}Q)\\ 2\sqrt{697}\cos(P\hat{O}Q) &= 42\\ 697\cos^2(P\hat{O}Q) &= \left(\frac{42}{2}\right)^2 = 441\end{aligned}$$

$\div 2$ และยกกำลังสองตลอด

5. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ โดยที่ a^b เป็นจำนวนเต็ม จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้
(1) $a \neq b$ (2) $a \neq -b$ (3) a^a เป็นจำนวนเต็ม (4) b^a เป็นจำนวนเต็ม
ข้อความที่เป็นจริงเสมอมีทั้งหมดกี่ข้อความ

ตอบ 1

(1) สมมติให้ $a=b$ จะได้ $a^b=a^a$ เป็นจำนวนเต็ม จะแสดงว่ามีจำนวนอตรรกยะ a ที่ทำให้ $a^a=2$
พิจารณากราฟ $y=x^x$ เมื่อ $x>0$ จะเห็นว่ากราฟนี้ต่อเนื่อง และผ่านจุด $(1,1)$ และ $(2,4)$
ดังนั้น จะมีจำนวนจริง a ซึ่ง $1<a<2$ ที่ทำให้กราฟผ่านจุด $(a,2)$ ซึ่งจะได้ $a^a=2$
สมมติให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ $\rightarrow$ จะสามารถเขียน a เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{p}{q}$ เมื่อ $p>q$ ได้ (เพราะ $a>1$)

ดังนั้น $a^a = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{p}{q}} = 2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{q}\right)^p &= 2^q\\ p^p &= 2^q q^p\end{aligned}$$

ฝั่งขวาเป็นเลขคู่ ทำให้ p ฝั่งซ้ายต้องเป็นเลขคู่ ทำให้ q ต้องเป็นเลขคี่ (เพราะ $\frac{p}{q}$ เป็นเศษส่วนอย่างต่ำ)
จะเห็นว่า ฝั่งขวา $2^q q^p$ หารด้วย 2 ลงตัวได้แค่ q ครั้ง ในขณะที่ฝั่งซ้าย p^p หาร 2 ลงตัวได้อย่างน้อย p ครั้ง
แต่ $p > q$ จึงเกิดการขัดแย้ง (เพราะฝั่งซ้ายหารด้วย 2 ลงตัวได้มากกว่าฝั่งขวา)
a จึงต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ ซึ่ง $a^a = 2$ ทำให้ (1) ผิด

(2) สมมติให้ $a = -b$ จะได้ $a^b = a^{-a}$ เป็นจำนวนเต็ม
ถ้า a เป็นลบแล้ว ฐานเป็นลบ นำไปยกกำลังด้วยเลขชี้กำลังที่เป็นอตรรกยะจะไม่ได้จำนวนจริง
ถ้า a เป็นศูนย์แล้ว a^{-a} จะหาค่าไม่ได้ → ดังนั้น a ต้องเป็นบวก
พิจารณากราฟ $y = x^{-x}$ เมื่อ $x > 0$ จะเป็นกราฟต่อเนื่อง

หา y': $\ln y = -x \ln x$
$\frac{1}{y} \cdot y' = -x\left(\frac{1}{x}\right) - \ln x$
$y' = -y(1 + \ln x)$

หาจุดวิกฤติ : $-y(1 + \ln x) = 0$
$y \neq 0$ หรือ $1 + \ln x = 0$
$x = e^{-1}$

(เมื่อ $x > 0$ จะทำให้ $x^{-x} > 0$
ดังนั้น y เป็นบวกเสมอ)

หาเครื่องหมายของ y' รอบจุดวิกฤติ: เมื่อ $x = e^{-2}$ จะได้ $y' = -y(1 + \ln e^{-2}) = -y(-1)$ เป็นบวก
เมื่อ $x = 1$ จะได้ $y' = -y(1 + \ln 1) = -y$ เป็นลบ
ดังนั้น $x = e^{-1}$ จะทำให้ y มีค่าสูงสุด $y_{max} = (e^{-1})^{-(e^{-1})} = e^{\left(\frac{1}{e}\right)} < e^{\left(\frac{1}{2}\right)} < 4^{\frac{1}{2}} = 2$
ดังนั้น y จะมีค่าระหว่าง 0 ถึง 2 ซึ่งจะมี $y = 1$ เท่านั้นที่เป็นจำนวนเต็มได้
แต่ a^{-a} จะเป็น 1 เมื่อ $a = 1$ เท่านั้น ขัดแย้งกับที่ a ต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ ดังนั้น $a \neq -b$ ทำให้ (2) ถูก

(3) ให้ $a = \sqrt{2}$ และ $b = \log_2 9$ จะเห็นว่า a และ b เป็นอตรรกยะ
และ $a^b = \sqrt{2}^{\log_2 9} = 2^{\frac{1}{2}\log_2 9} = 2^{\log_2 \sqrt{9}} = 3$ เป็นจำนวนเต็ม
แต่จะเห็นว่า $a^a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม (เพราะ $\sqrt{2}^0 < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < \sqrt{2}^2$
$1 < \sqrt{2}^{\sqrt{2}} < 2$) → (3) ผิด

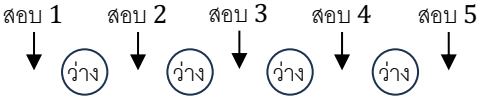
(4) ให้ $a = \sqrt{5}$ และ $b = \log_5 4$ จะเห็นว่า a และ b เป็นอตรรกยะ
และ $a^b = \sqrt{5}^{\log_5 4} = 5^{\frac{1}{2}\log_5 4} = 5^{\log_5 \sqrt{4}} = 2$ เป็นจำนวนเต็ม
แต่จะเห็นว่า $b^a = (\log_5 4)^{\sqrt{5}}$ ไม่ใช่จำนวนเต็ม (เพราะ $0 < (\log_5 4)^{\sqrt{5}} < 1^{\sqrt{5}} = 1$ → (4) ผิด

6. ในการจัดตารางสอบเพื่อคัดเลือกนักเรียนทุน มีวิชาที่สอบ 3 วิชา คือ คณิตศาสตร์ วิทยาศาสตร์ และภาษาอังกฤษ แต่ละวิชาจะใช้เวลาสอบเต็มวัน โดยไม่มีการสอบมากกว่า 1 วิชาในวันเดียวกัน และต้องจัดการสอบ 3 วันภายในช่วงระยะเวลา 7 วัน จงหาความน่าจะเป็นที่ในการจัดตารางสอบนี้ ไม่มีสองวิชาใด ที่สอบ 2 วันติดกันใน 7 วันดังกล่าว

ตอบ $\frac{2}{7}$

จำนวนแบบทั้งหมด: เลือกวันสอบให้คณิต จะเลือกได้ 7 แบบ
เลือกวันสอบให้วิทย์ (ต้องไม่ซ้ำกับคณิต) จะเลือกได้ 6 แบบ
เลือกวันสอบให้อังกฤษ (ต้องไม่ซ้ำกับคณิต วิทย์) จะเลือกได้ 5 แบบ → รวม $7 \times 6 \times 5$ แบบ

จำนวนแบบที่วันสอบไม่ติดกัน: เนื่องจากมีวันสอบ 3 วัน จะมีวันว่าง 4 วัน



ถ้าวันสอบเป็น 5 วันระหว่างวันว่าง 4 วันนี้ จะมั่นใจได้ว่าไม่สอบติดกัน 2 วันแน่

เลือกวันสอบระหว่างวันว่างให้คณิต จะเลือกได้ 5 แบบ
เลือกวันสอบระหว่างวันว่างให้วิทย์ (ต้องไม่ลงช่องเดียวกับคณิต) จะเลือกได้ 4 แบบ
เลือกวันสอบระหว่างวันว่างให้อังกฤษ (ต้องไม่ลงช่องเดียวกับคณิต วิทย์) จะเลือกได้ 3 แบบ → รวม $5 \times 4 \times 3$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{5 \times 4 \times 3}{7 \times 6 \times 5} = \frac{2}{7}$

7. ให้ $\leftarrow$ เป็นตัวเชื่อมทางตรรกศาสตร์ นิยามประพจน์ $A \leftarrow B$ จากประพจน์ A และ B ให้มีค่าความจริงดังแสดงในตารางค่าความจริงต่อไปนี้

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \leftarrow B$	F	T	F	F

ให้ S_1 แทนประพจน์ A_1 และ
S_n แทนประพจน์ $S_{n-1} \leftarrow A_n$ เมื่อ $n \geq 2$
ถ้า S_{2566} มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $A_1, A_2, \dots, A_{2566}$ มีค่าความจริงเป็นเท็จอยู่ทั้งหมดกี่ประพจน์

<u>ตอบ</u> 2565

จาก $S_n \equiv S_{n-1} \leftarrow A_n$: จะได้ S_{2566} แทน $S_{2565} \leftarrow A_{2566}$
S_{2565} แทน $S_{2564} \leftarrow A_{2565}$
S_{2564} แทน $S_{2563} \leftarrow A_{2564}$
$\vdots$
S_2 แทน $S_1 \leftarrow A_2$
$A_1 \leftarrow A_2$
(โจทย์ให้ S_1 แทน A_1)

$$\begin{array}{ccc} S_{2566} & & \\ \mathrm{T} & & \\ S_{2565} & \leftarrow & A_{2566} \\ \mathrm{T} & & \mathrm{F} \\ S_{2564} & \leftarrow & A_{2565} \\ \mathrm{T} & & \mathrm{F} \\ S_{2563} & \leftarrow & A_{2564} \\ \mathrm{T} & & \mathrm{F} \\ \vdots & & \\ S_1 & \leftarrow & A_2 \\ \mathrm{T} & & \mathrm{F} \\ A_1 & & \end{array}$$

และโจทย์กำหนดให้ S_{2566} เป็น T เป็นค่าเริ่มต้น
ซึ่งจากตาราง $A \leftarrow B$ เป็น T ได้เพียงแบบเดียว คือ T $\leftarrow$ F
จึงสามารถหาค่าความจริงต่อเป็นทอด ได้ดังรูป
ซึ่งจะได้ A_1 เป็น T นอกนั้น $A_2, A_3, A_4, \dots, A_{2566}$ ที่เหลือเป็น F ทั้งหมด
ดังนั้น $A_1, A_2, \dots, A_{2566}$ จะเป็น F อยู่ $2566 - 1 = 2565$ ประพจน์

8. ข้อมูลการเกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์ ณ สี่แยกแห่งหนึ่ง ในระยะเวลาหนึ่งเดือน โดยให้ X เป็นจำนวนครั้งที่เกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์ ณ สี่แยกที่ศึกษา พบข้อมูลดังนี้

จำนวนการเกิดอุบัติเหตุ (x ครั้ง)	0	1	2	3	4	5	6
โอกาสพบ $X = x$ ครั้ง	0.20	0.20	0.15	0.15	0.15	0.10	0.05

จงหาโอกาสที่จะเกิดอุบัติเหตุทางรถยนต์รวมกัน 4 ครั้งพอดี ในเวลา 2 เดือน

<u>ตอบ</u> 0.1425

สองเดือน 4 ครั้ง จะมี 5 แบบ คือ เดือนแรก 0 ครั้ง และ เดือนสอง 4 ครั้ง $\rightarrow$ โอกาส $= 0.20 \times 0.15 = 0.03$
หรือ เดือนแรก 1 ครั้ง และ เดือนสอง 3 ครั้ง $\rightarrow$ โอกาส $= 0.20 \times 0.15 = 0.03$
หรือ เดือนแรก 2 ครั้ง และ เดือนสอง 2 ครั้ง $\rightarrow$ โอกาส $= 0.15 \times 0.15 = 0.0225$
หรือ เดือนแรก 3 ครั้ง และ เดือนสอง 1 ครั้ง $\rightarrow$ โอกาส $= 0.15 \times 0.20 = 0.03$
หรือ เดือนแรก 4 ครั้ง และ เดือนสอง 0 ครั้ง $\rightarrow$ โอกาส $= 0.15 \times 0.20 = 0.03$
รวมทุกกรณี จะได้โอกาส $= 4(0.03) + 0.0225 = 0.1425$

9. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตที่แตกต่างกัน และต่างก็เป็นสับเซตของเซต $\{1, 2, 3\}$
ซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไข $2 \in C$, $3 \notin D$, $A \subset B$, $B \subset C$, $B \subset D$ และ $D \not\subset C$
จงหาผลรวมของสมาชิกทั้งหมดในเซต $D - (B \cap C)$

<u>ตอบ</u> 1

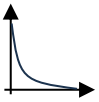
เนื่องจาก $A \subset B$ และ A กับ B แตกต่างกัน จะสรุปได้ว่า B ต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว
จาก $B \subset D$ และ B กับ D แตกต่างกัน จะสรุปต่อได้ว่า D ต้องมีสมาชิกอย่างน้อย 2 ตัว
แต่ $3 \notin D$ จึงสรุปได้เลยว่า D มีสมาชิก 2 ตัว และ B มีสมาชิก 1 ตัว

จะได้ $n\big(D-(B\cap C)\big) = n(D-B)$ (เพราะ $B\subset C$)
$= 1$ (เพราะ D มี 2 ตัว และ B มี 1 ตัว และ $B\subset D$)

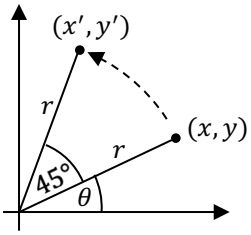
10. ให้ r เป็นความสัมพันธ์ ที่นิยามโดย $r=\{(x,y)\in[0,\infty)\times[0,\infty)\mid\sqrt{x}+\sqrt{y}=1\}$ จงหาว่าความสัมพันธ์ r เป็นส่วนหนึ่งของภาคตัดกรวยชนิดใด (*วงกลม, วงรีที่ไม่ใช่วงกลม, พาราโบลา, ไฮเพอร์โบลา*)

ตอบ พาราโบลา

x	0	0.25	1
y	1	0.25	0



ลองหาจุดผ่าน แล้ววาดกราฟแบบคร่าวๆ ดู
กราฟมีแนวโน้มจะเป็นส่วนหนึ่งของภาคตัดกรวยที่ถูกหมุน $45°$



สมมติให้จุด (x,y) ถูกหมุน $45°$ ในทิศทวนเข็ม ไปอยู่ที่ (x',y')

จะได้ $x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$

$x' = r\cos(\theta+45°)$
$= r\cos\theta\cos 45° - r\sin\theta\sin 45°$
$= x\cos 45° - y\sin 45° = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$ ...(∗)

$y' = r\sin(\theta+45°)$
$= r\sin\theta\cos 45° + r\cos\theta\sin 45°$
$= y\cos 45° + x\sin 45° = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$ ...(∗)

สมมติให้ (x',y') เป็นจุดบน r จะได้ $\sqrt{x'}+\sqrt{y'} = 1$

$\sqrt{y'} = 1-\sqrt{x'}$
$y' = 1-2\sqrt{x'}+x'$ ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง
$2\sqrt{x'} = 1+x'-y'$
$4x' = (1+x'-y')^2$ ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้าง
$4\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right) = \left(1+\frac{x-y}{\sqrt{2}}-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2$ จาก (∗)
$2\sqrt{2}(x-y) = \left(1-\sqrt{2}y\right)^2$
$2\sqrt{2}x-2\sqrt{2}y = 1-2\sqrt{2}y+2y^2$
$2\sqrt{2}x = 1+2y^2$ เป็นพาราโบลา

นั่นคือ ถ้านำกราฟพาราโบลา มาหมุน $45°$ ในทิศทวนเข็ม จะได้เป็นกราฟของ r
เนื่องจากการหมุนกราฟ จะไม่ทำให้ชนิดกราฟของภาคตัดกรวยเปลี่ยน ดังนั้น r จึงต้องเป็นพาราโบลาด้วย

11. กำหนดให้ (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง ที่นิยามโดย $x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}$ ทุก $n=0,1,2,3,\ldots$ โดยที่ $x_0=1$ และ $x_1=2$ จงหาค่าของ x_{2023}

ตอบ 2

จะได้ $x_2 = \frac{1+x_1}{x_0} = \frac{1+2}{1} = 3$
$x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+3}{2} = 2$
$x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+2}{3} = 1$
$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+1}{2} = 1$
$x_6 = \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+1}{1} = 2$ จะเห็นว่า x_5 กับ x_6 วนกลับมาเป็น 1 กับ 2 เหมือน x_0 กับ x_1

เนื่องจากสูตรของ x_n ใช้พจน์ก่อนหน้าเพียง 2 พจน์ในการคำนวณ ดังนั้น ถ้ามีพจน์ที่ติดกัน 2 พจน์ ซ้ำกับพจน์ก่อนหน้า จะทำให้พจน์ถัดไป วนกลับมาซ้ำของเดิมทันที → พจน์จะวนซ้ำ $1,2,3,2,1$ ทุก 5 พจน์
เนื่องจาก 2023 หารด้วย 5 เหลือเศษ 3 ดังนั้น $x_{2023} = x_3 = 2$

12. จงหาจำนวนจริง t ทั้งหมดที่ทำให้ $\det\begin{bmatrix}1 & t & t^2 & t^3\\ t & 1 & t & t^2\\ t^2 & t & 1 & t\\ t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix} = -512$

ตอบ $3, -3$

เปลี่ยน C_1 ให้มี 0 เยอะๆ ก่อน จะได้ $\begin{vmatrix}1 & t & t^2 & t^3\\ t & 1 & t & t^2\\ t^2 & t & 1 & t\\ t^3 & t^2 & t & 1\end{vmatrix} \overset{-tC_2+C_1}{=} \begin{vmatrix}1-t^2 & t & t^2 & t^3\\ 0 & 1 & t & t^2\\ 0 & t & 1 & t\\ 0 & t^2 & t & 1\end{vmatrix}$

หา det โดยใช้ Cofactor ตามแนว C_1 จะได้ $(1-t^2)(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & t & t^2\\ t & 1 & t\\ t^2 & t & 1\end{vmatrix}$ (เกินหลักสูตร?)

$$\begin{aligned}&= (1-t^2)(1+t^4+t^4-t^4-t^2-t^2)\\ &= (1-t^2)(1+t^4-2t^2)\\ &= (1-t^2)(t^2-1)^2 \qquad = -(t^2-1)^3\end{aligned}$$

ดังนั้น $-(t^2-1)^3 = -512$ ต้องการแค่คำตอบที่เป็นจำนวนจริง

$t^2-1 = 8$

$t^2 = 9$

$t = 3, -3$

13. มีเหรียญอยู่ 4 เหรียญ ซึ่งมีรูปร่างเหมือนกัน โดยใน 4 เหรียญนี้ จะมีเหรียญปลอมจำนวนหนึ่งปนอยู่กับเหรียญจริง ซึ่งเหรียญปลอมจะหนัก 9 กรัม ในขณะที่เหรียญจริงหนัก 10 กรัม กำหนดให้ มีตาชั่งที่ชั่งน้ำหนักเป็นกรัมได้ เพื่อใช้ชั่งน้ำหนักของเหรียญเหล่านี้ โดยชั่งครั้งละกี่เหรียญก็ได้ จงหาจำนวนครั้งในการชั่งที่น้อยที่สุด ที่ทำให้สามารถแยกเหรียญจริงกับเหรียญปลอมออกจากกันได้

ตอบ 3

ให้เหรียญทั้ง 4 เหรียญ คือ A, B, C และ D ถ้าชั่ง ครั้งที่ 1 : A+B+C
ครั้งที่ 2 : A+B+D
ครั้งที่ 3 : A+C+D

(ชั่ง 3 เหรียญ น้ำหนักที่เป็นไปได้คือ 27, 28, 29 และ 30 กรัม)

ถ้ามีครั้งไหนที่ชั่งได้ 30 กรัม จะสรุปได้ทันทีว่าทุกเหรียญที่ชั่งในครั้งนั้นเป็นเหรียญจริง
และอีกเหรียญที่ไม่ได้ชั่งเป็นเหรียญปลอม (เพราะต้องมีเหรียญปลอมอย่างน้อย 1 เหรียญ)

ถ้ามีครั้งไหนที่ชั่งได้ 27 กรัม จะสรุปได้ทันทีว่าทุกเหรียญที่ชั่งในครั้งนั้นเป็นเหรียญปลอม
และอีกเหรียญที่ไม่ได้ชั่งเป็นเหรียญจริง (เพราะต้องมีเหรียญจริงอย่างน้อย 1 เหรียญ)

ถ้าชั่งได้น้ำหนักเท่ากันทุกครั้ง แสดงว่า B, C และ D เป็นเหรียญชนิดเดียวกัน (ปลอมทั้ง 3 เหรียญ หรือจริงทั้ง 3 เหรียญ)
ถ้าได้ 29 กรัม เท่ากันทั้ง 3 ครั้ง แสดงว่า A เป็นเหรียญปลอม และ B, C, D เป็นเหรียญจริง
ถ้าได้ 28 กรัม เท่ากันทั้ง 3 ครั้ง แสดงว่า A เป็นเหรียญจริง และ B, C, D เป็นเหรียญปลอม

ถ้าชั่งได้น้ำหนักไม่เท่ากัน สังเกตว่าในการชั่งแต่ละครั้ง จะมีแค่เหรียญเดียว ที่เปลี่ยนไป จึงสามารถบอกชนิดของเหรียญที่เปลี่ยนไปได้ตามน้ำหนักที่เปลี่ยนไปได้ และเมื่อได้ชนิดของเหรียญที่ถูกเปลี่ยน B, C, D ก็จะสรุป A ที่ไม่ถูกเปลี่ยนได้

เช่น ถ้า $A+B+C = 29$ ...(1)
$A+B+D = 28$ ...(2)
$A+C+D = 29$ ...(3)

จาก (1) และ (2) จะสรุปได้ว่า C เป็นหรียญจริง และ D เป็นเหรียญปลอม
จาก (2) และ (3) จะสรุปได้ว่า C เป็นหรียญจริง และ B เป็นเหรียญปลอม

เนื่องจาก C = จริง และ D = ปลอม พิจารณา (3) จะสรุปได้ว่า A เป็นเหรียญจริง เป็นต้น

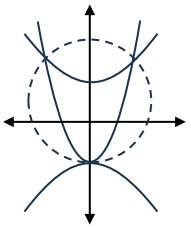
(ถ้าให้ชั่งได้แค่ 2 ครั้ง ผมคิดว่าน่าจะเป็นไปไม่ได้ แต่ยังหาวิธีพิสูจน์แบบดีๆ ไม่ได้)

14. ให้ H เป็นกราฟไฮเพอร์โบลา $2y^2 - x^2 = 2$ และ
P เป็นกราฟพาราโบลา ที่มีจุดโฟกัสเป็นจุดศูนย์กลางของ H และมีจุดยอดเป็นจุดยอดหนึ่งของ H
จงหารัศมีของวงกลมที่ผ่านจุดตัดทุกจุดของ H และ P

<u>ตอบ</u> 4

จัดรูป H โดย $\div 2$ ตลอด ได้เป็น $\frac{y^2}{1} - \frac{x^2}{2} = 1$ $\rightarrow$ เป็นไฮเพอร์โบลาแนวตั้ง มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$
$\rightarrow$ $a = 1$ จะได้จุดยอดคือ $(0, 1)$ และ $(0, -1)$

ดังนั้น P มีจุดโฟกัส $(0, 0)$ และมีจุดยอดคือ $(0, 1)$ หรือ $(0, -1)$
เนื่องจาก H สมมาตรบนล่าง ดังนั้น P จะใช้จุดยอดไหนก็ได้ จะได้วงกลมขนาดเดียวกัน
ให้ P มีจุดยอดคือ $(0, -1)$ จะได้เป็นพาราโบลาหงาย
จากจุดโฟกัส $(0, 0)$ จะได้ระยะโฟกัส $c = 1$
และจะได้สมการ P คือ $(x-h)^2 = 4c(y-k)$
$x^2 = 4(y+1)$



$$H + P: \quad 2y^2 - x^2 + x^2 = 2 + 4(y+1)$$
$$y^2 = 1 + 2(y+1)$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0$$
$$(y+1)(y-3) = 0$$
$$y = -1, 3$$

แทน $y = -1$ ใน P: $x^2 = 4(-1+1)$, $x = 0$
แทน $y = 3$ ใน P: $x^2 = 4(3+1)$, $x = \pm 4$
จะได้จุดตัดคือ $(0, -1)$ และ $(\pm 4, 3)$

เนื่องจากจุดตัด สมมาตรซ้ายขวา ดังนั้น วงกลมจะมีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน Y
ให้จุดศูนย์กลางวงกลมคือ $(0, k)$ จะได้สมการวงกลมคือ $x^2 + (y-k)^2 = r^2$
วงกลมผ่านจุด $(0, -1)$ และ $(\pm 4, 3)$ ดังนั้น $0^2 + (-1-k)^2 = r^2$ ...(1)
$(\pm 4)^2 + (3-k)^2 = r^2$ ...(2)

$$(2) - (1): \quad 16 + (3-k+1+k)(3-k-1-k) = 0$$
$$16 + 4(2-2k) = 0$$
$$3 = k$$

แทน $k = 3$ ใน (1): $(-1-3)^2 = r^2$
$4 = r$

15. จงหาค่าสูงสุดของ $x + y$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนเต็มบวกที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 2025$

<u>ตอบ</u> 63

พิจารณาเศษจากการหาร n^2 ด้วย 3 เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

เมื่อ $n = 3k$ จะได้ $n^2 = 9k^2$ หารด้วย 3 ลงตัว
เมื่อ $n = 3k+1$ จะได้ $n^2 = 9k^2 + 6k + 1$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1
เมื่อ $n = 3k+2$ จะได้ $n^2 = 9k^2 + 12k + 4$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1

ดังนั้น n^2 หารด้วย 3 ลงตัว หรือ เหลือเศษ 1

$x^2 + y^2 = 2025$
- หารด้วย 3 ลงตัว หรือ เหลือเศษ 1
- หารด้วย 3 ลงตัว หรือ เหลือเศษ 1
- หารด้วย 3 ลงตัว

เนื่องจาก 2025 หารด้วย 3 ลงตัว
ดังนั้น ทั้ง x^2 และ y^2 ต้องหารด้วย 3 ลงตัวเท่านั้น
จึงจะทำให้ $x^2 + y^2$ หารด้วย 3 ลงตัวได้
ซึ่งจะสรุปต่อได้ว่า ทั้ง x และ y ต้องหารด้วย 3 ลงตัว

ให้ $x = 3a$ และ $y = 3b$ จะได้ $(3a)^2 + (3b)^2 = 2025$ ÷9 ตลอด
$a^2 + b^2 = 225$

เนื่องจาก 225 หารด้วย 3 ลงตัวอีก ใช้ทริกเดิม จะสรุปได้ว่า ทั้ง a และ b ต้องหารด้วย 3 ลงตัว

ให้ $a = 3c$ และ $b = 3d$ จะได้ $(3c)^2 + (3d)^2 = 225$ ÷9 ตลอด
$c^2 + d^2 = 25$

ซึ่งจากสูตรด้านชุดพีทากอรัส จะมีแค่ $3^2 + 4^2 = 5^2$ เท่านั้น
ดังนั้น $x + y = 3a + 3b = 3(3c) + 3(3d) = 3(3(3)) + 3(3(4)) = 63$

16. กำหนดให้ $S = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0 \} \cup \{ y \in \mathbb{R} \mid y^3 - 3y^2 - y + 1 = 0 \}$
จงหาว่าเซต S มีสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวกกี่จำนวน

ตอบ 4

ลองแยกตัวประกอบ $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ ด้วยทฤษฎีเศษ

แทน $x = 1$ จะได้ $1^3 - 5(1^2) + 7(1) - 3 = 0 \rightarrow 1$

	1	−5	7	−3
		1	−4	−3
	1	−4	3	0

ดังนั้น $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x-1)(x^2 - 4x + 3)$
$= (x-1)(x-1)(x-3)$

จะได้คำตอบของสมการ $x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$ คือ 1 และ 3

ลองแยกตัวประกอบ $y^3 - 3y^2 - y + 1$ ด้วยทฤษฎีเศษ จะเห็นว่าแทน $y = \pm 1$ จะไม่ได้ผลลัพธ์เป็น 0

ดังนั้นจะสรุปได้ว่าสมการ $y^3 - 3y^2 - y + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะ ...(∗)

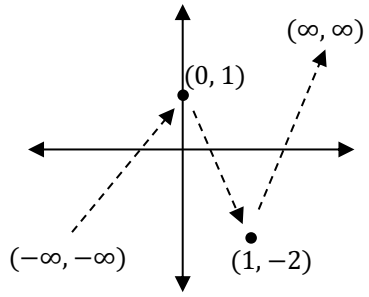
ให้ $f(y) = y^3 - 3y^2 - y + 1$ จะเห็นว่า f ต่อเนื่อง → จะลองแทน y เป็นค่าต่างๆ แล้วดูแนวโน้มของเส้นกราฟ

เมื่อ $y \to -\infty$ จะได้ $f(y) \to -\infty$ (เพราะ y^3 จะเป็นลบ ขนะค่าบวกจากพจน์อื่นที่ยกกำลังน้อยกว่า)

เมื่อ $y = 0$ จะได้ $f(0) = 0^3 - 3(0^2) - 0 + 1 = 1$

เมื่อ $y = 1$ จะได้ $f(1) = 1^3 - 3(1^2) - 1 + 1 = -2$

เมื่อ $y \to \infty$ จะได้ $f(y) \to \infty$ (เพราะ y^3 จะเป็นบวก ขนะค่าลบจากพจน์อื่นที่ยกกำลังน้อยกว่า)



เนื่องจาก f มีความต่อเนื่อง เมื่อวาดกราฟเชื่อมจุดจะเห็นว่ากราฟจะต้องข้ามแกนนอนอย่างน้อย 1 ครั้งทางฝั่งซ้าย และ อย่างน้อย 2 ครั้งทางฝั่งขวา
แต่ $f(y) = 0$ เป็นสมการพหุนามกำลัง 3 จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 3 คำตอบ
ดังนั้น $f(y) = 0$ จะต้องมีคำตอบเป็นลบ 1 คำตอบ และเป็นบวก 2 คำตอบ
ซึ่งจาก (∗) จะสรุปได้ว่าคำตอบเหล่านี้ไม่ซ้ำกับคำตอบของสมการแรก
ดังนั้น เมื่อรวมกับ 2 คำตอบจากสมการแรก จะได้ S มีสมาชิกที่เป็นจำนวนจริงบวก $= 2 + 2 = 4$ จำนวน

17. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}}$

ตอบ -6

มีทั้ง $\sqrt[3]{\ }$ และ $\sqrt{\ }$ → ต้องยกกำลัง 6 ถึงจะทำให้รูทหายไปได้

จาก $x^6 - y^6 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3)$
$= (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x^3 + y^3)$

→ ถ้าคูณด้วย $(x^2 + xy + y^2)(x^3 + y^3)$ จะทำให้มีกำลัง 6 เกิดขึ้นได้

ให้ $\sqrt[3]{1+3x^4} = a$, $\sqrt{1-2x} = b$
$\sqrt[3]{1+x} = c$, $\sqrt{1+x} = d$ (จะเห็นว่าเมื่อ $x = 0$ จะได้ $a, b, c, d = 1$)

จะได้ $\frac{\sqrt[3]{1+3x^4} - \sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt{1+x}} = \frac{a-b}{c-d}$

$= \frac{a-b}{c-d} \cdot \frac{(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)}{(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)} \cdot \frac{(c^2+cd+d^2)(c^3+d^3)}{(c^2+cd+d^2)(c^3+d^3)}$ คูณด้วยตัวที่ทำให้เข้าสูตรกำลัง 6 ได้

$= \frac{a^6 - b^6}{c^6 - d^6} \cdot \frac{1}{(a^2+ab+b^2)(a^3+b^3)} \cdot \frac{(c^2+cd+d^2)(c^3+d^3)}{1}$ ...(∗)

พิจารณา $\frac{a^6-b^6}{c^6-d^6} = \frac{(1+3x^4)^2-(1-2x)^3}{(1+x)^2-(1+x)^3} = \frac{(1+6x^4+9x^8)-(1-6x+12x^2-8x^3)}{(1+x)^2(1-(1+x))}$

$= \frac{6x^4+9x^8 \quad +6x-12x^2+8x^3}{(1+x)^2(-x)}$ ตัด x ทั้งเศษและส่วน

$= \frac{6x^3+9x^7 \quad +6 \ -12x+8x^2}{(1+x)^2(-1)}$

แทน $x=0$ จะได้ $\frac{0 \ + \ 0 \quad +6 \quad -0 \quad +0}{(1)(-1)} = -6$

แทนใน $(*)$ จะได้ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+3x^4}-\sqrt{1-2x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}} = (-6)\cdot\frac{1}{(1+1+1)(1+1)}\cdot\frac{(1+1+1)(1+1)}{1} = -6$

หมายเหตุ : ข้อนี้ทำได้หลายวิธี จะใช้โลปิตาลก็ได้ (แต่เกินหลักสูตร) หรือจะแยกหาลิมิตทีละตัวก็ได้ (แต่คิดหลายขั้นตอน)
ผมคิดว่าหาตรงๆ เลย น่าจะง่ายที่สุด

18. นาย ก. มีลูก 2 คน โดยมีอย่างน้อย 1 คน เป็นผู้ชายที่เกิดวันศุกร์ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้ง 2 คน ของนาย ก. เป็นผู้ชาย

ตอบ $\frac{13}{27}$

โจทย์กำหนดให้ ลูก 2 คน มีอย่างน้อย 1 คน เป็นชายที่เกิดวันศุกร์ → ต้องหาจำนวนแบบตามเงื่อนไขนี้มาเป็น $n(S)$
จะใช้การนับแบบตรงข้าม คือจะนับแบบที่ไม่มีลูกชายที่เกิดวันศุกร์เลย แล้วเอาทั้งหมดตั้งลบ

จำนวนแบบทั้งหมด : เลือกเพศได้ 2 แบบ เลือกวันในสัปดาห์ได้ 7 แบบ → เลือกได้ $2\times 7 = 14$ แบบ
มีลูก 2 คน → จะได้จำนวนแบบ $= 14^2$ แบบ

จำนวนแบบที่ไม่มีลูกชายที่เกิดวันศุกร์เลย : หัก "ชายที่เกิดวันศุกร์" ออกจาก 14 แบบ จะเหลือ 13 แบบ
มีลูก 2 คน → จะได้จำนวนแบบ $= 13^2$ แบบ

จะได้ $n(S) = 14^2 - 13^2 = 27$

สำหรับ $n(E)$ จะต้องหาว่าใน 27 แบบนี้ มีกี่แบบที่เป็นชายทั้งสองคน
นั่นคือ ต้องหาจำนวนแบบที่เป็นชายทั้งสองคน และมีอย่างน้อย 1 คนเกิดวันศุกร์
จะใช้การนับแบบตรงข้าม คือจะนับแบบที่ไม่มีใครเกิดวันศุกร์เลย แล้วเอาทั้งหมดตั้งลบ (เลือกเพศไม่ได้แล้ว ต้องเป็นชาย)

จำนวนแบบทั้งหมด : เลือกวันในสัปดาห์ได้ 7 แบบ มีลูก 2 คน → จะได้จำนวนแบบ $= 7^2$ แบบ

จำนวนแบบที่ไม่มีใครเกิดวันศุกร์เลย : เหลือวันให้เลือกได้แค่ 6 แบบ มีลูก 2 คน → จะได้จำนวนแบบ $= 6^2$ แบบ

จะได้ $n(E) = 7^2 - 6^2 = 13$ แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{27}$

19. จงหาค่า x ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ $x^2 - 68x + 999.9999 = 0$ *(ตอบในรูปทศนิยม)*

ตอบ 21.51 และ 46.49

ใช้สูตร $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ จะได้ $x = \frac{-(-68)\pm\sqrt{(-68)^2-4(1)(999.9999)}}{2(1)}$

$= \frac{68 \ \pm\sqrt{\ 68^2 \ - \ 4(999.9999)}}{2}$

$= 34 \pm \sqrt{\ 34^2 \ - 999.9999}$

$= 34 \pm \sqrt{1156 - 999.9999}$

$= 34 \pm \ \sqrt{156.0001}$

$= 34 \pm \quad 12.49$

$= 21.51 \ , \ 46.49$

หารูท 2 ด้วยวิธีตั้งหารยาว

	1 2 . 4 9
1	1 56 . 00 01
+1	1
22	56
+2	44
244	12 00
+4	9 76
2489	2 24 01
	2 24 01

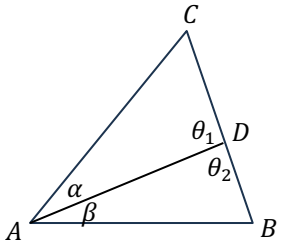
20. จงหาค่าสูงสุดของฟังก์ชัน $f(\theta) = (\cot\theta - 3\cot 3\theta + 2)(1 + 2\cos 2\theta)$ เมื่อ θ เป็นจำนวนจริง

ตอบ $2 + 4\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
f(\theta) &= (\cot\theta - 3\cot 3\theta + 2)(1 + 2\cos 2\theta) \\
&= \left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{3}{\tan 3\theta} + 2\right)\left(1 + \frac{2(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}\right) && \text{เปลี่ยนทุกตัวให้เป็น tan} \\
&= \left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{3(1-3\tan^2\theta)}{3\tan\theta - \tan^3\theta} + 2\right)\left(1 + \frac{2(1-\tan^2\theta)}{1+\tan^2\theta}\right) \\
&= \left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{3-9\tan^2\theta}{3\tan\theta - \tan^3\theta} + 2\right)\left(1 + \frac{2-2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \\
&= \left(\frac{(3-\tan^2\theta) - (3-9\tan^2\theta) + 2(3\tan\theta - \tan^3\theta)}{3\tan\theta - \tan^3\theta}\right)\left(\frac{1+\tan^2\theta + 2 - 2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \\
&= \left(\frac{8\tan^2\theta + 6\tan\theta - 2\tan^3\theta}{3\tan\theta - \tan^3\theta}\right)\left(\frac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) \\
&= \frac{(\tan\theta)(8\tan\theta + 6 - 2\tan^2\theta)}{(\tan\theta)(3-\tan^2\theta)} \cdot \frac{3-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} \\
&= \frac{8\tan\theta + 6 - 2\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} && \text{เปลี่ยนทุกตัวให้เป็น sin และ cos} \\
&= \frac{\frac{8\sin\theta}{\cos\theta} + 6 - \frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}} && \text{คูณ } \cos^2\theta \text{ ทั้งเศษและส่วน} \\
&= \frac{8\sin\theta\cos\theta + 6\cos^2\theta - 2\sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} \\
&= 8\sin\theta\cos\theta + 6\cos^2\theta - 2(1 - \cos^2\theta) \\
&= 8\sin\theta\cos\theta + 8\cos^2\theta - 2 \\
&= 4\sin 2\theta + 8\left(\frac{\cos 2\theta + 1}{2}\right) - 2 && \text{เปลี่ยน } \theta \text{ ให้เป็น } 2\theta \\
&= 4\sin 2\theta + 4\cos 2\theta + 4 - 2 && \text{คูณและหารด้วย } \cos 45^\circ \text{ กับ } \sin 45^\circ \\
&= \frac{4}{\cos 45^\circ}(\sin 2\theta\cos 45^\circ + \cos 2\theta\sin 45^\circ) + 2 && \text{(สองค่านี้เท่ากัน) เพื่อเข้าสูตร } \sin(A+B) \\
&= 4\sqrt{2}\,\sin(2\theta + 45^\circ) + 2 \\
&\le 4\sqrt{2} + 2 && \text{sin มีค่าไม่เกิน 1}
\end{aligned}
$$

21. กำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC มี D เป็นจุดบนด้าน BC ให้ α เท่ากับมุม $D\hat{A}C$ และ β เท่ากับมุม $D\hat{A}B$ ถ้า $\frac{BD}{CD} = \frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ และ $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ จงหาค่าของ $\frac{AC}{AB}$

ตอบ $\frac{3}{8}$



ใช้กฎของ sin ใน ΔADC : $\frac{AC}{\sin\theta_1} = \frac{CD}{\sin\alpha}$ ...(1)

ใน ΔADB : $\frac{AB}{\sin\theta_2} = \frac{BD}{\sin\beta}$ ...(2)

(1) ÷ (2) : $\frac{AC}{\sin\theta_1} \cdot \frac{\sin\theta_2}{AB} = \frac{CD}{\sin\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{BD}$ โจทย์ให้ $\frac{BD}{CD} = \frac{2}{3}$

$\theta_1 + \theta_2 = 180^\circ$ ดังนั้น $\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ $\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ ...(*)

$\cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \beta\right) = \frac{1}{2}\cos\beta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$ | $\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

จาก $\frac{2}{3} = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ จะได้ $\cos\beta = \frac{3}{2}\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\alpha\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$ | $\frac{3}{2}\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

$\frac{1}{4}\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\beta$ | $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$

จับสมการฝั่งซ้ายตั้งหารด้วยสมการฝั่งขวา จะตัด $\cos\alpha$ และ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ได้ เหลือ $\frac{1}{4}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$
แทนใน $(*)$ จะได้ $\frac{AC}{AB}=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$

22. กำหนดให้ $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ นิยามโดย $f(x)=x^3+2$ และสำหรับจำนวนเต็มบวก n ใดๆ นิยาม
(1) $f_1=f$
(2) $f_{n+1}=f\circ f_n$
จงหาว่ามีจำนวนเต็ม x ทั้งหมดกี่จำนวน ในช่วงปิด $[2023,2566]$ ที่ทำให้ $\left(f(x)\right)^{f(x)}-f_{f(x)}(x)$ หารด้วย 3 ลงตัว

ตอบ 271

เนื่องจากการหาเศษเหลือ สามารถกระจายในการบวก ลบ คูณ และฐานของการยกกำลัง ได้
และเศษเหลือจากการหารด้วย 3 จะมีแค่ 0, 1, และ 2 ดังนั้น คิดตัวตั้งแค่ 0, 1, และ 2 ก็พอ
เพราะตัวตั้งที่มากกว่า 2 จะสามารถหารด้วย 3 และนำเศษไปคิดต่อ แล้วได้เศษสุดท้ายที่เท่ากับเศษที่คิดจากตัวตั้งเดิมได้
พิจารณาเศษเหลือจากการหาร x^3 ด้วย 3 : $0^3=0$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 0
$1^3=1$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1
$2^3=8$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 2
จะเห็นว่า x^3 หารด้วย 3 เหลือเศษ x (ถ้า $x>2$ ก็เอา x ไปหารด้วย 3 ต่อ)
ดังนั้น $f(x)=x^3+2$ หารด้วย 3 เหลือเศษ $x+2$ ...$(*)$
เนื่องจาก เศษของ $f(x)$ คือ $x+2$ จะเห็นว่า การหา f แต่ละครั้ง จะทำให้เศษเพิ่มขึ้น 2
และจากนิยามที่กำหนด จะเห็นว่า f_n คือการหา f ต่อกัน n ครั้ง ดังนั้น จะมีเศษเพิ่มขึ้น 2 เป็นจำนวน n ครั้ง
นั่นคือ $f_n(x)$ หารด้วย 3 จะเหลือเศษ $x+2n$
ดังนั้น $f_{f(x)}(x)$ หารด้วย 3 จะเหลือเศษ $x+2f(x)$
เหลือเศษ $x+2(x+2)$ ← จาก $(*)$
เหลือเศษ $3x+4$
เหลือเศษ 1 ← $3x$ หารด้วย 3 ลงตัว และ 4 หารด้วย 3 เหลือเศษ 1
ดังนั้น $\left(f(x)\right)^{f(x)}-f_{f(x)}(x)$ หารด้วย 3 ลงตัว ก็ต่อเมื่อ $\left(f(x)\right)^{f(x)}$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1 เท่ากัน
จะแบ่งกรณีเพื่อหาเงื่อนไขที่ทำให้ $\left(f(x)\right)^{f(x)}$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1
กรณี $f(x)\div 3$ ลงตัว : ฐาน $f(x)$ หารด้วย 3 ลงตัว ทำให้ $\left(f(x)\right)^{f(x)}$ หารด้วย 3 ลงตัว
กรณี $f(x)\div 3$ เหลือเศษ 1 : $\left(f(x)\right)^{f(x)}$ จะหารด้วย 3 เหลือเศษ $(1)^{f(x)}=\textcircled{1}$
(การหาเศษเหลือ กระจายในฐานของการยกกำลังได้ แต่กระจายในเลขชี้กำลังไม่ได้)
กรณี $f(x)\div 3$ เหลือเศษ 2 : $\left(f(x)\right)^{f(x)}$ จะหารด้วย 3 เหลือเศษ $(2)^{f(x)}$
เหลือเศษ $(-1)^{f(x)}$ ← 2 กับ -1 ห่างกัน 3 จึงหารด้วย 3 เหลือเศษเท่ากัน
เหลือเศษ $\begin{cases}\textcircled{1} & \text{เมื่อ } f(x) \text{ เป็นคู่}\\ -1 & \text{เมื่อ } f(x) \text{ เป็นคี่}\end{cases}$

จะได้ 2 กรณี :

จาก $(*)$	$f(x)$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1	หรือ	$f(x)$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 และ $f(x)$ เป็นคู่
	$x+2$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 1		$x+2$ หารด้วย 3 เหลือเศษ 2 และ x^3+2 เป็นคู่
	x หารด้วย 3 เหลือเศษ 2		x หารด้วย 3 ลงตัว และ x เป็นคู่
	$2024, 2027, \ldots, 2564$		$2028, 2034, \ldots, 2562$
	มี $\frac{2564-2024}{3}+1=181$ จำนวน		มี $\frac{2562-2028}{6}+1=90$ จำนวน

รวม $181+90=271$ จำนวน

23. จงหาคู่อันดับของจำนวนเชิงซ้อน (z, w) ทั้งหมด ที่มีสมบัติครบตามเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อ ต่อไปนี้

(1) $|z| = 1$

(2) $z + w = zw$

(3) $|z - w| = \frac{\sqrt{10}}{2}$

<u>ตอบ</u> $\left(i, \frac{1-i}{2}\right)$ และ $\left(-i, \frac{1+i}{2}\right)$

จาก (1)

จาก (2) จะได้ $|z + w| = |zw| = |z||w| = |w|$

แทนในสูตร $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

$$|w|^2 + \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = 2(1)^2 + 2|w|^2$$

$$\frac{1}{2} = |w|^2$$

จาก (2) : $z = zw - w = (z - 1)(w)$

$$|z|^2 = |z - 1|^2 |w|^2$$

$$1 = |z - 1|^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$2 = |z - 1|^2$$

ให้ $z = a + bi$ จะได้ $z - 1 = (a - 1) + bi$

$$|z - 1|^2 = (a - 1)^2 + b^2$$

$a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$

$$2 = a^2 - 2a + 1 + b^2 \qquad a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$$

$$2 = 1 - 2a + 1 \qquad 0 + b^2 = 1$$

$$a = 0 \qquad b = \pm 1$$

จะได้ $z = \pm i$

จาก (2) : $z = zw - w = (z - 1)(w)$ จะได้ $w = \frac{z}{z-1} = \frac{\pm i}{\pm i - 1} \cdot \frac{\pm i + 1}{\pm i + 1} = \frac{-1 \pm i}{-1 - 1} = \frac{1 \mp i}{2}$

24. จงหาค่าของ $\int_0^1 (x + 1)(2x + 1) \dots (2566x + 1)\left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{2x+1} + \cdots + \frac{2566}{2566x+1}\right) dx$

<u>ตอบ</u> $2567! - 1$

ใช้สูตร $\frac{d}{dx}(\text{หน้า} \cdot \text{หลัง}) = \text{หน้า}\frac{d}{dx}\text{หลัง} + \text{หลัง}\frac{d}{dx}\text{หน้า}$ จะสามารถกระจาย เพื่อดิฟผลคูณแบบมากกว่า 2 ตัวได้

เช่น $(y_1y_2y_3)' = y_1(y_2y_3)' + (y_2y_3)y_1'$

$$= y_1(y_2y_3' + y_3y_2') + (y_2y_3)y_1'$$

$$= y_1y_2y_3' + y_1y_3y_2' + y_2y_3y_1'$$

$$= y_1y_2y_3\left(\frac{y_3'}{y_3} + \frac{y_2'}{y_2} + \frac{y_1'}{y_1}\right)$$

ดึงตัวร่วม $y_1y_2y_3$ที่เกือบจะมีเหมือนกัน และหารชดเชยตัวที่ขาด

จะเห็นว่า $(y_1y_2y_3 \dots y_n)' = y_1y_2y_3 \dots y_n \sum \frac{y_i'}{y_i}$ ซึ่งคล้ายกับโจทย์ข้อนี้พอดี

ให้ $y_1 = x + 1$, $y_2 = 2x + 1$, ... , $y_{2566} = 2566x + 1$

นั่นคือ $y_i = ix + 1$ จะได้ $y_i' = i$ ซึ่งจะทำให้ $y_1y_2y_3 \dots y_n \sum \frac{y_i'}{y_i} = y_1y_2y_3 \dots y_n \sum \frac{i}{y_i}$ ตรงกับโจทย์พอดี

ดังนั้น $\int_0^1 y_1y_2y_3 \dots y_n \sum \frac{i}{y_i} dx = \int_0^1 (y_1y_2y_3 \dots y_n)' dx$

$$= y_1y_2y_3 \dots y_n \Big|_0^1$$

$$= (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2567) - (1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1) = 2567! - 1$$

25. จงหาผลรวมของรากทั้งหมด ที่อยู่ในช่วง $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ ของสมการ

$$(\sin x-\cos x)\left(\sin x-\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}+x\right)\right)\left(\sin x-\cos\left(\tfrac{2\pi}{3}-x\right)\right)=\tfrac{\sqrt{6}}{8}$$

<u>ตอบ</u> $\frac{5\pi}{6}$

สังเกตว่า $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$ กับ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)$ ถ้าเอามาบวกกัน หรือคูณกัน จะเข้าสูตรแล้วตัดมุมบางส่วนได้

ดังนั้น จะสามารถกระจายฝั่งซ้าย ซึ่งอยู่ในรูป $(k-a)(k-b)(k-c)$ โดยใช้ความรู้ในเรื่องผลบวกผลคูณรากได้

ให้ $\sin x=k$, $\cos x=a$, $\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)=b$, และ $\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=c$

จะได้ฝั่งซ้าย $=(k-a)(k-b)(k-c)$

$$=k^3-(a+b+c)k^2+(ab+ac+bc)k-abc$$
$$=k^3-(a+b+c)k^2+(a(b+c)+bc)k-abc \quad ...(*)$$

และจาก $b+c=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$

$$=2\cos\tfrac{2\pi}{3}\cos(-x)$$
$$=-\cos x$$

$bc=\cos\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)\cos\left(\frac{2\pi}{3}+x\right)$

$$=\frac{\cos\frac{4\pi}{3}+\cos 2x}{2}$$
$$=\frac{-\frac{1}{2}+2\cos^2 x-1}{2}=\frac{4\cos^2 x-3}{4}$$

แทน $b+c$ และ bc ใน $(*)$ และเปลี่ยนสมการกลับไปใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติ จะได้

$$=\sin^3 x-(\cos x-\cos x)\sin^2 x+\left(\cos x\,(-\cos x)+\tfrac{4\cos^2 x-3}{4}\right)\sin x-\cos x\left(\tfrac{4\cos^2 x-3}{4}\right)$$
$$=\sin^3 x \qquad -\tfrac{3}{4}\sin x\ -\cos x\left(\tfrac{4\cos^2 x-3}{4}\right)$$
$$=\frac{4\sin^3 x-3\sin x}{4}-\frac{4\cos^3 x-3\cos x}{4}$$
$$=-\frac{\sin 3x}{4}-\frac{\cos 3x}{4}$$

จัดรูปด้วย $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin 45°=\cos 45°$ ให้เข้าสูตร $\sin(A+B)$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 3x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 3x\right)$$
$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}(\cos 45°\sin 3x+\sin 45°\cos 3x) \qquad =-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(3x+45°)$$

จะได้สมการคือ $-\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin(3x+45°)=\frac{\sqrt{6}}{8}$

$$\sin(3x+45°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$0°\le x\le 90°$ ⇒ $45°\le 3x+45°\le 315°$

$$3x+45°=240°,\ 300°$$
$$x=65°,\ 85°$$

จะได้ผลบวกคำตอบ $=65°+85°=150°=\frac{5\pi}{6}$

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ Nuttachai Pattaya สำหรับข้อสอบ

ขอบคุณ คุณ Nud Piyapon Mahachaiwong สำหรับคำแนะนำในการจัดทำเฉลย

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร