ความสัมพันธ์เชิงพังก์ชัน

math center

25 Aug 2014

สารบัญ

ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน

ในเรื่องนี้ เราจะเรียนวิธีสร้างสมการความสัมพันธ์ ระหว่างสองสิ่งที่เราสนใจ
โดยโจทย์จะให้คู่ตัวเลขมาหลายๆคู่ แล้วให้เราหาว่าตัวเลขในทุกๆคู่สัมพันธ์กันด้วยสมการอะไร
ตัวอย่าง เช่น ถ้าเรามีข้อมูลคะแนนสอบ วิชาคณิตศาสตร์ และวิชาฟิสิกส์ ของนักเรียน 8 คน ดังนี้

	นาย ก	นาย ข	นาย ค	นาย ง	นาย จ	นาย ฉ	นาย ช	นาย ซ
คณิตศาสตร์	28	43	25	72	78	72	90	91
ฟิสิกส์	26	35	24	53	60	54	71	68

จากการดูข้อมูลแบบคร่าวๆ จะเห็นว่าคะแนนคณิตศาสตร์ กับคะแนนฟิสิกส์ มีความสัมพันธ์กันอยู่นิดๆ
ซึ่งถ้าเราหาสมการความสัมพันธ์นี้ออกมาได้ เราจะสามารถทำนายคะแนนวิชาหนึ่ง เมื่อทราบคะแนนอีกวิชาได้
เช่น ถ้าเรารู้ว่า นาย ฌ ได้คณิตศาสตร์กี่คะแนน ก็จะพอทำนายได้ว่า นาย ฌ น่าจะได้ฟิสิกส์ซักกี่คะแนน

อย่างไรก็ตาม สมการความสัมพันธ์ที่ได้ จะไม่สอดคล้องตรงเป๊ะกับข้อมูลทุกคู่ แต่เราจะหาอันที่สอดคล้องมากที่สุด
การหาสมการความสัมพันธ์ จะมีขั้นตอนดังนี้

1. เลือก ตัวแปรอิสระ - ตัวแปรตาม
2. เลือกรูปกราฟ และสร้างระบบสมการ
3. แก้ระบบสมการที่สร้างในข้อ 2

<u>เลือกตัวแปรอิสระ - ตัวแปรตาม</u>

ในการหาสมการความสัมพันธ์ ก่อนอื่น เราต้องเลือกก่อน ว่าเราจะ “ใช้อะไร ทำนายอะไร”

- ตัวที่เราใช้ทำนาย จะเรียกว่า “ตัวแปรอิสระ” นิยมแทนด้วยตัวแปร x
- ตัวที่เราจะทำนาย จะเรียกว่า “ตัวแปรตาม” นิยมแทนด้วยตัวแปร y

เช่น ถ้าเราต้องการใช้คะแนนคณิตศาสตร์ ทำนายคะแนนฟิสิกส์

- คะแนนฟิสิกส์ $=$ ตัวแปรตาม $= y$
- คะแนนคณิตศาสตร์ $=$ ตัวแปรอิสระ $= x$

ระวังให้ดี !
สมการที่ใช้ทำนายฟิสิกส์ จากคณิตศาสตร์
จะไม่เหมือนกับ
สมการที่ใช้ทำนายคณิตศาสตร์ จากฟิสิกส์

<u>เลือกรูปกราฟ และสร้างระบบสมการ</u>

ในขั้นตอนนี้ เราต้องพิจารณาข้อมูลที่มี ว่าสอดคล้องกับรูปกราฟไหนมากที่สุด โดยจะมีให้เลือก 3 แบบ คือ

- เส้นตรง
- พาราโบลา
- เอกซ์โพเนนเชียล

รายละเอียดของแต่ละรูปกราฟ จะพูดถึงในหัวข้อถัดไป

รูปกราฟเส้นตรง

รูปกราฟนี้ เหมาะกับกรณีที่คู่ตัวเลข เพิ่มขึ้นหรือลดลง อย่างเป็นสัดส่วนกัน

รูปสมการ: $\hat{Y} = a + bX$

หาค่า a และ b จากการแก้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} y_i &= an + b\sum_{i=1}^{n} x_i & \quad ...(1) \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i &= a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \quad ...(2) \end{aligned}$$

จะเห็นว่า การสร้างระบบสมการดังกล่าว เราต้องหาค่าของ $\underline{\sum_{i=1}^{n} y_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} x_i} \,,\, \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,\, \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

คูณ x_i

เมื่อได้ระบบสมการแล้ว เราจะเอาสองสมการมาบวกลบกัน ให้ a หรือ b ตัดกันหมดไป ก็ได้
หรือจะใช้กฎของเครเมอร์ ที่เรียนมาในเรื่องเมทริกซ์ ก็ได้

- ระบบสมการ $\begin{aligned} C_1 &= A_1 a + B_1 b \\ C_2 &= A_2 a + B_2 b \end{aligned}$ จะมีคำตอบคือ $a = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ และ $b = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$

<u>ตัวอย่าง</u> จากข้อมูลคะแนนสอบต่อไปนี้ จงหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชัน ที่มีรูปสมการเป็น $\hat{Y} = a + bX$ เพื่อทำนายคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ จากคะแนนวิชาฟิสิกส์ ถ้า นาย ฌ ได้คะแนนวิชาฟิสิกส์ 80 คะแนน จงทำนายว่า นาย ฌ จะได้คะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่าไร

	นาย ก	นาย ข	นาย ค	นาย ง	นาย จ	นาย ฉ	นาย ช	นาย ซ
คณิตศาสตร์	28	43	25	72	78	72	90	91
ฟิสิกส์	26	35	24	53	60	54	71	68

<u>วิธีทำ</u> จะทำนายวิชาคณิตศาสตร์ จากวิชาฟิสิกส์
ดังนั้น ต้องให้คณิตศาสตร์เป็น y และให้ฟิสิกส์เป็น x

ข้อนี้ โจทย์ให้ใช้รูปกราฟเส้นตรง $\hat{Y} = a + bX$

เราต้องหา $\sum_{i=1}^{8} y_i \,,\, \sum_{i=1}^{8} x_i \,,\, \sum_{i=1}^{8} x_i y_i \,,\, \sum_{i=1}^{8} x_i^2$

	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2
	28	26	728	676
	43	35	1505	1225
	25	24	600	576
	72	53	3816	2809
	78	60	4680	3600
	72	54	3888	2916
	90	71	6390	5041
	91	68	6188	4624
$\sum$	499	391	27795	21467

จะได้ระบบสมการ คือ

$$\begin{aligned} 499 &= 8a + 391b & \quad ...(1) \\ 27795 &= 391a + 21467b & \quad ...(2) \end{aligned}$$

ถ้าเลขน้อยๆ จะแก้แบบปกติก็ได้ คือเอา $391\,(1) - 8\,(2)$ เพื่อให้ a หักกัน พอได้ b ก็เอากลับไปแทนหา a

หรือจะใช้ กฎของเครเมอร์ที่เรียนมาในเรื่องเมทริกซ์ ก็ได้ จะได้

- $a = \dfrac{\begin{vmatrix} 499 & 391 \\ 27795 & 21467 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 391 \\ 391 & 21467 \end{vmatrix}} = \dfrac{(499)(21467)-(27795)(391)}{(8)(21467)-(391)(391)} = -8.26$
- $b = \dfrac{\begin{vmatrix} 8 & 499 \\ 391 & 27795 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 391 \\ 391 & 21467 \end{vmatrix}} = \dfrac{(8)(27795)-(391)(499)}{(8)(21467)-(391)(391)} = 1.45$

ดังนั้น สมการที่ใช้ทำนาย คือ $\hat{Y} = -8.26 + 1.45X$

และ นาย ฌ น่าจะได้คะแนนคณิตศาสตร์ $= -8.26 + (1.45)(80) = 107.74$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1.

A	2	3	5
B	2	4	1

จากข้อมูลที่กำหนด จงหาคำตอบในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. สมการเพื่อใช้ทำนาย A จากค่า B
2. สมการเพื่อใช้ทำนาย B จากค่า A
3. ค่า A เมื่อ $B = 1$
4. ค่า B เมื่อ $A = 4$

2. กำหนดให้ $\sum_{i=1}^{5} x_i = 2$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 27$, $\sum_{i=1}^{5} y_i = 11$, $\sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 30$, $\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 16$

ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x และ y เป็นความสัมพันธ์เชิงเส้นแล้ว จงทำนายค่า x เมื่อกำหนดให้ $y = 5$

3. กำหนดให้ข้อมูล X และ Y มีความสัมพันธ์กันดังตารางต่อไปนี้

X	1	2	3	3
Y	1	3	4	6

ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$

แล้วเมื่อ $X = 10$ ค่าของ Y เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 52)/2-25]

4. กำหนดให้ความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูลที่กำหนดให้ต่อไปนี้เป็นเส้นตรง

x	1	2	3	4	5
y	3	4	6	7	10

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/23]

1. ถ้าสมการของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างข้อมูล คือ $y = mx + c$ แล้ว $m + c$ เท่ากับ 2.6
2. ถ้า $x = 15$ แล้ว $y = 26.4$

5. ตารางต่อไปนี้ เป็นความสัมพันธ์ระหว่าง x กับ y

x	0	1	2	3
y	1	0.8	0.8	0.6

ให้ $y = ax + b$ เป็นสมการที่แสดงความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่าง x กับ y โดย x เป็นตัวแปรอิสระ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/22]

1. $b = a + 1.1$
2. ถ้า $x = 8$ แล้ว $y = 0.02$

6. จากการสำรวจคะแนนสอบของนักเรียน 6 คน ที่มีคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (x_i) และคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (y_i) ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์เท่ากับ 9 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 6 คะแนน และ $\sum_{i=1}^{6} x_i y_i = 428$, $\sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 694$ และ $\sum_{i=1}^{6} y_i^2 = 268$ ถ้าคะแนนสอบวิชาทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง และนักเรียนคนหนึ่งที่มีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 7.5 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ โดยประมาณควรจะมีค่าเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/47]

7. ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันของข้อมูลชุดหนึ่งระหว่างตัวแปร x และ y มีกราฟเป็นเส้นตรง โดยที่

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 32 \ , \ \sum_{i=1}^{8} y_i = 16 \ , \ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 65$$

$$\sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 140 \ , \ \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 34$$

ถ้า $x = 8$ แล้ว จะประมาณค่า y ได้เท่าใด *(ตอบเป็นทศนิยมสองตำแหน่ง)* [A-NET 50/10]

8. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (X) และวิชาฟิสิกส์ (Y) ของนักเรียน 100 คนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ได้พจน์ต่างๆที่ใช้ในการคำนวณค่าคงตัวจากสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่มีรูปสมการเป็น $Y = a + bX$ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{100} y_i = 1000 \;,\; \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 2000 \;,\; \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4000$$

ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายสมชายเท่ากับ 15 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (โดยประมาณ) ของนายสมชายเท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/45]

9. ข้อมูลความสูง (เซนติเมตร) และน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของนักเรียนหญิง 4 คน ดังนี้

นักเรียนหญิง	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4
ความสูง (เซนติเมตร)	150	152	154	156
น้ำหนัก (กิโลกรัม)	45	45	48	50

ถ้าส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียนมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันเป็นเส้นตรง $y = a + 0.9x$ เมื่อ x เป็นส่วนสูง และ y เป็นน้ำหนัก แล้ว นักเรียนที่มีส่วนสูง 155 เซนติเมตร จะมีน้ำหนักกี่กิโลกรัม [PAT 1 (มี.ค. 54)/47]

10. ถ้าในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบวิชาที่หนึ่ง (x) และวิชาที่สอง (y) ของนักเรียนชั้นหนึ่ง จำนวน 10 คน ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ได้พจน์ต่างๆที่ใช้ในการคำนวณค่าคงตัวจากสมการปกติ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{10} x_i = 50 \ , \quad \sum_{i=1}^{10} y_i = 50 \ , \quad \sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 288$$

$$\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 304 \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 284$$

ได้สมการประมาณคะแนนสอบวิชาที่สองจากคะแนนสอบวิชาที่หนึ่งเป็น $\hat{y} = 1.5 + 0.7x$ (ใช้ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง) ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [A-NET 51/25]

1. ถ้านักเรียนสองคนในกลุ่มนี้มีคะแนนสอบวิชาที่หนึ่งต่างกัน 2 คะแนน แล้ว คะแนนสอบวิชาที่สองของนักเรียนสองคนนี้ต่างกันประมาณ 1.4 คะแนน
2. เมื่อทราบคะแนนสอบวิชาที่สอง จะประมาณคะแนนสอบวิชาที่หนึ่งของนักเรียนในกลุ่มนี้ได้ จากสมการ $\hat{x} = 1.4y - 2.1$

11. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 (X) และปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (Y) จากตัวอย่างสารอาหารจำนวน 100 ตัวอย่าง พบว่าความแปรปรวนของปริมาณสารชนิดที่ 1 มีค่าเท่ากับ 1.75 , ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของปริมาณสารชนิดที่ 2 มีค่าเท่ากับ 0.5 , $\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 100$ และ $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 200$ ถ้าสมการปกติของความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันดังกล่าวอยู่ในรูป $Y = a + bX$ แล้ว เมื่อพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 อยู่ 4 หน่วย จะพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (โดยประมาณ) เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/45]

รูปกราฟพาราโบลา

รูปกราฟนี้ เหมาะกับกรณีที่ตัวเลขมีจุดวกกลับ กล่าวคือ เพิ่มขึ้นถึงจุดหนึ่งแล้วลด หรือ ลดลงถึงจุดหนึ่งแล้วเพิ่ม

รูปสมการ: $\hat{Y} = a + bX + cX^2$

หาค่า a , b , และ c จากการแก้ระบบสมการ

$$
\begin{array}{rcccccccl}
\sum_{i=1}^{n} y_i & = & an & + & b\sum_{i=1}^{n} x_i & + & c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & & ...(1) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i y_i & = & a\sum_{i=1}^{n} x_i & + & b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & + & c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 & & ...(2) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i & = & a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & + & b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 & + & c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 & & ...(3)
\end{array}
$$

การสร้างระบบสมการนี้ เราต้องหาค่าของ $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^4$

คูณ x_i คูณ x_i

เมื่อได้ระบบสมการแล้ว เราจะเอาสองสมการมาบวกลบกัน ให้ a หรือ b ตัดกันหมดไป ก็ได้

หรือจะใช้กฎของเครเมอร์ ที่เรียนมาในเรื่องเมทริกซ์ ก็ได้

- ระบบสมการ
$$
\begin{aligned}
D_1 &= A_1 a + B_1 b + C_1 c \\
D_2 &= A_2 a + B_2 b + C_2 c \\
D_3 &= A_3 a + B_3 b + C_3 c
\end{aligned}
$$

จะมีคำตอบคือ
$$
a = \frac{\begin{vmatrix} D_1 & B_1 & C_1 \\ D_2 & B_2 & C_2 \\ D_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \quad , \quad b = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & D_1 & C_1 \\ A_2 & D_2 & C_2 \\ A_3 & D_3 & C_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}} \quad , \quad c = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}}
$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในรูป $\hat{Y} = a + bX + cX^2$ เพื่อทำนาย y เมื่อทราบ x จากข้อมูลต่อไปนี้

x	-3	2	9	12
y	1	2	3	4

<u>วิธีทำ</u> รูปกราฟพาราโบลา ต้องใช้ $\sum_{i=1}^{4} y_i$, $\sum_{i=1}^{4} x_i$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{4} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^3$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i$, $\sum_{i=1}^{4} x_i^4$

	y_i	x_i	x_i^2	$x_i y_i$	x_i^3	$x_i^2 y_i$	x_i^4
	1	-3	9	-3	-27	9	81
	2	2	4	4	8	8	16
	3	9	81	27	729	243	6561
	4	12	144	48	1728	576	20736
$\sum$	10	20	238	76	2438	836	27394

ดังนั้น จะได้ระบบสมการ คือ

$$
\begin{array}{rcrcrcrl}
10 & = & 4a & + & 20b & + & 238c & ...(1) \\
76 & = & 20a & + & 238b & + & 2438c & ...(2) \\
836 & = & 238a & + & 2438b & + & 27394c & ...(3)
\end{array}
$$

จะเอาสมการมาบวกลบกันก็ได้ แต่ต้องคิดเลขเยอะหน่อย
หรือจะใช้กฎของเครเมอร์ ซึ่งก็คิดเลขเยอะเหมือนกัน จะได้

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 20 & 238 \\ 76 & 238 & 2438 \\ 836 & 2438 & 27394 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 20 & 238 \\ 20 & 238 & 2438 \\ 238 & 2438 & 27394 \end{vmatrix}} \qquad b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 10 & 238 \\ 20 & 76 & 2438 \\ 238 & 836 & 27394 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 20 & 238 \\ 20 & 238 & 2438 \\ 238 & 2438 & 27394 \end{vmatrix}} \qquad c = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 20 & 10 \\ 20 & 238 & 76 \\ 238 & 2438 & 836 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 20 & 238 \\ 20 & 238 & 2438 \\ 238 & 2438 & 27394 \end{vmatrix}}$$

$$= 1.51 \qquad\qquad = 0.16 \qquad\qquad = 0.003$$

ดังนั้น สมการที่ใช้ทำนาย คือ $\hat{Y} = 1.51 + 0.16X + 0.003X^2$ #

รูปกราฟเอกซ์โพเนนเชียล

รูปกราฟนี้ เหมาะกับกรณีที่ x เปลี่ยนนิดเดียว แต่ y เปลี่ยนสุดๆแบบทวีคูณ

รูปสมการ: $\hat{Y} = ab^X$

หาค่า a และ b จากการแก้ระบบสมการ

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \log y_i &= (\log a)(n) + (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i && \ldots(1) \\
\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i &= (\log a)\sum_{i=1}^{n} x_i + (\log b)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 && \ldots(2)
\end{aligned}
$$

โดยจะแก้สมการ หา $\log a$ กับ $\log b$ ออกมาก่อน แล้วค่อยหา a กับ b ต่อ

จะเห็นว่า ระบบสมการของรูปกราฟเอกซ์โพเนนเชียล จะคล้ายกับ รูปกราฟเส้นตรง เพียงแค่เปลี่ยน y_i เป็น $\log y_i$

ดังนั้น ในเรื่องนี้ เรานิยมสร้างช่อง $\log y$ เพิ่มอีกช่อง

การสร้างระบบสมการนี้ เราต้องหาค่าของ $\underline{\sum_{i=1}^{n} \log y_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i} \ , \ \underline{\sum_{i=1}^{n} x_i \log y_i \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

คูณ x_i

เมื่อได้ระบบสมการแล้ว เราจะเอาสองสมการมาบวกลบกัน ให้ $\log a$ หรือ $\log b$ ตัดกันหมดไป ก็ได้

หรือจะใช้กฎของเครเมอร์ ที่เรียนมาในเรื่องเมทริกซ์ ก็ได้

- ระบบสมการ $\begin{aligned} C_1 &= A_1 a + B_1 b \\ C_2 &= A_2 a + B_2 b \end{aligned}$ จะมีคำตอบคือ $a = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ และ $b = \dfrac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันในรูป $\hat{Y} = ab^X$ เพื่อทำนาย y เมื่อทราบ x จากข้อมูลต่อไปนี้

x	1	2	3	4	5
y	1	3	6	14	20

<u>วิธีทำ</u> รูปกราฟเอกซ์โพเนนเชียล ต้องสร้างช่อง $\log y$ แล้วหา $\sum_{i=1}^{5} \log y_i$, $\sum_{i=1}^{5} x_i \log y_i$, $\sum_{i=1}^{5} x_i$, $\sum_{i=1}^{5} x_i^2$

	y_i	$\log y_i$	x_i	$x_i \log y_i$	x_i^2
	1	0	1	0	1
	3	0.48	2	0.95	4
	6	0.78	3	2.33	9
	14	1.15	4	4.58	16
	20	1.30	5	6.51	25
$\sum$	44	3.7	15	14.4	55

ดังนั้น จะได้ระบบสมการคือ

$$
\begin{aligned}
3.7 &= 5\log a + 15\log b && \ldots(1) \\
14.4 &= 15\log b + 55\log b && \ldots(2)
\end{aligned}
$$

ใช้ กฎของเครเมอร์ แก้ระบบสมการ จะได้

- $\log a = \dfrac{\begin{vmatrix} 3.7 & 15 \\ 14.4 & 55 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix}} = -0.25 \qquad \rightarrow a = 10^{-0.25} = 0.56$
- $\log b = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 3.7 \\ 15 & 14.4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 15 \\ 15 & 55 \end{vmatrix}} = 0.33 \qquad \rightarrow b = 10^{0.33} = 2.14$

ดังนั้น สมการที่ใช้ทำนาย คือ $\hat{Y} = (0.56)(2.14^X)$ #

ข้อมูลที่สัมพันธ์กับเวลา

ในกรณีที่ข้อมูลมีความสัมพันธ์กับเวลา (เช่น เดือน หรือ ปี พ.ศ.) เรามักจะแปลงข้อมูลเวลา ให้กลายเป็นตัวเลขง่ายๆ

- ถ้าจำนวนข้อมูล เป็นเลขคี่ เรามักจะเปลี่ยนเวลาให้เป็น $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
  โดยให้ตัวตรงกลางเป็น 0

เช่น

พ.ศ.	2549	2550	2551	2552	2553
รายจ่าย	120	151	166	171	190

จะถูกแปลงเป็น

พ.ศ.	-2	-1	0	1	2
รายจ่าย	120	151	166	171	190

- ถ้าจำนวนข้อมูล เป็นเลขคู่ เรามักจะเปลี่ยนเวลาให้เป็น $\ldots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$
  โดยให้คู่ตรงกลางเป็น -1 กับ 1

เช่น

พ.ศ.	2548	2549	2550	2551	2552	2553
รายจ่าย	105	120	151	166	171	190

จะถูกแปลงเป็น

พ.ศ.	-5	-3	-1	1	3	5
รายจ่าย	105	120	151	166	171	190

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาใช้ความสัมพันธ์ในรูป $\hat{Y} = a + bX$ เพื่อทำนายค่าขนมของเดือน มิ.ย.

เดือน	ม.ค.	ก.พ.	มี.ค.	เม.ย.	พ.ค.
ค่าขนม	3	6	8	11	12

<u>วิธีทำ</u> แปลงข้อมูลเวลาให้เป็นตัวเลขง่ายๆก่อน

เนื่องจากจำนวนข้อมูล $= 5$ เป็นเลขคี่ ดังนั้น แปลงได้เป็น

เดือน	-2	-1	0	1	2
ค่าขนม	3	6	8	11	12

	y_i	x_i	$x_i y_i$	x_i^2
	3	-2	-6	4
	6	-1	-6	1
	8	0	0	0
	11	1	11	1
	12	2	24	4
$\sum$	40	0	23	10

ทำนายค่าขนมจากเดือน → ให้ค่าขนมเป็น y ให้เดือนเป็น x

ได้ระบบสมการคือ

$$40 = 5a + 0b \quad \ldots(1)$$
$$23 = 0a + 10b \quad \ldots(2)$$

แก้สมการ ได้ $a = 8$, $b = 2.3$

ดังนั้น สมการที่ใช้ทำนาย คือ $\hat{Y} = 8 + 2.3X$

เดือน มิ.ย. จะแปลงได้เป็น $x = 3$ ดังนั้น จะมี ค่าขนมเดือน มิ.ย. $= 8 + (2.3)(3) = 14.9$ บาท #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1.

เดือน	เม.ย.	พ.ค.	มิ.ย.	ก.ค.
น้ำหนัก	40	41	42	45

จากข้อมูลที่กำหนด จงทำนายน้ำหนักในเดือน พ.ย.

2. จำนวนประชากรในจังหวัดหนึ่ง ตั้งแต่ พ.ศ. 2550 ถึง พ.ศ. 2554 มีดังนี้

พ.ศ.	2550	2551	2552	2553	2554
จำนวนประชากร (แสนคน)	1.2	2.6	a	5.4	6.3

ถ้าจำนวนประชากรสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับเวลา (พ.ศ.) เป็นเส้นตรง และทำนายว่าในปี พ.ศ. 2557 จะมีประชากร 1,028,000 คน แล้วใน พ.ศ. 2552 จะมีประชากรกี่คน [PAT 1 (มี.ค. 57)/22]

รูปกราฟเส้นตรง

1. 1. $\hat{A} = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}B$ 2. $\hat{B} = 4 - \frac{1}{2}A$ 3. 4 4. 2
2. 6
3. 19
4. $1, 2$
5. $1, 2$
6. 12
7. 2.33
8. 16.67
9. 48.8
10. 1
11. 2

ข้อมูลที่สัมพันธ์กับเวลา

1. 50.8 $(\hat{y} = 42 + 0.8x)$
2. $340{,}000$