วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (มี.ค. 63)

วันอาทิตย์ที่ 15 มีนาคม 2563 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
   ถ้ากราฟของเส้นตรง $y = 6 - x$ ตัดกับกราฟของ $y = f(x)$ ที่ $x = 2$
   แล้ว $x + 2$ หาร $f(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 5. 4

2. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง<u>เป็นเลข 3 หลัก</u> ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a, b คือ 50 และ 600 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
   1. 250 2. 300 3. 350 4. 400 5. 650

3. จุดบนเส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ ซึ่งมีระยะห่างจากจุดกำเนิดสั้นที่สุด คือจุดในข้อใดต่อไปนี้
   1. $(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$ 2. $(-2, 1)$ 3. $(-\frac{7}{4}, \frac{3}{2})$ 4. $(-\frac{3}{2}, 2)$ 5. $(-1, 3)$

4. กำหนดให้ $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$ ค่าของ $(\bar{v} \times \bar{\imath}) \cdot (\bar{\jmath} + \bar{k})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -2 3. -1 4. 1 5. 2

5. ค่าของ $\log_2 40 - \log_4 25$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. 2 3. $\frac{5}{2}$ 4. 3 5. $\frac{7}{2}$

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ซึ่ง $\det(A) = 10$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ซึ่งได้จากการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของ A แล้ว $\det\left(\frac{1}{5}B\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{25}$ 2. -2 3. $\frac{2}{25}$ 4. 2 5. 10

7. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ถ้า $f(\sqrt{x}-1)=x$ เมื่อ $x>0$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4 5. 5

8. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2n}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 3. 2 4. $2\sqrt{3}$ 5. 4

9. ตารางต่อไปนี้เป็นตารางแจกแจงความถี่ของความสูงของนักเรียน 40 คน

ความสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน
140 – 144	2
145 – 149	8
150 – 154	9
155 – 159	10
160 – 164	6
165 – 169	3
170 – 174	2

เปอร์เซ็นไทล์ที่ 65 ของความสูงของนักเรียน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 157.00 เซนติเมตร 2. 157.50 เซนติเมตร 3. 157.80 เซนติเมตร

4. 158.00 เซนติเมตร 5. 158.20 เซนติเมตร

10. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง $1{,}000$ และ $6{,}000$ ซึ่งมีเลขโดดแต่ละหลักเป็นเลขคี่ที่แตกต่างกัน มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24
2. 36
3. 64
4. 72
5. 144

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. เซตของคำตอบทั้งหมดของอสมการ $x|x| < -|5x-14|$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$
2. $(-7,0)$
3. $(-14,-5)$
4. $(-\infty,-14)$
5. $(-\infty,-7)$

12. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดต่อไปนี้ที่เป็นคำตอบของสมการ $(\bar{z}|z|)^2+2(\bar{z})^3+z+2=0$

1. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
2. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
3. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
4. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$
5. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

13. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก (a, b) และ $[a, b]$ คือ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a และ b ตามลำดับ
ถ้า $ab = 3 \times 2^7$ และ $[a, b] - (a, b) = 5 \times 2^3$ แล้ว $[a, b]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 48
2. 56
3. 60
4. 72
5. 76

14. กำหนดให้ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\frac{\sin^2 3\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{\cos^2 3\theta}{\cos^2 \theta} = 1$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{8}$
2. $\frac{2}{5}$
3. $\frac{3}{7}$
4. $\frac{2}{3}$
5. $\frac{3}{4}$

15. กำหนดให้ วงรี E และไฮเพอร์โบลา H มีโฟกัสร่วมกัน คือ $(0, 0)$ และ $(6, 0)$
และระยะทางระหว่าง จุดตัดใดๆ ของ E และ H กับจุดโฟกัสทั้งสอง คือ 6 หน่วย และ 2 หน่วย
สมการของวงรี และสมการของไฮเพอร์โบลา ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
3. $\frac{(x-3)^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
4. $\frac{(x-3)^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$
5. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

16. กำหนดให้ เวกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 75° \\ \cos 15° \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin 75° \\ \sin 15° \end{bmatrix}$

ถ้าสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $|\bar{u}||\bar{v}|$ หน่วย และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาว $|\bar{u} \times \bar{v}|$ หน่วย แล้ว ความยาวของด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมรูปนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 หน่วย 2. $\frac{5}{4}$ หน่วย 3. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ หน่วย 4. $\frac{3}{2}$ หน่วย 5. $\frac{7}{4}$ หน่วย

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $12(4^x) + 18(9^x) = 35(6^x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. 0 4. $\frac{1}{2}$ 5. 1

18. กำหนดให้ $x > 0$ และ $x \neq 1$ ผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^{\log_5 x^2} = \frac{25}{x^3}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{5}}{25}$ 2. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 3. $\sqrt{5}$ 4. 5 5. $5\sqrt{5}$

19. จากระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร x, y, z

ถ้าหา x และ y โดยใช้กฎของคราเมอร์ได้ดังนี้ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}$ และ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)}$

แล้ว z มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1 5. 2

20. กำหนดให้ $S = \{ 100, 101, 102, \dots, 998, 999 \}$ และ

$A = \{ n \in S \mid n$ หารด้วย 5 แล้วเหลือเศษ $4 \}$

ผลบวกของสมาชิกทุกตัวของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 99,250 2. 99,255 3. 99,260 4. 99,265 5. 99,270

21. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า f มีค่าวิกฤตที่ $x = -1$ และ $x = 2$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

ข. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$

ค. บนช่วง $(-1, 2)$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ง. บนช่วง $(-\infty, -1)$ f เป็นฟังก์ชันลด

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความถูกต้อง) 2. 1 3. 2

4. 3 5. 4

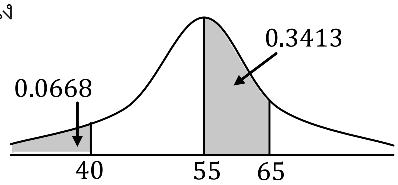
22. ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -9)$ และแกน X มีค่าเท่ากับ 9 ตารางหน่วย แล้ว สมการพาราโบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = x^2 - 9$
2. $y = 2x^2 - 9$
3. $y = 4x^2 - 9$
4. $y = 8x^2 - 9$
5. $y = 16x^2 - 9$

23. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 9, 10\}$ ถ้าสุ่มหยิบสมาชิก 5 ตัวพร้อมกันจาก S แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เลข 8 เป็นจำนวนที่มีค่ามากเป็นอันดับที่ 2 ของสมาชิก 5 ตัวนั้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$
2. $\frac{1}{3}$
3. $\frac{5}{18}$
4. $\frac{8}{21}$
5. $\frac{10}{21}$

24. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.3 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 55 คะแนน มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน และทราบพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังรูป



แล้ว จำนวนเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่าง 45 และ 70 คะแนน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 75.00
2. 76.75
3. 77.45
4. 78.50
5. 79.00

25. กำหนดให้ ข้อมูลกลุ่มตัวอย่างชุด X คือ $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{10}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 8
และ ข้อมูลกลุ่มตัวอย่างชุด Y คือ $y_1 < y_2 < y_3 < \ldots < y_{10}$ โดยที่ $y_i = \frac{1}{2}x_i + 4$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด $Y = 8$

ข. มัธยฐานของข้อมูลชุด $Y = \frac{1}{2}$ (มัธยฐานของข้อมูลชุด X) $+ 4$

ค. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด $Y = \frac{1}{2}$ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด X)

ง. ค่ามาตรฐานของ $y_i = \frac{1}{2}$ (ค่ามาตรฐานของ x_i) เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, 10$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความถูกต้อง)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

26. กำหนดให้ $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 5$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม
ถ้าสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว และมี $1 + 2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ
แล้ว $P(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -15
2. -10
3. 1
4. 10
5. 15

27. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าข้อมูลต่อไปนี้ $a, b, 4, 4, 3, 3, 6, 5, 5, 8, 7, 7$
มีค่า พิสัย $=$ มัธยฐาน $=$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต แล้ว $a \cdot b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12
2. 15
3. 18
4. 20
5. 21

28. กำหนดให้ $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots ,\ a_m$ เป็นข้อมูลซึ่งเรียงจากมากไปน้อย
โดยที่ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots , m$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ $\frac{1}{120}$
แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{20}$ 2. $\frac{1}{21}$ 3. $\frac{1}{22}$ 4. $\frac{1}{23}$ 5. $\frac{1}{24}$

29. กำหนดให้ $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots ,\ a_n\ , \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม r โดยที่ $|r| < 1$
ถ้า
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$$
$$a_6 + a_7 + \cdots + a_{14} + a_{15} = 3$$
แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 9 3. 10 4. 11 5. 12

30. กำหนดให้ $S = \{-2\ ,\ -1\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\}$ และ $\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle|\ a, b, c \in S \right\}$
จำนวนเมทริกซ์ $A \in \Omega$ ซึ่ง $A^{-1} = A$ มีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 9 3. 10 4. 11 5. 12

<u>เฉลย</u>

1. 1	7. 4	13. 1	19. 3	25. 4
2. 3	8. 2	14. 5	20. 5	26. 5
3. 2	9. 4	15. 2	21. 3	27. 2
4. 2	10. 4	16. 4	22. 5	28. 2
5. 4	11. 5	17. 1	23. 3	29. 1
6. 1	12. 3	18. 1	24. 3	30. 5

<u>แนวคิด</u>

1. กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 3x + c$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริง
ถ้ากราฟของเส้นตรง $y = 6 - x$ ตัดกับกราฟของ $y = f(x)$ ที่ $x = 2$
แล้ว $x + 2$ หาร $f(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 1 3. 2 4. 3 5. 4

<u>ตอบ</u> 1

โจทย์ให้กราฟ ตัดกันที่ $x = 2$ $\rightarrow$ พิจารณากราฟเส้นตรง $y = 6 - x$ เมื่อ $x = 2$ จะได้ $y = 6 - 2 = 4$

ดังนั้น กราฟเส้นตรง ผ่านจุด $(2, 4)$ $\rightarrow$ กราฟ $y = f(x)$ ผ่านจุด $(2, 4)$ ด้วย (เพราะกราฟ 2 เส้น ตัดกันที่ $x = 2$)

$$\begin{aligned} 4 &= f(2) \\ 4 &= 2^3 - 3(2) + c \\ 2 &= c \end{aligned}$$

แทนค่า c จะได้ $f(x) = x^3 - 3x + 2$

จากทฤษฎีเศษ $x + 2$ หาร $f(x)$ จะเหลือเศษ $= f(-2)$
$= (-2)^3 - 3(-2) + 2 = 0$

2. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง<u>เป็นเลข 3 หลัก</u> ถ้า ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a, b คือ 50 และ 600 ตามลำดับ แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 250 2. 300 3. 350 4. 400 5. 650

<u>ตอบ</u> 3

แยกตัวประกอบ 50 และ 60 เป็นผลคูณของจำนวนเฉพาะ จะได้

$$\begin{aligned} 50 &= 2 \times 5^2 \\ 600 &= 2^3 \times 3 \times 5^2 \end{aligned}$$

ดังนั้น a, b ทั้งสองตัว ต้องมี 5^2 เป็นตัวประกอบ และ ตัวหนึ่ง ต้องมี 2 อีกตัวหนึ่งต้องมี 2^3 เป็นตัวประกอบ

และเนื่องจาก $2 \times 5^2 = 50$ มีไม่ถึง 3 หลัก $\rightarrow$ ดังนั้น ตัว 3 อีกตัวที่เหลือต้องมาเพิ่มให้ 2×5^2

จะได้ a และ b คือ $2 \times 3 \times 5^2$ และ $2^3 \times 5^2$

ดังนั้น $a + b = 150 + 200 = 350$

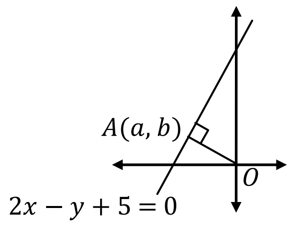
3. จุดบนเส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ ซึ่งมีระยะห่างจากจุดกำเนิดสั้นที่สุด คือจุดในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$ 2. $(-2, 1)$ 3. $(-\frac{7}{4}, \frac{3}{2})$ 4. $(-\frac{3}{2}, 2)$ 5. $(-1, 3)$

<u>ตอบ</u> 2

ให้จุดนั้นคือ $A(a, b)$ เนื่องจากระยะสั้นสุด คือระยะตั้งฉาก → จะวาดได้ดังรูป

ตั้งฉากกัน ความชันจะคูณกันได้ -1 → ความชันเส้นตรง × ความชัน $AO = -1$



เส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ $\qquad 2 \times \frac{b-0}{a-0} = -1$

$2x \quad + 5 = y$ $\qquad -2b = a \quad ...(*)$

$\downarrow$

ความชัน $= 2$

และเนื่องจาก (a, b) อยู่บนเส้นตรง $2x - y + 5 = 0$ → ต้องแทนแล้วทำให้สมการเส้นตรงเป็นจริง

$$2a - b + 5 = 0$$

จาก $(*)$

$$2(-2b) - b + 5 = 0$$
$$5 = 5b$$
$$1 = b$$

→ แทนใน $(*)$ จะได้ $a = -2(1) = -2$

จะได้ $A(a, b) = (-2, 1)$

4. กำหนดให้ $\bar{v} = 2\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} + \bar{k}$ ค่าของ $(\bar{v} \times \bar{\imath}) \cdot (\bar{\jmath} + \bar{k})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -3 2. -2 3. -1 4. 1 5. 2

<u>ตอบ</u> 2

$$(\bar{v} \times \bar{\imath}) \cdot (\bar{\jmath} + \bar{k}) = \left(\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}(3)(0)-(1)(0)\\(1)(1)-(2)(0)\\(2)(0)-(3)(1)\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0\\1\\-3\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = (0)(0) + (1)(1) + (-3)(1) = -2$$

5. ค่าของ $\log_2 40 - \log_4 25$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{2}$ 2. 2 3. $\frac{5}{2}$ 4. 3 5. $\frac{7}{2}$

<u>ตอบ</u> 4

$$\log_2 40 - \log_4 25 = \log_2 40 - \log_{2^2} 5^2$$

$\log_{N^y} M^x = \frac{x}{y} \log_N M$

$$= \log_2 40 - \frac{2}{2}\log_2 5$$
$$= \log_2 40 - \log_2 5$$

$\log_a M - \log_a N = \log_a \left(\frac{M}{N}\right)$

$$= \log_2 \left(\frac{40}{5}\right)$$
$$= \log_2 8 = 3$$

6. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์ มิติ 3×3 ซึ่ง $\det(A) = 10$ ถ้า B เป็นเมทริกซ์ ซึ่งได้จากการสลับแถวที่ 1 กับแถวที่ 2 ของ A แล้ว $\det\left(\frac{1}{5}B\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{2}{25}$ 2. -2 3. $\frac{2}{25}$ 4. 2 5. 10

ตอบ 1

สลับแถว $\rightarrow$ det จะเปลี่ยนเป็นลบของของเดิม

$\det(A) = 10 \rightarrow$ จะได้ $\det(B) = -10$

$\boxed{\det(kA) = k^n \det(A)}$

เนื่องจาก A และ B มีมิติ 3×3 $\rightarrow$ ใช้สูตร จะได้ $\det\left(\frac{1}{5}B\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(B)$

$$= \frac{1}{5^3}\ (-10) = -\frac{2}{25}$$

7. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ถ้า $f(\sqrt{x}-1) = x$ เมื่อ $x > 0$ แล้ว $f'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4 5. 5

ตอบ 4

จาก $f(\sqrt{x}-1) = x$

$f(k) = x$ ให้ $\sqrt{x}-1 = k$

$\sqrt{x} = k+1$

$x = (k+1)^2$

$$\begin{aligned} f(k) &= (k+1)^2 \\ f(k) &= k^2+2k+1 \\ f'(k) &= 2k+2 \\ f'(1) &= 2(1)+2 = 4 \end{aligned}$$

8. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2n}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{2}$ 2. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 3. 2 4. $2\sqrt{3}$ 5. 4

ตอบ 2

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2n} = 1 + \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{2} + \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{4} + \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^{6} + \ldots$$

จะเห็นว่า เป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ที่มี $a_1 = 1$ และ $r = \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2$

ต้องตรวจสอบว่า $|r| < 1$ หรือไม่ ก่อนจะใช้สูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ได้

$\boxed{S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ เมื่อ } |r| < 1}$

จะเห็นว่า $0 \le \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2 < \left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1$

$0 \le r < 1 \rightarrow$ ดังนั้น $|r| < 1$

จะได้ $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12}\right)^2}$

$$= \frac{1}{1-2\sin^2\frac{\pi}{12}}$$

$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$= \frac{1}{\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$= \frac{1}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

9. ตารางต่อไปนี้เป็นตารางแจกแจงความถี่ของความสูงของนักเรียน 40 คน

ความสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน
140 – 144	2
145 – 149	8
150 – 154	9
155 – 159	10
160 – 164	6
165 – 169	3
170 – 174	2

เปอร์เซ็นไทล์ที่ 65 ของความสูงของนักเรียน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 157.00 เซนติเมตร
2. 157.50 เซนติเมตร
3. 157.80 เซนติเมตร
4. 158.00 เซนติเมตร
5. 158.20 เซนติเมตร

ตอบ 4

จากสูตรตำแหน่งของเปอร์เซ็นไทล์ $\frac{r}{100}\cdot N$

จะได้ P_{65} อยู่ตัวที่ $\frac{65}{100}\cdot 40 = 26$

จะเห็นว่าความถี่สะสมเพิ่มจนผ่าน 26 ในชั้นที่ 4

ดังนั้น ตัวที่ 26 จะอยู่ในชั้นที่ 4

ใช้สูตร $L + \left(\frac{\text{ตำแหน่ง} - F_L}{f_x}\right) I$

จะได้ $P_{65} = 154.5 + \left(\frac{26-19}{10}\right)(5)$

$= 154.5 + \quad 3.5 \qquad = 158$

ความสูง (เซนติเมตร)	จำนวนนักเรียน	ความถี่สะสม
140 – 144	2	2
145 – 149	8	10
150 – 154	9	19
155 – 159	10	29
160 – 164	6	
165 – 169	3	
170 – 174	2	

10. จำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 1,000 และ 6,000 ซึ่งมีเลขโดดแต่ละหลักเป็นเลขคี่ที่แตกต่างกัน มีจำนวนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 24
2. 36
3. 64
4. 72
5. 144

ตอบ 4

ต้องอยู่ระหว่าง 1,000 และ 6,000 → เป็นจำนวน 4 หลัก ที่หลักพันเป็น 1, 3, 5 ได้เท่านั้น → เลือกได้ 3 แบบ

หลักร้อย ต้องเป็นเลขคี่ 1, 3, 5, 7, 9 และต้องไม่ซ้ำกับหลักพัน → เหลือให้เลือกได้ 4 แบบ

หลักสิบ ต้องเป็นเลขคี่ 1, 3, 5, 7, 9 และต้องไม่ซ้ำกับ 2 หลักที่ผ่านมา → เหลือให้เลือกได้ 3 แบบ

หลักหน่วย ต้องเป็นเลขคี่ 1, 3, 5, 7, 9 และต้องไม่ซ้ำกับ 3 หลักที่ผ่านมา → เหลือให้เลือกได้ 2 แบบ

จะได้จำนวนแบบ $= 3\times 4\times 3\times 2 = 72$ แบบ

11. เซตของคำตอบทั้งหมดของอสมการ $x|x| < -|5x-14|$ คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $(-\infty,-7)\cup(2,\infty)$
2. $(-7,0)$
3. $(-14,-5)$
4. $(-\infty,-14)$
5. $(-\infty,-7)$

ตอบ 5

จะเห็นว่าฝั่งขวาของอสมการ $-|5x-14|$ เป็นจำนวนลบ หรือ ศูนย์

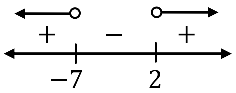
ดังนั้น ฝั่งซ้าย $x|x|$ ต้องเป็นจำนวนลบเท่านั้น จึงจะน้อยกว่าฝั่งขวาได้ → จะสรุปต่อได้ว่า x ต้องเป็นจำนวนลบ

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ $|k| = \begin{cases} k & ;\ k \ge 0 \\ -k & ;\ k < 0 \end{cases}$ เมื่อรู้ว่า x เป็นลบ จะได้ $|x| = -x$

และเมื่อ x เป็นลบ จะทำให้ $5x-14$ เป็นลบด้วย ดังนั้น $|5x-14|=-(5x-14)$

แทนในอสมการโจทย์ จะได้

$$\begin{aligned} x|x| &< -|5x-14| \\ x(-x) &< -\big(-(5x-14)\big) \\ -x^2 &< 5x-14 \\ 0 &< x^2+5x-14 \\ 0 &< (x+7)(x-2) \end{aligned}$$



แต่ x ต้องเป็นลบ ทำให้ช่วง $(2,\infty)$ ใช้ไม่ได้

ดังนั้น จะเหลือคำตอบคือ $(-\infty,-7)$

12. จำนวนเชิงซ้อนในข้อใดต่อไปนี้ที่เป็นคำตอบของสมการ $(\bar{z}|z|)^2+2(\bar{z})^3+z+2=0$

1. $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
2. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
3. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$
4. $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$
5. $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$

<u>ตอบ</u> 3

$$\begin{aligned} (\bar{z}|z|)^2+2(\bar{z})^3+z+2 &= 0 \\ (\bar{z})^2|z|^2+2(\bar{z})^3+z+2 &= 0 \\ (\bar{z})^2(z\cdot\bar{z})+2(\bar{z})^3+z+2 &= 0 \quad z\cdot\bar{z}=|z|^2 \\ (\bar{z})^3z+2(\bar{z})^3+z+2 &= 0 \\ (\bar{z})^3(z+2)+z+2 &= 0 \\ (z+2)((\bar{z})^3+1) &= 0 \quad \text{ดึง } z+2 \text{ เป็นตัวร่วม} \\ (z+2)(\bar{z}+1)((\bar{z})^2-\bar{z}+1) &= 0 \quad x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

จะได้ $z=-2$ หรือ $\bar{z}=-1$ หรือ $\bar{z}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(1)}}{2(1)}$ → เปลี่ยนติดลบในรูทเป็น i

$z=-1$

$=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

13. กำหนดให้ a,b เป็นจำนวนเต็มบวก (a,b) และ $[a,b]$ คือ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. ของ a และ b ตามลำดับ
ถ้า $ab=3\times2^7$ และ $[a,b]-(a,b)=5\times2^3$ แล้ว $[a,b]$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 48
2. 56
3. 60
4. 72
5. 76

<u>ตอบ</u> 1

จากสูตร $[a.\mathrm{b}]\times(a,b)=ab=3\times2^7$

จะได้ $(a,b)=\frac{3\times2^7}{[a,b]}$

แทนในสมการ

$$\begin{aligned} [a,b]-(a,b) &= 5\times2^3 \\ [a,b]-\frac{3\times2^7}{[a,b]} &= 5\times2^3 \quad \text{ให้ } [a,b]=x \\ x-\frac{3\times2^7}{x} &= 40 \quad \text{คูณ } x \text{ ตลอด} \\ x^2-3(2^7) &= 40x \\ x^2-40x-3(2^7) &= 0 \\ (x-48)(x+8) &= 0 \\ x &= 48,\ -8 \end{aligned}$$

→ ห.ร.ม. เป็นลบไม่ได้ จึงได้ $[a,b]=48$

14. กำหนดให้ $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\frac{\sin^2 3\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2 3\theta}{\cos^2\theta} = 1$ แล้ว $\cos\theta$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{3}{7}$ 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{3}{4}$

<u>ตอบ</u> 5

$$\frac{\sin^2 3\theta}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2 3\theta}{\cos^2\theta} = 1$$

สูตรมุม 3 เท่า

$$\frac{(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)^2}{\sin^2\theta} - \frac{(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)^2}{\cos^2\theta} = 1$$

$$\frac{\left(\sin\theta(3-4\sin^2\theta)\right)^2}{\sin^2\theta} - \frac{\left(\cos\theta(4\cos^2\theta-3)\right)^2}{\cos^2\theta} = 1$$

$$\frac{\sin^2\theta(3-4\sin^2\theta)^2}{\sin^2\theta} - \frac{\cos^2\theta(4\cos^2\theta-3)^2}{\cos^2\theta} = 1$$

$$(3-4\sin^2\theta)^2 - (4\cos^2\theta-3)^2 = 1$$

น^2 − ล^2 = (น − ล)(น + ล)

$$\left((3-4\sin^2\theta)-(4\cos^2\theta-3)\right)\left((3-4\sin^2\theta)+(4\cos^2\theta-3)\right) = 1$$

$$(6-4\sin^2\theta-4\cos^2\theta)(-4\sin^2\theta+4\cos^2\theta) = 1$$

$$\left(6-4(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right)(4)(-\sin^2\theta+\cos^2\theta) = 1$$

$$\left(6-4(\quad 1 \quad)\right)(4)(-(1-\cos^2\theta)+\cos^2\theta) = 1$$

$$-1+2\cos^2\theta = \frac{1}{8}$$

$$\cos^2\theta = \frac{9}{16}$$

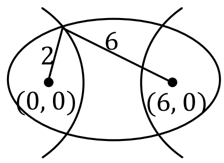
$\theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \cos$ เป็นบวก

$$\cos\theta = \frac{3}{4}$$

15. กำหนดให้ วงรี E และไฮเพอร์โบลา H มีโฟกัสร่วมกัน คือ (0, 0) และ (6, 0) และระยะทางระหว่าง จุดตัดใดๆ ของ E และ H กับจุดโฟกัสทั้งสอง คือ 6 หน่วย และ 2 หน่วย สมการของวงรี และสมการของไฮเพอร์โบลา ตามลำดับ คือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$
2. $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
3. $\frac{(x-3)^2}{7} + \frac{y^2}{16} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$
4. $\frac{(x-3)^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$
5. $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$ และ $\frac{(x-3)^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

<u>ตอบ</u> 2



จุดศูนย์กลางของทั้ง 2 กราฟ จะอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัส

จะได้จุดศูนย์กลาง $(h, k) = (\frac{0+6}{2}, 0) = (3, 0)$

และจะได้ระยะโฟกัสจาก (3, 0) ไป (0, 0) คือ $c = 3 - 0 = 3$

โจทย์กำหนดให้ระยะทางจากจุดตัด ไปยังจุดโฟกัส 6 หน่วย และ 2 หน่วย

→ จากสมบัติของวงรี จะได้ความยาวแกนเอก $= 6 + 2 = 8$

ดังนั้น $a = \frac{8}{2} = 4$ จะได้ $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$

แทนในสมการวงรีแนวนอน $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้สมการคือ $\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$

→ จากสมบัติของไฮเพอร์โบลา จะได้ความยาวแกนตามขวาง $= 6 - 2 = 4$

ดังนั้น $a = \frac{4}{2} = 2$ จะได้ $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$

แทนในสมการวงรีแนวนอน $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้สมการคือ $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$

16. กำหนดให้ เวกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos 75° \\ \cos 15° \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sin 75° \\ \sin 15° \end{bmatrix}$

ถ้าสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว $|\bar{u}||\bar{v}|$ หน่วย และมีด้านอีกด้านหนึ่งยาว $|\bar{u} \times \bar{v}|$ หน่วย แล้ว ความยาวของด้านที่เหลือของสามเหลี่ยมรูปนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 หน่วย 2. $\frac{5}{4}$ หน่วย 3. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ หน่วย 4. $\frac{3}{2}$ หน่วย 5. $\frac{7}{4}$ หน่วย

<u>ตอบ</u> 4

พีทากอรัส จะได้ด้านที่เหลือยาว
$$\begin{aligned}
&= \sqrt{(|\bar{u}||\bar{v}|)^2 - |\bar{u} \times \bar{v}|^2} \\
&= \sqrt{(|\bar{u}||\bar{v}|)^2 - (|\bar{u}||\bar{v}| \sin\theta)^2} \quad \text{ดึงตัวร่วม } |\bar{u}||\bar{v}| \\
&= \sqrt{(|\bar{u}||\bar{v}|)^2 (1 - \sin^2\theta)} \\
&= \sqrt{(|\bar{u}||\bar{v}|)^2 \cos^2\theta} \\
&= |\ |\bar{u}||\bar{v}| \cos\theta\ | \\
&= |\ \bar{u} \cdot \bar{v}\ | \\
&= |\ (1)(1) + \cos 75° \sin 75° + \cos 15° \sin 15°\ | \\
&= |\ 1 + \sin 15° \cos 15° + \cos 15° \sin 15°\ | \\
&= |\ 1 + 2 \sin 15° \cos 15°\ | \\
&= |\ 1 + \sin 30°\ | = \left|1 + \frac{1}{2}\right| = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $12(4^x) + 18(9^x) = 35(6^x)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. 0 4. $\frac{1}{2}$ 5. 1

<u>ตอบ</u> 1

$$\begin{aligned}
12(4^x) + 18(9^x) &= 35(6^x) \\
12((2^2)^x) + 18((3^2)^x) &= 35((2 \cdot 3)^x) \\
12(2^{2x}) - 35(2^x)(3^x) + 18(3^{2x}) &= 0 \quad \text{ให้ } 2^x = a \text{ และ } 3^x = b \\
12a^2 - 35ab + 18b^2 &= 0 \\
(3a - 2b)(4a - 9b) &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
3a &= 2b & \text{หรือ} \quad 4a &= 9b \\
3(2^x) &= 2(3^x) & 4(2^x) &= 9(3^x) \\
2^{x-1} &= 3^{x-1} & 2^{x+2} &= 3^{x+2} \\
x - 1 &= 0 & x + 2 &= 0 \\
x &= 1 & x &= -2
\end{aligned}$$

→ จะได้ผลบวกคำตอบ $= 1 + (-2) = -1$

18. กำหนดให้ $x > 0$ และ $x \neq 1$ ผลคูณของคำตอบทั้งหมดของสมการ $x^{\log_5 x^2} = \frac{25}{x^3}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\sqrt{5}}{25}$ 2. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ 3. $\sqrt{5}$ 4. 5 5. $5\sqrt{5}$

<u>ตอบ</u> 1

ใส่ $\log_5$ ทั้งสองฝั่ง

$$\begin{aligned}
x^{\log_5 x^2} &= \frac{25}{x^3} \\
\log_5 x^{\log_5 x^2} &= \log_5\left(\frac{25}{x^3}\right) \\
(\log_5 x^2)(\log_5 x) &= \log_5 25 - \log_5 x^3
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\log_a x^n &= n \log_a x \\
\log_a\left(\frac{M}{N}\right) &= \log_a M - \log_a N
\end{aligned}}$$

ให้ $a = \log_5 x$

$$\begin{aligned}(2\log_5 x)(\log_5 x) &= 2 - 3\log_5 x\\ 2a^2 &= 2 - 3a\\ 2a^2+3a-2 &= 0\\ (2a-1)(a+2) &= 0\\ a = \tfrac{1}{2},\ -2 \quad \rightarrow \quad \log_5 x &= \tfrac{1}{2},\ -2\\ x &= 5^{\frac{1}{2}},\ 5^{-2}\\ x &= \sqrt{5},\ \tfrac{1}{25}\end{aligned}$$

จะได้ผลคูณ $= \frac{\sqrt{5}}{25}$

19. จากระบบสมการเชิงเส้น $AX = B$ ที่มี 3 สมการ และ 3 ตัวแปร x, y, z

ถ้าหา x และ y โดยใช้กฎของคราเมอร์ได้ดังนี้ $x = \frac{\begin{vmatrix}0 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}$ และ $y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}$

แล้ว z มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 1 5. 2

<u>ตอบ</u> 3

จาก $x = \frac{\begin{vmatrix}\boxed{0} & -1 & 3\\ \boxed{1} & 1 & -1\\ \boxed{2} & 1 & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}$ และ $y = \frac{\begin{vmatrix}1 & \boxed{0} & 3\\ 2 & \boxed{1} & -1\\ 1 & \boxed{2} & 1\end{vmatrix}}{\det(A)}$ $\rightarrow$ จะได้เมทริกซ์ค่าคงที่ $B = \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$

ตัด $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ ออก และนำหลักที่เหลือของ x และ y มาประกอบกัน จะได้เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ $A = \begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$

z จะได้จากการเสียบ $\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}$ แทนหลักที่ 3 ใน A $\rightarrow$ จะได้ $z = \frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}$

$$= \frac{(2+(-1)+0)-(0+1+(-4))}{(1+1+6)-(3+(-1)+(-2))} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

20. กำหนดให้ $S = \{\,100,\ 101,\ 102,\ \dots,\ 998,\ 999\,\}$ และ

$A = \{\, n \in S \mid n$ หารด้วย 5 แล้วเหลือเศษ 4 $\}$

ผลบวกของสมาชิกทุกตัวของ A เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 99,250 2. 99,255 3. 99,260 4. 99,265 5. 99,270

<u>ตอบ</u> 5

จำนวนใน S ที่หารด้วย 5 แล้วเหลือเศษ 4 ได้แก่ $104,\ 109,\ 114,\ \dots,\ 999$

ซึ่งจะเห็นว่าจำนวนเหล่านี้ เป็นลำดับเลขคณิต ที่มี $a_1 = 104$ และ $d = 5$

จะหาจำนวนพจน์ โดยหาว่า 999 คือพจน์ที่เท่าไหร่ โดยใช้สูตร

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + (n-1)d\\ 999 &= 104 + (n-1)5\\ 179 &= n-1\\ 180 &= n\end{aligned}$$

ใช้สูตรอนุกรมเลขคณิต $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ จะได้ผลบวก $= \frac{180}{2}(104+999) = 90(1103) = 99{,}270$

21. กำหนดให้ $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า f มีค่าวิกฤตที่ $x = -1$ และ $x = 2$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ $x = -1$

ข. f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $x = 2$

ค. บนช่วง $(-1, 2)$ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ง. บนช่วง $(-\infty, -1)$ f เป็นฟังก์ชันลด

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความถูกต้อง) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

<u>ตอบ</u> 3

จาก $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$
$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

ดังนั้น $f'(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 2 ซึ่งมีตัวเลขที่คูณ x^2 คือ 3

และเนื่องจาก f มีค่าวิกฤตที่ $x = -1, 2$ จะสรุปได้ว่า $f'(-1) = 0$ และ $f'(2) = 0$

จากข้อมูลทั้งหมด จะสรุปได้ว่า $f'(x) = 3(x+1)(x-2)$

และจะระบุเครื่องหมายของ $f'(x)$ ได้ $+ \quad -1 \quad - \quad 2 \quad +$

ก. $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $+$ เป็น $-$ ที่ $x = -1$ → เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ ✓

ข. $f'(x)$ เปลี่ยนจาก $-$ เป็น $+$ ที่ $x = 2$ → เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ✓

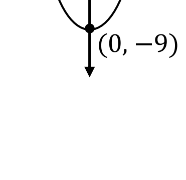
ค. บนช่วง $(-1, 2)$ จะเห็นว่า $f'(x)$ เป็นลบ → เป็นฟังก์ชันลด ✕

ง. บนช่วง $(-\infty, -1)$ จะเห็นว่า $f'(x)$ เป็นบวก → เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ✕

22. ถ้าพื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของพาราโบลาซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0, -9)$ และแกน X มีค่าเท่ากับ 9 ตารางหน่วย แล้ว สมการพาราโบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1. $y = x^2 - 9$ 2. $y = 2x^2 - 9$ 3. $y = 4x^2 - 9$
4. $y = 8x^2 - 9$ 5. $y = 16x^2 - 9$

<u>ตอบ</u> 5



พาราโบลาที่มีจุดยอด $(h, k) = (0, -9)$ และสามารถปิดล้อมพื้นที่กับแกน X ได้ จะเป็นพาราโบลาหงายดังรูป → แทนค่า h, k ในรูปสมการ

$$y = a(x-h)^2 + k \quad ; \ a > 0$$
$$y = a(x-0)^2 + (-9)$$
$$y = ax^2 - 9 \quad \ldots(*)$$

หาพื้นที่ที่ปิดล้อมกับแกน X ต้องอินทิเกรตในช่วงที่กราฟตัดแกน X

หาจุดตัดแกน X โดยแทน $y = 0$ จะได้

$$0 = ax^2 - 9$$
$$\frac{9}{a} = x^2$$
$$\pm\frac{3}{\sqrt{a}} = x$$

→ ต้องอินทิเกรตตั้งแต่ $-\frac{3}{\sqrt{a}}$ ถึง $\frac{3}{a}$

จะได้ $\int_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}} ax^2 - 9\,dx = \left.\frac{ax^3}{3} - 9x\right|_{-\frac{3}{\sqrt{a}}}^{\frac{3}{\sqrt{a}}}$

$$= \left(\frac{a}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^3 - 9\left(\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right) - \left(\frac{a}{3}\left(-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)^3 - 9\left(-\frac{3}{\sqrt{a}}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{9}{\sqrt{a}} - \frac{27}{\sqrt{a}}\right) - \left(-\frac{9}{\sqrt{a}} + \frac{27}{\sqrt{a}}\right) = -\frac{36}{\sqrt{a}}$$

โจทย์ให้พื้นที่ $= 9$ ตารางหน่วย ดังนั้น $\left|-\frac{36}{\sqrt{a}}\right| = 9$

$$4 = \sqrt{a}$$

$$16 = a$$

แทนใน $(*)$ จะได้สมการพาราโบลาคือ $y = 16x^2 - 9$

23. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \ldots, 9, 10\}$ ถ้าสุ่มหยิบสมาชิก 5 ตัวพร้อมกันจาก S แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้เลข 8 เป็นจำนวนที่มีค่ามากเป็นอันดับที่ 2 ของสมาชิก 5 ตัวนั้นเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{5}{18}$ 4. $\frac{8}{21}$ 5. $\frac{10}{21}$

<u>ตอบ</u> 3

จำนวนแบบทั้งหมด $\rightarrow$ เลือก 5 ตัวจากสมาชิก 10 ตัวใน S จะเลือกได้ $\binom{10}{5}$ แบบ

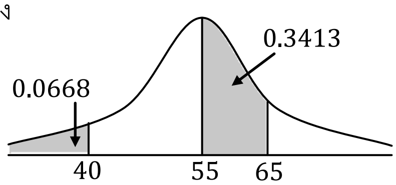
8 มีค่ามากเป็นอันดับ 2 แสดงว่าต้องมี 1 ตัวที่มากกว่า 8 และอีก 3 ตัวที่เหลือต้องน้อยกว่า 8

- มากกว่า 8 มี 2 ตัว (คือ 9, 10) เลือก 1 ตัว จะเลือกได้ 2 แบบ
- น้อยกว่า 8 มี 7 ตัว (คือ $1, 2, 3, \ldots, 7$) เลือก 3 ตัว จะเลือกได้ $\binom{7}{3}$ แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบที่ 8 มีค่ามากเป็นอันดับ 2 คือ $2 \cdot \binom{7}{3}$

จะได้ความน่าจะเป็น $= \dfrac{2 \cdot \binom{7}{3}}{\binom{10}{5}} = \dfrac{2 \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}} = \dfrac{2 \cdot 5}{2 \cdot 9 \cdot 2} = \dfrac{5}{18}$

24. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม.3 ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 55 คะแนน มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน และทราบพื้นที่ใต้เส้นโค้งดังรูป

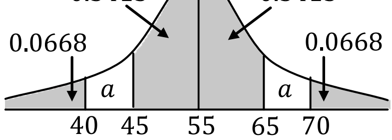


แล้ว จำนวนเปอร์เซ็นต์ของนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่าง 45 และ 70 คะแนน เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 75.00 2. 76.75 3. 77.45 4. 78.50 5. 79.00

<u>ตอบ</u> 3

พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ จะสมมาตรรอบแกนกลาง สะท้อนพื้นที่ในรูปที่โจทย์กำหนดรอบแกนกลาง และให้พื้นที่ส่วนที่เหลือ $= a$ จะได้ดังรูป



จากสมบัติของเส้นโค้งปกติ พื้นที่ใต้โค้งทั้งหมด จะเท่ากับ 1 โดยแบ่งเป็นครึ่งซ้ายและครึ่งขวา ฝั่งละ 0.5 $\rightarrow$ จะได้ $a = 0.5 - 0.3413 - 0.0668 = 0.0919$

ดังนั้น ระหว่าง 45 และ 70 คะแนน จะมีพื้นที่ $= 0.3413 + 0.3413 + a$

$$= 0.3413 + 0.3413 + 0.0919 = 0.7745 = 77.45\%$$

25. กำหนดให้ ข้อมูลกลุ่มตัวอย่างชุด X คือ $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{10}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 8

และ ข้อมูลกลุ่มตัวอย่างชุด Y คือ $y_1 < y_2 < y_3 < \dots < y_{10}$ โดยที่ $y_i = \frac{1}{2}x_i + 4$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, 10$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด $Y = 8$

ข. มัธยฐานของข้อมูลชุด $Y = \frac{1}{2}$ (มัธยฐานของข้อมูลชุด X) $+ 4$

ค. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด $Y = \frac{1}{2}$ (ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด X)

ง. ค่ามาตรฐานของ $y_i = \frac{1}{2}$ (ค่ามาตรฐานของ x_i) เมื่อ $i = 1, 2, 3, \dots, 10$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความถูกต้อง)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

<u>ตอบ</u> 4

จากสมบัติของค่ากลาง $\rightarrow$ ค่ากลางทุกชนิดของ Y จะสัมพันธ์กับค่ากลางของ X ด้วยสูตร $y_i = \frac{1}{2}x_i + 4$ ด้วย

- นั่นคือ $\bar{y} = \frac{1}{2}\bar{x} + 4 = \frac{1}{2}(8) + 4 = 8$ $\rightarrow$ ก. ถูก
- และ มัธยฐาน$_y$ $= \frac{1}{2}$มัธยฐาน$_x + 4$ $\rightarrow$ ข. ถูก

จากสมบัติของ s $\rightarrow$ การบวก 4 จะไม่ทำให้ s เปลี่ยน

$\rightarrow$ แต่การคูณ $\frac{1}{2}$ จะทำให้ s เปลี่ยนเป็น $\frac{1}{2}$ เท่าของของเดิม $\rightarrow$ ค. ถูก

ค่ามาตรฐานของ $y_i = \dfrac{y_i - \bar{y}}{s_y}$

จาก ก. และ ค.

$= \dfrac{\left(\frac{1}{2}x_i + 4\right) - \left(\frac{1}{2}\bar{x} + 4\right)}{\frac{1}{2}s_x}$

$= \dfrac{\frac{1}{2}x_i - \frac{1}{2}\bar{x}}{\frac{1}{2}s_x} = \dfrac{x_i - \bar{x}}{s_x}$ = ค่ามาตรฐานของ x_i $\rightarrow$ ง. ผิด

26. กำหนดให้ $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 5$ เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม

ถ้าสมการ $P(x) = 0$ มีคำตอบเป็นจำนวนตรรกยะอย่างน้อยหนึ่งตัว และมี $1 + 2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบของสมการ

แล้ว $P(2)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -15
2. -10
3. 1
4. 10
5. 15

<u>ตอบ</u> 5

เนื่องจาก $P(x)$ มี สปส เป็นจำนวนจริง $\rightarrow$ ถ้ามี $1 + 2\mathrm{i}$ เป็นคำตอบ จะได้ว่า $1 - 2\mathrm{i}$ ก็จะเป็นคำตอบด้วย

$P(x)$ เป็นพหุนามกำลัง 4 $\rightarrow$ สมการ $P(x) = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 4 ตัว (จะน้อยกว่า 4 ถ้าคำตอบบางตัวซ้ำกัน)

สมมติให้คำตอบทั้ง 4 ตัว คือ $1 + 2\mathrm{i}$, $1 - 2\mathrm{i}$, p , q

จากสูตรผลคูณคำตอบ จะได้ผลคูณคำตอบ $= \frac{-5}{1} = -5$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (1 + 2\mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i})(p)(q) &= -5 \\ (1 + 4)\ p\ q &= -5 \\ p &= -\frac{1}{q} \end{aligned}$$

ดังนั้น p และ q จะเป็นลบส่วนกลับของกันและกัน

โจทย์ให้สมการมีคำตอบตรรกยะ $\rightarrow$ ถ้าให้ $p = \frac{m}{n}$ จะได้ $q = -\frac{n}{m}$ เมื่อ m, n เป็นจำนวนเต็มที่ตัดทอนกันไม่ได้แล้ว

จากสูตรผลบวกคำตอบ จะได้ผลบวกคำตอบ $= -\frac{a}{1} = -a$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} (1 + 2\mathrm{i}) + (1 - 2\mathrm{i}) + p + q &= -a \\ p + q &= -a - 2 \end{aligned}$$

โจทย์ให้ a เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น $p+q$ ต้องเป็นจำนวนเต็มด้วย → ให้

$$\begin{aligned} p + q &= k \\ \frac{m}{n} + \left(-\frac{n}{m}\right) &= k \\ m^2 - n^2 &= kmn \quad ...(*) \end{aligned}$$

จาก $(*)$ เนื่องจาก m^2 และ kmn หารด้วย m ลงตัว ดังนั้น n^2 ที่เหลือ ต้องหารด้วย m ลงตัวด้วย

แต่ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ตัดทอนกันไม่ได้แล้ว จึงสรุปได้ว่า $m = \pm 1$

และจาก $(*)$ เนื่องจาก n^2 และ kmn หารด้วย n ลงตัว ดังนั้น m^2 ที่เหลือ ต้องหารด้วย n ลงตัวด้วย

แต่ m และ n เป็นจำนวนเต็มที่ตัดทอนกันไม่ได้แล้ว จึงสรุปได้ว่า $n = \pm 1$

แทนค่า m, n จะได้ p, q คือ 1 กับ -1 → จะได้คำตอบของสมการ $P(x) = 0$ คือ $1+2\mathrm{i}$, $1-2\mathrm{i}$, 1 , -1

และเนื่องจาก สปส ของ x^4 ใน $P(x)$ คือ 1 → จะสามารถสร้าง $P(x)$ จากคำตอบได้ดังนี้

$$\begin{aligned} P(x) &= \big(x-(1+2\mathrm{i})\big)\big(x-(1-2\mathrm{i})\big)(x-1)\big(x-(-1)\big) \\ P(2) &= \big(2-(1+2\mathrm{i})\big)\big(2-(1-2\mathrm{i})\big)(2-1)\big(2-(-1)\big) \\ &= (\ 1-2\mathrm{i}\ )(\ 1+2\mathrm{i}\ )(\ 1\ )(\ 3\ ) \\ &= \quad (1+4) \quad (\ 1\ )(\ 3\ ) \ = \ 15 \end{aligned}$$

27. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้าข้อมูลต่อไปนี้ a , b , 4 , 4 , 3 , 3 , 6 , 5 , 5 , 8 , 7 , 7

มีค่า พิสัย = มัธยฐาน = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต แล้ว $a \cdot b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 15 3. 18 4. 20 5. 21

<u>ตอบ</u> 2

เนื่องจากข้อมูลทุกตัวเป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น พิสัยจะเป็นจำนวนเต็มเสมอ

ดังนั้น มัธยฐาน และ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ต้องเป็นจำนวนเต็มด้วย (โจทย์ให้ พิสัย = มัธยฐาน = ค่าเฉลี่ยเลขคณิต)

มีข้อมูล 12 จำนวน → มัธยฐานจะอยู่ตัวที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{12+1}{2} = 6.5$ → คือระหว่างตัวที่ 6 กับ 7

เรียงข้อมูล 7 ตัวแรกเท่าที่รู้ จากน้อยไปมาก จะได้ 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 5 , 6

ถ้า $a, b \ge 6$ ทั้งคู่ ลำดับ 7 ตัวแรกนี้จะไม่เปลี่ยน และจะได้มัธยฐาน $= \frac{5+6}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็มตามที่สรุปไว้

ดังนั้น ใน a, b ต้องมีบางตัว < 6 แต่ a, b เป็นจำนวนเต็ม จะสรุปได้ว่าต้องมีบางตัว ≤ 5 ...(1)

ทำนองเดียวกัน เรียงข้อมูล 7 ตัวแรกเท่าที่รู้ จากมากไปน้อย จะได้ 8 , 7 , 7 , 6 , 5 , 5 , 4

ถ้า $a, b \le 4$ ทั้งคู่ ลำดับ 7 ตัวแรกนี้จะไม่เปลี่ยน และจะได้มัธยฐาน $= \frac{5+4}{2}$ ไม่เป็นจำนวนเต็มตามที่สรุปไว้

ดังนั้น ใน a, b ต้องมีบางตัว > 4 แต่ a, b เป็นจำนวนเต็ม จะสรุปได้ว่าต้องมีบางตัว ≥ 5 ...(2)

ดังนั้นตัวน้อย 7 ตัวแรก จะต้องมี 3 , 3 , 4 , 4 , 5 , 5 และ อีกหนึ่งตัวจาก (1) แต่ต้องไม่มีหนึ่งตัวจาก (2)

จะเห็นว่าไม่ว่า a, b จะเป็นอะไร ตัวที่ 6 และ 7 จะเป็น 5 เสมอ → จะได้มัธยฐาน $= \frac{5+5}{2} = 5$

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต } = \frac{a+b+4+4+3+3+6+5+5+8+7+7}{12} = \frac{a+b+52}{12} &= 5 \\ a+b &= 8 \end{aligned}$$

จาก (1) และ (2) จะได้ a, b คือ $3, 5$ ได้แบบเดียว → จะได้ $a \cdot b = 3 \cdot 5 = 15$

28. กำหนดให้ $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots ,\ a_m$ เป็นข้อมูลซึ่งเรียงจากมากไปน้อย

โดยที่ $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \dots , m$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ $\frac{1}{120}$

แล้ว ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{20}$
2. $\frac{1}{21}$
3. $\frac{1}{22}$
4. $\frac{1}{23}$
5. $\frac{1}{24}$

<u>ตอบ</u> 2

ลองเขียน $\frac{1}{120}$ ในรูป $\frac{1}{n(n+1)}$ ดู จะพบว่าเขียนไม่ได้

เพราะ 120 แยกเป็นผลคูณของสองจำนวนที่เรียงติดกันไม่ได้ (ได้ใกล้ที่สุดคือ 10×12)

ดังนั้น มัธยฐาน จะไม่ตรงกับพจน์ไหนในลำดับเลย → แสดงว่า มัธยฐานต้องอยู่ตรงกลางระหว่างพจน์สองพจน์ที่ติดกัน

สมมติให้มัธยฐานอยู่ระหว่าง $\frac{1}{k(k+1)}$ กับ $\frac{1}{(k+1)(k+2)}$ จะได้มัธยฐาน

$$= \frac{\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}}{2} = \frac{\frac{k+2\ +\ k}{k(k+1)(k+2)}}{2} = \frac{2k+2}{2k(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+2)}$$

ดังนั้น $\frac{1}{120} = \frac{1}{k(k+2)}$ → แยกตัวประกอบ 120 ในรูป $k(k+2)$ จะได้ 10×12 ดังนั้น $k = 10$

แสดงว่ามัธยฐานอยู่ระหว่างพจน์ที่ 10 กับ 11 (คือตัวที่ 10.5) ดังนั้น $\frac{m+1}{2} = 10.5$ จะได้ $m = 20$

จะได้ผลบวกของทั้ง 20 พจน์คือ $\frac{1}{(1)(2)} + \frac{1}{(2)(3)} + \frac{1}{(3)(4)} + \dots + \frac{1}{(20)(21)}$

เทเลสโคปิก จะได้ $= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{20} - \frac{1}{21}$

$= \frac{1}{1} - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$

จะได้ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต $= \frac{\text{ผลบวก 20 พจน์}}{20} = \frac{\frac{20}{21}}{20} = \frac{1}{21}$

29. กำหนดให้ $a_1,\ a_2,\ a_3, \dots ,\ a_n ,\ \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม r โดยที่ $|r| < 1$

ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 4$

$a_6 + a_7 + \cdots + a_{14} + a_{15} = 3$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 9
3. 10
4. 11
5. 12

<u>ตอบ</u> 1

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ จะได้ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = S_5 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r}$

$$4 = \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} \quad \dots(1)$$

และ $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + \cdots + a_{14} + a_{15} = S_{15} = \frac{a_1(1-r^{15})}{1-r}$

$$4 + 3 = \frac{a_1(1-r^{15})}{1-r}$$

$$7 = \frac{a_1(1-r^{15})}{1-r} \quad \dots(2)$$

(2) ÷ (1) :

$$\frac{7}{4} = \frac{a_1(1-r^{15})}{1-r}\cdot\frac{1-r}{a_1(1-r^5)}$$

$$\frac{7}{4} = \frac{1-r^{15}}{1-r^5}$$

$น^3 - ล^3. = (น - ล)(น^2 + นล + ล^2)$

$$\frac{7}{4} = \frac{(1-r^5)(1+r^5+r^{10})}{1-r^5}$$

$$7 = 4 + 4r^5 + 4r^{10}$$

$$0 = 4r^{10} + 4r^5 - 3$$

$$0 = (2r^5 - 1)(2r^5 + 3)$$

$$r^5 = \frac{1}{2}, \cancel{-\frac{3}{2}}$$

← เนื่องจาก $|r| < 1$ → ยกกำลัง 5 จะได้ $|r^5| < 1$

ดังนั้น $-1 < r^5 < 1$

$-\frac{3}{2}$ น้อยกว่า -1 จึงใช้ไม่ได้

ใช้สูตรอนุกรมอนันต์ จะได้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-r}$ → แทนค่า $r^5 = \frac{1}{2}$ ใน (1) จะได้ $\frac{a_1\left(1-\frac{1}{2}\right)}{1-r} = 4$

$$\frac{a_1}{1-r} = 8$$

30. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in S \right\}$

จำนวนเมทริกซ์ $A \in \Omega$ ซึ่ง $A^{-1} = A$ มีทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8 2. 9 3. 10 4. 11 5. 12

<u>ตอบ</u> 5

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ac-0}\begin{bmatrix} c & -b \\ 0 & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix}$$

ถ้า $A^{-1} = A$ จะได้ $\begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ →

$\frac{1}{a} = a$, $1 = a^2$, $\pm 1 = a$

$-\frac{b}{ac} = b$, $b = 0$ หรือ $ac = -1$

$\frac{1}{c} = c$, $1 = c^2$, $\pm 1 = c$

กรณี $b = 0$: จะได้ว่า ac เป็นอะไรก็ได้

$a = \pm 1$ ได้ 2 แบบ และ $c = \pm 1$ ได้ 2 แบบ → จะได้จำนวนแบบ $= 2 \times 2 = 4$ แบบ

กรณี $b \neq 0$: จะได้ $b = -2, -1, 1, 2$ ได้ 4 แบบ และ ac ต้องเป็น -1

$a = \pm 1$ ได้ 2 แบบ แต่ c จะเลือกไม่ได้ ต้องเป็นจำนวนที่คูณ a แล้วได้ -1

(ถ้า $a = 1$ จะได้ $c = -1$ แต่ถ้า $a = -1$ จะได้ $c = 1$)

จะได้จำนวนแบบ $= 4 \times 2 = 8$ แบบ

รวมจำนวนแบบของทั้ง 2 กรณี จะได้ $4 + 8 = 12$ แบบ

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยละเอียด จาก อ.ปิ๋ง GTRmath

ขอบคุณ เฉลยละเอียด จาก อ.ปิ๋ง GTRmath และ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book

ขอบคุณ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นวย) ผู้เขียน Math E-book

และ คุณ Kriengkri Pongto

และ คุณ Chonlakorn Chiewpanich ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร