วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (มี.ค. 65)

วันอาทิตย์ที่ 20 มีนาคม 2565 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 25 ข้อ ข้อละ 3 คะแนน รวม 75 คะแนน

1. ให้ เอกภพสัมพัทธ์ U แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ไม่เกิน 10
และ A, B เป็นสับเซตของ U โดยที่ A แทนเซตของจำนวนคู่ที่น้อยกว่า 10
ถ้า $n(A' \cup B) = 7$ และ $3 \notin A' - B$ แล้วข้อใดถูกต้อง
1. $B \subset A'$
2. $5 \in A \cap B$
3. $n(A \cap B) = 1$
4. $n(B) = 1$
5. $n(A \cup B) = 4$

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้
ก. กำหนด p, q และ r เป็นประพจน์ $(p \vee q) \to r$ สมมูลกับ $(p \to r) \wedge (q \to r)$
ข. กำหนด p, q และ r เป็นประพจน์ $[p \to (q \wedge r)] \vee (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์
ค. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง $\exists x \left[\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} > 0 \right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง
1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

3. ร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีชุดอาหาร 5 ชุด ดังนี้

ชุดที่	อาหารจานหลัก	เครื่องดื่ม	ของหวาน
1	พิซซา	น้ำอัดลมหรือน้ำเปล่า	บัวลอยหรือไอศกรีม
2	สปาเกตตีหรือก๋วยเตี๋ยว	ชานม	ไอศกรีม
3	ข้าวผัด	ชานมหรือน้ำอัดลม	ผลไม้หรือบัวลอย
4	พิซซาหรือก๋วยเตี๋ยว	ชานม	ผลไม้หรือไอศกรีม
5	ข้าวผัดหรือพิซซา	น้ำเปล่า	บัวลอยหรือผลไม้

โดยชุดอาหารแต่ละชุดให้เลือกอาหารจานหลัก 1 อย่าง เครื่องดื่ม 1 อย่าง และ ของหวาน 1 อย่าง เท่านั้น
ถ้ามานีต้องการเลือกชุดอาหาร 1 ชุด โดยมีเงื่อนไขดังนี้

1) ถ้าเลือกพิซซา แล้วจะไม่เลือกไอศกรีมและไม่เลือกบัวลอย
2) เลือกชานม ก็ต่อเมื่อ เลือกอาหารจานหลักเป็นข้าวผัดหรือสปาเกตตี
3) เลือกข้าวผัด ก็ต่อเมื่อ เลือกชานมและเลือกไอศกรีม

แล้วมานีต้องเลือกชุดอาหารชุดใด

1. ชุดที่ 1 2. ชุดที่ 2 3. ชุดที่ 3 4. ชุดที่ 4 5. ชุดที่ 5

4. ชมรมดนตรีซื้อพวงกุญแจแบบเดียวกันจากร้านค้าแห่งหนึ่งจำนวน 2 ครั้ง
โดยครั้งแรก จ่ายเงินซื้อพวงกุญแจ 1,800 บาท และนำพวงกุญแจไปแจกให้สมาชิกชมรม 40 ชิ้น จากนั้นนำพวงกุญแจส่วนที่เหลือไปขายในราคาที่สูงกว่าราคาที่ซื้อมาอยู่ 10 บาทต่อชิ้น ทำให้ได้เงินจากการขายพวงกุญแจส่วนที่เหลือนี้ทั้งหมด 2,000 บาท
ครั้งที่สอง ซื้อพวงกุญแจอีก 20 ชิ้น และร้านค้าลดราคาให้ชิ้นละ 20% จากราคาที่ซื้อในครั้งแรก ชมรมดนตรีต้องจ่ายเงินในการซื้อพวงกุญแจครั้งที่สองทั้งหมดกี่บาท

1. 240 2. 300 3. 400 4. 480 5. 600

5. ให้ a เป็นจำนวนเต็มลบที่มากที่สุดที่ทำให้ $a^2x^2 + 9x + 1 = 0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า a เป็นคำตอบของ $(a^2x^2 + 9x + 1)(2x - b) = 0$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

1. -27 2. -15 3. -12 4. 4 5. 5

6. ถ้า $r_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, y = \sqrt{10 - \sqrt{x+3}} \right\}$ และ $r_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,\middle|\, y = \frac{9}{\sqrt{x^2-3x-4}} \right\}$ แล้ว $D_{r_1} \cap D_{r_2}$ เท่ากับเซตในข้อใด

1. $[-3,-1) \cup (4,97]$
2. $[-3,-1) \cup (3,97]$
3. $[-3,-1)$
4. $(3,97]$
5. $(4,97]$

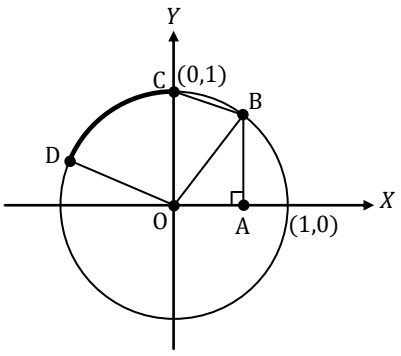
7. ให้ A แทนเซตคำตอบของ $\log(\log 64) - \log(\log 4) = \log x$
และ B แทนเซตคำตอบของ $9^x + 3^{x+1} = 3^{x+2} + 27$
แล้วผลบวกของสมาชิกทุกตัวในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

1. 4
2. 5
3. 6
4. 17
5. 18

8. ให้ $f(x) = 2\log_2 x$ และ $g(x) = 2\log_4(x+1) + 1$ ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f และ g ตัดกันที่จุด (a,b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือข้อใด

1. $\sqrt{2} - 1$
2. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
3. $1 + \sqrt{3}$
4. $1 + \sqrt{3}$ และ $1 - \sqrt{3}$
5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

9. กำหนดวงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ดังรูป



ให้มุม AOB มีขนาด α เรเดียน โดยที่ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

ให้มุม AOD มีขนาด β เรเดียน โดยที่ $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\text{AB} = \sin\alpha$

(ข) $\text{BC} = \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$

(ค) ส่วนโค้ง CD ยาว $\beta - \frac{\pi}{2}$ หน่วย

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

10. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $\bar{z} + \text{i}|z| = 12 + 9\text{i}$ เมื่อ $\text{i}^2 = -1$

ส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{21}{2}$
2. $-\frac{7}{2}$
3. $-\frac{3}{2}$
4. $\frac{3}{2}$
5. $\frac{7}{2}$

11. ให้ z_1 , z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$ และ $|z_3| = 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $z_1\bar{z_1} = 9$

(ข) $\left|\left(\frac{1}{z_1}\right)(-z_2)(\bar{z_3})\right| = 6$

(ค) ถ้า $|z_1z_2z_3\bar{z_3} + z_1z_2\bar{z_2}z_3 + z_1\bar{z_1}z_2z_3| = 18$ แล้ว $|z_1 + z_2 + z_3| = 6$

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

12. กำหนดเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการระบบหนึ่ง คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ได้เป็น $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(2X^t)$ เท่ากับเท่าใด

1. 12 2. 18 3. 24 4. 72 5. 96

13. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี r เป็นอัตราส่วนร่วม โดยที่ $r \in (0, 1)$ และ $a_1 > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots, \log a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

(ข) ${a_1}^2, {a_2}^2, {a_3}^2, \ldots, {a_n}^2, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

(ค) $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n} + \ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

14. สันติฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าสันติฝากเงินทุกสิ้นเดือน เป็นเวลา 12 เดือน โดยสิ้นเดือนที่ 1 ฝากเงิน $3{,}000$ บาท และจำนวนเงินที่ฝากในเดือนถัดๆ ไปจะเพิ่มขึ้นร้อยละ 5 ของจำนวนเงินที่ฝากในเดือนก่อนหน้า เมื่อสิ้นเดือนที่ 12 หลังจากที่สันติฝากเงินแล้ว สันติจะมีเงินรวมทั้งหมดกี่บาท

1. $\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\,(1.0025)^{12-n}$
2. $\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\,(1.0025)^{n-1}$
3. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)(1.0025)^{12}$
4. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)\left(\frac{1.0025^{12}-1}{0.0025}\right)$
5. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)\left(\frac{1.0025\left(1.0025^{12}-1\right)}{0.0025}\right)$

15. วงกลม $x^2 - 70x + y^2 + 10y - 144 = 0$ มีจุดตัดแกน X จุดหนึ่งที่ $A(a, 0)$ ซึ่ง $a < 0$ และมีจุดตัดแกน Y จุดหนึ่งที่ $B(0, b)$ ซึ่ง $b > 0$ ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด

1. $(-\frac{145}{4}, 0)$ 2. $(-\frac{135}{4}, 0)$ 3. $(55, 0)$ 4. $(\frac{135}{4}, 0)$ 5. $(\frac{145}{4}, 0)$

16. ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(-25, 0)$ และจุด B มีพิกัดเป็น $(25, 0)$

ถ้า S คือเซตของจุด P ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $|PA - PB| = 10$

T คือเซตของจุด Q ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $QA + QB = 70$

และรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดทั้งหมดอยู่ในเซต $S \cap T$ แล้วเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ยาวกี่หน่วย

1. 62 2. 70 3. 76 4. 124 5. 140

17. ให้จุด $A(0, 3, 2)$ จุด $B(1, -1, 0)$ จุด $C(2, 1, 3)$ และจุด $D(x, 5, 1)$ อยู่ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\overline{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overline{CD}$ แล้วขนาดของ $\overline{AD}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{489}$ 2. $\sqrt{329}$ 3. $\sqrt{230}$ 4. $\sqrt{201}$ 5. $\sqrt{174}$

18. ร้านอาหารสองแห่งสำรวจข้อมูลระยะเวลา (นาที) ที่ลูกค้าแต่ละคนนั่งรับประทานอาหารในร้าน พบว่า มีเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลแต่ละร้านเป็นดังนี้

เปอร์เซ็นไทล์ที่	ระยะเวลา (นาที) ที่ลูกค้าแต่ละคนนั่งรับประทานอาหาร	
	ร้านที่ 1	ร้านที่ 2
10	24.0	20.0
20	39.5	42.8
30	59.0	49.2
40	70.3	60.7
50	72.2	73.9
60	74.0	75.8
70	91.6	78.8
80	93.2	88.6
90	95.1	98.2

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) มัธยฐานของข้อมูลของร้านที่ 1 มากกว่ามัธยฐานของข้อมูลของร้านที่ 2

(ข) ร้านที่ 2 มีลูกค้าไม่ต่ำกว่าร้อยละ 25 ของจำนวนลูกค้าของร้านที่ 2 ที่ใช้เวลานั่งรับประทานอาหารน้อยกว่า 50 นาที

(ค) พิสัยระหว่างควอร์ไทล์ของข้อมูลของร้านที่ 1 น้อยกว่า 30 นาที

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

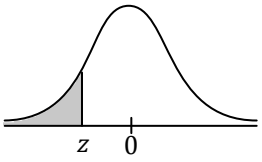
1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ (ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
4. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น

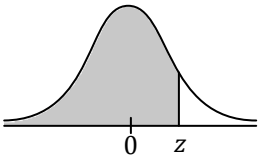
19. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน จำนวน 9 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 10 จำนวน 2 ครั้ง เท่ากับเท่าใด

1. $45\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^7$
2. $45\left(\frac{2}{12}\right)^2\left(\frac{9}{12}\right)^7$
3. $36\left(\frac{1}{18}\right)^2\left(\frac{17}{18}\right)^7$
4. $36\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^7$
5. $36\left(\frac{2}{11}\right)^2\left(\frac{9}{11}\right)^7$

20. น้ำหนักของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 5 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะมีน้ำหนักน้อยกว่า 45.6 กิโลกรัม เท่ากับ 0.3300
ถ้าสุ่มนักเรียนในห้องนี้มา 1 คน แล้วความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะมีน้ำหนักอยู่ระหว่าง 54.5 ถึง 59.5 กิโลกรัม เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ดังนี้





z	-0.95	-0.45	-0.44	-0.33	0.33	0.44	0.45	0.95
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน	0.1711	0.3264	0.3300	0.3707	0.6293	0.6700	0.6736	0.8289

1. 0.0407 2. 0.0443 3. 0.1553 4. 0.1589 5. 0.1711

21. การแข่งขันแบดมินตันประเภทชายเดี่ยวรายการหนึ่ง ในการแข่งขันรอบคัดเลือกมีนักกีฬาอยู่ 4 กลุ่ม กลุ่มละ 6 คน โดยที่
- นักกีฬาทุกคนที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันจับคู่แข่งขันแบบพบกันหมด
- นักกีฬาแต่ละคู่แข่งขันกันเพียงหนึ่งครั้ง
- ไม่มีการแข่งขันระหว่างกลุ่ม

การแข่งขันในรอบคัดเลือกนี้ จะมีจำนวนการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่

1. 20 2. 24 3. 60 4. 84 5. 120

22. ร้านค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดเรียงสินค้าในตู้ขายของอัตโนมัติ ซึ่งมีช่องแสดงสินค้าอยู่ 3 ชั้น ชั้นละ 8 ช่อง หากมีสินค้าที่ต้องการจำหน่ายในตู้อัตโนมัตินี้อยู่ 5 ประเภท รวม 24 ชิ้น ประกอบด้วย นม 8 ยี่ห้อ โยเกิร์ต 5 ยี่ห้อ น้ำส้ม 4 ยี่ห้อ น้ำมะนาว 4 ยี่ห้อ และน้ำมะพร้าว 3 ยี่ห้อ ถ้าต้องการนำสินค้าทั้งหมดมาจัดเรียงช่องละ 1 ชิ้น โดยให้สินค้าประเภทเดียวกันวางเรียงติดกันและอยู่ชั้นเดียวกัน แล้วร้านค้านี้จะสามารถจัดเรียงสินค้าได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

1. $3!\,(4!)^2 5!\,8!$ 2. $3!\,(4!)^2 (5!)^2 8!$ 3. $4(3!)(4!)^2 5!\,8!$
4. $4(3!)^2 (4!)^2 5!\,8!$ 5. $12(3!)(4!)^2 5!\,8!$

23. คุณครูซื้อโดนัทหน้าการ์ตูนที่แตกต่างกันทั้งหมดมาแจกนักเรียนกลุ่มหนึ่ง จำนวน 18 ชิ้น ประกอบด้วย โดนัทรสช็อกโกแลต 8 ชิ้น โดนัทรสส้ม 4 ชิ้น และโดนัทรสนมสด 6 ชิ้น ถ้าอลิสเป็นนักเรียนคนแรกที่ได้สุ่มหยิบโดนัท 1 ชิ้น หลังจากนั้นชาลีเป็นนักเรียนคนที่สองที่ได้สุ่มหยิบโดนัท 1 ชิ้น แล้วความน่าจะเป็นที่อลิสและชาลีจะได้โดนัทรสต่างกันเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{49}{153}$
2. $\frac{56}{153}$
3. $\frac{104}{153}$
4. $\frac{29}{81}$
5. $\frac{52}{81}$

24. ให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = 2x + 1$ ถ้า $h(x) = f(x^2)$ แล้ว $h'(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $4x + 2$
2. $2x^2 + 1$
3. $4x^2 + 2x$
4. $4x^3 + 2x$
5. $4x^3 + 4x$

25. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)$ เท่ากับจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\lim_{x \to c} f(x)$ มีค่า สำหรับทุก $c \in \mathbb{R}$

(ข) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(n, n+1]$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

(ค) $f'(x) = 1$ เมื่อ $x \in (n, n+1)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ (ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
4. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอนที่ 2 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 5 ข้อ ข้อละ 5 คะแนน รวม 25 คะแนน

26. เซตคำตอบของสมการ $4\sin 5\theta = 3$ เมื่อ $\theta \in [0, 3\pi]$ มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว

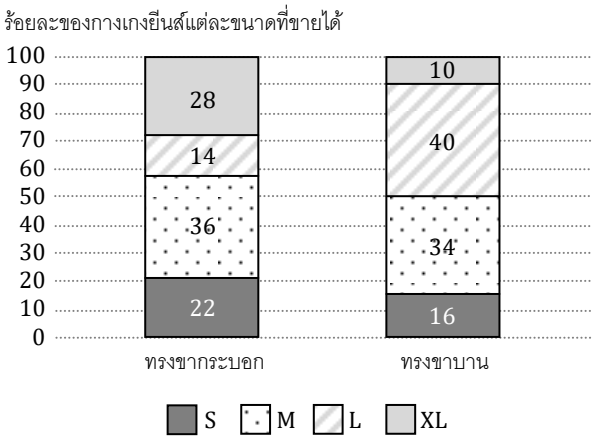
27. ให้ t เป็นจำนวนจริง ถ้าลำดับ $4\ ,\ t+1\ ,\ 3t-2\ ,\ \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต แล้วผลบวกของค่าของ t ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

28. ให้ $\vec{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้าขนาดของมุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{u}$ เท่ากับขนาดของมุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{v}$ และ $\vec{s}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด

29. ให้ $f(x) = -x^2 + k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X เท่ากับ 36 ตารางหน่วย แล้ว $f(-1) + f(1)$ เท่ากับเท่าใด

30. สันติเปิดร้านขายกางเกงยีนส์ โดยขายกางเกงยีนส์ 3 แบบ ได้แก่ ทรงขากระบอก ทรงขาบาน และทรงรัดรูป ซึ่งแต่ละแบบมี 4 ขนาด ได้แก่ S , M , L และ XL จากการเก็บข้อมูลการขายกางเกงยีนส์ของสันติในเดือนมีนาคม พบว่า

- สันติขายกางเกงยีนส์ได้ทั้งหมด 600 ตัว
- สันติขายกางเกงยีนส์ทรงขากระบอกขนาด M ได้มากกว่าทรงขากระบอกขนาด L อยู่ 55 ตัว
- สันติขายกางเกงยีนส์ทรงขาบานขนาด M ได้ 68 ตัว
- สันติเขียนแผนภูมิแท่งส่วนประกอบที่แสดงร้อยละของกางเกงยีนส์แต่ละขนาดที่ขายได้ของกางเกงยีนส์ทรงขากระบอกและกางเกงยีนส์ทรงขาบาน ได้ดังนี้



ในเดือนมีนาคม สันติขายกางเกงยีนส์ทรงรัดรูปได้ทั้งหมดกี่ตัว

เฉลย

1. 3	7. 2	13. 2	19. 4	25. 2
2. 2	8. 3	14. 1	20. 3	26. 16
3. 5	9. 5	15. 5	21. 3	27. 10
4. 1	10. 5	16. 4	22. 4	28. 6
5. 2	11. 1	17. 4	23. 3	29. 16
6. 1	12. 5	18. 2	24. 4	30. 150

แนวคิด

1. ให้ เอกภพสัมพัทธ์ U แทนเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่ไม่เกิน 10
และ A, B เป็นสับเซตของ U โดยที่ A แทนเซตของจำนวนคู่ที่น้อยกว่า 10
ถ้า $n(A' \cup B) = 7$ และ $3 \notin A' - B$ แล้วข้อใดถูกต้อง

1. $B \subset A'$ 2. $5 \in A \cap B$ 3. $n(A \cap B) = 1$
4. $n(B) = 1$ 5. $n(A \cup B) = 4$

ตอบ 3

จากโจทย์ จะได้ $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ และ $A = \{2, 4, 6, 8\}$ (น้อยกว่า 10 คือไม่รวม 10)
$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

โจทย์ให้ $n(A' \cup B) = 7$ แต่จะเห็นว่า A' มีสมาชิก 6 ตัวไปแล้ว ดังนั้น B ต้องมีเพิ่มอีก 1 ตัว ที่ไม่อยู่ใน A' ...$(*)$
(และ B อาจมีเลขที่ซ้ำกับ A' เพิ่มอีกกี่ตัวก็ได้)

โจทย์ให้ $3 \notin A' - B$ และเนื่องจาก $3 \in A'$ แสดงว่า $A' - B$ ต้องถูกหัก 3 ออกไป จึงสรุปได้ว่า $3 \in B$

1. จาก $(*) \rightarrow 1.$ ผิด
2. เนื่องจาก $5 \notin A \rightarrow 2.$ ผิด
3. จาก $(*)$ แสดงว่า B มี 1 ตัวที่อยู่ใน $A \rightarrow 3.$ ถูก
4. จาก $(*)$ และ $3 \in B$ ด้วย ดังนั้น B มีสมาชิกมากกว่า 1 ตัว $\rightarrow 4.$ ผิด
5. เนื่องจาก $3 \in B$ ดังนั้น $A \cup B$ จะมีสมาชิกมากกว่า 4 ตัว $\rightarrow 5.$ ผิด

2. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. กำหนด p, q และ r เป็นประพจน์ $(p \vee q) \rightarrow r$ สมมูลกับ $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

ข. กำหนด p, q และ r เป็นประพจน์ $[p \rightarrow (q \wedge r)] \vee (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ค. กำหนดเอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริง $\exists x \left[\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} > 0 \right]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

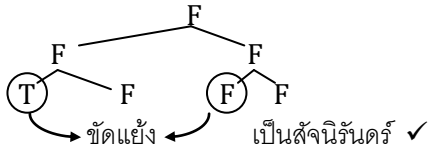
จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

ตอบ 2

ก. $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$
$\sim(p \vee q) \vee r \equiv (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee r)$
$(\sim p \wedge \sim q) \vee r \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee r$ ✓

ข. $[p \rightarrow (q \wedge r)] \vee (p \vee q)$



ค. $\begin{vmatrix} 2x & 1 \\ x^2 & 2x \end{vmatrix} = (2x)(2x) - (x^2)(1) = 4x^2 - x^2 = 3x^2$

$\rightarrow$ ต้องหาว่ามี x ที่ทำให้ $3x^2 > 0$ หรือไม่ ซึ่งมี (เช่น $x = 1$)

$\rightarrow$ จะได้ประพจน์เป็นจริง $\rightarrow$ ค. ผิด

3. ร้านอาหารแห่งหนึ่ง มีชุดอาหาร 5 ชุด ดังนี้

ชุดที่	อาหารจานหลัก	เครื่องดื่ม	ของหวาน
1	พิซซา	น้ำอัดลมหรือน้ำเปล่า	บัวลอยหรือไอศกรีม
2	สปาเกตตีหรือก๋วยเตี๋ยว	ชานม	ไอศกรีม
3	ข้าวผัด	ชานมหรือน้ำอัดลม	ผลไม้หรือบัวลอย
4	พิซซาหรือก๋วยเตี๋ยว	ชานม	ผลไม้หรือไอศกรีม
5	ข้าวผัดหรือพิซซา	น้ำเปล่า	บัวลอยหรือผลไม้

โดยชุดอาหารแต่ละชุดให้เลือกอาหารจานหลัก 1 อย่าง เครื่องดื่ม 1 อย่าง และ ของหวาน 1 อย่าง เท่านั้น

ถ้ามานีต้องการเลือกชุดอาหาร 1 ชุด โดยมีเงื่อนไขดังนี้

1) ถ้าเลือกพิซซา แล้วจะไม่เลือกไอศกรีมและไม่เลือกบัวลอย
2) เลือกชานม ก็ต่อเมื่อ เลือกอาหารจานหลักเป็นข้าวผัดหรือสปาเกตตี
3) เลือกข้าวผัด ก็ต่อเมื่อ เลือกชานมและเลือกไอศกรีม

แล้วมานีต้องเลือกชุดอาหารชุดใด

1. ชุดที่ 1 2. ชุดที่ 2 3. ชุดที่ 3 4. ชุดที่ 4 5. ชุดที่ 5

<u>ตอบ</u> 5

ชุด 1 จะขัดกับเงื่อนไขข้อ 1 เพราะเลือกพิซซา แต่ของหวานไม่มีอย่างอื่นนอกจากไอศกรีมกับบัวลอย

ชุด 2 จะขัดกับเงื่อนไขข้อ 3 เพราะเลือกชานมกับไอศกรีม แต่ไม่เลือกข้าวผัด

ชุด 3 จะขัดกับเงื่อนไขข้อ 3 เพราะเลือกข้าวผัด แต่ไม่มีไอศกรีมให้เลือกเป็นของหวาน

ชุด 4 จะขัดกับเงื่อนไขข้อ 2 เพราะเลือกชานม แต่จานหลักไม่มีข้าวผัดหรือสปาเกตตีให้เลือก

ชุด 5 ถ้าเลือก พิซซา น้ำเปล่า ผลไม้ จะสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้ง 3 ข้อ

4. ชมรมดนตรีซื้อพวงกุญแจแบบเดียวกันจากร้านค้าแห่งหนึ่งจำนวน 2 ครั้ง

โดยครั้งแรก จ่ายเงินซื้อพวงกุญแจ 1,800 บาท และนำพวงกุญแจไปแจกให้สมาชิกชมรม 40 ชิ้น จากนั้นนำพวงกุญแจส่วนที่เหลือไปขายในราคาที่สูงกว่าราคาที่ซื้อมาอยู่ 10 บาทต่อชิ้น ทำให้ได้เงินจากการขายพวงกุญแจส่วนที่เหลือนี้ทั้งหมด 2,000 บาท

ครั้งที่สอง ซื้อพวงกุญแจอีก 20 ชิ้น และร้านค้าลดราคาให้ชิ้นละ 20% จากราคาที่ซื้อในครั้งแรก ชมรมดนตรีต้องจ่ายเงินในการซื้อพวงกุญแจครั้งที่สองทั้งหมดกี่บาท

1. 240 2. 300 3. 400 4. 480 5. 600

<u>ตอบ</u> 1

สมมติให้ครั้งแรกซื้อมาชิ้นละ x บาท

ครั้งแรกซื้อ 1,800 บาท แสดงว่าซื้อมา $\frac{1800}{x}$ ชิ้น

แจก 40 ชิ้น จะเหลือ $\frac{1800}{x} - 40$ ชิ้น นำไปขายแพงขึ้น 10 บาท แสดงว่าขายชิ้นละ $x + 10$ บาท

ได้เงินจากการขาย 2,000 บาท แสดงว่า $\left(\frac{1800}{x}-40\right)(x+10) = 2000$

$$\left(\frac{45}{x}-1\right)(x+10) = 50$$
$$45+\frac{450}{x}-x-10 = 50$$
$$45x+450-x^2-10x = 50x$$
$$0 = x^2+15x-450$$
$$0 = (x-15)(x+30)$$
$x = 15, \cancel{-30}$ ราคาเป็นลบไม่ได้

ดังนั้น ครั้งแรกซื้อมาชิ้นละ 15 บาท

ครั้งที่สอง ลด 20% จะเหลือ $\frac{80}{100}\times 15 = 12$ บาท $\rightarrow$ ซื้อ 20 ชิ้นเป็นเงิน $12\times 20 = 240$ บาท

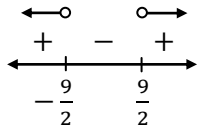
5. ให้ a เป็นจำนวนเต็มลบที่มากที่สุดที่ทำให้ $a^2x^2+9x+1=0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า a เป็นคำตอบของ $(a^2x^2+9x+1)(2x-b)=0$ แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด

1. -27 2. -15 3. -12 4. 4 5. 5

<u>ตอบ</u> 2

จากสูตรจำนวนคำตอบ สมการ $a^2x^2+9x+1=0$ จะไม่มีคำตอบเป็นจำนวนจริงเมื่อ $9^2-4(a^2)(1) < 0$

$$4a^2-9^2 > 0$$
$$(2a+9)(2a-9) > 0$$



จำนวนเต็มลบที่มากที่สุดในช่วงนี้คือ -5

ดังนั้น $a=-5$ ...(*)

โจทย์ให้ a เป็นคำตอบของ $(a^2x^2+9x+1)(2x-b)=0$

แต่ $a^2x^2+9x+1=0$ ไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง ดังนั้น a เป็นคำตอบของ $2x-b=0$

จาก (*) -5 เป็นคำตอบของ $2x-b=0$

$$2(-5)-b = 0$$
$$-10 = b$$

ดังนั้น $a+b=-5+(-10)=-15$

6. ถ้า $r_1=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,\middle|\, y=\sqrt{10-\sqrt{x+3}}\right\}$ และ $r_2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,\middle|\, y=\frac{9}{\sqrt{x^2-3x-4}}\right\}$ แล้ว $D_{r_1}\cap D_{r_2}$ เท่ากับเซตในข้อใด

1. $[-3,-1)\cup(4,97]$ 2. $[-3,-1)\cup(3,97]$ 3. $[-3,-1)$

4. $(3,97]$ 5. $(4,97]$

<u>ตอบ</u> 1

r_1: ในรูทต้อง ≥ 0

$x+3 \geq 0$ และ $10-\sqrt{x+3}\geq 0$

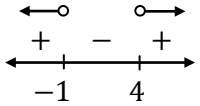
$x \geq -3$ $\quad 10 \geq \sqrt{x+3}$

$\quad 100 \geq x+3$

$\quad 97 \geq x$

r_2: ในรูทต้อง ≥ 0 และตัวส่วนห้ามเป็น 0

$$x^2-3x-4 > 0$$
$$(x+1)(x-4) > 0$$



จะได้ $D_{r_1}=[-3,\ 97]$ และ $D_{r_2}=(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$ ซึ่งอินเตอร์เซ็กกันจะเหลือ $[-3,-1)\cup(4,97]$

7. ให้ A แทนเซตคำตอบของ $\log(\log 64) - \log(\log 4) = \log x$
และ B แทนเซตคำตอบของ $9^x + 3^{x+1} = 3^{x+2} + 27$
แล้วผลบวกของสมาชิกทุกตัวในเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

1. 4 2. 5 3. 6 4. 17 5. 18

ตอบ 2

$$\log(\log 64) - \log(\log 4) = \log x$$
$$\log \frac{\log 64}{\log 4} = \log x$$
$$\log_4 64 = x$$
$$3 = x$$

$$9^x + 3^{x+1} = 3^{x+2} + 27$$
$$(3^2)^x + 3^x \cdot 3^1 = 3^x \cdot 3^2 + 27$$
$$3^{2x} + 3(3^x) = 9(3^x) + 27$$
$$3^{2x} - 6(3^x) - 27 = 0$$
$$(3^x - 9)(3^x + 3) = 0$$
$3^x = 9$, ~~$3^x = -3$~~ จำนวนบวก ยกกำลังอะไรก็เป็นบวก
$$x = 2$$

จะได้ผลบวกของคำตอบคือ $3 + 2 = 5$

8. ให้ $f(x) = 2\log_2 x$ และ $g(x) = 2\log_4(x+1) + 1$ ถ้ากราฟของฟังก์ชัน f และ g ตัดกันที่จุด (a, b) เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ a ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือข้อใด

1. $\sqrt{2} - 1$ 2. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 3. $1 + \sqrt{3}$
4. $1 + \sqrt{3}$ และ $1 - \sqrt{3}$ 5. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ และ $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

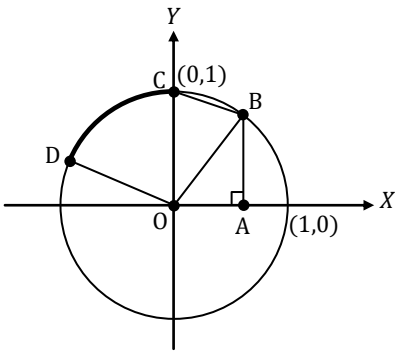
ตอบ 3

หาจุดตัดกราฟ ต้องแก้ระบบสมการ $y = 2\log_2 x$ ...(1)
$y = 2\log_4(x+1) + 1$ ...(2)

$(1) = (2)$:
$$2\log_2 x = 2\log_4(x+1) + 1$$
$$\log_2 x^2 = 2\log_{(2^2)}(x+1) + 1$$
$$\log_2 x^2 = \frac{2}{2}\log_2(x+1) + 1$$
$$\log_2 x^2 = \log_2(x+1) + \log_2 2$$
$$\log_2 x^2 = \log_2 (x+1)(2)$$
$$x^2 = 2x + 2$$
$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

ใช้สูตร $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ จะได้ $x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm \sqrt{3}$
แต่หลัง $\log$ ต้องเป็นบวก ดังนั้น $1 - \sqrt{3}$ ใช้ไม่ได้ $(\sqrt{3} \approx 1.732)$ จึงเหลือ $x = 1 + \sqrt{3}$ ค่าเดียว
ค่า a คือพิกัด X ของจุดตัด ดังนั้น $a = 1 + \sqrt{3}$

9. กำหนดวงกลมรัศมียาว 1 หน่วย ดังรูป



ให้มุม AOB มีขนาด α เรเดียน โดยที่ $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$

ให้มุม AOD มีขนาด β เรเดียน โดยที่ $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\text{AB} = \sin\alpha$

(ข) $\text{BC} = \sqrt{2 - 2\sin\alpha}$

(ค) ส่วนโค้ง CD ยาว $\beta - \frac{\pi}{2}$ หน่วย

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

ตอบ 5

ก. จากนิยาม จะได้พิกัด B คือ $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ ดังนั้น $\text{AB} = \text{พิกัด } Y = \sin\alpha$ ✓

ข. ใช้สูตรระยะระหว่างจุด $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

จะได้ $\text{BC} =$ ระยะจาก $\text{C}(0,1)$ ไปยัง $B(\cos\alpha, \sin\alpha)$

$$= \sqrt{(0-\cos\alpha)^2 + (1-\sin\alpha)^2}$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$= \sqrt{\cos^2\alpha + 1 - 2\sin\alpha + \sin^2\alpha}$$

$$= \sqrt{2 - 2\sin\alpha} \quad ✓$$

ค. มุม AOD มีขนาด β ดังนั้น ส่วนโค้งจาก $(1,0)$ ไป D ยาว β

และเนื่องจาก AOC มีขนาด $\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น ส่วนโค้งจาก $(1,0)$ ไป C ยาว $\frac{\pi}{2}$

เอาส่วนโค้งทั้งสองมาหักกัน จะเหลือ ส่วนโค้ง CD ยาว $\beta - \frac{\pi}{2}$ ✓

10. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $\bar{z} + \text{i}|z| = 12 + 9\text{i}$ เมื่อ $\text{i}^2 = -1$

ส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด

1. $-\frac{21}{2}$
2. $-\frac{7}{2}$
3. $-\frac{3}{2}$
4. $\frac{3}{2}$
5. $\frac{7}{2}$

ตอบ 5

ให้ $z = x + y\text{i}$ จะได้ $\bar{z} = x - y\text{i}$ และ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

แทนในสมการ จะได้ $x - y\text{i} + \text{i}\sqrt{x^2 + y^2} = 12 + 9\text{i}$

$$x + \left(\sqrt{x^2 + y^2} - y\right)\text{i} = 12 + 9\text{i}$$

เทียบส่วนจริง และส่วนจินตภาพ จะได้ $x = 12$ และ

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + y^2} - y &= 9 \\ \sqrt{12^2 + y^2} &= y + 9 \\ 144 + y^2 &= y^2 + 18y + 81 \\ 63 &= 18y \\ \frac{7}{2} &= y \end{aligned}$$

11. ให้ z_1 , z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $|z_1| = 3$, $|z_2| = 2$ และ $|z_3| = 1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $z_1\overline{z_1} = 9$

(ข) $\left|\left(\frac{1}{z_1}\right)(-z_2)(\overline{z_3})\right| = 6$

(ค) ถ้า $|z_1z_2z_3\overline{z_3} + z_1z_2\overline{z_2}z_3 + z_1\overline{z_1}z_2z_3| = 18$ แล้ว $|z_1 + z_2 + z_3| = 6$

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

ตอบ 1

ก. จากสูตร จะได้ $z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = 3^2 = 9$ ✓

ข. จากสมบัติ $|z| = |\overline{z}| = |-z| = |-\overline{z}|$ และ ค่าสัมบูรณ์ กระจายในการคูณหารได้

ดังนั้น $\left|\left(\frac{1}{z_1}\right)(-z_2)(\overline{z_3})\right| = \frac{|z_2|\,|z_3|}{|z_1|} = \frac{2\cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$ ✗

ค. จาก
$$\begin{aligned} |z_1z_2z_3\overline{z_3} + z_1z_2\overline{z_2}z_3 + z_1\overline{z_1}z_2z_3| &= 18 \\ |z_1z_2z_3(\overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_1})| &= 18 \\ |z_1|\,|z_2|\,|z_3|\,|\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| &= 18 \\ 3\cdot 2\cdot 1\cdot|\overline{z_1 + z_2 + z_3}| &= 18 \\ |z_1 + z_2 + z_3| &= 3 \end{aligned}$$
ดึงตัวร่วม
ค่าสัมบูรณ์ กระจายในการคูณได้
สังยุค กระจายในการบวกได้
$|z| = |\overline{z}|$
✗

12. กำหนดเมทริกซ์แต่งเติมของระบบสมการระบบหนึ่ง คือ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right]$

ใช้การดำเนินการตามแถวเพื่อแปลงเมทริกซ์แต่งเติมนี้ได้เป็น $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & c & 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(2X^t)$ เท่ากับเท่าใด

1. 12
2. 18
3. 24
4. 72
5. 96

ตอบ 5

จะเห็นว่า $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{c} -R_1 + R_2 \\ -R_1 + R_3 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$ ดังนั้น $a = -3$, $b = -1$, $c = 5$

จะได้ $\det(2X^t) = 2^3\det(X^t) = 8\det X = 8\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 8\big((0 - 1 + 5) - (-3 - 5 + 0)\big)$

$= 96$

13. ให้ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิตที่มี r เป็นอัตราส่วนร่วม โดยที่ $r \in (0,1)$ และ $a_1 > 0$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\log a_1, \log a_2, \log a_3, \ldots, \log a_n, \ldots$ เป็นลำดับเลขคณิต

(ข) ${a_1}^2, {a_2}^2, {a_3}^2, \ldots, {a_n}^2, \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต

(ค) $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}+\ldots$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ก) และ (ข) ถูกต้องเท่านั้น
3. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
4. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ถูกต้อง

<u>ตอบ</u> 2

ก. $\log a_2 - \log a_1 = \log\frac{a_2}{a_1} = \log r$
$\log a_3 - \log a_2 = \log\frac{a_3}{a_2} = \log r$
$\vdots$
} จะเห็นว่า พจน์คู่ที่อยู่ติดกัน ลบกันได้ $\log r$ เท่ากันเสมอ จึงเป็นลำดับเลขคณิต ✓

ข. $\frac{{a_2}^2}{{a_1}^2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = r^2$
$\frac{{a_3}^2}{{a_2}^2} = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 = r^2$
$\vdots$
} จะเห็นว่า พจน์คู่ที่อยู่ติดกัน หารกันได้ r^2 เท่ากันเสมอ จึงเป็นลำดับเรขาคณิต ✓

ค. $\frac{1}{a_2} \div \frac{1}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{r}$
$\frac{1}{a_3} \div \frac{1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{r}$
$\vdots$
} จะเห็นว่า พจน์คู่ที่อยู่ติดกัน หารกันได้ $\frac{1}{r}$ เท่ากันเสมอ เนื่องจาก $0 < r < 1$ จะทำให้ $\frac{1}{r} > 1$ จึงเป็นอนุกรมเรขาคณิต ที่มีอัตราส่วนร่วม > 1 ซึ่งจะลู่ออก ✗

14. สันติฝากเงินกับธนาคารแห่งหนึ่ง ซึ่งให้อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 3 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยแบบทบต้นทุกเดือน ถ้าสันติฝากเงินทุกสิ้นเดือน เป็นเวลา 12 เดือน โดยสิ้นเดือนที่ 1 ฝากเงิน 3,000 บาท และจำนวนเงินที่ฝากในเดือนถัดๆ ไป จะเพิ่มขึ้นร้อยละ 5 ของจำนวนเงินที่ฝากในเดือนก่อนหน้า เมื่อสิ้นเดือนที่ 12 หลังจากที่สันติฝากเงินแล้ว สันติจะมีเงินรวมทั้งหมดกี่บาท

1. $\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}(1.0025)^{12-n}$
2. $\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}(1.0025)^{n-1}$
3. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)(1.0025)^{12}$
4. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)\left(\frac{1.0025^{12}-1}{0.0025}\right)$
5. $\left(\sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\right)\left(\frac{1.0025(1.0025^{12}-1)}{0.0025}\right)$

<u>ตอบ</u> 1

เริ่มฝาก 3,000 บาท และเดือนถัดไปฝากเพิ่ม 5% ของเดือนก่อนหน้า $\rightarrow 1+\frac{5}{100} = 1.05$

ดังนั้น เงินที่ฝากในแต่ละเดือน จะเป็นลำดับเรขาคณิต $3000, 3000(1.05), 3000(1.05)^2, \ldots$

ทบต้นทุกเดือน $\rightarrow$ งวดละ 1 เดือน

ดอกเบี้ย 3% ต่อปี คิดเป็นดอกเบี้ยต่องวด $\frac{3\%}{12} = 0.25\% \rightarrow$ จะได้ $1+r = 1+\frac{0.25}{100} = 1.0025$

เดือน 1 ฝาก 3,000 บาท ตั้งแต่สิ้นเดือน 1 ถึงสิ้นเดือน 12 จะมี 11 งวด (ฝากสิ้นเดือน จำนวนงวดจะน้อยลงไป 1)

เมื่อสิ้นเดือน 12 เงินนี้จะเพิ่มมูลค่าเป็น $3{,}000(1.0025)^{11}$

เดือน 2 ฝาก $3{,}000(1.05)$ บาท โดยจำนวนงวดจะน้อยลง 1 เหลือ 10 งวด
เมื่อสิ้นเดือน 12 เงินนี้จะเพิ่มมูลค่าเป็น $3{,}000(1.05)(1.0025)^{10}$

$\vdots$

รวมมูลค่า ณ สิ้นเดือน 12 ของทุกๆ เดือน จะได้

$= 3{,}000(1.0025)^{11} + 3{,}000(1.05)(1.0025)^{10} + 3{,}000(1.05)^2(1.0025)^9 + \ldots$

$= \sum_{n=1}^{12} 3{,}000(1.05)^{n-1}\,(1.0025)^{12-n}$

15. วงกลม $x^2 - 70x + y^2 + 10y - 144 = 0$ มีจุดตัดแกน X จุดหนึ่งที่ $A(a,0)$ ซึ่ง $a < 0$ และมีจุดตัดแกน Y จุดหนึ่งที่ $B(0,b)$ ซึ่ง $b > 0$ ถ้า L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุดศูนย์กลางของวงกลมนี้ และขนานกับเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B แล้วเส้นตรง L ตัดแกน X ที่จุดใด

1. $(-\frac{145}{4}, 0)$ 2. $(-\frac{135}{4}, 0)$ 3. $(55, 0)$ 4. $(\frac{135}{4}, 0)$ 5. $(\frac{145}{4}, 0)$

<u>ตอบ</u> 5

จุดตัดแกน X แทน $y = 0$:

$x^2 - 70x + 0^2 + 10(0) - 144 = 0$
$(x-72)(x+2) = 0$
$x = 72, -2$

โจทย์ให้ $a < 0$ จะได้ $a = -2$

จุดตัดแกน Y แทน $x = 0$:

$0^2 - 70(0) + y^2 + 10y - 144 = 0$
$(y-8)(y+18) = 0$
$y = 8, -18$

โจทย์ให้ $b > 0$ จะได้ $b = 8$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่าน $A(-2,0)$ และ $B(0,8)$ จะมีความชัน $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8-0}{0-(-2)} = 4$ ...(∗)

หาจุดศูนย์กลาง → จัดรูป $x^2 - 70x + y^2 + 10y = 144$
$x^2 - 2(35)x + 35^2 + y^2 + 2(5)y + 5^2 = 144 + 35^2 + 5^2$
$(x-35)^2 + (y+5)^2 = 144 + 35^2 + 5^2$
จะได้จุดศูนย์กลางคือ $(35, -5)$

ดังนั้น L ผ่าน $(35,-5)$ ถ้าให้ L ตัดแกน X ที่จุด $(k,0)$ จะได้ความชันของ L คือ $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0-(-5)}{k-35} = \frac{5}{k-35}$
แต่ L ขนานกับเส้นตรงที่ผ่าน A และ B ดังนั้น ความชัน $\frac{5}{k-35} = 4$ (จาก (∗))

$5 = 4k - 140$
$\frac{145}{4} = k$ → ตัดแกน X ที่ $(\frac{145}{4}, 0)$

16. ให้จุด A มีพิกัดเป็น $(-25, 0)$ และจุด B มีพิกัดเป็น $(25, 0)$
ถ้า S คือเซตของจุด P ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $|PA - PB| = 10$
T คือเซตของจุด Q ทั้งหมดในระบบพิกัดฉากสองมิติ โดยที่ $QA + QB = 70$
และรูปสี่เหลี่ยมรูปหนึ่งมีจุดยอดทั้งหมดอยู่ในเซต $S \cap T$ แล้วเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ยาวกี่หน่วย

1. 62 2. 70 3. 76 4. 124 5. 140

<u>ตอบ</u> 4

S สอดคล้องกับสมบัติของไฮเพอร์โบลา ที่มีโฟกัสที่ $A(-25,0)$ และ $B(25,0)$ และแกนตามขวางยาว 10
จะได้ระยะโฟกัส $c = 25$ และ $a = \frac{10}{2} = 5$ และจะได้ $b^2 = c^2 - a^2 = 25^2 - 5^2 = 600$
โฟกัสเรียงในแนวนอน จึงเป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน จุดศูนย์กลาง จะอยู่ตรงกลางระหว่างโฟกัส → คือ $(0,0)$
แทนในสมการไฮเพอร์โบลาแนวนอน $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้ $\frac{x^2}{5^2} - \frac{y^2}{600} = 1$ ...(1)

T สอดคล้องกับสมบัติของวงรี ที่มีโฟกัสที่ $A(-25,0)$ และ $B(25,0)$ และแกนเอกยาว 70

จะได้ระยะโฟกัส $c=25$ และ $a=\frac{70}{2}=35$ และจะได้ $b^2=a^2-c^2=35^2-25^2=600$

โฟกัสเรียงในแนวนอน จึงเป็นวงรีแนวนอน จุดศูนย์กลาง จะอยู่ตรงกลางระหว่างโฟกัส $\rightarrow$ คือ $(0,0)$

แทนในสมการวงรีแนวนอน $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ จะได้ $\frac{x^2}{35^2}+\frac{y^2}{600}=1$ ...(2)

$$(1)+(2):\quad \frac{x^2}{5^2}+\frac{x^2}{35^2}=2$$
$$\frac{49x^2+x^2}{35^2}=2$$
$$x^2=2\cdot\frac{35^2}{50}=49$$
$$x=\pm 7$$

แทนใน (1) : $\frac{49}{5^2}-\frac{y^2}{600}=1$ (คูณ 600 ตลอด)

$$1176-y^2=600$$
$$576=y^2$$
$$\pm 24=y$$

สี่เหลี่ยมที่เกิดจาก $(\pm 7,\pm 24)$ จะยาว 14 (จาก -7 ถึง 7) และกว้าง 48 (จาก -24 ถึง 24)

จะมีเส้นรอบรูปยาว $2(14+48)=124$

17. ให้จุด $A(0,3,2)$ จุด $B(1,-1,0)$ จุด $C(2,1,3)$ และจุด $D(x,5,1)$ อยู่ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง ถ้า $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{CD}$ แล้วขนาดของ $\overrightarrow{AD}$ เท่ากับเท่าใด

1. $\sqrt{489}$ 2. $\sqrt{329}$ 3. $\sqrt{230}$ 4. $\sqrt{201}$ 5. $\sqrt{174}$

ตอบ 4

$$\overrightarrow{AB}=\begin{bmatrix}1-0\\-1-3\\0-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-4\\-2\end{bmatrix} \text{ และ } \overrightarrow{CD}=\begin{bmatrix}x-2\\5-1\\1-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x-2\\4\\-2\end{bmatrix}$$

ตั้งฉากกัน แสดงว่า $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

$$(1)(x-2)+(-4)(4)+(-2)(-2)=0$$
$$x-2-16+4=0$$
$$x=14$$

จะได้พิกัด $D(14,5,1)$ ดังนั้น $\overrightarrow{AD}=\begin{bmatrix}14-0\\5-3\\1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14\\2\\-1\end{bmatrix}$ ซึ่งมีขนาด $=\sqrt{14^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{201}$

18. ร้านอาหารสองแห่งสำรวจข้อมูลระยะเวลา (นาที) ที่ลูกค้าแต่ละคนนั่งรับประทานอาหารในร้าน พบว่า มีเปอร์เซ็นไทล์ของข้อมูลแต่ละร้านเป็นดังนี้

เปอร์เซ็นไทล์ที่	ระยะเวลา (นาที) ที่ลูกค้าแต่ละคนนั่งรับประทานอาหาร	
	ร้านที่ 1	ร้านที่ 2
10	24.0	20.0
20	39.5	42.8
30	59.0	49.2
40	70.3	60.7
50	72.2	73.9
60	74.0	75.8
70	91.6	78.8
80	93.2	88.6
90	95.1	98.2

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) มัธยฐานของข้อมูลของร้านที่ 1 มากกว่ามัธยฐานของข้อมูลของร้านที่ 2

(ข) ร้านที่ 2 มีลูกค้าไม่ต่ำกว่าร้อยละ 25 ของจำนวนลูกค้าของร้านที่ 2 ที่ใช้เวลานั่งรับประทานอาหารน้อยกว่า 50 นาที

(ค) พิสัยระหว่างควอร์ไทล์ของข้อมูลของร้านที่ 1 น้อยกว่า 30 นาที

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ (ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
4. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอบ 2

(ก) มัธยฐานฐาน คือ P_{50} ซึ่งจากตารางจะได้ร้านที่ 1 คือ 72.2 และร้านที่ 2 คือ 73.9
ดังนั้น ร้านที่ 1 ไม่ได้มากกว่าร้านที่ 2 $\rightarrow$ (ก) ผิด

(ข) จากตาราง ร้านที่ 2 มี $P_{30} = 49.2$ แสดงว่ามีลูกค้า 30% ที่นั่งน้อยกว่า 49.2 นาที
นั่นคือ มีไม่ต่ำกว่า 25% ที่นั่งน้อยกว่า 50 นาที $\rightarrow$ (ข) ถูก

(ค) พิสัยระหว่างควอร์ไทล์ $= Q_3 - Q_1 = P_{75} - P_{25}$
จะเห็นว่าร้านที่ 1 มี $P_{70} - P_{30} = 91.6 - 59.0 = 32.6$
$P_{75} - P_{25}$ จะมีตัวตั้งมากขึ้น และตัวลบน้อยลง ทำให้ผลลบเกิน 32.6 $\rightarrow$ (ค) ผิด

19. ในการทอดลูกเต๋าที่เที่ยงตรง 2 ลูกพร้อมกัน จำนวน 9 ครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลบวกของแต้มบนหน้าลูกเต๋ามากกว่า 10 จำนวน 2 ครั้ง เท่ากับเท่าใด

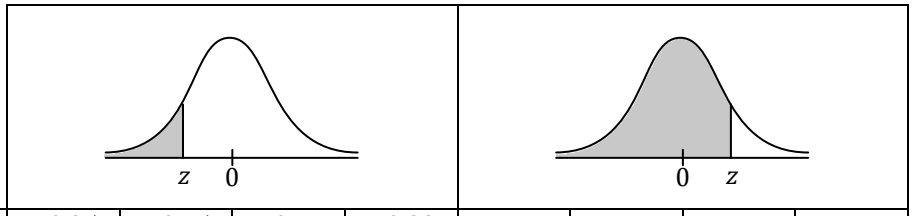
1. $45\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^7$
2. $45\left(\frac{2}{12}\right)^2\left(\frac{9}{12}\right)^7$
3. $36\left(\frac{1}{18}\right)^2\left(\frac{17}{18}\right)^7$
4. $36\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^7$
5. $36\left(\frac{2}{11}\right)^2\left(\frac{9}{11}\right)^7$

ตอบ 4

หาความน่าจะเป็นของการทอด 1 ครั้ง แล้วใช้สูตรการแจกแจงทวินาม
ทอดลูกเต๋า 2 ลูก จะได้จำนวนแบบทั้งหมด $= 6 \times 6$ แบบ
ได้ผลรวมมากกว่า 10 จะมี (5,6), (6,5), (6,6) ทั้งหมด 3 แบบ จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{3}{6\times6} = \frac{1}{12}$
จะได้ความน่าจะเป็นที่ได้มากกว่า 10 จำนวน 2 ครั้งจาก 9 ครั้ง $= \binom{9}{2}\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(1-\frac{1}{12}\right)^{9-2} = 36\left(\frac{1}{12}\right)^2\left(\frac{11}{12}\right)^7$

20. น้ำหนักของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเป็น 5 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนหนึ่งจะมีน้ำหนักน้อยกว่า 45.6 กิโลกรัม เท่ากับ 0.3300
ถ้าสุ่มนักเรียนในห้องนี้มา 1 คน แล้วความน่าจะเป็นที่นักเรียนคนนี้จะมีน้ำหนักอยู่ระหว่าง 54.5 ถึง 59.5 กิโลกรัม เท่ากับเท่าใด

กำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน ดังนี้



z	-0.95	-0.45	-0.44	-0.33	0.33	0.44	0.45	0.95
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติมาตรฐาน	0.1711	0.3264	0.3300	0.3707	0.6293	0.6700	0.6736	0.8289

1. 0.0407 2. 0.0443 3. 0.1553 4. 0.1589 5. 0.1711

<u>ตอบ</u> 3

ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มแทนน้ำหนัก จากโจทย์ จะได้ $P(X < 45.6) = 0.33$

แต่จากตาราง $P(Z < -0.44) = 0.33$ ดังนั้น $\frac{45.6-\mu}{\sigma} = -0.44$ ค่าเฉลี่ยเป็น 5 เท่าของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน $\rightarrow \mu = 5\sigma$

$$45.6 - 5\sigma = -0.44\sigma$$
$$45.6 = 4.56\sigma$$
$$10 = \sigma \rightarrow \text{จะได้ } \mu = 5(10) = 50$$

ดังนั้น $P(54.5 < X < 59.5) = P\left(\frac{54.5-\mu}{\sigma} < Z < \frac{59.5-\mu}{\sigma}\right)$

$$= P\left(\frac{54.5-50}{10} < Z < \frac{59.5-50}{10}\right)$$
$$= P(\ 0.45 < Z < 0.95\ ) \quad \text{เปิดตาราง}$$
$$= 0.8289 - 0.6736 = 0.1553$$

21. การแข่งขันแบดมินตันประเภทชายเดี่ยวรายการหนึ่ง ในการแข่งขันรอบคัดเลือกมีนักกีฬาอยู่ 4 กลุ่ม กลุ่มละ 6 คน โดยที่
- นักกีฬาทุกคนที่อยู่ในกลุ่มเดียวกันจับคู่แข่งขันแบบพบกันหมด
- นักกีฬาแต่ละคู่แข่งขันกันเพียงหนึ่งครั้ง
- ไม่มีการแข่งขันระหว่างกลุ่ม

การแข่งขันในรอบคัดเลือกนี้ จะมีจำนวนการแข่งขันทั้งหมดกี่คู่

1. 20 2. 24 3. 60 4. 84 5. 120

<u>ตอบ</u> 3

ในกลุ่ม 6 คน แข่งแบบพบกันหมด $\rightarrow$ เลือกจับคู่ 2 คนจาก 6 คน มาแข่งกัน จะเลือกได้ $\binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$ แบบ
ดังนั้น แต่ละกลุ่ม จะแข่งภายในกลุ่ม 15 คู่

มี 4 กลุ่ม จะได้จำนวนการแข่ง $= 15 \times 4 = 60$ คู่

22. ร้านค้าแห่งหนึ่งต้องการจัดเรียงสินค้าในตู้ขายของอัตโนมัติ ซึ่งมีช่องแสดงสินค้าอยู่ 3 ชั้น ชั้นละ 8 ช่อง หากมีสินค้าที่ต้องการจำหน่ายในตู้อัตโนมัตินี้อยู่ 5 ประเภท รวม 24 ชิ้น ประกอบด้วย นม 8 ยี่ห้อ โยเกิร์ต 5 ยี่ห้อ น้ำส้ม 4 ยี่ห้อ น้ำมะนาว 4 ยี่ห้อ และน้ำมะพร้าว 3 ยี่ห้อ ถ้าต้องการนำสินค้าทั้งหมดมาจัดเรียงช่องละ 1 ชิ้น โดยให้สินค้าประเภทเดียวกันวางเรียงติดกันและอยู่ชั้นเดียวกัน แล้วร้านค้านี้จะสามารถจัดเรียงสินค้าได้แตกต่างกันทั้งหมดกี่วิธี

1. $3!\,(4!)^2 5!\,8!$
2. $3!\,(4!)^2 (5!)^2 8!$
3. $4(3!)(4!)^2 5!\,8!$
4. $4(3!)^2 (4!)^2 5!\,8!$
5. $12(3!)(4!)^2 5!\,8!$

<u>ตอบ</u> 4

มีชั้นละ 8 ช่อง ดังนั้น นมทั้ง 8 ยี่ห้อ ต้องอยู่ในชั้นเดียวกัน

โยเกิร์ต 5 ยี่ห้อ ต้องอยู่ชั้นเดียวกับน้ำมะพร้าว 3 ยี่ห้อ

และน้ำส้ม 4 ยี่ห้อ ต้องอยู่ชั้นเดียวกับน้ำมะนาว 4 ยี่ห้อ

เลือก 1 ชั้นจาก 3 ชั้น ให้นม ได้ 3 แบบ และสลับที่นมทั้ง 8 ยี่ห้อ ได้ $8!$ → รวม $3(8!)$ แบบ

เลือก 1 ชั้นจาก 2 ชั้นที่เหลือให้โยเกิร์ตและน้ำมะพร้าว ได้ 2 แบบ

สิ้นค้าเดียวกันต้องอยู่ติดกัน → มัดโยเกิร์ต 5 ยี่ห้อติดกัน มัดน้ำมะพร้าว 3 ยี่ห้อติดกัน สลับ 2 มัดนี้ได้ 2 แบบ

สลับภายในมัดโยเกิร์ตได้ $5!$ แบบ สลับภายในมัดน้ำมะพร้าวได้ $3!$ แบบ

รวม $2(2)(5!)(3!)$ แบบ

เหลือชั้นสุดท้าย สำหรับน้ำส้มและน้ำมะนาว

สิ้นค้าเดียวกันต้องอยู่ติดกัน → มัดน้ำส้ม 4 ยี่ห้อติดกัน มัดน้ำมะนาว 4 ยี่ห้อติดกัน สลับ 2 มัดนี้ได้ 2 แบบ

สลับภายในมัดน้ำส้มได้ $4!$ แบบ สลับภายในมัดน้ำมะนาวได้ $4!$ แบบ

รวม $2(4!)(4!)$ แบบ

รวมทุกขั้นตอนได้ $3(8!) \times 2(2)(5!)(3!) \times 2(4!)(4!) = (3\times 2(2)\times 2)(3!)(4!)^2(5!)(8!)$

$= 4\,(3!)\,(3!)(4!)^2(5!)(8!)$

$= 4\,(3!)^2\,(4!)^2(5!)(8!)$

23. คุณครูซื้อโดนัทหน้าการ์ตูนที่แตกต่างกันทั้งหมดมาแจกนักเรียนกลุ่มหนึ่ง จำนวน 18 ชิ้น ประกอบด้วย โดนัทรสช็อกโกแลต 8 ชิ้น โดนัทรสส้ม 4 ชิ้น และโดนัทรสนมสด 6 ชิ้น ถ้าอลิสเป็นนักเรียนคนแรกที่ได้สุ่มหยิบโดนัท 1 ชิ้น หลังจากนั้นชาลีเป็นนักเรียนคนที่สองที่ได้สุ่มหยิบโดนัท 1 ชิ้น แล้วความน่าจะเป็นที่อลิสและชาลีจะได้โดนัทรสต่างกันเท่ากับเท่าใด

1. $\frac{49}{153}$
2. $\frac{56}{153}$
3. $\frac{104}{153}$
4. $\frac{29}{81}$
5. $\frac{52}{81}$

<u>ตอบ</u> 3

จำนวนแบบทั้งหมด: มีโดนัท 18 ชิ้น อลิสหยิบได้ 18 แบบ และเหลือให้ชาลีหยิบได้ 17 แบบ รวม 18×17 แบบ

จำนวนแบบที่ได้รสต่างกัน: โดนัทที่ชาลีหยิบได้ จะแตกต่างกัน ขึ้นกับว่าอลิสหยิบได้รสไหน → ต้องแบ่งกรณี

กรณีอลิสหยิบรสช็อกโก → อลิสหยิบได้ 8 แบบ ชาลีหยิบรสส้มหรือนมสดได้ $4 + 6 = 10$ แบบ รวม 8×10 แบบ

กรณีอลิสหยิบรสส้ม → อลิสหยิบได้ 4 แบบ ชาลีหยิบรสชอกโกหรือนมสดได้ $8 + 6 = 14$ แบบ รวม 4×14 แบบ

กรณีอลิสหยิบรสนมสด → อลิสหยิบได้ 6 แบบ ชาลีหยิบรสชอกโกหรือส้มได้ $8 + 4 = 12$ แบบ รวม 6×12 แบบ

จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{(8\times 10)+(4\times 14)+(6\times 12)}{18\times 17} = \frac{(4\times 10)+(2\times 14)+(3\times 12)}{9\times 17} = \frac{40+28+36}{153} = \frac{104}{153}$

24. ให้ f เป็นฟังก์ชัน โดยที่ $f'(x) = 2x + 1$ ถ้า $h(x) = f(x^2)$ แล้ว $h'(x)$ เท่ากับเท่าใด

1. $4x + 2$
2. $2x^2 + 1$
3. $4x^2 + 2x$
4. $4x^3 + 2x$
5. $4x^3 + 4x$

ตอบ 4

ให้ $g(x) = x^2$ จะได้ $h(x) = f(x^2) = f\big(g(x)\big) = (f \circ g)(x)$

ใช้สูตรดิฟฟังก์ชันประกอบ จะได้ $h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$

$$= (2g(x) + 1) \cdot \frac{dx^2}{dx}$$
$$= (2x^2 + 1) \cdot 2x$$
$$= 4x^3 + 2x$$

25. ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ โดยที่ $f(x)$ เท่ากับจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ x

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ มีค่า สำหรับทุก $c \in \mathbb{R}$

(ข) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $(n, n+1]$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

(ค) $f'(x) = 1$ เมื่อ $x \in (n, n+1)$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

จากข้อความ (ก) (ข) และ (ค) ข้างต้น ข้อใดถูกต้อง

1. ข้อความ (ก) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
2. ข้อความ (ข) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
3. ข้อความ (ค) ถูกต้องเพียงข้อเดียวเท่านั้น
4. ข้อความ (ก) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น
5. ข้อความ (ข) และ (ค) ถูกต้องเท่านั้น

ตอบ 2

ลองแทน x ด้วยค่าต่างๆ ดู จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.5 คือ 1

จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 0.99 คือ 1

จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1 คือ 1

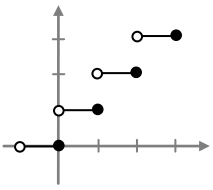
จำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่าหรือเท่ากับ 1.1 คือ 2

จะเห็นว่า $f(x)$ คือการปัดเศษขึ้นให้เป็นจำนวนเต็มนั่นเอง

(ก) จากค่าที่ลอง จะเห็นว่า $f(0.99) = 1$ ในขณะที่ $f(1.1) = 2$

ดังนั้น $x \to 1^-$ กับ $x \to 1^+$ จะมีค่า $f(x)$ ไม่เท่ากัน จึงไม่มีลิมิตเมื่อ $x \to 1$ (ก) ผิด

(ข) ถ้าวาดกราฟของ $y = f(x)$ จะได้ดังรูป



จะเห็นว่าเส้นกราฟต่อเนื่องบนช่วง $(n, n+1]$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม (ข) ถูก

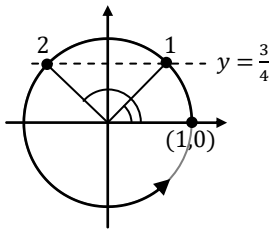
(ค) ในแต่ละช่วง $(n, n+1]$ กราฟจะเป็นเส้นแนวนอน ที่มีค่า y เท่าเดิม ($\Delta y = 0$)

จะได้ความชัน $= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ ดังนั้น $f'(x) = 0$ (ค) ผิด

26. เซตคำตอบของสมการ $4\sin 5\theta = 3$ เมื่อ $\theta \in [0, 3\pi]$ มีสมาชิกทั้งหมดกี่ตัว

ตอบ 16

$4\sin 5\theta = 3$
$\sin 5\theta = \frac{3}{4}$



เนื่องจาก sin คือพิกัด Y
จะได้มุม 5θ ที่มีพิกัด Y คือ $\frac{3}{4}$ ในจตุภาคที่ 1 และ 2 ดังรูป
เมื่อ $\theta \in [0, 3\pi]$ จะได้ $5\theta \in [0, 15\pi]$
$[0, 15\pi]$ คือเริ่มจากจุด $(1, 0)$ วนไป 7 รอบครึ่ง (1 รอบ $= 2\pi$)
ซึ่งจะผ่านมุมที่เป็นคำตอบในจตุภาคที่ 1 และ 2 ทั้งหมด 16 ครั้ง
(7 รอบแรก ผ่านรอบละ 2 มุม และครึ่งรอบสุดท้าย ผ่านอีก 2 มุม รวมเป็น $(7)(2) + 2 = 16$ มุม)

ดังนั้น จะมี 5θ ที่ทำให้ $\sin 5\theta = \frac{3}{4}$ ได้ทั้งหมด 16 ค่า $\rightarrow$ เอา 5θ แต่ละค่ามาหารด้วย 5 ก็จะได้ θ ทั้งหมด 16 ค่า

27. ให้ t เป็นจำนวนจริง ถ้าลำดับ $4\ ,\ t+1\ ,\ 3t-2\ ,\ \ldots$ เป็นลำดับเรขาคณิต แล้วผลบวกของค่าของ t ที่เป็นไปได้ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

ตอบ 10

สำดับเรขาคณิต พจน์คู่ที่อยู่ติดกัน จะหารกันได้ค่าเท่ากัน $\rightarrow$ $\frac{t+1}{4} = \frac{3t-2}{t+1}$

$$\begin{aligned} t^2 + 2t + 1 &= 12t - 8 \\ t^2 - 10t + 9 &= 0 \\ (t-1)(t-9) &= 0 \\ t &= 1\ ,\ 9 \end{aligned}$$

จะได้ผลบวกของค่า t คือ $1 + 9 = 10$

28. ให้ $\vec{s} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้าขนาดของมุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{u}$ เท่ากับขนาดของมุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{v}$ และ $\vec{s}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$ แล้ว $a + b$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 6

ให้มุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{u}$ = มุมระหว่าง $\vec{s}$ และ $\vec{v}$ = θ

จากสูตรการดอท : $\vec{s}\cdot\vec{u} = |\vec{s}|\,|\vec{u}|\cos\theta$ ...(1)
$\vec{s}\cdot\vec{v} = |\vec{s}|\,|\vec{v}|\cos\theta$ ...(2)

(1) ÷ (2) : $\frac{\vec{s}\cdot\vec{u}}{\vec{s}\cdot\vec{v}} = \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}$

$$\frac{a(2)+b(1)+2(-2)}{a(0)+b(-3)+2(4)} = \frac{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}{\sqrt{0^2+(-3)^2+4^2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{2a+b-4}{-3b+8} &= \frac{3}{5} \\ 10a + 5b - 20 &= -9b + 24 \\ 10a + 14b &= 44 \\ 5a + 7b &= 22 \quad \ldots(3) \end{aligned}$$

แลกจาก $\vec{s}$ ตั้งฉากกับ $\vec{w}$ จะได้

$$\begin{aligned} \vec{s}\cdot\vec{w} &= 0 \\ a(1) + b(4) + 2(3) &= 0 \\ a + 4b &= -6 \quad \ldots(4) \end{aligned}$$

$5\times(4) - (3)$: $20b - 7b = -30 - 22$
$b = -4$
(4): $a + 4(-4) = -6$
$a = 10$ จะได้ $a + b = 10 + (-4) = 6$

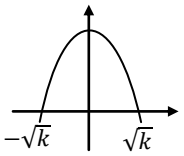
29. ให้ $f(x) = -x^2 + k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X เท่ากับ 36 ตารางหน่วย แล้ว $f(-1) + f(1)$ เท่ากับเท่าใด

ตอบ 16

หาจุดตัดแกน $X \rightarrow$ แทน $y = 0$: $0 = -x^2 + k$

$x^2 = k$

$x = \pm\sqrt{k}$



เนื่องจาก สปส ของ x^2 เป็นลบ จะเป็นพาราโบลาคว่ำ $\rightarrow$ จะวาดกราฟได้ดังรูป

จะได้พื้นที่ใต้โค้ง คือ $\int_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}} (-x^2 + k)\,dx$

$$= -\frac{x^3}{3} + kx \Big|_{-\sqrt{k}}^{\sqrt{k}}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{k}^3}{3} + k\sqrt{k}\right) - \left(-\frac{(-\sqrt{k})^3}{3} + k(-\sqrt{k})\right)$$

$$= -\frac{k\sqrt{k}}{3} + k\sqrt{k} \quad -\frac{k\sqrt{k}}{3} \quad + k\sqrt{k}$$

$$= k\sqrt{k}\left(-\frac{1}{3} + 1 \quad -\frac{1}{3} \quad + 1\right)$$

$$= \frac{4}{3}k\sqrt{k}$$

ดังนั้น $\frac{4}{3}k\sqrt{k} = 36$

$k\sqrt{k} = 27$

$\sqrt{k}^3 = 3^3$

$\sqrt{k} = 3$

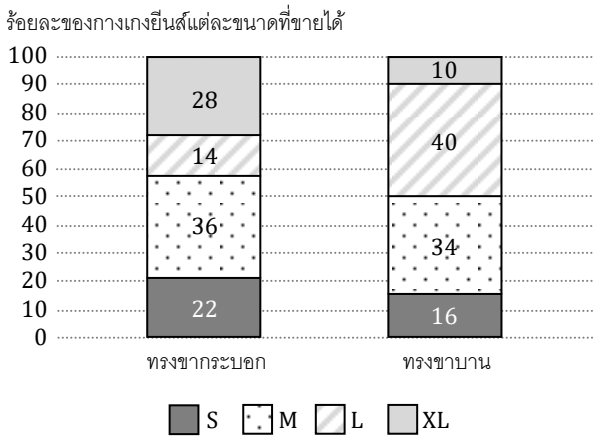
$k = 9$

จะได้ $f(x) = -x^2 + 9$

ดังนั้น $f(1) + f(-1) = (-(1)^2 + 9) + (-(-1)^2 + 9) = 16$

30. สันติเปิดร้านขายกางเกงยีนส์ โดยขายกางเกงยีนส์ 3 แบบ ได้แก่ ทรงขากระบอก ทรงขาบาน และทรงรัดรูป ซึ่งแต่ละแบบมี 4 ขนาด ได้แก่ S , M , L และ XL จากการเก็บข้อมูลการขายกางเกงยีนส์ของสันติในเดือนมีนาคม พบว่า

- สันติขายกางเกงยีนส์ได้ทั้งหมด 600 ตัว
- สันติขายกางเกงยีนส์ทรงขากระบอกขนาด M ได้มากกว่าทรงขากระบอกขนาด L อยู่ 55 ตัว
- สันติขายกางเกงยีนส์ทรงขาบานขนาด M ได้ 68 ตัว
- สันติเขียนแผนภูมิแท่งส่วนประกอบที่แสดงร้อยละของกางเกงยีนส์แต่ละขนาดที่ขายได้ของกางเกงยีนส์ทรงขากระบอกและกางเกงยีนส์ทรงขาบาน ได้ดังนี้



ในเดือนมีนาคม สันติขายกางเกงยีนส์ทรงรัดรูปได้ทั้งหมดกี่ตัว

ตอบ 150

จากแผนภูมิแท่งขากระบอก M ขายได้มากกว่า L อยู่ $36\% - 14\% = 22\% = 55$ ตัว

$100\% = \frac{55}{22} \times 100 = 250$ ตัว

ดังนั้น ขายขากระบอกได้ทั้งหมด 250 ตัว

จากแผนภูมิแท่งขาบาน ขาย M ได้ $34\% = 68$ ตัว

$100\% = \frac{68}{34} \times 100 = 200$ ตัว

ดังนั้น ขายขาบานทั้งหมด 200 ตัว

ทั้งหมดขายได้ 600 ตัว $\rightarrow$ เหลือรัดรูป $= 600 - 250 - 200 = 150$ ตัว

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ จาก อ. ปิ๋ง GTRmath

ขอบคุณ เฉลยวิธีทำ จากคุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณครูพี่ตูน (อ. ศิลา สุขรัศมี)

และ คุณ Theerat Piyaanangul

และ คุณ Peerapol Meesuwan

และ คุณ Virapat Rattanasupa

และ คุณ Jack Teerasak ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร