# ระบบจำนวนจริง

14 Jun 2018

# สารบัญ

## การสร้างเครื่องหมายใหม่

ในเรื่องนี้ โจทย์จะสร้าง “เครื่องหมายใหม่” เพิ่มเติมจากเครื่องหมาย $+ - \times \div$ ที่เราใช้ประจำ โดยโจทย์จะให้ “วิธีใช้” เครื่องหมายที่สร้างใหม่นั้นมา แล้วให้หาผลลัพธ์ หรือตรวจสมบัติต่างๆของเครื่องหมายใหม่นั้น

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $a \otimes b = a + ab$ จงหาค่าของ $2 \otimes 3$

<u>วิธีทำ</u> แทน $a = 2$ , $b = 3$ จะได้ $2 \otimes 3 = 2 + (2)(3)$

$= 8$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $m \Delta n = \frac{m+n}{n}$ จงหาค่าของ $((4 \Delta 2) \Delta 3) - (5 \Delta 1)$

<u>วิธีทำ</u> $((4 \Delta 2) \Delta 3) - (5 \Delta 1) = (\frac{4+2}{2} \Delta 3) - (5 \Delta 1)$

$= (3 \Delta 3) - (5 \Delta 1)$

$= \frac{3+3}{3} - \frac{5+1}{1}$

$= 2 - 6 = -4$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $x * y = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \geq y \\ y - x & \text{เมื่อ } x < y \end{cases}$ จงหาค่าของ $(1 * 5) * (2 * 0)$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ $x * y$ มีสองสูตร เราต้องเลือกใช้สูตร ตามเงื่อนไขว่า $x \geq y$ หรือ $x < y$

เช่น ถ้าจะหา $1 * 5$ ต้องแทน $x = 1$ และ $y = 5$ จะเห็นว่า $x < y$ ดังนั้น ต้องใช้สูตร $y - x$

จะได้ $1 * 5 = 5 - 1 = 4$

และ ถ้าจะหา $2 * 0$ ต้องแทน $x = 2$ และ $y = 0$ จะเห็นว่า $x \geq y$ ดังนั้น ต้องใช้สูตร $x^2$

จะได้ $2 * 0 = 2^2 = 4$

ดังนั้น $(1 * 5) * (2 * 0) = 4 * 4$

$= 4^2$ (ใช้สูตร $x^2$ เพราะ $4 \geq 4$)

$= 16$ #

<u>ตัวอย่าง</u> สำหรับ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $a \Theta b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

1. $1 \Theta 1 = 1$
2. $a \Theta 1 = ((a - 1) \Theta 1) + 1$
3. $a \Theta b = (a \Theta (b - 1)) + 2$

จงหาค่าของ $(3 \Theta 3)$

<u>วิธีทำ</u> $3 \Theta 3 = (3 \Theta (3 - 1)) + 2$ (ใช้ข้อ 3.)

$= (3 \Theta 2) + 2$

$= (3 \Theta (2 - 1)) + 2 + 2$ (ใช้ข้อ 3.)

$= (3 \Theta 1) + 4$

$= ((3 - 1) \Theta 1) + 1 + 4$ (ใช้ข้อ 2.)

$= (2 \Theta 1) + 5$

$= ((2 - 1) \Theta 1) + 1 + 5$ (ใช้ข้อ 2.)

$= (1 \Theta 1) + 6$

$= 1 + 6$ (ใช้ข้อ 1.)

$= 7$

ดังนั้น $3 \Theta 3 = 7$ #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $m \lozenge n = m + n - 3$ จงพิจารณาว่าข้อใดผิด

1. $m \lozenge n = n \lozenge m$
2. $(a \lozenge b) \lozenge c = a \lozenge (b \lozenge c)$
3. $a \lozenge -a = -3$ เสมอ
4. $x(y \lozenge z) = xy \lozenge xz$

<u>วิธีทำ</u> 1. จากโจทย์ จะได้ $m \lozenge n = m + n - 3$

$n \lozenge m = n + m - 3$ จะเห็นว่า $m \lozenge n = n \lozenge m$ ดังนั้น ข้อ 1. ถูกต้อง

2. $(a \lozenge b) \lozenge c = (a + b - 3) \lozenge c = (a + b - 3) + c - 3 = a + b + c - 6$

$a \lozenge (b \lozenge c) = a \lozenge (b + c - 3) = a + (b + c - 3) - 3 = a + b + c - 6$

จะเห็นว่า $(a \lozenge b) \lozenge c = a \lozenge (b \lozenge c)$ ดังนั้น ข้อ 2. ถูกต้อง

3. $a \lozenge -a = a + -a - 3 = -3$ ดังนั้น ข้อ 3. ถูกต้อง

4. $x(y \lozenge z) = x(y + z - 3) = xy + xz - 3x$

$xy \lozenge xz = xy + xz - 3$

จะเห็นว่า ฝั่งซ้ายเป็น $-3x$ แต่ฝั่งขวาเป็น $-3$ เฉยๆ จึงไม่เท่ากัน ดังนั้น ข้อ 4. ผิด #

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

1. $\oplus$ มีสมบัติการสลับที่
2. $\oplus$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้
3. $\oplus$ มีสมบัติปิดบนจำนวนคู่
4. $a \oplus a = 2a \oplus 0$ เสมอ

<u>วิธีทำ</u> 1. สมบัติการสลับที่ จะเป็นจริงได้ ต้องดูว่า $a \oplus b = b \oplus a$ หรือไม่

จากโจทย์ จะได้ $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$

$b \oplus a = \frac{b+a}{2}$ จะเห็นว่า $a \oplus b = b \oplus a$ ดังนั้น ข้อ 1. ถูกต้อง

2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่มได้ จะเป็นจริง ต้องดูว่า $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ หรือไม่

จากโจทย์ จะได้ $(a \oplus b) \oplus c = (\frac{a+b}{2}) \oplus c = \frac{\frac{a+b}{2}+c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$

$a \oplus (b \oplus c) = a \oplus (\frac{b+c}{2}) = \frac{a+\frac{b+c}{2}}{2} = \frac{2a+b+c}{4}$

จะเห็นว่า $(a \oplus b) \oplus c \neq a \oplus (b \oplus c)$ ดังนั้น ข้อ 2. ผิด

3. สมบัติปิดบนจำนวนคู่ ต้องดูว่า ถ้านำจำนวนคู่มา $\oplus$ กัน จะได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคู่เสมอ หรือไม่

จะเห็นว่าการคำนวณ $\oplus$ จะมีการหารด้วย 2 อยู่ ทำให้อาจได้ผลลัพธ์เป็นจำนวนคี่ได้

เช่น $2 \oplus 4 = \frac{2+4}{2} = 3$ ดังนั้น ข้อ 3. ผิด

4. $a \oplus a = \frac{a+a}{2} = a$

$2a \oplus 0 = \frac{2a+0}{2} = a$ เท่ากัน ดังนั้น ข้อ 4. ถูกต้อง #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $a \nabla b = ab + ba$ จงเติมประโยคต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

 1. $2 \nabla 3 =$
 2. $(3 \nabla -1) \nabla 1 =$
 3. $0 \nabla a =$
 4. $a \nabla \frac{1}{2} =$

2. กำหนดให้ $a\,\Omega\, b = \begin{cases} a & \text{เมื่อ } a > b \\ b & \text{เมื่อ } a < b \\ 2a & \text{เมื่อ } a = b \end{cases}$ และ $a\,\Phi\, b = \begin{cases} b & \text{เมื่อ } a > b \\ a & \text{เมื่อ } a < b \\ b/2 & \text{เมื่อ } a = b \end{cases}$

จงหาค่าของ

1. $2\,\Omega\,3 =$
2. $(3\,\Omega\,-1)\,\Omega\,1 =$
3. $2\,\Phi\,3 =$
4. $(1\,\Phi\,2)\,\Omega\,1 =$
5. $(3\,\Phi\,2)\,\Omega\,(1\,\Phi\,2) =$
6. $(a\,\Omega\,a)\,\Phi\,2a =$

3. สำหรับ $x$ และ $y$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $x \bigcirc y$ มีสมบัติดังต่อไปนี้
   1. $x \bigcirc x = x^2$
   2. $x \bigcirc y = y \bigcirc x$
   3. $x \bigcirc (x + y) = 2(x \bigcirc y)$

จงหาค่าของ

1. $1 \bigcirc 1$
2. $1 \bigcirc 2$
3. $2 \bigcirc 1$
4. $2 \bigcirc 2$
5. $4 \bigcirc 2$
6. $40 \bigcirc 30$

4. กำหนดให้ $a \star b = \sqrt{ab}$ และ $x, y, z$ เป็นจำนวนจริงบวก จงพิจารณาว่าข้อใดถูกต้อง

1. $x \star y = y \star x$
2. $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$

3. $x \star 0 = 0$

4. $x \star 1 = x$

5. $x + (y \star z) = (x + y) \star (x + z)$

6. $x(y \star z) = xy \star xz$

5. ให้ $N$ แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a * b = \sqrt{a + b}$ สำหรับ $a, b \in N$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 53)/5]
   1. $(a * b) * c = a * (b * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$
   2. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$ สำหรับ $a, b, c \in N$

6. ให้ $N$ แทนเซตของจำนวนนับ กำหนดให้ $a * b = a^b$ สำหรับ $a, b \in N$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง สำหรับ $a, b, c \in N$ [PAT 1 (มี.ค. 53)/24]
   ก. $a * b = b * a$
   ข. $(a * b) * c = a * (b * c)$
   ค. $a * (b + c) = (a * b) + (a * c)$
   ง. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

7. <u>นิยาม</u> $a * b = a^b$ สำหรับ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ

ถ้า $a, b$ และ $c$ เป็นจำนวนจริงบวก แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 55)/24]

1. $a * (b * c) = (a * c) * b$
2. $(a * b) * c = a * (bc)$
3. $a * (b * c) = (a * b) * c$
4. $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$

8. กำหนดให้ $x * y = (x + 1)(y + 1) - 1$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด [PAT 1 (ธ.ค. 54)/23]

1. $(x - 1) * (x + 1) = (x * x) - 1$
2. $x * (y + 2) = (x * y) + (x * 2)$
3. $x * (y * 2) = (x * y) * 2$
4. $x * (x * y) = (x + 1)(x * y) + x$

9. ให้ $N$ แทนเซตของจำนวนนับ สำหรับ $a\,,b \in N$

$$a\,\Theta\,b = \begin{cases} a & , \quad a > b \\ a & , \quad a = b \\ b & , \quad a < b \end{cases} \quad \text{และ} \quad a \triangle b = \begin{cases} b & , \quad a > b \\ a & , \quad a = b \\ a & , \quad a < b \end{cases}$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง สำหรับ $a, b, c \in N$ [PAT 1 (ต.ค. 53)/20]

1. $a\,\Theta\,b = b\,\Theta\,a$
2. $a\,\Theta\,(b\,\Theta\,c) = (a\,\Theta\,b)\,\Theta\,c$
3. $a \triangle (b\,\Theta\,\mathrm{c}) = (a \triangle b)\,\Theta\,(a \triangle c)$

10. สำหรับ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ กำหนดให้ $a \otimes b$ เป็นจำนวนจริงที่มีสมบัติดังต่อไปนี้

(ก) $a \otimes a = a + 4$

(ข) $a \otimes b = b \otimes a$

(ค) $\frac{a \otimes (a+b)}{a \otimes b} = \frac{a+b}{b}$

ค่าของ $(8 \otimes 5) \otimes 100$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 53)/49]

11. สำหรับ $x$ และ $y$ เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$

(2) $x * (1 * x) = 1 * x$

(3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 56)/49]

ทบทวนพหุนาม

หัวข้อที่นิยมออกข้อสอบในเรื่องนี้ คือ การหารพหุนาม และการเทียบสัมประสิทธิ์

- หารพหุนามโดยการตั้งหารยาว

  เช่น $(x^2 - 2x + 5) \div (x + 2)$

  $$\begin{array}{r|l} & x - 4 \\ \hline x + 2 & x^2 - 2x + 5 \\ & \underline{x^2 + 2x} \\ & -4x + 5 \\ & \underline{-4x - 8} \\ & \underline{13} \end{array}$$

  โดยจะได้ ตัวตั้ง $=$ (ตัวหาร $\times$ ผลหาร) $+$ เศษ

  นั่นคือ $x^2 - 2x + 5 = (x + 2)(x - 4) + 13$

  สังเกตว่า ดีกรีของผลลัพธ์ จะเท่ากับ ดีกรีตัวตั้ง $-$ ดีกรีตัวหาร เสมอ

- การเทียบสัมประสิทธิ์ ทำได้เมื่อ พหุนามมีค่าเท่ากัน ไม่ว่าจะแทน $x$ ด้วยอะไร

  เช่น ถ้า $ax^3 + bx^2 + cx + d = 2x^3 - 3x^2 + 5$ สำหรับ ทุกๆ $x$

  เราจะได้ทันทีว่า $a = 2$ , $b = -3$ , $c = 0$ , $d = 5$

แบบฝึกหัด

1. ให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ เมื่อ $a, b$ เป็นจำนวนเต็ม และ $Q(x) = x^2 + 9$ ถ้า $Q(x)$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว $P(a) + P(b)$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-2]

2. กำหนดให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริง และให้ $f$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม โดยที่ $f(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + ax + b$ ถ้ามีฟังก์ชันพหุนาม $Q(x)$ โดยที่ $f(x) = \left(Q(x)\right)^2$ แล้ว จงหา $a + b$ [PAT 1 (ต.ค. 53)/19*]

## การหารสังเคราะห์

ปกติ เราจะหารพหุนามด้วยวิธี “ตั้งหารยาว” ซึ่งใช้แรงเยอะและเปลืองกระดาษ
ในกรณีที่ “ตัวหาร” อยู่ในรูป $x+?$ หรือ $x-?$ เราจะมีวิธีหารอีกแบบซึ่งรวดเร็วกว่า เรียกว่า “หารสังเคราะห์”
เช่น ถ้าจะหา $(2x^3-x^2+5)\div(x-2)$ โดยวิธีหารยาว เทียบกับวิธีหารสังเคราะห์ จะเป็นดังนี้

$$\begin{array}{rrl}
 & 2x^2+3x+6 & \rightarrow \text{ผลลัพธ์} \\
\text{ตัวหาร} \leftarrow x-2 & \overline{)\,2x^3-x^2+0x+5} & \rightarrow \text{ตัวตั้ง} \\
 & \underline{2x^3-4x^2} \quad\quad\quad\;\; & \\
 & 3x^2+0x \quad\;\; & \\
 & \underline{3x^2-6x} \quad\;\; & \\
 & 6x+5 & \\
 & \underline{6x-12} & \\
 & \underline{17} & \rightarrow \text{เศษ}
\end{array}$$

หารยาวธรรมดา

$$\begin{array}{c|rrrr}
\text{ตัวหาร}\nwarrow 2 & \overbrace{2 \quad -1 \quad 0 \quad 5}^{\text{ตัวตั้ง}} \\
 & 4 \quad 6 \quad 12 \\
\hline
 & \underbrace{2 \quad 3 \quad 6}_{\text{ผลลัพธ์}} \quad 17 \searrow \text{เศษ}
\end{array}$$

หารสังเคราะห์

การหารสังเคราะห์ จะมีขั้นตอนดังนี้

1. เขียนตัวตั้ง โดยเขียนเฉพาะตัวเลข ไม่ต้องเขียน $x$
   โดยให้เขียนเรียงตามเลขชี้กำลังของ $x$
   ถ้าเลขชี้กำลังไหนไม่มี ให้ใส่ 0

$$2x^3-x^2+5$$
$$\downarrow$$
$$\begin{array}{|rrrr}
2 & -1 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

2. เขียนตัวหาร ให้เอาตัวเลขหลัง $x$ มาเปลี่ยนเครื่องหมาย
   เช่น ถ้าตัวหารเป็น $x+2$ ก็เขียน $-2$
   ถ้าตัวหารเป็น $x-3$ ก็เขียน $3$
   หมายเหตุ: ตัวหารต้องอยู่ในรูป $x+?$ หรือ $x-?$ เท่านั้น ถึงจะหารสังเคราะห์ได้

$$\begin{array}{l}
x-2 \\
\;\;\searrow
\end{array}
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
\hline
\end{array}$$

3. เริ่มจากตัวเลขแรกของตัวตั้ง ให้ชักลงมา

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
 & \downarrow & & & \\
\hline
 & 2 & & &
\end{array}$$

4. เอาตัวหาร คูณกับตัวที่ชักลงมา ใส่ในช่องกลางของแถวถัดไป
   บวกตัวเลขแถวถัดไป ลงมาทางแถวล่าง

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
 & \times & 4\;+ & & \\
\hline
 & 2 & 3 & &
\end{array}$$

5. ทำแบบข้อ 4 ไปเรื่อยๆ จนถึงแถวสุดท้าย เป็นอันเสร็จ
   วิธีอ่านผลลัพธ์ คือ ขวาล่างจะเป็นเศษ ที่เหลือถัดมาทางซ้าย คือ ตัวเลขของผลหาร แบบเรียงกำลัง

$$\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
 & & \times\;4 & 6\;+ & \\
\hline
 & 2 & 3 & 6 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|rrrr}
2 & 2 & -1 & 0 & 5 \\
 & & \times\;4 & 6 & 12\;+ \\
\hline
 & 2 & 3 & 6 & 17
\end{array}$$

ผลหาร $=2x^2+3x+6$ , เศษ $=17$

ตัวอย่างการหารสังเคราะห์ เช่น

$$(x^2 + 2x + 5) \div (x + 2)$$

$$\begin{array}{r|rrr} -2 & 1 & 2 & 5 \\ & & -2 & 0 \\ \hline & 1 & 0 & 5 \end{array}$$

ผลหาร $= x$ , เศษ $= 5$

$$(2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 9x + 8) \div (x + 3)$$

$$\begin{array}{r|rrrrrr} -3 & 2 & 3 & -4 & 10 & -9 & 8 \\ & & -6 & 9 & -15 & 15 & -18 \\ \hline & 2 & -3 & 5 & -5 & 6 & -10 \end{array}$$

ผลหาร $= 2x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 6$ , เศษ $= -10$

$$(x^4 + 2x^2 - 3) \div (x - 1)$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -3 \\ & & 1 & 1 & 3 & 3 \\ \hline & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \end{array}$$

ผลหาร $= x^3 + x^2 + 3x + 31$

เศษ $= 0$ (หารลงตัว)

$$(2x^2 + x^2 - 3) \div \left(x + \frac{3}{2}\right)$$

$$\begin{array}{r|rrr} -\frac{3}{2} & 2 & 1 & -3 \\ & & -3 & 3 \\ \hline & 2 & -2 & 0 \end{array}$$

ผลหาร $= 2x - 2$ , เศษ $= 0$ (หารลงตัว)

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาผลหารและเศษโดยใช้วิธีหารสังเคราะห์
   1. $(x^3 + 3x^2 + 3x + 2) \div (x + 1)$
   2. $(-2x^3 + x^2 + 10) \div (x - 2)$
   3. $(3x^2 + 2x - 5) \div (x - 1)$
   4. $(x^4 - 16) \div (x + 2)$

## ทฤษฎีเศษ

ในกรณีที่เรา "อยากรู้แค่เศษ แต่ไม่อยากรู้ผลหาร" เรามีวิธีที่ง่ายยิ่งกว่าหารสังเคราะห์อีก ซึ่งเรียกว่า "ทฤษฎีเศษ" ถ้าอยากรู้ว่าเศษเท่าไหร่ ให้เอา "ตัวเลขหลัง $x$ ของตัวหาร" มาเปลี่ยนเครื่องหมาย แทนลงไปในตัวตั้ง จะได้เศษทันทีเลย

เช่น ถ้าตัวหาร คือ $x+2$ ก็ให้เอา $-2$ แทนในตัวตั้ง

ถ้าตัวหาร คือ $x-3$ ก็ให้เอา 3 แทนในตัวตั้ง

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาเศษจากการหาร $x^2+3x+5$ ด้วย $x+2$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ จะตั้งหารยาวก็ได้ หรือจะหารสังเคราะห์ก็ได้ จะได้ทั้งผลหาร และเศษ

แต่ข้อนี้ โจทย์ไม่ได้ถามผลหาร ดังนั้น วิธีที่ง่ายที่สุดคือ ใช้ทฤษฎีเศษ

ตัวหาร คือ $x+2$ ดังนั้น เอา $-2$ แทนในตัวตั้ง จะได้ $(-2)^2+3(-2)+5=3$

ดังนั้น การหารนี้ ได้เศษ 3 #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาว่า $x-1$ หาร $x^3-2x^2+3x-2$ ลงตัวหรือไม่

<u>วิธีทำ</u> "หารลงตัว" แปลว่า "เศษเป็นศูนย์"

ดังนั้น ถ้าอยากรู้ว่าหารลงตัวไหม ก็แค่ใช้ทฤษฎีเศษเช็คว่าได้เศษเป็นศูนย์หรือเปล่า

ตัวหารคือ $x-1$ ดังนั้น เอา 1 ไปแทนตัวตั้ง จะได้ $(1)^3-2(1)^2+3(1)-2 = 0$ ดังนั้น หารลงตัว #

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้า $x^2+kx+4$ หารด้วย $x+3$ เหลือเศษ 7 แล้ว จงหาค่า $k$

<u>วิธีทำ</u> หารด้วย $x+3$ เหลือเศษ 7 แสดงว่า ถ้าแทน $-3$ ลงในตัวตั้ง จะได้ผลลัพธ์เท่ากับ 7

$$\begin{aligned}(-3)^2+k(-3)+4 &= 7\\ 9-3k+4 &= 7\\ -3k &= -6\\ k &= 2\end{aligned}$$

#

หมายเหตุ : ทฤษฎีเศษ แบบเป็นทางการ คือ "พหุนาม $P(x)$ หารด้วย $x-c$ จะเหลือเศษเท่ากับ $P(c)$"

ตัวตั้ง เปลี่ยนเครื่องหมาย แทน $c$ ลงในตัวตั้ง

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาเศษจากการหารต่อไปนี้
   1. $(x^3+3x^2+3x+2)\div(x+1)$
   2. $(-2x^3+x^2+10)\div(x-2)$
   3. $(x^4-16)\div(x+2)$

2. จงหาค่า $c$ ที่ทำให้ $x+1$ หาร $x^3-x^2+cx+4$ ลงตัว

3. จงหาค่า $c$ ทั้งหมด ที่ทำให้ $x-c$ หาร $x^2-2$ เหลือเศษ $2$

4. ให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $ax^5+bx+4$ หารด้วย $(x-1)^2$ ลงตัว แล้ว $a-b$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 55)/27]

## การแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ

วิธีนี้ จะใช้ในการแยกตัวประกอบพหุนามที่ดีกรีมากกว่า 2 ที่แยกด้วยวิธีอื่นไม่ได้ ซึ่งจะมีขั้นตอนดังนี้

1. สร้างลิสของจำนวนในรูป $\pm\frac{\text{ตัวประกอบของ พจน์ตัวเลข ที่ไม่มี } x}{\text{ตัวประกอบของ สปส พจน์กำลังสูงสุด}}$

   เช่น $x^3+2x^2-3x+3$

   $\rightarrow\ \pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } 3}{\text{ตัวประกอบของ } 1}=\pm\frac{1,3}{1}$

   $\rightarrow\ 1\,,-1\,,\ 3\,,-3$

   $x^4-2x-12$

   $\rightarrow\ \pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } -12}{\text{ตัวประกอบของ } 1}=\pm\frac{1,2,3,4,6,12}{1}$

   $\rightarrow\ 1\,,-1\,,\ 2\,,-2\,,\ 3\,,-3\,,\ 4\,,-4,\ 6\,,-6\,,\ 12\,,-12$

   $2x^3+3x^2-5x-6$

   $\rightarrow\ \pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } -6}{\text{ตัวประกอบของ } 2}=\pm\frac{1,2,3,6}{1,2}$

   $\rightarrow\ 1\,,-1\,,\ 2\,,-2\,,\ 3\,,\ -3\,,\ 6\,,\ -6\,,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

2. นำแต่ละตัวในลิส แทนเป็นค่า $x$ ในพหุนาม คิดเลขออกมา
   แทนไปเรื่อยๆ จนกว่าจะได้ค่า $c$ ที่แทนแล้วได้ผลลัพธ์เป็นศูนย์

   เช่น $2x^3+3x^2-5x-6$

   $1:\ 2(1)^3+3(1)^2-5(1)-6=-6$

   $2:\ 2(2)^3+3(2)-5(2)-6=6$

   $-1:\ 2(-1)^3+3(-1)^2-5(-1)-6=0\ \rightarrow c=-1$

   จากทฤษฎีเศษ จะได้ $x-c$ เป็นตัวประกอบ (เศษเป็นศูนย์ = หารลงตัว = เป็นตัวประกอบ)

3. นำพหุนาม มาหารด้วย $x-c$ (นิยมใช้การหารสังเคราะห์)
   จะได้ผลการแยกตัวประกอบคือ $(x-c)$(ผลหาร)

   เช่น

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 3 & -5 & -6 \\ & & -2 & -1 & 6 \\ \hline & 2 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2x^3+3x^2-5x-6 &= (x+1)(2x^2+x-6) \\ &= (x+1)(2x-3)(x+2) \end{aligned}$$

หมายเหตุ : ถ้าผลหาร ยังเป็นพหุนามดีกรีมากกว่า 2 อยู่ ก็อาจต้องใช้ทฤษฎีเศษ แยกตัวประกอบต่อไปให้ถึงที่สุด โดยตอนไล่แทน ถ้าตัวไหนแทนแล้วไม่ได้ศูนย์ในรอบก่อนหน้า ก็ไม่ต้องนำมาแทนอีกในรอบหลัง

<u>ตัวอย่าง</u> จงแยกตัวประกอบ $2x^4+5x^3-11x^2-20x+12$

<u>วิธีทำ</u> จำนวนที่ต้องนำมาไล่แทน คือ $\pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } 12}{\text{ตัวประกอบของ } 2}=\pm\frac{1,2,3,4,6,12}{1,2}$

ซึ่งได้แก่ $1\,,-1\,,\ 2\,,-2\,,\ 3\,,-3\,,\ 4\,,-4,\ 6\,,-6\,,\ 12\,,-12\,,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},-\frac{3}{2}$

$1:\ 2(1)^4+5(1)^3-11(1)^2-20(1)+12=-12$

$-1:\ 2(-1)^4+5(-1)^3-11(-1)^2-20(-1)+12=18$

$2:\ 2(2)^4+5(2)^3-11(2)^2-20(2)+12=0\ \rightarrow c=2$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 2 & 2 & 5 & -11 & -20 & 12 \\ & & 4 & 18 & 14 & -12 \\ \hline & 2 & 9 & 7 & -6 & 0 \end{array}$$

$2x^4+5x^3-11x^2-20x+12$

$=(x-2)(2x^3+9x^2+7x-6)$

ยังต้องใช้ทฤษฎีเศษ แยกต่อ

แยก $2x^3+9x^2+7x-6$ ต่อด้วยทฤษฎีเศษ $\rightarrow$ จำนวนที่ต้องไล่แทน คือ $\pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } -6}{\text{ตัวประกอบของ } 2} = \pm\frac{1,2,3,6}{1,2}$
ซึ่งได้แก่ $1,-1,\ 2,-2,\ 3,-3,\ 6,-6,\ \frac{1}{2},-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},-\frac{3}{2}$
แต่ $1$ กับ $-1$ เคยแทนแล้วไม่ได้ศูนย์ ก็ไม่ต้องเอามาแทนอีก

$$2:\ 2(2)^3+9(2)^2+7(2)-6 \quad = 60$$
$$-2:\ 2(-2)^3+9(-2)^2+7(-2)-6 \ = \ 0 \ \rightarrow \ c=-2$$

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 2 & 9 & 7 & -6 \\ & & -4 & -10 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & -3 & 0 \end{array} \qquad 2x^3+9x^2+7x-6 = (x+2)(2x^2+5x-3)$$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} 2x^4+5x^3-11x^2-20x+12 &= (x-2)(2x^3+9x^2+7x-6) \\ &= (x-2)(x+2)(2x^2+5x-3) \\ &= (x-2)(x+2)(2x-1)(x+3) \end{aligned}$$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้
   1. $x^3-x^2-8x+12$

   2. $2x^3+3x^2-11x-6$

3. $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4. $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$

## สมการดีกรีสูง

ในเรื่องนี้ จะเรียนเกี่ยวกับสมการที่มีดีกรีสูงกว่า 2
เช่น $2x^4 - x^3 + 3x^2 - 10x + 5 = 0$ เป็นสมการดีกรี 4

ปกติ เราจะแทนสมการเหล่านี้ด้วยสัญลักษณ์ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$
โดย $a_n$ , $a_{n-1}$ , … , $a_1$ , $a_0$ จะหมายถึง ตัวเลขที่คูณอยู่หน้า $x$ (ถ้าตัวไหนเป็น 0 ก็ข้ามเลขชี้กำลังนั้นไป)
เช่น $2x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$ จะมี $a_3 = 2$ , $a_2 = 1$ , $a_1 = -2$ , $a_0 = 3$
$x^4 - x^2 + 5x - 3 = 0$ จะมี $a_4 = 1$ , $a_3 = 0$ , $a_2 = -1$ , $a_1 = 5$ , $a_0 = -3$ เป็นต้น
โดยวิธีแก้สมการ เราจะต้องจัดให้ฝั่งขวาเป็น 0 และแยกตัวประกอบฝั่งซ้าย แล้วจับให้ตัวประกอบแต่ละตัวเป็น 0
ในหัวข้อนี้ จะมี 3 เรื่อง คือ “จำนวนคำตอบ” , “ผลบวก ผลคูณ คำตอบ” , และ “การสร้างสมการจากคำตอบ”

<u>จำนวนคำตอบ</u>: สมการดีกรี $n$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน $n$ คำตอบ
หรือ พูดอีกแบบได้ว่า จำนวนคำตอบของสมการ จะมีได้ไม่เกินเลขชี้กำลังสูงสุด
เพราะเลขชี้กำลังสูงสุด จะเป็นตัวบอกว่าพหุนามนั้นๆ แยกตัวประกอบได้มากสุด กี่วงเล็บ
เช่น $x^2 + 2x - 3 = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 2 คำตอบ (เพราะแยกได้อย่างมาก 2 วงเล็บ)
$(x+3)(x-1) = 0$
$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$ จะมีคำตอบได้ไม่เกิน 3 คำตอบ (เพราะแยกได้อย่างมาก 3 วงเล็บ)
$(x-3)(x+1)(x+1) = 0$

<u>ผลบวก ผลคูณ คำตอบ</u>: ถ้าสมการ $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 = 0$ มีคำตอบ $n$ คำตอบแล้ว

ผลบวกของคำตอบทั้งหมด $= -\frac{a_{n-1}}{a_n}$
ผลบวกของสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{a_{n-2}}{a_n}$
ผลบวกของสามคำตอบคูณกัน $= -\frac{a_{n-3}}{a_n}$
⋮

ผลคูณของคำตอบทั้งหมด $= (-1)^n \left(\frac{a_0}{a_n}\right)$

เช่น $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$
↓
$(x-1)(x-2)(x-4)$
เซตคำตอบ คือ $\{1, 2, 4\}$

ผลบวกคำตอบ $= -\frac{-7}{1} = 7$ $(= 1 + 2 + 4)$
ผลบวกสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{14}{1} = 14$ $(= 1\times 2 + 1\times 4 + 2\times 4)$
ผลคูณคำตอบ $= (-1)^3 \left(\frac{-8}{1}\right) = 8$ $(= 1\times 2\times 4)$

$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$
↓
$4x^4 - 0x^3 - 5x^2 + 0x + 1$
↓
$(x+1)(x-1)(2x+1)(2x-1)$
เซตคำตอบ คือ $\{ -1 , 1 , -\frac{1}{2} , \frac{1}{2} \}$

ผลบวกคำตอบ $= -\frac{0}{4} = 0$ $(= -1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})$
ผลบวกสองคำตอบคูณกัน $= +\frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$
$(= -1\cdot 1 + -1\cdot -\frac{1}{2} + -1\cdot \frac{1}{2} + 1\cdot -\frac{1}{2} + 1\cdot \frac{1}{2} + -\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2})$
ผลบวกสามคำตอบคูณกัน $= -\frac{0}{4} = 0$
$(= -1\cdot 1\cdot -\frac{1}{2} + -1\cdot 1\cdot \frac{1}{2} + -1\cdot -\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2} + 1\cdot -\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2})$
ผลคูณคำตอบ $= (-1)^4 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ $(= -1\cdot 1\cdot -\frac{1}{2}\cdot \frac{1}{2})$

<u>ตัวอย่าง</u> ถ้าสมการ $2x^3 + kx^2 - 3x + 2 = 0$ มีราก 3 ราก คือ $2, -1,$ และ $a$ แล้ว จงหาค่า $k$

<u>วิธีทำ</u> สมการนี้ จะมีผลคูณของคำตอบ $= (-1)^3\left(\frac{2}{2}\right) = -1$

ดังนั้น $(2)(-1)(a) = -1$ ซึ่งจะได้ $a = \frac{1}{2}$

แต่จากสูตรผลบวกราก สมการนี้ จะมีผลบวกของคำตอบ $= -\frac{k}{2}$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} -\frac{k}{2} &= 2 + (-1) + a \\ -\frac{k}{2} &= 2 + (-1) + \frac{1}{2} \\ -\frac{k}{2} &= \frac{3}{2} \\ k &= -3 \end{aligned}$$
#

<u>สร้างสมการจากคำตอบ</u>: สมการดีกรี $n$ ที่มี $x_1,\ x_2, \dots, x_n$ เป็นคำตอบ

จะเขียนได้ในรูป $a(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = 0$ เมื่อ $a$ เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

อันนี้เป็นการทำย้อนกลับ คือมีคำตอบ แล้วจะย้อนกลับไปหาสมการ

เช่น สมการที่มี 1 กับ $-2$ เป็นคำตอบ คือ $a(x-1)(x+2) = 0$ เป็นต้น โดย $a$ เป็นตัวเลขอะไรก็ได้

กล่าวคือ ไม่ว่า $a$ เป็นตัวเลขอะไร สมการนี้ก็จะยังมี 1 กับ $-2$ เป็นคำตอบ อยู่

$$\left.\begin{array}{lrcl} a = 1: & (1)(x-1)(x+2) = 0 & \to & x^2 + x - 2 = 0 \\ a = 2: & (2)(x-1)(x+2) = 0 & \to & 2x^2 + 2x - 4 = 0 \\ a = -3: & (-3)(x-1)(x+2) = 0 & \to & -3x^2 - 3x + 6 = 0 \end{array}\right\} \text{ทุกสมการ มี 1 กับ } -2 \text{ เป็นคำตอบ}$$

อย่างไรก็ตาม โจทย์มักจะให้ข้อมูลบางอย่างเพิ่มเติม เพื่อให้เราหาค่า $a$ ที่แน่ชัดลงไปได้

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่สมการ $P(x) = 0$ มีเซตคำตอบคือ $\{1, 2, 3\}$ ถ้า $P(4) = 12$ แล้ว จงหา $P(0)$

<u>วิธีทำ</u> สมการที่มีคำตอบคือ $1, 2, 3$ จะต้องมีสมการอยู่ในรูป $a(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

ดังนั้นจะได้ $P(x) = a(x-1)(x-2)(x-3)$

$P(4)$ คือ ค่าที่ได้จากการแทน $x$ ด้วย 4 ซึ่งโจทย์บอกว่า $P(4) = 12$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a(4-1)(4-2)(4-3) &= 12 \\ a(\ 3\ )(\ 2\ )(\ 1\ ) &= 12 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

ดังนั้น $P(0) = 2(0-1)(0-2)(0-3) = -12$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ถ้าสมการ $x^3 - x^2 - 8x + 12 = 0$ มีคำตอบ 3 คำตอบ คือ $a$ , $b$ และ $c$ แล้ว จงหาค่าของ
   1. $a + b + c$
   2. $ab + bc + ac$
   3. $abc$
   4. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

2. กำหนดให้ $A$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + x^2 - 27x - 27 = 0$

   และ $B$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $x^3 + (1 - \sqrt{3})x^2 - (36 + \sqrt{3})x - 36 = 0$

   $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-4]

   1. $[-3\sqrt{5}, -0.9]$ 2. $[-1.1, 0]$ 3. $[0, 3\sqrt{5}]$ 4. $[1, 5\sqrt{3}]$

3. กำหนดให้ $S$ เป็นเซตคำตอบของสมการ $2x^3 - 7x^2 + 7x - 2 = 0$ ผลบวกของสมาชิกทั้งหมดของ $S$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/6]

4. ถ้า $a$ , $b$ และ $c$ เป็นรากของสมการ $x^3 + kx^2 - 18x + 2 = 0$ เมื่อ $k$ เป็นจำนวนจริง แล้ว $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ต.ค. 53)/10*]

5. จงหาคำตอบที่เหลือของสมการ $2x^3 - 3x^2 - 11x + 6 = 0$ เมื่อกำหนดให้สองคำตอบแรก คือ 3 และ $\frac{1}{2}$

6. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่สมการ $P(x) = 0$ มีราก 3 ราก คือ $-1$ , $1$ , $2$ ถ้า $P(3) = 16$ จงหาค่าของ $P(0)$

7. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 4 โดยที่สมการ $P(x) - 1 = 0$ มีราก 4 ราก คือ $0$ , $1$ , $-1$ , $2$ ถ้า $P(3) = 9$ แล้ว จงหา $P(4)$

8. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่ $P(1) = P(2) = P(3) = 0$ ถ้า $P(0) = 6$ แล้ว จงหาค่าของ $P(-1)$

9. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามดีกรี 3 โดยที่ $P(1) = P(-2) = P(3) = 1$ ถ้า $P(0) = 4$ แล้ว จงหาค่าของ $P(-1)$

10. กำหนดให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนามดีกรี $2551$ ซึ่งสอดคล้องกับ $P(n) = Q(n)$ สำหรับ $n = 1, 2, \ldots, 2551$ และ $P(2552) = Q(2552) + 1$
ค่าของ $P(0) - Q(0)$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (มี.ค. 52)/48]

ทบทวนอสมการ

ช่วง คือ เซตของจำนวนทุกจำนวนที่มีค่า ตั้งแต่ / ระหว่าง จำนวนที่ระบุ

| | | | |
|---|---|---|---|
| เช่น | $[1, 5]$ | ทุกจำนวนตั้งแต่ 1 ถึง 5 (รวม 1 กับ 5 ด้วย) | $\{ x \mid 1 \leq x \leq 5 \}$ |
| | $[-4, 3)$ | ทุกจำนวนตั้งแต่ $-4$ ถึง 3 (รวม $-4$ แต่ไม่เอา 3) | $\{ x \mid -4 \leq x < 3 \}$ |
| | $(2, \infty)$ | ทุกจำนวนที่มากกว่า 2 (ไม่รวม 2) | $\{ x \mid 2 < x \}$ |
| | $(-\infty, -2]$ | ทุกจำนวนตั้งแต่ $-2$ ลงไป (รวม $-2$ ด้วย) | $\{ x \mid x \leq -2 \}$ |

การแก้อสมการดีกรีสูง ให้จัดฝั่งหนึ่งเป็น $0$ อีกฝั่ง ให้แยกตัวประกอบ ให้อยู่ในรูป “คูณหรือหาร” ก็ได้
นำแต่ละวงเล็บไปเขียนบนเส้นจำนวน เพื่อใส่ $+, -, +$ แล้วเลือกช่วงคำตอบตามเครื่องหมายอสมการ
โดย $\rightarrow$ ไม่ต้องสลับตรงจุดที่มาจาก $(\text{วงเล็บ})^{\text{ยกกำลังคู่}}$

$\rightarrow$ ถ้า $x$ มีลบคูณอยู่ ให้จัดเป็น $+$ โดยคูณ $-1$ ทั้งสองข้าง แล้วกลับ $>$ เป็น $<$

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. กำหนดให้ $I_n = (0, 1) \cap (\frac{1}{2}, 2) \cap (\frac{2}{3}, 3) \cap \ldots \cap (\frac{n-1}{n}, n)$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนนับ
   ค่าของ $n$ ที่น้อยที่สุดที่ทำให้ $I_n \subseteq (\frac{2551}{2554}, \frac{2553}{2552}]$ เท่ากับเท่าไร [PAT 1 (ต.ค. 52)/23]

2. กำหนดให้ $A$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{(2x+1)(x-1)}{2-x} \geq 0$
   และ $B$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $2x^2 - 7x + 3 < 0$
   ถ้า $A \cap B = [c, d)$ แล้ว $6c - d$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/5]

3. กำหนดให้ $A = \{x \mid (x^2 - 1)(x^2 - 3) \leq 15\}$
ถ้า $a$ เป็นสมาชิกค่าน้อยสุดในเซต $A$ และ $b$ เป็นสมาชิกค่ามากสุดในเซต $A$
แล้ว $(b - a)^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/6]

4. กำหนดให้ $A = \{x \mid (2x + 1)(x - 1) < 2\}$
และ $B = \{x \mid 16 - 9x^2 > 0\}$
เซต $A \cap B$ เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้ [A-NET 50/1-1]
1. $\left(-\frac{2}{3}, \frac{7}{3}\right)$
2. $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$
3. $\left(-\frac{4}{3}, \frac{5}{4}\right)$
4. $\left(-\frac{5}{3}, 1\right)$

5. กำหนดให้ $S$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^4-13x^2+36}{x^2+5x+6} \geq 0$
ถ้า $a$ เป็นจำนวนที่มีค่าน้อยที่สุดในเซต $S \cap (2, \infty)$ และ $b$ เป็นจำนวนลบที่มีค่ามากที่สุดซึ่ง $b \notin S$ แล้ว
$a^2 - b^2$ เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ก.ค. 52)/7]

6. กำหนดให้ $S = \left\{x \,\middle|\, \frac{x}{x^2-3x+2} \geq \frac{x+2}{x^2-1}\right\}$ ช่วงในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $S$ [PAT 1 (ต.ค. 52)/1-5]

1. $(-\infty, -3)$
2. $(-1, 0.5)$
3. $(-0.5, 2)$
4. $(1, \infty)$

7. ให้ $a, b, c, d$ และ $x$ เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (พ.ย. 57)/15]

1. ถ้า $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ แล้ว $\frac{a+x}{b} < \frac{c+x}{d}$
2. $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x}$

8. กำหนดให้ $a, b$ และ $c$ เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $a < b$ ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/29]

1. $\frac{2a+3b+4c}{3a+2b+3c} > \frac{2a+3b}{3a+2b}$
2. $\frac{3a+2b+c}{2a+3b+c} > \frac{3a+2b}{2a+3b}$

9. ในกล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว ลูกบอลสีแดง และลูกบอลสีเหลือง โดยที่จำนวนลูกบอลสีขาวมีจำนวนไม่น้อยกว่าจำนวนลูกบอลสีแดง แต่ไม่มากกว่าหนึ่งในสามเท่าของจำนวนลูกบอลสีเหลือง และผลรวมของจำนวนลูกบอลสีขาวและสีแดงไม่น้อยกว่า 76 ลูก อยากทราบว่าผลรวมของจำนวนลูกบอลสีขาวและลูกบอลสีเหลืองมีอย่างน้อยกี่ลูก [PAT 1 (มี.ค. 57)/45]

## ทบทวนค่าสัมบูรณ์

สูตรสำหรับหา $|x|$ จะมีดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \ge 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ถ้า $x$ เป็นบวกอยู่แล้ว $|x|$ จะได้เท่าเดิม

ถ้า $x$ เป็นลบอยู่ จะถูกทำให้เป็นบวกโดยคูณลบเข้าไป (ใช้หลักว่าลบคูณลบได้บวก)

โดยรูปแบบการแก้ สมการ / อสมการ ค่าสัมบูรณ์ จะมีดังนี้

| | เปลี่ยนเป็นรูปที่ไม่มีค่าสัมบูรณ์ | หมายเหตุ |
|---|---|---|
| $\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert = \boxed{\cdot\;\cdot}$ | $\boxed{\sim\sim} = \boxed{\cdot\;\cdot}$ หรือ $\boxed{\sim\sim} = -\boxed{\cdot\;\cdot}$ | คำตอบ ต้องทำให้ $\boxed{\cdot\;\cdot} \ge 0$ |
| $\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert < \boxed{\cdot\;\cdot}$ | $-\boxed{\cdot\;\cdot} < \boxed{\sim\sim} < \boxed{\cdot\;\cdot}$ | คำตอบ ต้องทำให้ $\boxed{\cdot\;\cdot} > 0$ |
| $\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert > \boxed{\cdot\;\cdot}$ | $\boxed{\sim\sim} > \boxed{\cdot\;\cdot}$ หรือ $\boxed{\sim\sim} < -\boxed{\cdot\;\cdot}$ | |
| $\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert = \lvert\boxed{\cdot\;\cdot}\rvert$<br>$\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert < \lvert\boxed{\cdot\;\cdot}\rvert$<br>$\lvert\boxed{\sim\sim}\rvert > \lvert\boxed{\cdot\;\cdot}\rvert$ | ยกกำลังสองทั้งสองข้าง เพื่อกำจัดค่าสัมบูรณ์<br>โดยใช้หลัก $\lvert x\rvert^2 = x^2$ | |

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. ให้ $R$ แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \left\{x \in R \,\middle|\, \frac{|1-x|-2}{x+|x|-3} > 1\right\}$ แล้ว $A \cap [0,1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (ก.ค. 53)/4]
   1. $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}\right\}$
   2. $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{3} < x < 1\right\}$
   3. $\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{3} < x < 1\right\}$
   4. $\left\{x \,\middle|\, \frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}\right\}$

2. กำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม ถ้า $S = \left\{x \in \mathrm{I} \,\middle|\, 2x^2 - 9x - 26 \le 0 \text{ และ } |1-2x| \ge 3\right\}$ แล้ว ผลบวกของสมาชิกของ $S$ เท่ากับเท่าใด [A-NET 49/2-6]

3* ให้ $A$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ที่ใหญ่ที่สุด ที่ทำให้ประพจน์ $\forall x[\ 2x^2 + x - 3 \le 0$ และ $|x-2| \le 3\ ]$ มีค่าความจริงเป็นจริง และให้ $B$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $6x^{-2} - 5x^{-1} - 1 > 0$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
[PAT 1 (พ.ย. 57)/13]

1. $A \subset B$
2. $A - B$ มีสมาชิก 2 ตัว
3. $(A-B) \cup (B-A) = (-6, 1)$
4. $(-6, 0) \subset (B - A)$

4. กำหนดให้ $S = \{x \mid |x|^3 = 1\}$ เซตในข้อใดต่อไปนี้เท่ากับเซต $S$ [PAT 1 (มี.ค. 52)/5]

1. $\{x \mid x^3 = 1\}$
2. $\{x \mid x^2 = 1\}$
3. $\{x \mid x^3 = -1\}$
4. $\{x \mid x^4 = x\}$

5. กำหนดให้ $I$ แทนเซตของจำนวนเต็ม และ $P(S)$ แทนเพาเวอร์เซตของเซต $S$
ให้ $A = \{x \in I \mid |x^2 - 1| < 8\}$ และ $B = \{x \in I \mid 3x^2 + x - 2 \ge 0\}$
ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (ต.ค. 53)/3]

1. จำนวนสมาชิกของ $P(A-B)$ เท่ากับ 4
2. จำนวนสมาชิกของ $P\big(I - (A \cup B)\big)$ เท่ากับ 2
3. $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. $P(A-B) - P(A \cap B) = \big\{\{0\}\big\}$

6. กำหนดให้ $\mathrm{I}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

ให้ $A = \{\, x \in \mathrm{I} \mid |2x+7| \leq 9\}$ และ $B = \{\, x \in \mathrm{I} \mid |x^2 - x - 1| > 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [PAT 1 (ต.ค. 55)/4]

1. จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 7
2. $A - B$ เป็นเซตว่าง

7. กำหนดให้ $A = \left\{x \in R \,\middle|\, \sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq 4\right\}$ เมื่อ $R$ แทนเซตของจำนวนจริง ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 53)/4]

1. $A' = \{x \in R \mid |3 - x| > 4\}$
2. $A' \subset (-1, \infty)$
3. $A = \{x \in R \mid x \leq 7\}$
4. $A \subset \{x \in R \mid |2x - 3| < 7\}$

8. ให้ $A$ แทนเซตของจำนวนจริง $x$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการ $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1$

และให้ $B$ แทนเซตของจำนวนจริง $x$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับอสมการ $|x^2 - 2x| + x^2 > 4$

ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/5]

1. $A \subset B$
2. จำนวนสมาชิกของเพาเวอร์เซตของเซต $A \cap B$ เท่ากับ 2

9. กำหนดให้ $A$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2+x-2| \leq |x^2-4x+3|$ และ $B = A - \{1\}$
ถ้า $a$ เป็นสมาชิกของ $B$ ซึ่ง $a - b \geq 0$ ทุก $b \in B$ แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้องบ้าง [A-NET 51/1-3]
   1. $\frac{4}{3}a$ เป็นจำนวนคู่
   2. $\frac{5}{a}$ เป็นจำนวนคู่

10. กำหนดให้ $A = \{x \mid |x-1| \leq 3 - x\}$ และ $a$ เป็นสมาชิกค่ามากที่สุดของ $A$
ค่าของ $a$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 52)/7]
   1. $(0, 0.5]$
   2. $(0.5, 1]$
   3. $(1, 1.5]$
   4. $(1.5, 2]$

11. กำหนดให้ $A = \{x \mid x^2+2x-3<0\}$ และ $B = \{x \mid x+1 \geq 2|x|\}$
ถ้า $A - B = (a,\ b)$ แล้ว $3|a+b|$ มีค่าเท่าใด [A-NET 51/2-1]

12. ถ้าเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 + x - 2| < (x + 2)$ คือช่วง $(a,\ b)$
แล้ว $a + b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด [A-NET 50/2-6]

13. กำหนดให้ $P(x)$ แทน $\left|\frac{x-2}{x+2}\right| < 2$ และให้ $Q(x)$ แทน $|2x + 1| > x - 1$
เอกภพสัมพัทธ์ในข้อใดต่อไปนี้ที่ทำให้ $Q(x)$ เป็นจริงเสมอ แต่ทำให้ $P(x)$ เป็นเท็จเสมอ
[PAT 1 (มี.ค. 56)/3*]

1. $(-\infty, -4)$
2. $(-5, -1)$
3. $(-3, 2)$
4. $(-1, \infty)$

## การแบ่งกรณีค่าสัมบูรณ์

ในเรื่องนี้ เราจะเรียนอีกหนึ่งวิธี ที่สามารถแก้ สมการ / อสมการ ค่าสัมบูรณ์ ที่ซับซ้อนกว่าหัวข้อที่แล้วได้

โดยเราจะใช้สูตร $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$ มากำจัดเครื่องหมายค่าสัมบูรณ์

เช่น ถ้าเราเจอ $|x-2|$ ในสมการ เราจะเปลี่ยนมันด้วยสูตร $|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{เมื่อ } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{เมื่อ } x-2 < 0 \end{cases}$

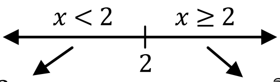
$x \geq 2$

$x < 2$

นั่นคือ ในกรณีที่ $x \geq 2$ เราจะได้ว่า $|x-2| = x-2$

และ ในกรณีที่ $x < 2$ เราจะได้ว่า $|x-2| = -(x-2)$

ดังนั้น เวลาแก้สมการ เราจะแบ่งคิดเป็น 2 กรณี คือ กรณี $x \geq 2$ และ กรณี $x < 2$




กรณี $x < 2$
เปลี่ยน $|x-2|$ เป็น $-(x-2)$
แล้วแก้หาคำตอบ
กรอง ($\cap$) เหลือเฉพาะที่ $x < 2$

กรณี $x \geq 2$
เปลี่ยน $|x-2|$ เป็น $x-2$
แล้วแก้หาคำตอบ
กรอง ($\cap$) เหลือเฉพาะที่ $x \geq 2$

จากนั้น จึงเอาคำตอบจากทั้งสองกรณีมารวมกัน ($\cup$)

<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $|x-4| \leq 2x+7$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $|x-4| = \begin{cases} x-4 & \text{เมื่อ } x-4 \geq 0 \\ -(x-4) & \text{เมื่อ } x-4 < 0 \end{cases}$

$x \geq 4$

$x < 4$

ดังนั้น เราจะแบ่งเป็นกรณี $x \geq 4$ กับ กรณี $x < 4$

กรณี $x \geq 4$:

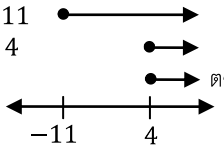
เปลี่ยน $|x-4|$ เป็น $x-4$

$$\begin{aligned} x-4 &\leq 2x+7 \\ -11 &\leq x \end{aligned}$$

กรอง ($\cap$) เหลือเฉพาะที่ $x \geq 4$

$x \geq -11$

$x \geq 4$




เหลือคำตอบ คือ $[4, \infty)$

กรณี $x < 4$:

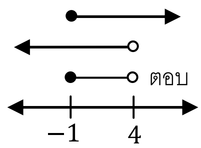
เปลี่ยน $|x-4|$ เป็น $-(x-4)$

$$\begin{aligned} -(x-4) &\leq 2x+7 \\ -x+4 &\leq 2x+7 \\ -3 &\leq 3x \\ -1 &\leq x \end{aligned}$$

กรอง ($\cap$) เหลือเฉพาะที่ $x < 4$

$x \geq -1$

$x < 4$




เซตคำตอบ คือ $[-1, 4)$

รวม ($\cup$) คำตอบจากทั้ง 2 กรณี จะได้คำตอบ คือ $(4, \infty) \cup [-1, 4) = [-1, \infty)$ #

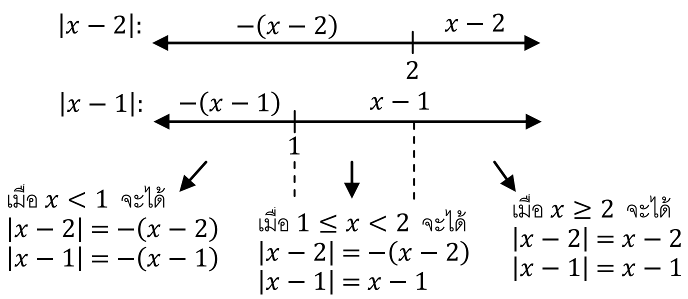
<u>ตัวอย่าง</u> จงแก้อสมการ $|x-2| + |x-1| \leq x+9$

<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้ มีค่าสัมบูรณ์ 2 ก้อน

$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{เมื่อ } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{เมื่อ } x-2 < 0 \end{cases}$ $x \geq 2$, $x < 2$

$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & \text{เมื่อ } x-1 < 0 \end{cases}$ $x \geq 1$, $x < 1$

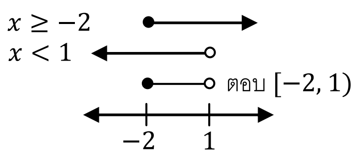
จะมีจุดแบ่ง 2 จุด คือ ที่ $1$ และ $2$
จึงต้องแบ่งเป็น 3 กรณี ดังนี้




กรณี $x < 1$:

$$\begin{aligned} |x-2|+|x-1| &\le x+9 \\ -(x-2)-(x-1) &\le x+9 \\ -x+2-x+1 &\le x+9 \\ -6 &\le 3x \\ -2 &\le x \end{aligned}$$

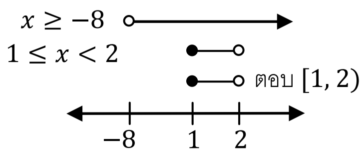
กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $x < 1$




กรณี $1 \le x < 2$:

$$\begin{aligned} |x-2|+|x-1| &\le x+9 \\ -(x-2)+(x-1) &\le x+9 \\ -x+2+x-1 &\le x+9 \\ -8 &\le x \end{aligned}$$

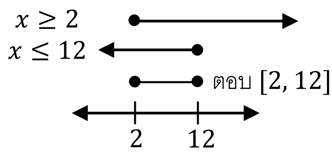
กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $1 \le x < 2$




กรณี $x \ge 2$

$$\begin{aligned} |x-2|+|x-1| &\le x+9 \\ (x-2)+(x-1) &\le x+9 \\ x-2+x-1 &\le x+9 \\ x &\le 12 \end{aligned}$$

กรองคำตอบ เอาเฉพาะที่ $x \ge 2$




รวมคำตอบจากทุกกรณี จะได้เซตคำตอบ คือ $[-2, 1) \cup [1, 2) \cup [2, 12] = [-2, 12]$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงแก้สมการ / อสมการ ต่อไปนี้ด้วยวิธีแบ่งกรณี
   1. $2x + 5 < |x - 2|$
   2. $|x + 3| = x^2 + 6x + 3$

3. $|x+1|+|x-1| > 4$

4. $|x+2|+|x+3| < x+1$

2. ถ้า $A$ แทนเซตของจำนวนเต็มทั้งหมด ที่สอดคล้องกับอสมการ $3|x-1|-2x > 2|3x+1|$ และ $B$ แทนเซตคำตอบของอสมการ $x(x+2)(x+1)^2 < 0$ แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง [PAT 1 (มี.ค. 55)/3]
   1. เซต $A-B$ มีสมาชิก 5 ตัว
   2. $A \cup B = A$
   3. เซต $A \cap B$ มีสมาชิก 1 ตัว
   4. $(A-B) \cup (B-A) = B$

3. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ให้ $A = \{ x \in \mathrm{R} \mid |2x-5| + |x| \leq 7 \}$ และ

$$B = \{ x \in \mathrm{R} \mid x^2 < 12 + |x| \}$$

ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (มี.ค. 56)/4]

1. $A \cap B \subset \{ x \in \mathrm{R} \mid 1 \leq x < 4 \}$
2. $A - B$ เป็นเซตจำกัด (finite set)

4. ถ้า $A$ แทนเซตคำตอบของสมการ $|2-2x| + |x+2| = 4 - x$ แล้ว เซต $A$ เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (เม.ย. 57)/4]

1. $(-4, 0)$ 2. $(-1, 1)$ 3. $(0, 4)$ 4. $(-3, 2)$

5. กำหนดให้ $a$ และ $b$ เป็นจำนวนจริงบวก และ $a < b$
เซตคำตอบของสมการ $|x-a|-|x-b| = b-a$ เท่ากับเท่าใด (ตอบในรูป $a, b$) [PAT 1 (มี.ค. 57)/5]

6. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตของจำนวนจริงบวก ข้อใดถูกต้องบ้าง [PAT 1 (เม.ย. 57)/2]
   1. ประพจน์ $\forall x[|x^2-5x+4| < x^2+6x+5]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
   2. ประพจน์ $\forall x[|x^2-1| \geq 2x-2]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

สมบัติความบริบูรณ์

"ขอบเขตบนของเซต $A$" หมายถึง ค่าที่ $\geq$ ทุกๆตัวใน $A$

เซตหนึ่งๆ อาจมีขอบเขตบนได้มากมาย ตราบใดที่ตัวเลขนั้น $\geq$ ทุกตัวในเซต

| | | |
|---|---|---|
| เช่น | $1$ เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ | เพราะ $1 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$ |
| | $2$ ก็เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ | เพราะ $2 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$ |
| | $9$ ก็เป็นขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ | เพราะ $9 \geq$ ทุกตัวใน $\{-1, 0, 1\}$ |
| | $3$ เป็นขอบเขตบนของ $(-\infty, 3)$ | เพราะ $3 \geq$ ทุกตัวใน $(-\infty, 3)$ |
| | $-1$ เป็นขอบเขตบนของ $[-5, -1]$ | เพราะ $-1 \geq$ ทุกตัวใน $[-5, -1]$ |
| | $3$ เป็นขอบเขตบนของ $\emptyset$ | เพราะ เราถือว่า ไม่มีตัวไหน $\emptyset$ จะมามากกว่า $3$ |

หมายเหตุ: $\emptyset$ เป็นเซตพิเศษเพียงเซตเดียวที่ "ขอบเขตบนเป็นอะไรก็ได้"

| | | |
|---|---|---|
| แต่ | $0$ ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $\{-1, 0, 1\}$ | เพราะมี $1$ ที่มากกว่า $0$ อยู่ |
| | $3$ ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $(-\infty, 4)$ | เพราะมี $3.5$ ที่มากกว่า $3$ อยู่ |
| | $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ไม่มีขอบเขตบน | เพราะสมาชิกในเซต มากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด |
| | $(0, \infty)$ ไม่มีขอบเขตบน | เพราะสมาชิกในเซต มากได้อย่างไม่มีขีดจำกัด |

"ขอบเขตบนน้อยสุดของเซต $A$" หมายถึง ค่าที่น้อยที่สุด ในบรรดาขอบเขตบนทั้งหลายของ $A$

เช่น ขอบเขตบนน้อยสุดของ $\{-1, 0, 1\}$ คือ $1$

ขอบเขตบนน้อยสุดของ $(-\infty, 3)$ คือ $3$

ขอบเขตบนน้อยสุดของ $[-5, -1]$ คือ $-1$

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด (เพราะแค่ขอบเขตบนเฉยๆมันยังไม่มีเลย)

หมายเหตุ: $\emptyset$ เป็นเซตพิเศษเซตเดียว ที่มีขอบเขตบน แต่กลับไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด

และจะเห็นว่า ขอบเขตบนน้อยสุดของเซต $A$ อาจจะอยู่หรือไม่อยู่ใน $A$ ก็ได้

"สมบัติความบริบูรณ์" กล่าวว่า ถ้า $A \subset R$ และ $A \neq \emptyset$ และ $A$ มีขอบเขตบน แล้ว $A$ จะมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

สรุปเป็นภาษาง่ายๆ คือ เซตอะไรก็ตามที่มีขอบเขตบน จะต้องมีขอบเขตบนน้อยสุดเสมอ

ยกเว้น $\emptyset$ เป็นเพียงเซตเดียวที่มีขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้ มีขอบเขตบนหรือไม่ ถ้ามี จงหาขอบเขตบนน้อยสุด

   1. $\{1, 2, 3, \ldots, 1000\}$
   2. $\{-1, -2, -3, \ldots, -1000\}$
   3. $(4, 5)$
   4. $(0, 10]$

5. $(1, \infty)$

6. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots, \frac{99}{100}\}$

7. $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\}$

8. R

9. $\{x \mid x^2 < 1\}$

10. $\{x \mid |x+1| = -1\}$

## การสร้างเครื่องหมายใหม่

1. 1. $12$ 2. $-12$ 3. $0$ 4. $a$
2. 1. $3$ 2. $3$ 3. $2$ 4. $2$
   5. $2$ 6. $a$
3. 1. $1$ 2. $2$ 3. $2$ 4. $4$
   5. $8$ 6. $800$
4. $1, 3, 6$ 5. - 6. - 7. $2$
8. $2$ 9. $1, 2, 3$ 10. $208$ 11. $6$

## ทบทวนพหุนาม

1. $922$ 2. $-1$

## การหารสังเคราะห์

1. 1. $x^2+2x+1$ เศษ $1$ 2. $-2x^2-3x-6$ เศษ $-2$
   3. $3x+5$ (ลงตัว) 4. $x^3-2x^2+4x-8$ (ลงตัว)

## ทฤษฎีเศษ

1. 1. $1$ 2. $-2$ 3. $0$
2. $2$ 3. $-2, 2$ 4. $6$

## การแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ

1. 1. $(x-2)(x+3)(x-2)$ 2. $(x-2)(2x+1)(x+3)$
   3. $(x+2)^3$ 4. $(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)$

## สมการดีกรีสูง

1. 1. $1$ 2. $-8$ 3. $-12$ 4. $\frac{2}{3}$
2. $1$ 3. $3.5$ 4 $9$ 5. $-2$
6. $4$ 7. $41$ 8. $24$ 9. $5$
10. $-1$

## ทบทวนอสมการ

1. $852$ 2. $4$ 3. $24$ 4. $2$
5. $5$ 6. $2$ 7. - 8. $2$

9. $152$

## ทบทวนค่าสัมบูรณ์

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1. $3$ | 2. $17$ | 3. $2$ | 4. $2$ |
| 5. $4$ | 6. $1$ | 7. $1$ | 8. $2$ |
| 9. $2$ | 10. $4$ | 11. $10$ | 12. $2$ |
| 13. $2$ | | | |

## การแบ่งกรณีค่าสัมบูรณ์

1. 1. $(-\infty, -1)$ 2. $\{-6, 0\}$ 3. $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$
   4. $\emptyset$

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. $1$ | 3. $2$ | 4. $4$ | 5. $[b, \infty)$ |
| 6. $1$ | | | |

## สมบัติความบริบูรณ์

1. 1. $1000$ 2. $-1$ 3. $5$ 4. $10$
   5. ไม่มี 6. $\frac{99}{100}$ 7. $1$ 8. ไม่มี
   9. $1$ 10. ขอบเขตบนเป็นอะไรก็ได้ แต่ไม่มีขอบเขตบนน้อยสุด


<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ คุณ Peera Modie

และ คุณ ช.ป. ชอ ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ