

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (ธ.ค. 59)

วันอาทิตย์ที่ 25 ธันวาคม 2559 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $x + 1$, $x + 2$ และ $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 24 3. 32 4. 40 5. 46

2. จำนวนเต็มบวก $n > 2$ ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. [73, 77] 2. [78, 82] 3. [83, 87]
 4. [88, 92] 5. [93, 97]

3. กำหนดให้ $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$ แล้ว $A + B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{4\pi}{3}$ 5. $\frac{5\pi}{4}$

7. ถ้าผลการเรียนคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เป็นดังตารางต่อไปนี้

	คะแนนที่ได้ (จากคะแนนเต็ม 100)	เกณฑ์การให้น้ำหนัก ในการคิดคะแนน
การบ้าน	85	20%
สอบกลางภาค	65	40%
สอบปลายภาค	70	40%

แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68 2. 71 3. 74 4. 77 5. 80
8. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ $\mathcal{W} = \{A \mid A \subset S \text{ และ } A \text{ มีสมาชิก } 4 \text{ ตัว}\}$
 ถ้าสุ่มหยิบเซตหนึ่งเซตจาก \mathcal{W} แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เซตที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{5}{9}$
9. ความน่าจะเป็นที่ดวงพระจะไปดูหนังและไปซื้อของในวันอาทิตย์เป็น 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ ถ้าดวงพระจะทำกิจกรรมอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แล้วความน่าจะเป็นที่ดวงพระจะทำกิจกรรมทั้ง 2 อย่างเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4 5. 0.5

10. ถ้าลำดับ $a_n = \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0 5. $\frac{1}{2}$

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| = -3 + 2i$
แล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 3 2. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{13}$
4. $2\sqrt{5}$ 5. 4

12. ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง } [-10, 10]\}$ $B = \{x \mid (x+5)(|x|-5) \geq -9\}$
จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 7 2. 14 3. 16 4. 18 5. 21

13. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n หาร $3,399$ แล้วเหลือเศษ 24
จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

14. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-7, 1)$ และ $(5, 1)$ ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ขนานกับ
เส้นตรง $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{(x+1)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$ 2. $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$ 3. $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$
4. $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$ 5. $(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

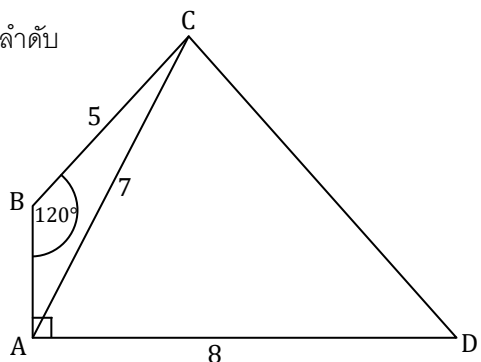
15. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ดังรูป

โดยมีด้าน BC, AC และ AD ยาวเท่ากับ $5, 7$ และ 8 หน่วยตามลำดับ

มี $\widehat{BAD} = 90^\circ$ และ $\widehat{CBA} = 120^\circ$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 22 ตารางหน่วย
2. 24 ตารางหน่วย
3. 28 ตารางหน่วย
4. $28\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
5. $28\sqrt{3}$ ตารางหน่วย



16. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{v} = (\sin 80^\circ + \sin 20^\circ)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$

และ $|\vec{v} \times \vec{i}| = \sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ แล้ว $|\vec{v}|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 6 5. 7

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $(\log_{100} x)^2 + 2 \log_{100} x + 2 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{1000}$ 2. $\frac{101}{1000}$ 3. $\frac{11}{100}$ 4. 101 5. 110

18. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8 2. -4 3. -1 4. 4 5. 8

19. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม $d > 0$
 และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d$

ข. $\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r$

ค. $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d$

ง. $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
 4. 3 5. 4

20. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$

จำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 48 3. 64 4. 80 5. 96

21. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 60 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13% แล้วนักเรียนที่สอบได้ 50 คะแนน จะมีตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15.87 2. 24.13 3. 34.13
 4. 47.61 5. 50

22. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
1 - 5	4
6 - 10	a
11 - 15	6
16 - 20	b
21 - 25	10
26 - 30	4

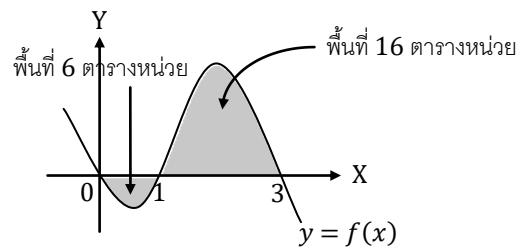
ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ 17.5 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16.50 คะแนน
2. 16.75 คะแนน
3. 17.25 คะแนน
4. 17.50 คะแนน
5. 17.75 คะแนน

23. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป

แล้ว $\int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 10
3. 12
4. 16
5. 32



24. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

แล้ว $\int_2^5 (2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 94
2. 104
3. 158
4. 258
5. 264

25. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = 2$ และผลต่างร่วมเท่ากับ $-\frac{2}{9}$
 ถ้า $b_n = 2^{a_n}$ แล้วจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_m \geq 1024$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{211}{9}$
 และ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 27$ แล้วจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{64}{81}$ 2. 1 3. $\frac{16}{9}$ 4. $\frac{32}{27}$ 5. $\frac{64}{27}$

27. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมีค่าวิกฤตที่ $x = 4$ และ $x = -4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้
- ก. $f''(-4) \cdot f''(4) < 0$
 ข. $f(4\sqrt{3}) = 2f(0)$
 ค. $f(-4) + f(4) = 2f(0)$
 ง. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ เท่ากับ $f(0)$
- จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
 4. 3 5. 4

28. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $\frac{2^{100}}{2^{100}-m}$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $99(2^{99})$
2. $100(2^{99}) + 1$
3. $99(2^{100}) + 1$
4. $100(2^{100})$
5. $101(2^{101})$

29. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ และ $B = \{k \in A \mid \left(\frac{\cos\frac{5\pi}{8} - i \sin\frac{5\pi}{8}}{\cos\frac{3\pi}{4} - i \sin\frac{3\pi}{4}}\right)^k = i\}$ โดยที่ $i^2 = -1$ จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 7
3. 9
4. 11
5. 13

30. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$

ถ้าสุ่มเมทริกซ์จากเซต W มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $AB = BA$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{625}$
2. $\frac{19}{625}$
3. $\frac{21}{625}$
4. $\frac{23}{625}$
5. $\frac{25}{625}$

เฉลย

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 5 | 7. 2 | 13. 5 | 19. 1 | 25. 3 |
| 2. 1 | 8. 5 | 14. 2 | 20. 5 | 26. 4 |
| 3. 3 | 9. 3 | 15. 1 | 21. 1 | 27. 4 |
| 4. 1 | 10. 3 | 16. 2 | 22. 1 | 28. 3 |
| 5. 4 | 11. 4 | 17. 1 | 23. 3 | 29. 2 |
| 6. 5 | 12. 2 | 18. 5 | 24. 4 | 30. 2 |

แนวคิด

1. กำหนดให้ $P(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง
 ถ้า $x + 1, x + 2$ และ $x + 3$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 12 2. 24 3. 32 4. 40 5. 46

ตอบ 5

$P(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ที่มี $x + 1, x + 2$ และ $x + 3$ เป็นตัวประกอบ
 ดังนั้น $P(x)$ ต้องอยู่ในรูป $k(x + 1)(x + 2)(x + 3)$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง
 และจากพจน์กำลังสามของ $P(x)$ คือ $2x^3$ ดังนั้น $k = 2 \rightarrow P(x) = 2(x + 1)(x + 2)(x + 3)$
 จะกระจาย $P(x)$ แล้วเทียบสัมประสิทธิ์ก็ได้ แต่สังเกตว่าถ้าแทน $x = 1$ ก็จะได้ $a + b + c$ ได้เหมือนกัน

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + ax^2 + bx + c = 2(x + 1)(x + 2)(x + 3) \\ 2(1^3) + a(1^2) + b(1) + c &= 2(1 + 1)(1 + 2)(1 + 3) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{แทน } x = 1 \\ 2 + a + b + c &= 48 \\ a + b + c &= 46 \end{aligned}$$

2. จำนวนเต็มบวก $n > 2$ ที่น้อยที่สุดที่หารด้วย 18 และ 24 แล้วเหลือเศษ 2 มีค่าอยู่ในช่วงใดต่อไปนี้
1. [73, 77] 2. [78, 82] 3. [83, 87]
 4. [88, 92] 5. [93, 97]

ตอบ 1

ต้องหาจำนวนที่น้อยที่สุด ที่หารด้วย 18 และ 24 ลงตัว แล้วเอามาบวก 2 ก็จะทำให้หารแล้วเหลือเศษ 2
 จำนวนที่น้อยที่สุด ที่หารด้วย 18 และ 24 ลงตัว = ค.ร.น. ของ 18 และ 24

$$\begin{aligned} 6 \cdot \frac{18}{3} \cdot \frac{24}{4} &\rightarrow \text{จะได้ ค.ร.น.} = 6 \times 3 \times 4 = 72 \\ &\rightarrow \text{จะได้ } n = 72 + 2 = 74 \text{ อยู่ในช่วงของ ข้อ 1. [73, 77]} \end{aligned}$$

3. กำหนดให้ $A, B \in (0, \frac{\pi}{2})$ ถ้า $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3$ แล้ว $A + B$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{\pi}{4}$ 2. $\frac{\pi}{3}$ 3. $\frac{3\pi}{4}$ 4. $\frac{4\pi}{3}$ 5. $\frac{5\pi}{4}$

ตอบ 3

มี $\tan A = 2$ และ $\tan B = 3 \rightarrow$ สามารถหา $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{2 + 3}{1 - (2)(3)} = \frac{5}{-5} = -1$
 และจาก $0 < A < \frac{\pi}{2}$
 $0 < B < \frac{\pi}{2}$
 ดังนั้น $0 < A + B < \pi$ จาก $\tan(A + B) = -1$ จะได้ $A + B = \frac{3\pi}{4}$

4. ถ้า $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ และ $\vec{b} \times \vec{c} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ แล้ว $(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. -3
 2. -2
 3. 2
 4. 3
 5. $2\sqrt{21}$

ตอบ 1

$$\begin{aligned}
 & (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \\
 &= \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}} + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}} + \underbrace{(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{c}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{กระจาย } (\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \text{ ใน การบวกเวกเตอร์} \\ \text{หมุน } \times \text{ และ } \cdot \text{ ค่าไม่เปลี่ยน} \end{array} \right\} \\
 &= (\vec{a} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \\ \vec{0} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u}) \end{array} \right\} \\
 &= \vec{0} \cdot \vec{c} + (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} + \vec{0} \cdot \vec{a} \\
 &= (\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} \\
 &= -(\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \\
 &= -(3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) \\
 &= -((3)(2) + (2)(-1) + (-1)(1)) = -3
 \end{aligned}$$

5. กำหนดให้จุด (6, 4) อยู่บนวงกลม C ถ้าเส้นผ่านศูนย์กลางสองเส้นของวงกลม C คือส่วนของเส้นตรง $2x + y = 5$ และ $x + 3y = 10$ แล้วรัศมีของวงกลมยาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\sqrt{21}$ หน่วย
 2. $\sqrt{24}$ หน่วย
 3. 5 หน่วย
 4. $\sqrt{26}$ หน่วย
 5. 6 หน่วย

ตอบ 4

เส้นผ่านศูนย์กลางวงกลม จะตัดกันที่จุดศูนย์กลางวงกลมเสมอ \rightarrow หาจุดตัดเส้นตรง

$$\begin{array}{rcl}
 2x + y & = & 5 \quad \dots(1) \\
 x + 3y & = & 10 \quad \dots(2) \\
 (1) \times 3 & : & 6x + 3y = 15 \quad \dots(3) \\
 (3) - (2) & : & 5x = 5 \\
 & & x = 1 \\
 (1) & : & 2(1) + y = 5 \\
 & & y = 3
 \end{array}$$

จะได้จุดศูนย์กลางวงกลม = จุดตัดเส้นตรง = (1, 3)

ดังนั้น รัศมี = ระยะจากจุดศูนย์กลาง ไปจุดไหนก็ได้บนวงกลม

$$\begin{aligned}
 &= \text{ระยะจาก } (1, 3) \text{ ไป } (6, 4) \\
 &= \sqrt{(6-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{26}
 \end{aligned}$$

ระยะระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

6. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log |x - 2|^{(x-5)} = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 4
 2. 5
 3. 6
 4. 8
 5. 9

ตอบ 5

$$\begin{aligned}
 \log |x - 2|^{(x-5)} &= 0 \\
 |x - 2|^{(x-5)} &= 10^0 \quad \left. \begin{array}{l} \log \text{ แบบไม่มีฐาน คือ } \log \text{ ฐาน } 10 \end{array} \right\} \\
 |x - 2|^{(x-5)} &= 1
 \end{aligned}$$

ผลยกกำลัง เป็น 1 ได้ 3 กรณี คือ $x-2 = 1$, เลขชี้กำลัง = 0 (เมื่อ $x-2 \neq 0$) , $(-1)^c$ เมื่อ c เป็นเลขคู่

$$\begin{array}{ccc} \swarrow & \downarrow & \downarrow \\ |x-2| = 1 & x-5 = 0 & |x-2| = -1 \\ x-2 = 1, -1 & x = 5 & \text{ค่าสัมบูรณ์เป็นลบไม่ได้} \\ x = 3, 1 & (x=5 \text{ จะได้ฐาน } |x-2| \neq 0) & \text{ไม่มีคำตอบ} \end{array}$$

จะได้ผลบวกคำตอบ = $3 + 1 + 5 = 9$

7. ถ้าผลการเรียนคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เป็นดังตารางต่อไปนี้

	คะแนนที่ได้ (จากคะแนนเต็ม 100)	เกณฑ์การให้น้ำหนัก ในการคิดคะแนน
การบ้าน	85	20%
สอบกลางภาค	65	40%
สอบปลายภาค	70	40%

แล้วจำนวนเปอร์เซ็นต์ของผลการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ของ ด.ช. จ้อย เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 68 2. 71 3. 74 4. 77 5. 80

ตอบ 2

$$\begin{aligned} \text{จากสูตรค่าเฉลี่ยถ่วงน้ำหนัก จะได้} &= \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i} = \frac{(20)(85) + (40)(65) + (40)(70)}{20 + 40 + 40} \\ &= \frac{1700 + 2600 + 2800}{100} = \frac{7100}{100} = 71 \end{aligned}$$

8. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$ $\mathcal{W} = \{A \mid A \subset S \text{ และ } A \text{ มีสมาชิก 4 ตัว}\}$

ถ้าสุ่มหยิบเซตหนึ่งเซตจาก \mathcal{W} แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เซตที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{2}{9}$ 2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{4}{9}$ 4. $\frac{1}{2}$ 5. $\frac{5}{9}$

ตอบ 5

$n(S) =$ จำนวนแบบทั้งหมด = จำนวนสับเซตของ S ที่มีสมาชิก 4 ตัว

→ เลือก 4 ตัว จากสมาชิกของ S (ซึ่งมี 9 ตัว) จะเลือกได้ $\binom{9}{4}$ แบบ

$n(E) =$ จำนวนแบบที่โจทย์สนใจ = จำนวนสับเซตของ S ที่มีสมาชิก 4 ตัว ที่ไม่มีเลข 9 เป็นสมาชิก

→ เหลือให้เลือกแค่ 1, 2, 3, ..., 8 (ทั้งหมด 8 ตัว) เลือกมา 4 ตัว จะเลือกได้ $\binom{8}{4}$ แบบ

$$\text{จะได้ความน่าจะเป็น} = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{\binom{8}{4}}{\binom{9}{4}} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{5}{9}$$

9. ความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะไปดูหนังและไปซื้อของในวันอาทิตย์เป็น 0.7 และ 0.6 ตามลำดับ ถ้าดวงพรจะทำกิจกรรมอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แล้วความน่าจะเป็นที่ดวงพรจะทำกิจกรรมทั้ง 2 อย่างเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0.1 2. 0.2 3. 0.3 4. 0.4 5. 0.5

ตอบ 3

จากโจทย์ จะได้ $P(\text{ดูหนัง}) = 0.7$ และ $P(\text{ซื้อของ}) = 0.6$

ทำอย่างอย่างน้อย 1 อย่างแน่นอน แสดงว่า $P(\text{ดูหนัง หรือ ซื้อของ}) = 1$

ใช้สูตร Inclusive - Exclusive : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 จะได้ $P(\text{ดูหนัง หรือ ซื้ของ}) = P(\text{ดูหนัง}) + P(\text{ซื้ของ}) - P(\text{ดูหนัง และ ซื้ของ})$
 $1 = 0.7 + 0.6 - P(\text{ดูหนัง และ ซื้ของ})$
 ดังนั้น $P(\text{ดูหนัง และ ซื้ของ}) = 0.3$

10. ถ้าลำดับ $a_n = \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}}$ แล้ว $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1. -1 2. $-\frac{1}{2}$ 3. $-\frac{1}{4}$ 4. 0 5. $\frac{1}{2}$

ตอบ 3

จัดรูป a_n โดยดึง n จากทั้งเศษและส่วนออกมาตัดกัน

$$\begin{aligned} \frac{(3+2n)^{13}(5+n)^2}{(1-2n)^{15}} &= \frac{\left(n\left(\frac{3}{n}+2\right)\right)^{13} \left(n\left(\frac{5}{n}+1\right)\right)^2}{\left(n\left(\frac{1}{n}-2\right)\right)^{15}} \\ &= \frac{n^{13} \left(\frac{3}{n}+2\right)^{13} n^2 \left(\frac{5}{n}+1\right)^2}{n^{15} \left(\frac{1}{n}-2\right)^{15}} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{n}+2\right)^{13} \left(\frac{5}{n}+1\right)^2}{\left(\frac{1}{n}-2\right)^{15}} \rightarrow \text{ดังนั้น } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{(0+2)^{13}(0+1)^2}{(0-2)^{15}} = \frac{2^{13}}{-2^{15}} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

11. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| = -3 + 2i$
 แล้ว $|z|$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
 1. 3 2. $\sqrt{10}$ 3. $\sqrt{13}$
 4. $2\sqrt{5}$ 5. 4

ตอบ 4

$$\begin{aligned} z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| &= -3 + 2i \\ z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| &= -3 + 2i \\ z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| &= -3 + 2i \\ z + \left| \frac{\bar{z}-1}{z-1} \right| &= -3 + 2i \\ z + 1 &= -3 + 2i \\ z &= -4 + 2i \end{aligned} \left. \begin{array}{l} \text{สังยุคของจำนวนจริง จะได้เท่าเดิม } \rightarrow \bar{1} = 1 \\ \text{ดึงสังยุคออกนอกการลบ} \\ \text{กระจายค่าสัมบูรณ์ในการคูณ} \\ \text{จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ } |\bar{z}-1| = |z-1| \end{array} \right\}$$

จะได้ $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

12. ให้ $A = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ในช่วง } [-10, 10]\}$ $B = \{x \mid (x + 5)(|x| - 5) \geq -9\}$
 จำนวนสมาชิกของ $A \cap B$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

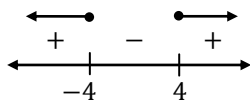
1. 7 2. 14 3. 16 4. 18 5. 21

ตอบ 2

แก้หา $B \rightarrow$ จะแบ่งกรณีให้รู้เครื่องหมายของ x เพื่อใช้สมบัติ $|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$ ในการถอดค่าสัมบูรณ์

กรณี $x \geq 0$:

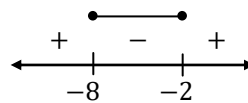
$$\begin{aligned} (x + 5)(|x| - 5) &\geq -9 \\ (x + 5)(x - 5) &\geq -9 \\ x^2 - 25 &\geq -9 \\ x^2 - 16 &\geq 0 \\ (x + 4)(x - 4) &\geq 0 \end{aligned}$$



กรณีนี้คือ $x \geq 0 \rightarrow$ จะเหลือคำตอบคือ $[4, \infty)$

กรณี $x < 0$:

$$\begin{aligned} (x + 5)(|x| - 5) &\geq -9 \\ (x + 5)(-x - 5) &\geq -9 \\ -x^2 - 5x - 5x - 25 &\geq -9 \\ 0 &\geq x^2 + 10x + 16 \\ 0 &\geq (x + 8)(x + 2) \end{aligned}$$



กรณีนี้คือ $x < 0 \rightarrow$ จะได้คำตอบคือ $[-8, -2]$

รวมสองกรณี จะได้ $B = [-8, -2] \cup [4, \infty)$

$A \cap B =$ เอา B เฉพาะที่อยู่ในช่วง $[-10, 10] \rightarrow [-8, -2]$ จะมี 7 ตัว
 $\rightarrow [4, 10]$ จะมี 7 ตัว } รวม 14 ตัว

13. กำหนดให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก n โดยที่ n หาร 3,399 แล้วเหลือเศษ 24
 จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

ตอบ 5

แสดงว่า ถ้าเอา 3399 มาหักเศษ 24 ออก ผลที่เหลือจะต้องหารด้วย n ลงตัว

นั่นคือ n ต้องหาร $3399 - 24 = 3375$ ลงตัว

เนื่องจาก 3375 แยกตัวประกอบได้เป็น $3^3 \cdot 5^3$ ดังนั้น n ต้องอยู่ในรูป $3^a \cdot 5^b$ เมื่อ $a, b \in \{0, 1, 2, 3\}$

จะเห็นว่าเลือก a และ b ได้ตัวละ 4 แบบ (คือ 0 ถึง 3) ดังนั้น จะมี $3^a \cdot 5^b$ ได้ทั้งหมด $4 \times 4 = 16$ แบบ

นอกจากนี้ จะเห็นว่า n ต้องมากกว่า 24 ด้วย (ไม่นั้น n จะหารแล้วเหลือเศษ 24 ไม่ได้)

ดังนั้น ต้องหัก $3^a \cdot 5^b$ ที่ ≤ 24 ออกด้วย ซึ่งจะมี $3^0 \cdot 5^0 = 1$, $3^1 \cdot 5^0 = 3$, $3^2 \cdot 5^0 = 9$

$3^0 \cdot 5^1 = 5$, $3^1 \cdot 5^1 = 15$

ทั้งหมด 5 แบบ \rightarrow เหลือจำนวนแบบ = $16 - 5 = 11$ แบบ

14. ไฮเพอร์โบลารูปหนึ่งมีโฟกัสอยู่ที่จุด $(-7, 1)$ และ $(5, 1)$ ถ้าเส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลานี้ขนานกับเส้นตรง $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$ แล้วสมการของไฮเพอร์โบลาคือข้อใดต่อไปนี้

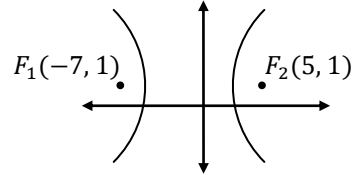
1. $\frac{(x+1)^2}{24} - \frac{(y-1)^2}{12} = 1$
2. $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$
3. $\frac{(x-1)^2}{12} - \frac{(y+1)^2}{24} = 1$
4. $(x+1)^2 - \frac{(y-1)^2}{2} = 1$
5. $(x-1)^2 - \frac{(y+1)^2}{2} = 1$

ตอบ 2

จุดโฟกัสเรียงตัวในแนวนอน \rightarrow เป็นไฮเพอร์โบลานแนวนอน ดังรูป

จะได้รูปสมการคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

จะได้ระยะโฟกัส $c = \frac{5-(-7)}{2} = 6$ แทนในสูตร $c^2 = a^2 + b^2$
 $6^2 = a^2 + b^2 \dots(1)$



โจทย์ให้เส้นกำกับเส้นหนึ่งของไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ ขนานกับเส้นตรง $\sqrt{2}x - y + 5 = 0$

จะได้เส้นกำกับคือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 0$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} = \frac{(y-k)^2}{b^2}$$

$$\frac{b^2}{a^2}(x-h)^2 = (y-k)^2$$

$$\pm \frac{b}{a}(x-h) = y-k$$

ความชัน $= \frac{b}{a}, -\frac{b}{a} \rightarrow$ ขนานกัน ความชันจะเท่ากัน $\rightarrow \frac{b}{a} = \sqrt{2}$

ความชัน $= \sqrt{2}$

$$\frac{b^2}{a^2} = 2$$

$$b^2 = 2a^2 \dots(2)$$

แทน (2) ใน (1) จะได้ $6^2 = a^2 + 2a^2$

$$36 = 3a^2$$

$$12 = a^2 \rightarrow \text{แทนใน (2) จะได้ } b^2 = 2(12) = 24$$

และ จุดศูนย์กลางต้องอยู่ตรงกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง จะได้จุดศูนย์กลาง $(h, k) = \left(\frac{-7+5}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (-1, 1)$

แทน a^2, b^2, h, k ใน $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้สมการไฮเพอร์โบลาคือ $\frac{(x+1)^2}{12} - \frac{(y-1)^2}{24} = 1$

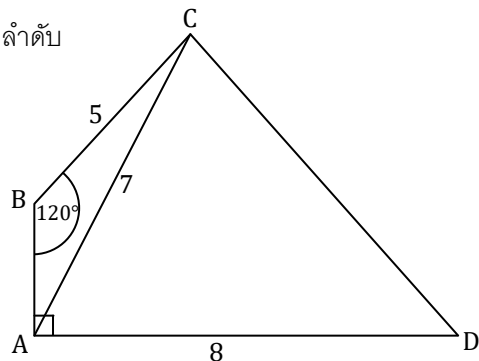
15. กำหนดรูปสี่เหลี่ยม ABCD ดังรูป

โดยมีด้าน BC, AC และ AD ยาวเท่ากับ 5, 7 และ 8 หน่วยตามลำดับ

มี $\angle BAD = 90^\circ$ และ $\angle CBA = 120^\circ$

พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ACD เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 22 ตารางหน่วย
2. 24 ตารางหน่วย
3. 28 ตารางหน่วย
4. $28\sqrt{2}$ ตารางหน่วย
5. $28\sqrt{3}$ ตารางหน่วย



ตอบ 1

ใช้กฎของ cos กับ $\triangle ABC$ เพื่อหา BA \rightarrow ถ้าให้ $BA = x$ จะได้ $7^2 = x^2 + 5^2 - 2(x)(5) \cos 120^\circ$
 $49 = x^2 + 25 - 10x \left(-\frac{1}{2}\right)$

$$0 = x^2 + 5x - 24$$

$$0 = (x - 3)(x + 8)$$

$$x = 3, \cancel{>8} \quad (\text{ความยาว เป็นลบไม่ได้})$$

ลากเส้นประเพิ่มดังรูป จะได้ $EF = BA = 3$

และจะได้ $\angle CBE$ เหลือ $120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$

ใน $\triangle CBE$ จะได้ $\sin 30^\circ = \frac{CE}{BC}$

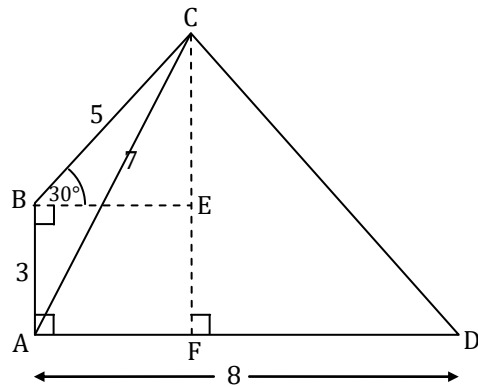
$$\frac{1}{2} = \frac{CE}{5}$$

$$2.5 = CE$$

จะได้ $CF = CE + EF = 2.5 + 3 = 5.5$

ดังนั้น พื้นที่ $\triangle ACD = \frac{1}{2} \times AD \times CF$

$$= \frac{1}{2} \times 8 \times 5.5 = 22$$



16. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $\vec{v} = (\sin 80^\circ + \sin 20^\circ)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$

และ $|\vec{v} \times \vec{i}| = \sin 70^\circ + \sin 10^\circ$ แล้ว $|\vec{v}|^2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 3 3. 5 4. 6 5. 7

ตอบ 2

ใช้สูตร $\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$ จัดรูปผลบวกของ \sin ในโจทย์ก่อน ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin 80^\circ + \sin 20^\circ &= 2 \sin \frac{80^\circ+20^\circ}{2} \cos \frac{80^\circ-20^\circ}{2} & \sin 70^\circ + \sin 10^\circ &= 2 \sin \frac{70^\circ+10^\circ}{2} \cos \frac{70^\circ-10^\circ}{2} \\ &= 2 \sin 50^\circ \cos 30^\circ & &= 2 \sin 40^\circ \cos 30^\circ \\ &= 2 \sin 50^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} & &= 2 \sin 40^\circ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \sqrt{3} \sin 50^\circ & &= \sqrt{3} \sin 40^\circ \end{aligned}$$

ดังนั้น $\vec{v} = (\sqrt{3} \sin 50^\circ)\vec{i} + a\vec{j} + b\vec{k}$ และ $|\vec{v} \times \vec{i}| = \sqrt{3} \sin 40^\circ$

$$|\vec{v}||\vec{i}| \sin \theta = \sqrt{3} \sin 40^\circ$$

$$|\vec{v}| \sin \theta = \sqrt{3} \sin 40^\circ$$

$$|\vec{v}|^2 \sin^2 \theta = 3 \sin^2 40^\circ \dots(1)$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta$$

จะเห็นว่า ถ้ามี $|\vec{v}|^2 \cos^2 \theta$ อีกตัวมาบวก จะดึง $|\vec{v}|^2$ แล้วใช้สูตร $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ เพื่อหาสิ่งที่โจทย์ถามได้
ซึ่งเราหา $|\vec{v}|^2 \cos^2 \theta$ ได้จากการดอท $\vec{v} \cdot \vec{i} = |\vec{v}||\vec{i}| \cos \theta = |\vec{v}| \cos \theta$

$$\begin{bmatrix} \sqrt{3} \sin 50^\circ \\ a \\ b \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = |\vec{v}| \cos \theta$$

$$\sqrt{3} \sin 50^\circ = |\vec{v}| \cos \theta$$

$$3 \sin^2 50^\circ = |\vec{v}|^2 \cos^2 \theta \dots(2)$$

เอา (1) + (2) จะได้ $|\vec{v}|^2 \sin^2 \theta + |\vec{v}|^2 \cos^2 \theta = 3 \sin^2 40^\circ + 3 \sin^2 50^\circ$ } โคฟังก์ชัน

$$|\vec{v}|^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 3(\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ)$$

$$|\vec{v}|^2 = 3 \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

17. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $(\log 100x)^2 + 2 \log_{100} x + 2 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{1000}$ 2. $\frac{101}{1000}$ 3. $\frac{11}{100}$ 4. 101 5. 110

ตอบ 1

$$\begin{aligned} (\log 100x)^2 + 2 \log_{100} x + 2 &= 0 \\ (\log 100 + \log x)^2 + 2 \log_{100} x + 2 &= 0 && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \log MN = \log M + \log N \\ (\log 10^2 + \log x)^2 + 2 \log_{10^2} x + 2 &= 0 && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \log_{a^b} M^N = \frac{N}{b} \log_a M \\ (2 \log 10 + \log x)^2 + \frac{2}{2} \log_{10} x + 2 &= 0 && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \log \text{ไม่มีฐาน คือ ฐาน} = 10 \\ (2 + \log x)^2 + \log x + 2 &= 0 && \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{เปลี่ยนตัวแปร ให้ } 2 + \log x = A \\ \begin{matrix} A^2 & + & A & = & 0 \\ A(A+1) & & & = & 0 \end{matrix} &&& \\ A &= & 0, -1 & & \\ 2 + \log x &= & 0, -1 & & \\ \log x &= & -2, -3 & & \\ x &= & 10^{-2}, 10^{-3} & & \end{aligned}$$

จะได้ผลบวกคำตอบ = $10^{-2} + 10^{-3} = \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} = \frac{10+1}{1000} = \frac{11}{1000}$

18. กำหนดระบบสมการ $AX = B$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$

ถ้า $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$ แล้ว $\det(A)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -8 2. -4 3. -1 4. 4 5. 8

ตอบ 5

แปลง $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right]$ กลับเป็นระบบสมการ จะได้ $\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \quad \dots(1) \\ y &= -3 \quad \dots(2) \\ z &= 5 \quad \dots(3) \end{aligned}$

แทน (2), (3) ใน (1): $x + 2(-3) + 5 = 3$
 $x = 4$

จะเอา x, y, z ไปแทนใน แล้วหา a, b, c ก็ได้ แต่ใช้กฎของครอเมอร์กับค่า x จะหา $\det(A)$ ได้โดยตรง

จาก $\left[\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & 3 \\ b & 0 & -1 & 3 \\ c & 2 & -2 & -4 \end{array} \right]$ ใช้กฎของครอเมอร์ จะได้ $x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ b & 0 & -1 \\ c & 2 & -2 \end{vmatrix}}$

$$4 = \frac{0+8+6-0+6+12}{\det(A)}$$

$$\det(A) = \frac{32}{4} = 8$$

19. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_9$ เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมีผลต่างร่วม $d > 0$
 และ $b_1, b_2, b_3, \dots, b_9$ เป็นลำดับเรขาคณิต ซึ่งมีอัตราส่วนร่วม $r > 0$

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} = d$

ข. $\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = r$

ค. $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 2^d$

ง. $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = r^2$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
 4. 3 5. 4

ตอบ 1

ลำดับเลขคณิต พจน์ที่ติดกัน จะห่างกัน $= d$ สองหลักเหมือนกัน $\rightarrow \det = 0$

ก. $\det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 - C_2} \det \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & d \\ a_4 & a_5 & d \\ a_7 & a_8 & d \end{bmatrix} \xrightarrow{C_2 - C_1} \det \begin{bmatrix} a_1 & d & d \\ a_4 & d & d \\ a_7 & d & d \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{ก. ผิด}$

ลำดับเรขาคณิต พจน์ที่ติดกัน จะคูณเพิ่มทีละ r สองแถวเหมือนกัน $\rightarrow \det = 0$

ข. $\det \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ b_4 & b_5 & b_6 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} b_1 & b_1 r & b_1 r^2 \\ b_4 & b_4 r & b_4 r^2 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = b_1 b_4 \det \begin{bmatrix} 1 & r & r^2 \\ 1 & r & r^2 \\ b_7 & b_8 & b_9 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{ข. ผิด}$

ดึง b_1 ออกจากแถว 1 , ดึง b_4 ออกจากแถว 2

- ค. $2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, 2^{a_4}, \dots$ คือ $2^{a_1}, 2^{a_1+d}, 2^{a_1+2d}, 2^{a_1+3d}, \dots$
 คือ $2^{a_1}, 2^{a_1} \cdot 2^d, 2^{a_1} \cdot 2^{2d}, 2^{a_1} \cdot 2^{3d}, \dots$
 \rightarrow เป็นลำดับเรขาคณิต (คูณเพิ่มทีละ 2^d)

ซึ่งจากข้อ ข. ถ้าเอาลำดับเรขาคณิตมาใส่เมทริกซ์ จะได้ $\det = 0$ ดังนั้น $\det \begin{bmatrix} 2^{a_1} & 2^{a_2} & 2^{a_3} \\ 2^{a_4} & 2^{a_5} & 2^{a_6} \\ 2^{a_7} & 2^{a_8} & 2^{a_9} \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{ค. ผิด}$

- ง. $b_1^2, b_2^2, b_3^2, b_4^2, \dots$ คือ $b_1^2, (b_1 r)^2, (b_1 r^2)^2, (b_1 r^3)^2, \dots$
 คือ $b_1^2, b_1^2 r^2, b_1^2 r^4, b_1^2 r^6, \dots$
 \rightarrow เป็นลำดับเรขาคณิต (คูณเพิ่มทีละ r^2)

ซึ่งจากข้อ ข. ถ้าเอาลำดับเรขาคณิตมาใส่เมทริกซ์ จะได้ $\det = 0$ ดังนั้น $\det \begin{bmatrix} b_1^2 & b_2^2 & b_3^2 \\ b_4^2 & b_5^2 & b_6^2 \\ b_7^2 & b_8^2 & b_9^2 \end{bmatrix} = 0 \rightarrow \text{ง. ผิด}$

20. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$

จำนวนสับเซต C ของ A ซึ่ง $C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 32 2. 48 3. 64 4. 80 5. 96

ตอบ 5

$C \cap B$ มีสมาชิก 2 ตัว \rightarrow แสดงว่า ต้องเลือก 2 ตัวจาก 4 ตัวใน $B = \{3, 4, 5, 6\}$ มาไว้ใน C

\rightarrow เลือกได้ $\binom{4}{2}$ แบบ

และเนื่องจาก $C \subset A$ ดังนั้น สมาชิกส่วนที่เหลือของ C ต้องมาจาก A เท่านั้น

ที่เหลือใน A คือ 1, 2, 7, 8 มี 4 ตัว \rightarrow แต่ละตัวเลือก เอา หรือ ไม่เอา ให้ C ได้ตัวละ 2 แบบ

\rightarrow เลือกได้ 2^4 แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบของ C คือ $\binom{4}{2} \times 2^4 = \frac{4 \cdot 3}{2} \times 16 = 96$

21. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ โดยมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบน

มาตรฐานเท่ากับ 60 และ 10 คะแนน ตามลำดับ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนน้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13%

แล้วนักเรียนที่สอบได้ 50 คะแนน จะมีตำแหน่งเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 15.87 2. 24.13 3. 34.13
4. 47.61 5. 50

ตอบ 1

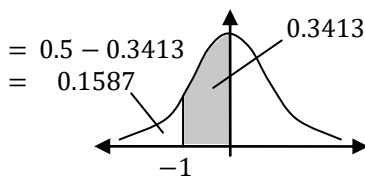
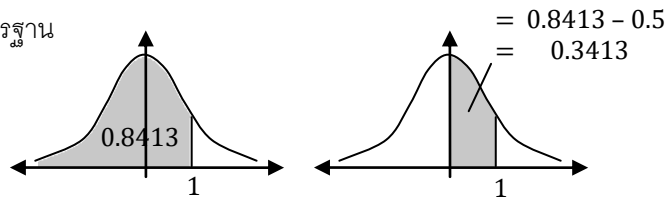
ใช้สูตร $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{s}$ แปลง 70 คะแนน เป็นค่ามาตรฐาน

จะได้ $z = \frac{70 - 60}{10} = 1$

โจทย์ให้ น้อยกว่า 70 คะแนน มี 84.13%

แสดงว่า พื้นที่ทางซ้าย $z = 1$ คือ 0.8413

จะได้ พื้นที่จากแกนกลางถึง $z = 1$ คือ $0.8413 - 0.5 = 0.3413$ ดังรูป



แปลง 50 คะแนนเป็นค่ามาตรฐาน จะได้ $z = \frac{50 - 60}{10} = -1$

จากความสมมาตร จะได้พื้นที่จากแกนกลางถึง $z = -1$ คือ 0.3413 ด้วย

ดังนั้น จะเหลือพื้นที่ทางซ้าย = $0.5 - 0.3413 = 0.1587$

ดังนั้น จะมี 15.87% ได้น้อยกว่า 50 คะแนน \rightarrow ตรงกับ $P_{15.87}$

22. ตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 40 คน เป็นดังนี้

ช่วงคะแนน	ความถี่
1 - 5	4
6 - 10	a
11 - 15	6
16 - 20	b
21 - 25	10
26 - 30	4

ถ้าข้อมูลชุดนี้มีมัธยฐานเท่ากับ 17.5 คะแนน แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบจะเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 16.50 คะแนน
2. 16.75 คะแนน
3. 17.25 คะแนน
4. 17.50 คะแนน
5. 17.75 คะแนน

ตอบ 1

สร้างช่องความถี่สะสมดังรูป

โจทย์ให้จำนวนนักเรียน = 40 คน $\rightarrow 24 + a + b = 40$

$$a = 16 - b \dots (*)$$

มัธยฐาน = 17.5 อยู่ในช่วง 16 - 20 จะได้ $L = 15.5$

$$I = 20.5 - 15.5 = 5$$

$$f_{Med} = b$$

$$F_L = 10 + a$$

ช่วงคะแนน	ความถี่	ความถี่สะสม
1 - 5	4	4
6 - 10	a	$4 + a$
11 - 15	6	$10 + a$
16 - 20	b	$10 + a + b$
21 - 25	10	$20 + a + b$
26 - 30	4	$24 + a + b$

จากสูตรมัธยฐาน $Med = L + \left(\frac{\frac{N}{2} - F_L}{f_{Med}}\right)I$

$$17.5 = 15.5 + \left(\frac{\frac{40}{2} - (10+a)}{b}\right)(5) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{จาก (*)}$$

$$2 = \left(\frac{20 - (10+16-b)}{b}\right)(5)$$

$$2b = (20 - 26 + b)(5)$$

$$2b = -30 + 5b$$

$$30 = 3b$$

$$10 = b \rightarrow \text{แทนใน (*)} : a = 16 - 10 = 6$$

หา $\bar{x} \rightarrow$ ประมาณแต่ละชั้นด้วยจุดกึ่งกลางชั้น

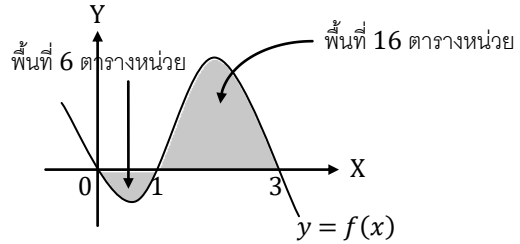
ช่วงคะแนน	ความถี่ (f_i)	จุดกึ่งกลางชั้น (x_i)	$f_i x_i$
1 - 5	4	3	12
6 - 10	6	8	48
11 - 15	6	13	78
16 - 20	10	18	180
21 - 25	10	23	230
26 - 30	4	28	112
			660

$$\text{จะได้ } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{660}{40} = 16.5$$

23. ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีกราฟดังรูป

แล้ว $\int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 6
2. 10
3. 12
4. 16
5. 32



ตอบ 3

แบ่งการอินทิเกรตเป็นช่วง เพื่อให้รู้เครื่องหมายบวกลบ แล้วใช้สมบัติ $|a| = \begin{cases} a & , a \geq 0 \\ -a & , a < 0 \end{cases}$ ถอดค่าสัมบูรณ์

$$\int_0^3 (|f(x)| - f(x)) dx = \int_0^1 (|f(x)| - f(x)) dx + \int_1^3 (|f(x)| - f(x)) dx$$

จากกราฟ ช่วง $(0, 1) \rightarrow f(x)$ เป็นลบ ช่วง $(1, 3) \rightarrow f(x)$ เป็นบวก
 ดังนั้น $|f(x)| = -f(x)$ ดังนั้น $|f(x)| = f(x)$

$$= \int_0^1 (-f(x) - f(x)) dx + \int_1^3 (f(x) - f(x)) dx$$

$$= \int_0^1 -2f(x) dx + \int_1^3 0 dx$$

จากกราฟ (พื้นที่ใต้แกน X จะเป็นลบ) $\left\{ \begin{aligned} &= -2 \int_0^1 f(x) dx + 0 \\ &= -2(-6) &= 12 \end{aligned} \right.$

24. ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม และกราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

แล้ว $\int_2^5 (2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)) dx$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 94
2. 104
3. 158
4. 258
5. 264

ตอบ 4

โจทย์ให้กราฟของ $y = f(x)$ ตัดกับกราฟของ $y = 3x - 4$ ที่ $x = 2$ และ $x = 5$

ที่ $x = 2$ จะได้ $y = 3(2) - 4 = 2$ แสดงว่า $f(2) = 2$
 ที่ $x = 5$ จะได้ $y = 3(5) - 4 = 11$ และ $f(5) = 11$ ด้วย ...(*)

พิจารณาค่าที่โจทย์ถาม จะเห็นว่า มี $2x$ และ $x^2 - 1 \rightarrow$ ถ้าให้ $u = x^2 - 1$ จะได้ $u' = 2x$

ให้ $v = f(x)$ จะได้ $2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x) = (u')(v) + (u)(v')$
 $= (uv)'$) สูตรดิฟผลคูณ

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } \int_2^5 (2xf(x) + (x^2 - 1)f'(x)) dx &= uv \Big|_2^5 \\ &= (x^2 - 1)f(x) \Big|_2^5 \\ &= (5^2 - 1)f(5) - (2^2 - 1)f(2) \\ &= (24)(11) - (3)(2) \quad \text{จาก (*)} \\ &= 258 \end{aligned}$$

25. กำหนดให้ a_n เป็นลำดับเลขคณิต ซึ่งมี $a_1 = 2$ และผลต่างร่วมเท่ากับ $-\frac{2}{9}$

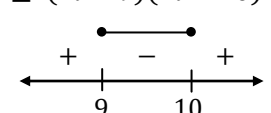
ถ้า $b_n = 2^{a_n}$ แล้วจำนวนเต็มบวก m ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_m \geq 1024$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 7 2. 8 3. 9 4. 10 5. 11

ตอบ 3

$$\begin{aligned}
 b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \dots \cdot b_m &\geq 1024 \\
 2^{a_1} \cdot 2^{a_2} \cdot 2^{a_3} \cdot \dots \cdot 2^{a_m} &\geq 1024 \\
 2^{a_1+a_2+a_3+\dots+a_m} &\geq 2^{10} \\
 a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_m &\geq 10 \\
 \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) &\geq 10 \\
 \frac{m}{2}\left(2(2) + (m-1)\left(-\frac{2}{9}\right)\right) &\geq 10 \\
 2m - \frac{m^2-m}{9} &\geq 10 \\
 18m - (m^2 - m) &\geq 90 \\
 0 &\geq m^2 - 19m + 90 \\
 0 &\geq (m-9)(m-10)
 \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} \text{จาก } b_n = 2^{a_n} \\ \text{ฐาน 2 เหมือนกัน คูณกัน} \rightarrow \text{เอาเลขชี้กำลังมาบวกกัน} \\ \text{ตัดฐาน 2 ทั้งสองข้าง (ฐาน } > 1 \rightarrow \text{ไม่ต้องกลับ มากกว่า } \leftrightarrow \text{น้อยกว่า)} \\ \text{จากสูตรอนุกรมเลขคณิต} \\ \text{โจทย์ให้ } a_1 = 2, d = -\frac{2}{9} \end{array} \right\}$



จะได้ $m \in [9, 10]$
 \rightarrow จำนวนเต็มบวก m น้อยสุด = 9

26. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{211}{9}$

และ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 27$ แล้วจำนวนจริง x ซึ่งทำให้ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ มีค่าน้อยที่สุด เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{64}{81}$ 2. 1 3. $\frac{16}{9}$ 4. $\frac{32}{27}$ 5. $\frac{64}{27}$

ตอบ 4

จากสูตรอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ จะได้ $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \frac{a_1}{1-r} = 27 \dots (*)$

และจากสูตรอนุกรมเรขาคณิต จะได้

$$\begin{aligned}
 a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 &= \frac{a_1(1-r^5)}{1-r} = \frac{211}{9} \\
 27(1-r^5) &= \frac{211}{9} \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก } (*) \\ \text{แทนใน } (*) \text{ จะได้ } \frac{a_1}{1-\frac{2}{3}} = 27 \\ a_1 &= 27\left(1-\frac{2}{3}\right) = 9 \end{array} \right\} \\
 1-r^5 &= \frac{211}{243} \\
 \frac{32}{243} &= r^5 \\
 \frac{2}{3} &= r
 \end{aligned}$$

จากสมบัติของค่ากลางในเรียงสัติ $\sum_{i=1}^{11} |a_i - x|$ จะมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x =$ มัธยฐานของข้อมูล a_1, a_2, \dots, a_{11}

มีข้อมูล 11 ตัว \rightarrow มัธยฐานอยู่ตัวที่ $\frac{N+1}{2} = \frac{11+1}{2} = 6 \rightarrow$ มัธยฐาน = a_6

ซึ่งจากสูตรลำดับเรขาคณิต $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $a_6 = a_1 r^{6-1} = 9\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^3} = \frac{32}{27}$

27. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามดีกรีสาม ซึ่งมีค่าวิกฤตที่ $x = 4$ และ $x = -4$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f''(-4) \cdot f''(4) < 0$

ข. $f(4\sqrt{3}) = 2f(0)$

ค. $f(-4) + f(4) = 2f(0)$

ง. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของ $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$ เท่ากับ $f(0)$

จำนวนข้อความที่ถูกเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก) 2. 1 3. 2
4. 3 5. 4

ตอบ 4

จาก $f(x)$ มีดีกรี 3 จะได้ $f'(x)$ มีดีกรี 2

ค่าวิกฤตเกิดที่ $x = 4$ และ $x = -4$ ดังนั้น สมการ $f'(x) = 0$ มีคำตอบคือ 4, -4

จะได้ $f'(x)$ ต้องอยู่ในรูป $a(x + 4)(x - 4)$

$= ax^2 - 16a$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ ที่ $a \neq 0$

ดิฟต่อจะได้ $f''(x) = 2ax$ อินทิเกรตจะได้ $f(x) = \frac{ax^3}{3} - 16ax + c$

ก. $f''(-4) \cdot f''(4) = 2a(-4) \cdot 2a(4) = -64a^2 < 0 \rightarrow$ ก. ถูก
(เมื่อ $a \neq 0 \rightarrow a^2$ จะเป็นบวกเสมอ)

ข. $f(4\sqrt{3}) = \frac{a(4\sqrt{3})^3}{3} - 16a(4\sqrt{3}) + c$ $2f(0) = 2\left(\frac{a(0^3)}{3} - 16a(0) + c\right)$
 $= 64\sqrt{3}a - 64\sqrt{3}a + c$ $= 2(c)$
 $= c$ $= 2c$

จะเห็นว่า $c \neq 2c$ ดังนั้น $f(4\sqrt{3}) \neq 2f(0) \rightarrow$ ข. ผิด

ค. $f(-4) + f(4) = \frac{a(-4)^3}{3} - 16a(-4) + c + \frac{a(4)^3}{3} - 16a(4) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$

 เท่ากับ $2f(0)$ ที่เคยทำ
 ในข้อ ข. \rightarrow ค. ถูก

ง. ค่าเฉลี่ย = $\frac{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)}{5}$

สังเกตว่า x ทุกตัวที่อยู่ใน $f(x) = \frac{ax^3}{3} - 16ax + c$ ถูกยกกำลังคือ (x^3, x^1)

ดังนั้น $f(k)$ กับ $f(-k)$ จะตัดกันได้เสมอ (เหมือนกับ $f(-4) + f(4)$ ในข้อ ค.)

$f(-2) + f(2) = \frac{a(-2)^3}{3} - 16a(-2) + c + \frac{a(2)^3}{3} - 16a(2) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$

$f(-1) + f(1) = \frac{a(-1)^3}{3} - 16a(-1) + c + \frac{a(1)^3}{3} - 16a(1) + c \rightarrow$ ตัดกันเหลือ $c + c = 2c$

และ $f(0) = \frac{a(0^3)}{3} - 16a(0) + c = c$

ดังนั้น $\frac{f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)}{5} = \frac{f(-2) + f(2) + f(-1) + f(1) + f(0)}{5}$
 $= \frac{2c + 2c + c}{5} = \frac{5c}{5} = c = f(0) \rightarrow$ ง. ถูก

28. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวก m ที่ทำให้ $\frac{2^{100}}{2^{100}-m}$ เป็นจำนวนเต็มบวก แล้วผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $99(2^{99})$
2. $100(2^{99}) + 1$
3. $99(2^{100}) + 1$
4. $100(2^{100})$
5. $101(2^{101})$

ตอบ 3

$2^{100} - m$ ต้องเป็นตัวประกอบที่เป็นบวก ของ 2^{100}

ตัวประกอบที่เป็นบวกของ 2^{100} จะมี $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{99}, 2^{100}$

ดังนั้น $2^{100} - m = 2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^{99}, 2^{100}$

$m = 2^{100} - 2^0, 2^{100} - 2^1, 2^{100} - 2^2, \dots, 2^{100} - 2^{99}, 2^{100} - 2^{100}$

ใช้ไม่ได้ (m ต้องเป็นบวก)

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น ผลบวก } m &= (2^{100} - 2^0) + (2^{100} - 2^1) + (2^{100} - 2^2) + \dots + (2^{100} - 2^{99}) \\ &= 100(2^{100}) - (2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{99}) \quad \leftarrow 0, 1, \dots, 99 \text{ มี } 100 \text{ ตัว} \\ &= 100(2^{100}) - \frac{(2^{99}(2) - 2^0)}{2-1} \\ &= 100(2^{100}) - (2^{100} - 1) \\ &= 100(2^{100}) - 2^{100} + 1 \\ &= 99(2^{100}) + 1 \end{aligned}$$

อนุกรมเรขาคณิต $S_n = \frac{a_n r - a_1}{r - 1}$

29. กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ และ $B = \{k \in A \mid \left(\frac{\cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}}\right)^k = i\}$ โดยที่ $i^2 = -1$

จำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 5
2. 7
3. 9
4. 11
5. 13

ตอบ 2

จัดรูปให้เป็นเชิงซ้อนก่อน

เปลี่ยนให้เครื่องหมายตรงกลางเป็นบวก เปลี่ยนมุมให้ตรงกับมุมของ sin

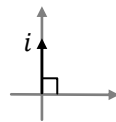
$$\begin{aligned} \cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8} &= \cos \frac{5\pi}{8} + i \sin \left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \cos \left(-\frac{5\pi}{8}\right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{8}\right) = \text{cis} \left(-\frac{5\pi}{8}\right) \\ \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} &= \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \cos \left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \text{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$\sin(-\theta) = -\sin \theta$
 $\cos(-\theta) = \cos \theta$

ดังนั้น $\frac{\cos \frac{5\pi}{8} - i \sin \frac{5\pi}{8}}{\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}} = \frac{\text{cis} \left(-\frac{5\pi}{8}\right)}{\text{cis} \left(-\frac{3\pi}{4}\right)} = \text{cis} \left(-\frac{5\pi}{8} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \text{cis} \left(-\frac{5\pi}{8} + \frac{6\pi}{8}\right) = \text{cis} \frac{\pi}{8}$

แทนในสมการเงื่อนไขของ B จะได้ $\left(\text{cis} \frac{\pi}{8}\right)^k = i$

$$\begin{aligned} \text{cis} \frac{k\pi}{8} &= \text{cis} \frac{\pi}{2} \\ \frac{k\pi}{8} &= 2n\pi + \frac{\pi}{2} \quad ; \text{ เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ k &= 16n + 4 \end{aligned}$$



เงื่อนไขของ B คือ $k \in A$ ดังนั้น $1 \leq 16n + 4 \leq 100$

$$-\frac{3}{16} \leq n \leq \frac{96}{16}$$

$$-\frac{3}{16} \leq n \leq 6 \rightarrow n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \rightarrow \text{มีทั้งหมด } 7 \text{ จำนวน}$$

30. กำหนดให้ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in S \right\}$

ถ้าสุ่มเมทริกซ์จากเซต W มา 1 เมทริกซ์ แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ B ซึ่ง $AB = BA$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{17}{625}$ 2. $\frac{19}{625}$ 3. $\frac{21}{625}$ 4. $\frac{23}{625}$ 5. $\frac{25}{625}$

ตอบ 2

ให้ $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ แทนในเงื่อนไข $AB = BA$ จะได้ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} c & d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & a+b \\ -d & c+d \end{bmatrix}$$

เทียบสมาชิกตำแหน่งต่อตำแหน่ง จะได้ระบบสมการ $c = -b \dots(1)$

$d = a + b \dots(2)$

$-a + c = -d \dots(3)$

$-b + d = c + d \dots(4)$

จะเห็นว่า (3) ซ้ำกับ (1) และ (2) (แทน $c = -b$ จาก (1) ลงใน (3) จะได้ $-a - b = -d$
 $a + b = d \rightarrow$ ซ้ำกับ (2))

และ (4) ซ้ำกับ (1) (เอา (4) มาตัด d ทั้งสองข้าง จะได้เหมือน (1))

ดังนั้น สนใจแค่ (1) และ (2) ก็พอ เพราะถ้า (1) กับ (2) จริง จะทำให้ (3) และ (4) จริงโดยอัตโนมัติ

และจาก $a, b, c, d \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ จะได้ a, b, c, d ที่สอดคล้องกับ (1) และ (2) ดังนี้

กรณี $b = -2$: จาก (1) จะได้ $c = 2$ และจาก (2) จะได้ $d = a - 2$

$$\left. \begin{array}{l} -2 = 0 - 2 \\ -1 = 1 - 2 \\ 0 = 2 - 2 \end{array} \right\} 3 \text{ แบบ}$$

กรณี $b = -1$: $\rightarrow c = 1$ และ $d = a - 1$ กรณี $b = 0$: $\rightarrow c = 0$ และ $d = a$

$$\left. \begin{array}{l} -2 = -1 - 1 \\ -1 = 0 - 1 \\ 0 = 1 - 1 \\ 1 = 2 - 1 \end{array} \right\} 4 \text{ แบบ} \qquad \left. \begin{array}{l} -2 = -2 \\ -1 = -1 \\ 0 = 0 \\ 1 = 1 \\ 2 = 2 \end{array} \right\} 5 \text{ แบบ}$$

กรณี $b = 1$: $\rightarrow c = -1$ และ $d = a + 1$ กรณี $b = 2$: $\rightarrow c = -2$ และ $d = a + 2$

$$\left. \begin{array}{l} -1 = -2 + 1 \\ 0 = -1 + 1 \\ 1 = 0 + 1 \\ 2 = 1 + 1 \end{array} \right\} 4 \text{ แบบ} \qquad \left. \begin{array}{l} 0 = -2 + 2 \\ 1 = -1 + 2 \\ 2 = 0 + 2 \end{array} \right\} 3 \text{ แบบ}$$

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ = $3 + 4 + 5 + 4 + 3 = 19$ แบบ $\rightarrow n(E) = 19$

หาจำนวนแบบทั้งหมด $n(S) \rightarrow a, b, c, d$ แต่ละตัวเป็น $-2, -1, 0, 1, 2$ ได้ตัวละ 5 แบบ

ดังนั้น $n(S) = 5^4 = 625 \rightarrow$ จะได้ความน่าจะเป็น = $\frac{19}{625}$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ และเฉลยคำตอบ จาก อ.ปิ่ง GTRmath

ขอบคุณ คุณ Chonlakorn Chiewpanich

และ คุณครูเบิร์ด จาก กวดวิชาคณิตศาสตร์ครูเบิร์ด ย่านบางแค 081-8285490

และ คุณ Potae Kitti ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร

ขอบคุณ คุณ คณิต มงคลพิทักษ์สุข (นาย) ผู้เขียน Math E-book สำหรับเฉลยข้อ 16.