

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ (ม.ค. 55)

วันเสาร์ที่ 7 มกราคม 2555 เวลา 11.00 - 12.30 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 10 เป็นข้อสอบแบบอัตนัย ข้อละ 2 คะแนน

1. ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|3 - 2x| - |3x - 7| \geq 0$ คือช่วง $[a, b]$ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

2. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนนับ n ซึ่ง ค.ร.น. ของ 720 และ n มีค่าเท่ากับ 10800 แล้วสมาชิกของ S ที่มีค่าน้อยที่สุดมีค่าเท่ากับเท่าใด

3. $\sec^2(2 \tan^{-1} \sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ O เป็นจุดกำเนิด $A = (1, -4, -3)$ และ $B = (3, -6, 2)$
ถ้า C เป็นจุดบน OB ซึ่งทำให้ AC ตั้งฉากกับ OB แล้ว OC ยาวเท่าใด

5. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $3^x + 3^{2-x} = 4\sqrt{3}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. ถ้า $\log [x + 27^{\log_3 2}] = 1$ แล้ว x มีค่าเท่ากับเท่าใด

7. ในการกระจาย $(x^2 + \frac{2}{x^3})^{10}$ โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม จะได้ว่าพจน์ค่าคงตัวมีค่าเท่ากับเท่าใด
8. ในการสอบวิชาประวัติศาสตร์ มีการสอบ 5 ครั้ง โดยที่อาจารย์ผู้สอนให้นำหน้าของผลการสอบครั้งสุดท้ายเป็นสองเท่าของผลการสอบครั้งอื่น ในการสอบสี่ครั้งแรก เด็กชายพลูสอบได้คะแนนเฉลี่ย 86 เปอร์เซนต์ ถ้าเขาต้องการผลการสอบวิชานี้เป็น 90 เปอร์เซนต์แล้วเขาจะต้องได้คะแนนในการสอบครั้งที่ 5 เท่ากับกี่เปอร์เซนต์
9. กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการเป็น $4x - 3y + 10 = 0$
 และ L_2 เป็นเส้นสัมผัสของเส้นโค้ง $y = x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{7}{3}$
 ถ้า L_2 ขนานกับ L_1 แล้ว ระยะห่างระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 เท่ากับเท่าใด

10. $\int_0^2 6x|x-2| dx$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 ข้อ 11 - 30 เป็นข้อสอบแบบปรนัย ข้อละ 4 คะแนน

11. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 ถ้า $x-1$, $x-2$ และ $x-3$ ต่างก็หาร $P(x)$ แล้วเหลือเศษ 1 และ $x-4$ หาร $P(x)$ ลงตัว แล้ว $P(5)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|------|
| 1. -3 | 2. -1 | 3. 0 |
| 4. 1 | 5. 3 | |

12. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งมี $\text{Im}(z) > 0$ และสอดคล้องกับสมการ $(z + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = -\frac{1}{4}$ แล้ว z^8 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---|---|------------------|
| 1. $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ | 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ | 3. $\frac{1}{2}$ |
| 4. $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | 5. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | |

13. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $ab - 25a - 25b = 1575$

ถ้า ห.ร.ม. $(a, b) = 5$ แล้ว $|a - b|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|--------|-------|
| 1. 15 | 2. 45 | 3. 90 |
| 4. 210 | 5. 435 | |

14. กำหนดให้ \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์สามมิติซึ่งทำมุมบ้านต่อกัน และพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านประกอบมุมเป็น \vec{u} และ \vec{v} มีค่าเท่ากับ 3 ตารางหน่วย ถ้า \vec{u} และ \vec{v} มีขนาด 1 และ 5 หน่วย ตามลำดับแล้ว

$(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|--------|------|
| 1. -27 | 2. -19 | 3. 0 |
| 4. 19 | 5. 27 | |

15. กำหนดให้ H เป็นไฮเพอร์โบล่าซึ่งมีสมการเป็น $9x^2 - 72x - 16y^2 - 32y = 16$ ถ้า E เป็นวงรีซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของ H และมีความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{1}{\sqrt{5}}$ แล้ว E คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--|--|--|
| 1. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1$ | 2. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ | 3. $\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{20} = 1$ |
| 4. $\frac{(x+4)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{20} = 1$ | 5. $\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$ | |

19. ถ้า $S_1 = \{ x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x+1) + 2\log_{\frac{1}{4}}(x+2) - \log_{\frac{1}{2}}(9x-3) \leq 0 \}$

และ $S_2 = \{ x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } -10 \leq x \leq 10 \}$

แล้ว $S_1 \cap S_2$ มีจำนวนสมาชิกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|------|------|------|
| 1. 5 | 2. 6 | 3. 7 |
| 4. 8 | 5. 9 | |

20. ในการจัดเด็ก 7 คนซึ่งมีอายุ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ขวบ นั่งเก้าอี้ 7 ตัวซึ่งติดหมายเลข 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 โดยกำหนดให้เด็กที่จะนั่งเก้าอี้หมายเลข k ต้องมีอายุมากกว่าหรือเท่ากับ $k - 1$ ขวบ จะมีจำนวนวิธีในการจัดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|--------|-------|
| 1. 32 | 2. 60 | 3. 64 |
| 4. 120 | 5. 128 | |

21. ข้อมูลชุดหนึ่งเป็นคะแนนจากการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ถ้าเพิ่มคะแนนให้นักเรียนทุกคนๆละ 3 คะแนน แล้วจะทำให้ค่าสถิติในข้อใดต่อไปนี้ไม่มีค่าลดลง

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| 1. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยของคะแนน | 2. สัมประสิทธิ์ของพิสัยของคะแนน |
| 3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนน | 4. ค่ามัธยฐานของคะแนน |
| 5. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนน | |

22. น้ำหนักของถุงซึ่งบรรจุอาการขายส่งของบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าถุงที่มีน้ำหนักเกิน 117.8 กรัม มีอยู่ 67% และถุงที่มีน้ำหนักเกิน 126.7 กรัม มีอยู่ 9% แล้ว จำนวนเปอร์เซ็นต์ของถุงที่มีน้ำหนักน้อยกว่า 125 กรัม เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ โดยกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

Z	0.17	0.44	1	1.1	1.2	1.34
พื้นที่ใต้เส้นโค้ง	0.4554	0.1700	0.3413	0.3643	0.3849	0.41

1. 84.13
 2. 86.43
 3. 88.49
 4. 89.25
 5. 90
23. พาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานกับแกน Y มีจุดยอดอยู่ที่จุด (3, 9) และผ่านจุด (1, 5) บริเวณที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลารูปนี้ และแกน X มีพื้นที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 9 ตารางหน่วย
 2. 18 ตารางหน่วย
 3. 27 ตารางหน่วย
 4. 36 ตารางหน่วย
 5. 54 ตารางหน่วย

24. กำหนดให้ g เป็นฟังก์ชันพหุนามซึ่งมีจุด $(2, -1)$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ และกราฟของ g ผ่านจุด $(1, 4)$

$$\text{ถ้า } c \text{ เป็นค่าคงตัวที่ทำให้ฟังก์ชัน } f \text{ นิยามโดย } f(x) = \begin{cases} (cx^2 + 1)g(x) & \text{เมื่อ } x \geq 1 \\ 2x + 10 & \text{เมื่อ } x < 1 \end{cases}$$

ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ แล้ว $f'(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8
2. -4
3. 0
4. 4
5. 8

25. ถ้า $a_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$ แล้ว $\sum_{k=1}^{40} a_k$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 860
 2. 1060
 3. 1080
 4. 1240
 5. 1440

26. ถ้า $A = \begin{bmatrix} a & 1-a \\ 1+a & -a \end{bmatrix}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงและ $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $\det(A - \sqrt{2}I)(A - \sqrt{3}I)(A - \sqrt{5}I)(A - \sqrt{7}I)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $48 - 13a$
 2. $(a - \sqrt{2})(a - \sqrt{3})(a - \sqrt{5})(a - \sqrt{7})$
 3. $17a$
 4. 17
 5. 48

27. กำหนดให้ E_n เป็นวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{a_n^2} + \frac{y^2}{b_n^2} = 1$ โดยที่ $a_n = 2b_n \geq 0$ ถ้า $a_1 = 2$ และ จุดยอดของวงรี E_n เป็นจุดโฟกัสของวงรี E_{n-1} ทุก $n \geq 2$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $6 + 4\sqrt{3}$
 2. $8 + 4\sqrt{3}$
 3. $10 + 4\sqrt{3}$
 4. 15
 5. 17

28. ข้อใดต่อไปนี้ผิด

1. $f(x) = x|x + 1|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$
2. $f(x) = \frac{x}{|x+1|}$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$
3. $f(x) = |x|(x + 1)$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$
4. $f(x) = x^2|x + 1|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$
5. $f(x) = x|x|$ มีอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$

29. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{91}$ โดยที่ $a_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคู่} \\ 3 + 4n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มบวกคี่} \end{cases}$

มัธยฐานของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|-------|
| 1. 63 | 2. 68 | 3. 71 |
| 4. 74 | 5. 76 | |

30. กำหนดให้ $M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \{-1, 0, 1\} \right\}$

ถ้าสุ่มเลือกเมทริกซ์หนึ่ง เมทริกซ์จากเซต M แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ที่มีอินเวอร์สการคูณมีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

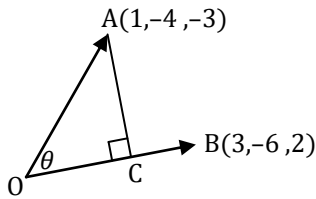
- | | | |
|--------------------|--------------------|--------------------|
| 1. $\frac{24}{81}$ | 2. $\frac{31}{81}$ | 3. $\frac{33}{81}$ |
| 4. $\frac{48}{81}$ | 5. $\frac{50}{81}$ | |

เฉลย

- | | | | | |
|--------|---------|-------|-------|-------|
| 1. 6 | 7. 3360 | 13. 1 | 19. 3 | 25. 4 |
| 2. 675 | 8. 98 | 14. 2 | 20. 3 | 26. 5 |
| 3. 9 | 9. 3 | 15. 3 | 21. 2 | 27. 2 |
| 4. 3 | 10. 8 | 16. 3 | 22. 1 | 28. 3 |
| 5. 2 | 11. 1 | 17. 5 | 23. 4 | 29. 4 |
| 6. 2 | 12. 5 | 18. 2 | 24. 1 | 30. 4 |

แนวคิด

4. 3



วาดได้ดังรูป

จะได้ $\cos \theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}} = \frac{OC}{OA}$ ดังนั้น $OC = OA \cos \theta$

แต่จาก $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = |\vec{OA}| |\vec{OB}| \cos \theta$
 $\frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|} = |\vec{OA}| \cos \theta$

ดังนั้น $OA \cos \theta = \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OB}|} = \frac{(1)(3) + (-4)(-6) + (-3)(2)}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{21}{7} = 3$

7. 3360

จะได้แต่พจน์ต้องอยู่ในรูป $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r = \binom{10}{r} (x^2)^{10-r} \left(\frac{2}{x^3}\right)^r = \binom{10}{r} \cdot x^{20-2r} \cdot \frac{2^r}{x^{3r}} = 2^r \binom{10}{r} \cdot \frac{x^{20-2r}}{x^{3r}}$

ในพจน์ที่เป็นค่าคงตัว x จะต้องตัดกันหมดไป นั่นคือ $20 - 2r = 3r$ จะแก้ได้ $r = 4$

แทนค่า r จะได้พจน์ค่าคงตัว คือ $2^4 \binom{10}{4} = 16 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3360$

8. 98

ให้การสอบทั้ง 5 ครั้ง ได้คะแนน x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 เปอร์เซนต์ ตามลำดับ

4 ครั้งแรก มีค่าเฉลี่ย = 86% ดังนั้น $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} = 86$ จะได้ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 344 \dots (*)$

ถ้าให้น้ำหนักของ 4 ครั้งแรก = w จะได้น้ำหนักของครั้งที่ 5 คือ $2w$

จะได้ค่าเฉลี่ยแบบถ่วงน้ำหนัก = $\frac{wx_1 + wx_2 + wx_3 + wx_4 + 2wx_5}{w+w+w+w+2w} = \frac{w(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5)}{6w} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5}{6} = \frac{344 + 2x_5}{6}$

แต่ต้องการผลสอบ 90% ดังนั้น $\frac{344 + 2x_5}{6} = 90$ แก้สมการ จะได้ $x_5 = \frac{540 - 344}{2} = 98$

11. 1

เนื่องจาก $x - 1, x - 2$ และ $x - 3$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 และ $P(x)$ มีดีกรี 3

ดังนั้น $P(x) = k(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 1 \dots (*)$ เมื่อ k เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

และจากทฤษฎีเศษ ถ้า $x - 4$ หาร $P(x)$ ลงตัว จะได้ $P(4) = 0$

แทน $x = 4$ ใน (*) จะได้ $P(4) = k(4 - 1)(4 - 2)(4 - 3) + 1$

$$0 = 6k + 1$$

$$-\frac{1}{6} = k$$

แทน $k = -\frac{1}{6}$ และ $x = 5$ ใน (*) จะได้ $P(5) = -\frac{1}{6}(5 - 1)(5 - 2)(5 - 3) + 1 = -4 + 1 = -3$

20. 3

เริ่มจากคนที่ 7 เลือกได้ 2 แบบ (6, 7) ; คนที่ 6 เลือกได้ 5, 6, 7 แต่ต้องไม่ซ้ำกับที่คนที่ 7 เลือก → เหลือ 2 แบบ
 คนที่ 5 เลือกได้ 4, 5, 6, 7 แต่ต้องไม่ซ้ำกับที่คนที่ 6 กับ 7 เลือก → เหลือ 2 แบบ เหมือนกัน
 ทุกคน จะเลือกได้ 2 แบบ ยกเว้นคนแรก เลือกไม่ได้ เหลือตัวไหนต้องนั่งตัวนั้น → $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 1$

23. 4

แกนสมมาตรขนานแกน Y → แสดงว่าเป็นพาราโบลาแบบคว่ำ-หงาย

โจทย์ถามพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยพาราโบลาและแกน X → ต้องอินทิเกรต

เพื่อให้อินทิเกรตได้ง่าย จะใช้สมการพาราโบลาในรูป $y = a(x - h)^2 + k$

โจทย์ให้จุดยอด = (3, 9) → จะได้ $h = 3$ และ $k = 9$ แทนในสมการกราฟ จะได้ $y = a(x - 3)^2 + 9 \dots (*)$

จากกราฟผ่านจุด (1, 5) → แปลว่าแทน $x = 1, y = 5$ จะได้สมการเป็นจริง : $5 = a(1 - 3)^2 + 9$
 $-4 = a(-2)^2$
 $-4 = a(4)$
 $-1 = a$

แทน $a = -1$ ใน (*) จะได้สมการกราฟคือ $y = -(x - 3)^2 + 9$
 $= -(x - 3)^2 + 9$
 $= -(x^2 - 6x + 9) + 9$
 $= -x^2 + 6x - 9 + 9$
 $= -x^2 + 6x$

หาพื้นที่ที่ปิดล้อมกับแกน X → หาจุดที่กราฟตัดแกน X → แทน $y = 0$: $0 = -x^2 + 6x$
 $0 = -x(x - 6)$
 $x = 0, 6$

จะได้ พาราโบลาตัดแกน X ที่ 0 และ 6

ดังนั้น พื้นที่ = $\int_0^6 -x^2 + 6x \, dx$
 $= \int_0^6 -\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \, dx = -\frac{x^3}{3} + 3x^2 \Big|_0^6 = \left(-\frac{6^3}{3} + 3(6^2)\right) - \left(-\frac{0^3}{3} + 3(0^2)\right)$
 $= -72 + 108 - 0 = 36$

29. 4

มัธยฐาน จะอยู่ตัวที่ $\frac{91+1}{2} = 46$ แต่ข้อนี้ ต้องรู้ก่อนว่า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{91}$ ไม่ได้เรียงจากน้อยไปมาก

ดังนั้น มัธยฐาน จะไม่ใช่ a_{46} แต่เราต้องเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก แล้วหาว่าตัวที่ 46 มีค่าเท่าไร

ถ้าใช้สูตรที่โจทย์ให้ จะได้ พจน์คู่ a_2, a_4, a_6, \dots คือ 2, 4, 6, 8, 10, ...

พจน์คี่ a_1, a_3, a_5, \dots คือ 7, 15, 23, ...

เราจะเอาพจน์คู่และพจน์คี่ มาเรียงลำดับ จะเห็นว่า ทุกๆ 4 ตัวของพจน์คู่ จะเสียบพจน์คี่ระหว่างตัวที่ 3 กับ 4 ได้เสมอ

พจน์คู่ :	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, ...
พจน์คี่ :	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> ↑ ↑ ↑ </div>

จะเห็นว่า รูปแบบการเสียบ จะซ้ำเดิมเป็นรอบๆ ดังนั้นเราจะสามารถสร้างกล่องมาครอบทุกๆ 5 ตัวได้ ดังรูป

เนื่องจาก $46 \div 5$ ได้ 9 เศษ 1 ดังนั้น ตัวที่ 46 คือ ตัวแรกของกล่องที่ 10

พิจารณาตัวแรกของแต่ละกล่อง จะเรียงเป็นลำดับ 2, 10, 18, ... แต่ละตัวเพิ่มทีละ 8

จะได้ ตัวที่ 10 คือ $2 + (10 - 1)8 = 74$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ Runma Runkung ที่ช่วยตรวจสอบคำตอบนะคะ