เรขาคณิตวิเคราะห์

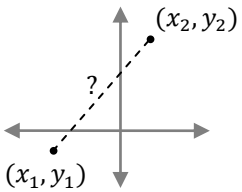
18 Mar 2018

สารบัญ

ระยะระหว่างจุด 1
จุดกึ่งกลาง 3
ความชัน 4
สมการกราฟเส้นตรง 7
ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง 11
ระยะระหว่างเส้นขนาน 14

ระยะระหว่างจุด

เรื่องนี้ จะเรียนเกี่ยวกับการหาค่าของสิ่งต่างๆที่อยู่บนแกน X - Y โดยจะมีสูตรต่างๆมากมายที่ต้องท่อง
สูตรแรก เป็นสูตรในการหาระยะทางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้



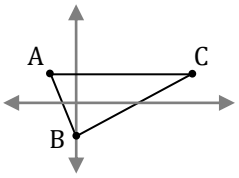
ระยะทางระหว่างจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)
หาได้จากสูตร $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
(เอาจุดไหนเป็นตัวตั้ง จุดไหนเป็นตัวลบก็ได้ ได้คำตอบเท่ากัน)

เช่น ระยะระหว่างจุด $(1, 2)$ กับ $(4, 6)$ คือ $\sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

ระยะระหว่างจุด $(1, -2)$ กับ $(-3, 0)$ คือ $\sqrt{(1-(-3))^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4^2 + (-2)^2}$
$= \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

ระยะระหว่างจุด $(-2, -3)$ กับ $(-1, 1)$ คือ $\sqrt{(-2-(-1))^2 + (-3-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2}$
$= \sqrt{17}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงพิจารณาว่าสามเหลี่ยมที่มีจุด $A(-1, 1)$, $B(0, -1)$, $C(5, 1)$ เป็นจุดยอด เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
<u>วิธีทำ</u> สามเหลี่ยมมุมฉาก จะต้องมีความยาวด้านทั้งสาม สอดคล้องกับสูตร $a^2 + b^2 = c^2$
ดังนั้น เราจะหาความยาว AB , BC และ AC เพื่อตรวจสอบว่า $a^2 + b^2 = c^2$ หรือไม่



$AB = \sqrt{(-1-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$
$BC = \sqrt{(5-0)^2 + (1-(-1))^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29}$
$AC = \sqrt{(5-(-1))^2 + (1-1)^2} = \sqrt{6^2 + 0^2} = \sqrt{36}$

จะเห็นว่า $\sqrt{5}^2 + \sqrt{29}^2 = 5 + 29 = 34 \neq \sqrt{36}^2$
ดังนั้น สามเหลี่ยม ABC ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดต่อไปนี้
   1. $(-1 , 3)$ และ $(3 , 0)$
   2. $(-1 , -4)$ และ $(-6 , 8)$
   3. $(-1 , 1)$ และ $(1 , -1)$
   4. $(0, 3)$ และ $(-3, 3)$

2. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, -2)$ ถ้าวงกลมวงนี้ผ่านจุด $(3, -1)$ แล้ว จงหารัศมีของวงกลม

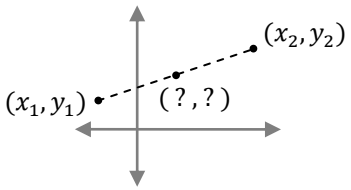
3. จุด A เป็นจุดบนแกน Y ซึ่งห่างจากจุด $(1, 1)$ กับ $(-4, 6)$ เป็นระยะทางเท่ากัน จงหาพิกัดของจุด A

4. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(-2, 3)$ $B(2, 8)$ $C(4, 4)$ และ $D(0, -3)$ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยม ABCD เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/9]

5. ถ้าวงกลมวงหนึ่งมีจุดศูนย์กลางคือ $C(h, k)$ อยู่บนเส้นตรง $x + y + 4 = 0$ และวงกลมนี้ผ่านจุด $A(-5, -2)$ และจุด $B(-2, 5)$ แล้ว พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 55)/31]

จุดกึ่งกลาง

สูตรที่สอง เป็นสูตรสำหรับหาพิกัดของจุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างจุด 2 จุดที่กำหนดให้



จุดกึ่งกลางระหว่าง (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)
หาได้จากสูตร $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

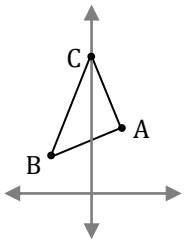
เช่น จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(1, 2)$ และ $(5, 8)$ คือ $\left(\frac{1+5}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (3, 5)$

จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(-3, 0)$ และ $(1, -4)$ คือ $\left(\frac{-3+1}{2}, \frac{0+(-4)}{2}\right) = (-1, -2)$

จุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง $(4, -2)$ และ $(-1, -2)$ คือ $\left(\frac{4+(-1)}{2}, \frac{-2+(-2)}{2}\right) = (\frac{3}{2}, -2)$

<u>ตัวอย่าง</u> กำหนดให้ $A(1, 3)$, $B(-2, 2)$ และ $C(0, 6)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยมรูปหนึ่ง จงหาความยาวส่วนของเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปแบ่งครึ่งด้าน BC

<u>วิธีทำ</u>



จุดที่แบ่งครึ่งด้าน BC คือ $\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{2+6}{2}\right) = (-1, 4)$

ดังนั้น ระยะจาก A ไปยัง $(-1, 4) = \sqrt{(1-(-1))^2 + (3-4)^2} = \sqrt{5}$ #

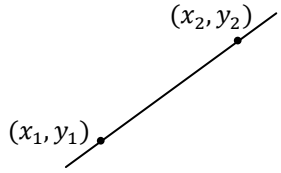
<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดสองจุดต่อไปนี้
   1. $(2, 3)$ กับ $(4, -1)$
   2. $(-2, 2)$ กับ $(-2, -2)$
   3. $(0, -3)$ กับ $(4, 2)$
   4. $(-\frac{1}{2}, 1)$ กับ $(-\frac{3}{2}, -2)$

2. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางคือ $(2\ , -1)$ และมี $\overline{AB}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ถ้าพิกัดของจุด A คือ $(-1, -3)$ แล้ว จงหาพิกัดของจุด B

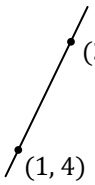
ความชัน

เรื่องนี้จะสนใจวัดว่าเส้นตรงที่กำหนดให้ “ชัน” ขนาดไหน

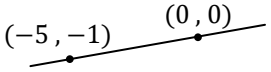


ความชันของเส้นตรงที่ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)
หาได้จากสูตร $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (หรือ $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$ ก็ได้)

เช่น

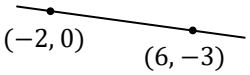


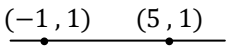
ความชัน $= \frac{10-4}{3-1} = \frac{6}{2} = 3$



ความชัน $= \frac{0-(-1)}{0-(-5)} = \frac{1}{5}$

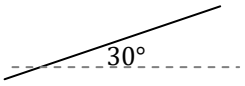
ความชัน $= \frac{0-(-3)}{-2-6} = -\frac{3}{8}$



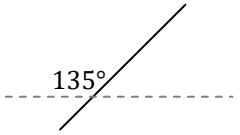


ความชัน $= \frac{1-1}{5-(-1)} = 0$

อีกสูตรหนึ่งที่ใช้หาความชันได้ คือ ความชัน $= \tan\theta$ เมื่อ θ คือ มุมที่เส้นกราฟทำกับแกน X บวก
เช่น

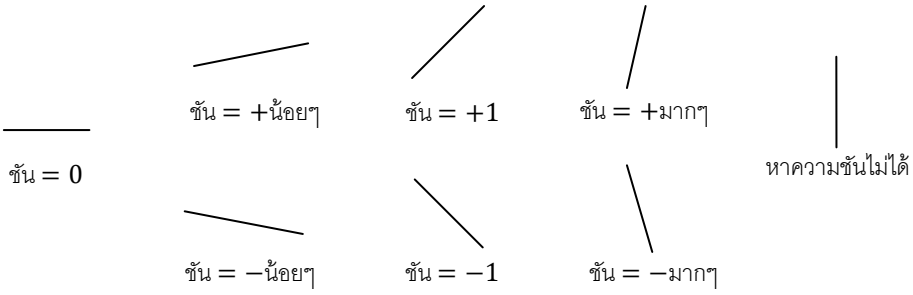


ความชัน $= \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$



ความชัน $= \tan 45° = 1$

และความชันแต่ละค่า จะมีความหมายดังนี้

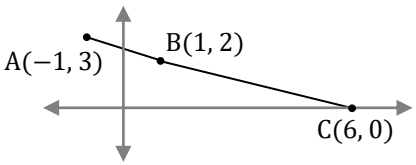


และเราสามารถนำความชันไปใช้ตรวจสอบการขนานกัน หรือ ตั้งฉากกัน ของเส้นตรง 2 เส้น ได้ ดังนี้

- เส้นตรงที่ขนานกัน จะมีความชันเท่ากัน
- เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า $A(-1,3)$, $B(1,2)$ และ $C(6,0)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

วิธีทำ ทั้งสามจุด จะอยู่บนเส้นตรงเดียวกันเมื่อ $\overline{AB}$ กับ $\overline{BC}$ "ชันเท่ากัน"



ความชัน $\overline{AB} = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$

ความชัน $\overline{BC} = \frac{2-0}{1-6} = -\frac{2}{5}$ $\Big\} \neq$

ดังนั้น ทั้งสามจุดไม่อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน #

ตัวอย่าง กำหนด $A(-1,6)$, $B(0,3)$, $C(1,5)$ จงพิจารณาว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่

วิธีทำ ข้อนี้ จะหาระยะระหว่างจุด มาเช็คว่า $a^2+b^2=c^2$ หรือไม่ แบบหัวข้อก่อนหน้าก็ได้

แต่อีกวิธีที่ง่ายกว่า คือ เช็คจากกฎที่บอกว่า เส้นตรงที่ตั้งฉากกัน จะมีความชันคูณกันได้ -1

โดยเราจะหาความชันของ AB, BC, AC ออกมา แล้วดูว่ามีคู่ไหน ความชันคูณกันได้ -1 หรือเปล่า

ความชัน $\overline{AB} = \frac{6-3}{-1-0} = -3$

ความชัน $\overline{BC} = \frac{5-3}{1-0} = 2$

ความชัน $\overline{AC} = \frac{6-5}{-1-1} = -\frac{1}{2}$ $\Big\}$ คูณกันได้ -1 $\rightarrow$ $\overline{BC} \perp \overline{AC}$

ดังนั้น ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก #

แบบฝึกหัด

1. จงหาความชันของเส้นตรง ที่ผ่านจุดต่อไปนี้
   1. $(1,-1)$ และ $(2,3)$
   2. $(0,-2)$ และ $(-2,0)$
   3. $(3,2)$ และ $(3,-3)$
   4. $(1,2)$ และ จุดกึ่งกลางระหว่าง $(3,-1)$ กับ $(1,1)$
2. จงพิจารณาว่า สี่เหลี่ยมที่เกิดจาก $A(-2,2)$, $B(3,4)$, $C(5,-6)$, $D(-1,-3)$ เป็นสี่เหลี่ยมคางหมูหรือไม่

3. กำหนดให้ $\mathrm{A}(-1,-3)$ และ $\mathrm{B}(9,-8)$ ถ้า C เป็นจุดบนแกน X ที่ทำให้ $\overline{\mathrm{AC}} \perp \overline{\mathrm{BC}}$ แล้ว จงหาพิกัดของจุด C

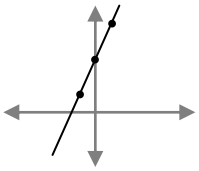
4. จุด $\mathrm{A}(1,0)$ และ จุด $\mathrm{B}(b,0)$ เมื่อ $b>1$ เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลมวงหนึ่ง ถ้าเส้นตรง L ผ่านจุด $(-1,0)$ และสัมผัสกับวงกลมวงนี้ มีความชันเท่ากับ $\frac{4}{3}$ แล้ว b เท่ากับเท่าใด [PAT 1 (ต.ค. 53)/34]

สมการกราฟเส้นตรง

กราฟเส้นตรง คือ กราฟที่มีสมการในรูป $Ax + By + C = 0$ เมื่อ A, B, C เป็นตัวเลขอะไรก็ได้
เมื่อตอน ม. ต้น เราได้เรียนวิธีวาดกราฟ ของสมการกราฟเส้นตรง ไปแล้ว
โดยเราจะใช้วิธีแทนค่า หาจุดซัก 2 - 3 จุดที่ทำให้สมการกราฟเป็นจริง แล้วลากเส้นผ่าน

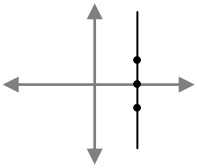
เช่น $2x - y + 3 = 0$

x	-1	0	1
y	1	3	5



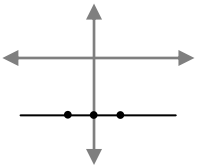
$x = 2$

x	2	2	2
y	-1	0	1



$y = -3$

x	-1	0	1
y	-3	-3	-3

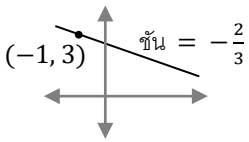


ในทางกลับกัน ถ้ากำหนดเงื่อนไขต่างๆของกราฟมา เราต้องสามารถย้อนกลับไปหาสมการกราฟได้
สูตรสำหรับหาสมการกราฟ จากเงื่อนไขต่างๆ มีดังนี้

- ผ่านจุด (x_1, y_1) และมีความชัน $= m$

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$$

เช่น

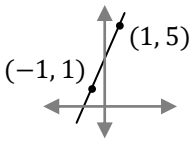


$$\frac{y-3}{x-(-1)} = -\frac{2}{3}$$
$$3y - 9 = -2x - 2$$
$$2x + 3y - 7 = 0$$

- ผ่านจุด (x_1, y_1) และ (x_2, y_2)

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

เช่น

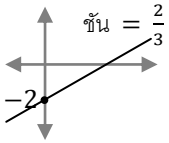


$$\frac{y-5}{x-1} = \frac{5-1}{1-(-1)}$$
$$2y - 10 = 4x - 4$$
$$0 = 4x - 2y + 6$$
$$0 = 2x - y + 3$$

- มีความชัน $= m$ และ มีระยะตัดแกน Y คือ c

$$y = mx + c$$

เช่น

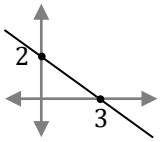


$$y = \frac{2}{3}x + (-2)$$
$$3y = 2x - 6$$
$$0 = 2x - 3y - 6$$

- มีระยะตัดแกน X คือ a และ มีระยะตัดแกน Y คือ b

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

เช่น



$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$$
$$2x + 3y = 6$$
$$2x + 3y - 6 = 0$$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $4x + 3y + 2 = 0$

<u>วิธีทำ</u> เส้นตรงที่ต้องการต้องตั้งฉากกับ $4x + 3y + 2 = 0$

แปลว่า ความชันของเส้นที่ต้องการ คูณกับความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ ต้องได้ -1

$$\begin{aligned} 4x + 3y + 2 &= 0 \\ 3y &= -4x - 2 \\ y &= -\tfrac{4}{3}x - \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

หาความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ ก่อน โดยจัดรูปให้เป็น $y = mx + c$ แล้วเอา m ไปใช้ จะได้ความชันของ $4x + 3y + 2 = 0$ คือ $-\frac{4}{3}$

ดังนั้น ความชันของเส้นที่ต้องการ คือ $\frac{3}{4}$ (เพราะ $\frac{3}{4}$ คูณ $-\frac{4}{3}$ ได้ -1)

ใช้สูตร $\frac{y-y_1}{x-x_1} = m$ หาสมการเส้นตรงที่ผ่าน $(-1, 2)$ และ ชัน $= \frac{3}{4}$ ได้ $\frac{y-2}{x-(-1)} = \frac{3}{4}$

$$\begin{aligned} 4y - 8 &= 3x + 3 \\ 0 &= 3x - 4y + 11 \end{aligned}$$

ดังนั้น สมการเส้นตรงที่ต้องการ คือ $3x - 4y + 11 = 0$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-2, 1)$ และ $(3, -1)$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0, -2)$ และขนานกับเส้นตรง $2x + y - 1 = 0$

3. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x = 1 - 3y$

4. กำหนดให้ $P(-1,-1)$ และ $Q(1,c)$ เป็นจุดในระนาบ XY ถ้า ℓ เป็นเส้นตรงซึ่งผ่านจุด P, Q และมีความชันเท่ากับ 3 แล้ว จงหาสมการเส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 และผ่านจุด Q

5. ให้ L เป็นเส้นตรงที่ผ่านจุด $(0,1)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x+2y=6$ พื้นที่ของบริเวณในควอดรันต์ (quadrant) ที่ 1 ซึ่งล้อมร้อบด้วย แกน x แกน y เส้นตรง L เส้นตรง $x+2y=6$ เท่ากับกี่ตารางหน่วย [PAT 1 (ต.ค. 55)/40]

6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $A(0,0)$ และ $B(2,2)$ เป็นจุดยอด และ $C(x,y)$ เป็นจุดยอดในจตุภาค (quadrant) ที่ 2 ที่ทำให้ด้าน AC ยาวเท่ากับด้าน BC ถ้าพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC มีค่าเท่ากับ 4 ตารางหน่วย แล้วจุด C อยู่บนเส้นตรงในข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (มี.ค. 53)/15]

1. $x-y+4=0$
2. $4x+3y-1=0$
3. $2x-y-3=0$
4. $x+y-5=0$

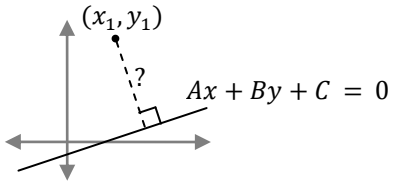
7. รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม $A\hat{B}C$ เป็นมุมฉาก และด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 10 หน่วย ถ้าพิกัดของจุด A และจุด B คือ $(-4, 3)$ และ $(-1, 2)$ ตามลำดับ แล้วสมการเส้นตรงในข้อใดผ่านจุด C [PAT 1 (ก.ค. 53)/9]

1. $x + 8y - 27 = 0$
2. $8x + y - 27 = 0$
3. $4x - 5y + 3 = 0$
4. $-5x + 4y + 3 = 0$

8. กำหนดให้ $a > \tan 60°$ และ $A(a, 3)$, $B(7,8)$ และ $C(-4,9)$ เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม A เป็นมุมฉาก ให้ L เป็นสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด A และจุด B
จงหาจำนวนเต็มบวก k ที่น้อยที่สุดที่ทำให้พาราโบลา $ky = x^2 + 2k$ มีจุดร่วมกับเส้นตรง L เพียงจุดเดียว
[PAT 1 (มี.ค. 54)/34]

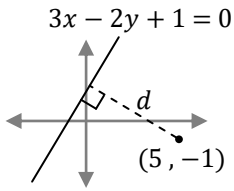
ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง

หัวข้อนี้จะเป็นสูตรสำหรับหาระยะตั้งฉาก จากจุด ไปยังเส้นตรง
ก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน

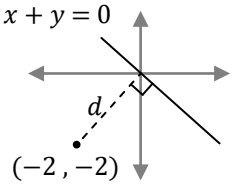


ระยะตั้งฉาก จากจุด (x_1, y_1)
ไปยัง เส้นตรง $Ax + By + C = 0$
หาได้จากสูตร $\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

เช่น



$d = \frac{|3(5)-2(-1)+1|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}$
$= \frac{18\sqrt{13}}{13}$



$d = \frac{|(-2)+(-2)|}{\sqrt{1^2+1^2}}$
$= 2\sqrt{2}$

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะห่างระหว่างจุด $(-2, 1)$ กับเส้นตรง $y = 2x - 3$

<u>วิธีทำ</u> จัด $y = 2x - 3$ ให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน ได้เป็น $2x - y - 3 = 0$

จะได้ ระยะห่าง คือ $\frac{|(2)(-2)-(1)-3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาสมการกราฟเส้นตรงที่มีความชัน $\frac{3}{4}$ และอยู่ห่างจากจุด $(1, 0)$ เป็นระยะทาง 2 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> ความชัน $= \frac{3}{4}$ ดังนั้น สมการกราฟต้องอยู่ในรูป $y = \frac{3}{4}x + c$

จัดให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ได้ $y = \frac{3}{4}x + c$

$4y = 3x + 4c$

$0 = 3x - 4y + 4c$

ดังนั้น ระยะจาก $(1, 0)$ ไป เส้นตรงนี้ จะเท่ากับ $\frac{|3(1)-4(0)+4c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \frac{|3+4c|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3+4c|}{5}$

ดังนั้น $\frac{|3+4c|}{5} = 2$

$|3 + 4c| = 10$

$3 + 4c = \pm 10$

$4c = 7, -13$

ไม่ต้องหา c ก็ได้ เอา $4c$ ไปแทน ใน $3x - 4y + 4c = 0$ ได้เลย

จะได้สมการกราฟ คือ $3x - 4y + 7 = 0$ กับ $3x - 4y - 13 = 0$ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาระยะระหว่างจุดกับเส้นตรงที่กำหนดให้ต่อไปนี้
   1. $(-2, 1)$ กับ เส้นตรง $x - y + 1 = 0$
   2. $(-3, -5)$ กับ เส้นตรง $y = 0$

2. วงกลมวงหนึ่ง มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(2,-1)$ และมีเส้นตรง $x+y-4=0$ เป็นเส้นสัมผัส จงหารัศมีของวงกลมวงนี้

3. จงหาสมการกราฟเส้นตรงที่ตั้งฉากกับเส้นตรง $12x+5y-3=0$ และอยู่ห่างจากจุด $(-1,-1)$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย

4. สามเหลี่ยม ABC มีจุด $\mathrm{A}(3,4)$, $\mathrm{B}(0,-2)$, $\mathrm{C}(3,1)$ จงหาความยาวของส่วนสูงที่ลากจาก A ไปยังฐาน $\overline{\mathrm{BC}}$

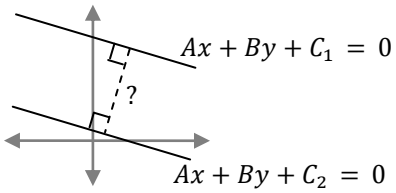
5. จุด $A(-3,1)$ $B(1,5)$ $C(8,3)$ และ $D(2,-3)$ เป็นจุดยอดของรูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ ข้อใดต่อไปนี้ผิด [PAT 1 (มี.ค. 53)/9]
   1. ด้าน AB ขนานกับ ด้าน DC
   2. ผลบวกความยาวของด้าน AB กับ DC เท่ากับ $10\sqrt{2}$ หน่วย
   3. ระยะตั้งฉากจากจุด A ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ หน่วย
   4. ระยะตั้งฉากจากจุด B ไปยังเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด D มีค่าเท่ากับ $\frac{9}{2}$ หน่วย

6. กำหนดให้ $\mathrm{M}(a,b)$ เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรงที่เชื่อมจุดตัดระหว่างกราฟ $xy=6$ กับเส้นตรง $x-y-1=0$ จงหาระยะระหว่างจุด M กับเส้นตรง $6x-8y+13=0$ [PAT 1 (ธ.ค. 54)/30*]

7. ให้ A เป็นจุดตัดของเส้นตรง $x-3y+1=0$ และ $2x+5y-9=0$ ถ้าเส้นตรง L มีความชันเท่ากับ m เมื่อ $m<0$ มีระยะห่างจากจุดกำเนิด $(0,0)$ เท่ากับ k หน่วย โดยที่ $k^2+2m=1$ และผ่านจุด A แล้วสมการของเส้นตรง L ตรงกับข้อใดต่อไปนี้ [PAT 1 (เม.ย. 57)/10]
   1. $2x+y-5=0$ 2. $3x+y-7=0$ 3. $x+2y-4=0$ 4. $x+3y-5=0$

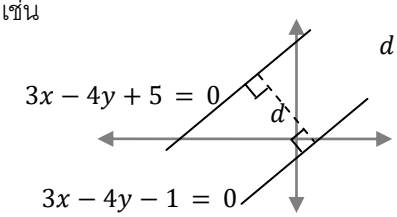
ระยะระหว่างเส้นขนาน

หัวข้อนี้จะเป็นสูตรสำหรับหาระยะตั้งฉาก ระหว่างเส้นขนาน
ก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการเส้นตรงให้อยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ ก่อน

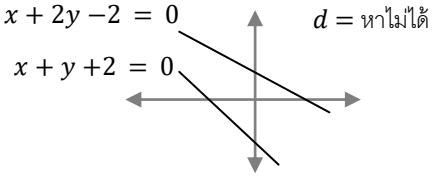


ระยะระหว่างเส้นตรง $Ax + By + C_1 = 0$
กับเส้นตรง $Ax + By + C_2 = 0$
หาได้จากสูตร $\frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

จะเห็นว่าก่อนจะใช้สูตรนี้ได้ ต้องจัดสมการของทั้งสองเส้น ให้มีส่วน $Ax + By$ เท่ากันก่อน
(ถ้าจัดไม่ได้ แปลว่าเส้นตรงสองเส้นนั้นไม่ขนานกัน หาระยะตั้งฉากไม่ได้)
เช่น



$d = \frac{|5-(-1)|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$
$= \frac{6}{5}$



<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะห่างระหว่าง $2(x - y) = 5$ และ $y = x + 2$
<u>วิธีทำ</u> จัดรูปทั้งสองสมการให้เป็นรูป $Ax + By + C = 0$ ที่มี $Ax + By$ เหมือนกันก่อน

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 5 \\ 2x - 2y &= 5 \\ 2x - 2y - 5 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x + 2 \\ 0 &= x - y + 2 \\ 0 &= 2x - 2y + 4 \end{aligned}$$

คูณ 2 ตลอด จะได้เป็น $2x - 2y$ เหมือนฝั่งโน้น

ดังนั้น ระยะห่าง $= \frac{|4-(-5)|}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{|9|}{\sqrt{8}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$ #

<u>ตัวอย่าง</u> จงหาระยะห่างระหว่าง $x - y + 1 = 0$ และ $x + y - 2 = 0$
<u>วิธีทำ</u> ข้อนี้จะเห็นว่าทั้งสองสมการอยู่ในรูป $Ax + By + C = 0$ อยู่แล้ว
แต่อันแรกเป็น $x - y$ อีกอันเป็น $x + y$ ดังนั้น เอาอะไรมาคูณก็ไม่มีทางเป็น $Ax + By$ เหมือนกันได้
ดังนั้น สองเส้นนี้<u>ไม่</u>ขนานกัน หาระยะห่างไม่ได้ #

<u>แบบฝึกหัด</u>

1. จงหาระยะห่างระหว่างเส้นตรงต่อไปนี้
   1. $12x + 5y - 32 = 0$ และ $12x + 5y + 33 = 0$

2. $4x - 3y - 1 = 0$ และ $6y - 8x = 2$

3. $x - y = 2$ และ $y - x = 3$

4. $y = -1$ และ $y = 5$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่อยู่ห่างจากเส้นตรง $y = \sqrt{3}x - 2$ เป็นระยะทาง 3 หน่วย

3. จงหาส่วนสูงของสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD เมื่อกำหนดพิกัด $A(1, 4)$, $B(7, 4)$, $C(3, -2)$, $D(-1, 1)$

4. กำหนดให้ L_1 เป็นเส้นตรงผ่านจุด $(-2,-4)$ มีความชันเป็นจำนวนเต็มบวก และตัดแกน X และแกน Y ที่จุด A และจุด B ตามลำดับ โดยผลบวกของระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y เท่ากับ 3 หน่วย ให้ L_2 เป็นเส้นตรงที่ขนานกับเส้นตรง L_1 และผ่านจุด $(0,-13)$ ถ้า C เป็นจุดบนเส้นตรง L_2 โดยที่ $CA = CB$ แล้วพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ABC เท่ากับกี่ตารางหน่วย [PAT 1 (พ.ย. 57)/17]

ระยะระหว่างจุด

1. 1. 5 2. 13 3. $2\sqrt{2}$ 4. 3
2. $\sqrt{10}$ 3. $(0,5)$ 4. 32 5. 14.5

จุดกึ่งกลาง

1. 1. $(3,1)$ 2. $(-2,0)$ 3. $(2,-\frac{1}{2})$ 4. $(-1,-\frac{1}{2})$
2. $(5,1)$

ความชัน

1. 1. 4 2. -1 3. หาไม่ได้ 4. -2
2. เป็น 3. $(5,0)$ หรือ $(3,0)$ 4. 17

สมการกราฟเส้นตรง

1. $2x+5y-1=0$ 2. $2x+y+2=0$
3. $3x-y-1=0$

4. $y=-2x+7$

จากสูตรความชัน $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ จะได้ ℓ จะมีความชัน $=\frac{c-(-1)}{1-(-1)}=3$ แก้สมการจะได้ $c=5$
เส้นตรงที่มีความชันเท่ากับ -2 จะอยู่ในรูป $y=-2x+k$ และต้องผ่านจุด $Q(1,5)$ แสดงว่า $5=-2(1)+k$
แก้สมการ ได้ $k=7$ ดังนั้น คำตอบคือ $y=-2x+7$

5. 8.2 6. 1 7. 2 8. 4

ระยะระหว่างจุดกับเส้นตรง

1. 1. $\sqrt{2}$ 2. 5
2. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 3. $5x-12y-46=0$, $5x-12y+32=0$
4. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 5. 4 6. 2 7. 1

ระยะระหว่างเส้นขนาน

1. 1. 5 2. $\frac{2}{5}$ 3. $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ 4. 6
2. $\sqrt{3}x-y+4=0$, $\sqrt{3}x-y-8=0$ 3. $\frac{18\sqrt{13}}{13}$
4. 8.5

เครดิต

ขอบคุณ Theerat Piyaanangul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสารครับ