

PAT 1 (มี.ค. 56)

รหัสวิชา 71 วิชา ความถนัดทางคณิตศาสตร์ (PAT 1)

วันเสาร์ที่ 2 มีนาคม 2556 เวลา 13.00 - 16.00 น.

ตอนที่ 1 ข้อ 1 - 25 ข้อละ 5 คะแนน

1. กำหนดให้ P แทน ประพจน์ “ถ้า $A \cup C \subset B \cup C$ แล้ว $A \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ”
และให้ Q แทน ประพจน์ “ถ้า $C \subset A \cup B$ แล้ว $C \subset A$ และ $C \subset B$ เมื่อ A, B และ C เป็นเซตใดๆ”
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ประพจน์ $[(P \vee Q) \wedge \sim Q] \Leftrightarrow P$ มีค่าความจริงเป็น จริง

(ข) ประพจน์ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\sim P \wedge \sim Q)$ มีค่าความจริงเป็น เท็จ

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

2. กำหนดให้ \mathcal{U} เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆใน \mathcal{U} พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $A - [(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C)] = A - B$

(ข) เพาเวอร์เซตของเซต $A - (B \cup C)$ เท่ากับเพาเวอร์เซตของเซต $(A - B) - C$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

5. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง กำหนดให้ $r = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid \sqrt{12 - |x|} + \sqrt{y + 1} = 3 \}$
พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) $D_r \cap R_r \subset (-1, 8)$

(ข) $D_r - R_r = \{ x \in \mathbb{R} \mid 8 < x \leq 12 \}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

6. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่จำนวนสมาชิกของเซต A และ B เท่ากับ 4 และ 5 ตามลำดับ
และจำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับ 7 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ใน $A \cap B$ มี 4 ความสัมพันธ์

(ข) ความสัมพันธ์จาก $A - B$ ไป $B - A$ มี 64 ความสัมพันธ์

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก
2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด
3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก
4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด

7. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก) ความสัมพันธ์ $\{(x, y) \in R \times R \mid x^2 + y^2 = 4, xy > 0\}$ เป็นฟังก์ชัน

(ข) ถ้า $f(x) = \begin{cases} x - 2 & , x \leq 0 \\ x^2 & , x > 0 \end{cases}$ และ $g(3x - 1) = 2x^2 + 3x$ สำหรับ $x \in R$

แล้วค่าของ $(g \circ f^{-1})(25) = 14$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

8. ให้พาราโบลา P มีสมการเป็น $y^2 - 2y + 6x + 4 = 0$ ถ้าวงกลมวงหนึ่งผ่านจุดโฟกัสของพาราโบลา P และสัมผัสกับเส้นตรง $3x - 2y - 6 = 0$ ณ จุด $(4, 3)$ แล้วสมการของวงกลมตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $7x^2 + 7y^2 - 4x - 82y - 55 = 0$ | 2. $7x^2 + 7y^2 + 4x + 82y + 55 = 0$ |
| 3. $7x^2 + 7y^2 - 4x + 82y - 55 = 0$ | 4. $7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$ |

9. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

$$(ก) \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ$$

$$(ข) \sqrt{3} \cot 20^\circ = 1 + 4 \cos 20^\circ$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1. (ก) ถูก และ (ข) ถูก | 2. (ก) ถูก แต่ (ข) ผิด |
| 3. (ก) ผิด แต่ (ข) ถูก | 4. (ก) ผิด และ (ข) ผิด |

10. ถ้า x เป็นจำนวนจริงที่มากที่สุด โดยที่ $0 < x < 1$ และสอดคล้องกับ

$$\arctan(1-x) + \operatorname{arccot}\left(\frac{1}{2x}\right) = 2 \operatorname{arcsec} \sqrt{1+2x(1-x)} \text{ แล้ว ค่าของ } \cos \pi x \text{ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้}$$

- | | | | |
|---------|--------|------------------|-------------------------|
| 1. -1 | 2. 0 | 3. $\frac{1}{2}$ | 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|---------|--------|------------------|-------------------------|

11. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , |x| < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{x} & , |x| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ ค่าของ $f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right)$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

- | | | | |
|---------|--------|---------|--------|
| 1. -6 | 2. 6 | 3. -3 | 4. 3 |
|---------|--------|---------|--------|

12. ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า A เป็นเซตคำตอบของสมการ $\log_x \left(\frac{2}{x-1} \right) \geq 1$ แล้ว A เป็นสับเซตในข้อใดต่อไปนี้

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid |x^2 + 2x - 3| = 3 - 2x - x^2\}$ 2. $\{x \in \mathbb{R} \mid |2x + 5| > 9\}$
 3. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq |x + 3| \leq 5\}$ 4. $\{x \in \mathbb{R} \mid x^3 > 3x^2\}$

13. กำหนดให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ มีมิติ 3×3 โดยที่ $\det(A) = 2$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & x \\ 0 & -2 & y \end{bmatrix}$ เมื่อ x และ y เป็น

จำนวนจริง ถ้า $AB + 3A = 2I$ เมื่อ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ที่มีมิติ 3×3 แล้ว $x + y$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. -1 3. -2 4. -2.5

16. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้าด้านตรงข้ามมุม A ยาว 14 หน่วย ความยาวของเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมเท่ากับ 30 หน่วยและ $3 \sin B = 5 \sin C$ แล้ว $\sin 2A$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$ 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. กำหนดให้ $9x^2 - 16y^2 - 18x + 64y - 199 = 0$ เป็นสมการของไฮเพอร์โบลา ถ้าพาราโบลารูปหนึ่งมีแกนสมมาตรขนานแกน y ตัดแกน x ที่จุด $(1, 0)$ และผ่านจุดยอดทั้งสองของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บนพาราโบลา

1. $(2, \frac{1}{8})$ 2. $(-1, \frac{1}{2})$ 3. $(3, \frac{1}{2})$ 4. $(4, \frac{1}{4})$

18. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $a_n = \frac{1}{4+8+12+\dots+4n}$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \dots$ ผลบวกของอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{2}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{3}{2}$ 4. 2

22. ในการโยนลูกเต๋าสองลูกจำนวนหนึ่งครั้ง ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลคูณของแต้มบนลูกเต๋าทิ้งสอง ทหารด้วย 4 ลงตัว เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{6}{36}$

2. $\frac{11}{36}$

3. $\frac{15}{36}$

4. $\frac{27}{36}$

23. ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิก 6 คน มีอายุเฉลี่ย 34 ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเท่ากับ 8 ปี อีก 6 ปีต่อมามีญาติสองคนมาขออยู่อาศัยด้วย โดยที่ญาติทั้งสองคนนี้มีอายุเท่ากัน เท่ากับอายุเฉลี่ยของคนทั้ง 6 คนในครอบครัวนี้พอดี สัมประสิทธิ์การแปรผันของอายุของคนทั้ง 8 คนนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี

1. $\frac{\sqrt{3}}{10}$

2. $\frac{10}{\sqrt{3}}$

3. $\frac{\sqrt{3}}{20}$

4. $\frac{20}{\sqrt{3}}$

24. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีดังนี้ 2, 4, 3, 5, 12, 5, 18, 6, 4, 2, 9, 4

ข้อใดต่อไปนีถูกต้อง

1. มัธยฐานน้อยกว่าฐานนิยม

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตมากกว่ามัธยฐาน

3. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับมัธยฐาน

4. ฐานนิยมมากกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิต

25. กำหนดให้ $A = \sqrt{7\sqrt{5}}$, $B = \sqrt{5\sqrt{7}}$, $C = \sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ และ $D = \sqrt[3]{7\sqrt{5}}$ ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
1. $D > C > A > B$
 2. $A > C > B > D$
 3. $A > B > D > C$
 4. $C > A > D > B$

ตอนที่ 2 ข้อ 26 - 50 ข้อละ 7 คะแนน

26. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $A \cap B \neq \emptyset$
สับเซตของ A ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 10 เซต และสับเซตของ B ที่มีสมาชิก 2 ตัว มีทั้งหมด 6 เซต
ถ้า จำนวนสมาชิกของ $P(P(A \cap B))$ เท่ากับ 16 เมื่อ $P(S)$ แทน เพาเวอร์เซตของ S
แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

27. ถ้า x และ y เป็นจำนวนจริงบวกที่สอดคล้องกับสมการ $5^{(x-2^A)}2^{y^A} = (16)^{64}$ เมื่อ $A = \frac{\log y}{\log x}$
แล้ว ค่าของ $x + y$ เท่ากับเท่าใด

28. กำหนดให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$

ถ้า $(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

29. ให้ \mathbb{R} แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \log_{\sqrt{3}}(x-1) - \log_{\sqrt[3]{3}}(x-1) = 1\}$ และ

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = 2\}$$

แล้วสามเท่าของผลคูณของสมาชิกในเซต $A \cup B$ ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

30. กำหนดให้ A แทนเซตคำตอบของสมการ $5^{(1+\sqrt{x^2-4x-1})} + 5^{\left(\frac{5+4x-x^2}{2+\sqrt{x^2-4x-1}}\right)} = 126$

ผลบวกของสมาชิกในเซต A ทั้งหมดเท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และมีโฟกัส F_1 และ F_2 อยู่บนแกน x จุด $A(4, 1)$ เป็นจุดบนวงรีโดยที่ผลบวกระยะทางจากจุด $A(4, 1)$ ไปยังจุดโฟกัสทั้งสองมีค่าเท่ากับ $6\sqrt{2}$ ให้เส้นตรง L ตัดแกน x ที่จุด $(4.5, 0)$ และสัมผัสกับวงรีที่จุด $A(4, 1)$ ถ้า d เป็นระยะห่างระหว่างจุด $(0, 0)$ กับเส้นตรง L แล้ว ค่าของ $d^2|AF_1||AF_2|$ เท่ากับเท่าใด

32. กำหนดให้ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ โดยที่ $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}}\right) - \arctan(\sqrt{x})$ เมื่อ $0 < x < 1$ ค่าของ $\tan \theta + \cot \theta$ เท่ากับเท่าใด

33. ให้ S เป็นเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดที่ทำให้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 \\ x & -1 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์เอกฐาน และให้ y เท่ากับผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S ถ้า $A = \begin{bmatrix} y & 1 \\ -1 & y \end{bmatrix}$ แล้ว ค่าของ $\det((A^t)^{-1})^{-1}$ เท่ากับเท่าใด

34. กำหนดให้ $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ เป็นลำดับเรขาคณิตของจำนวนจริงบวก โดยมี r เป็นอัตราส่วนร่วม และ

$$\frac{a_1+a_3}{a_2+a_4} + \frac{a_3+a_5}{a_4+a_6} + \frac{a_5+a_7}{a_6+a_8} + \dots + \frac{a_{2011}+a_{2013}}{a_{2012}+a_{2014}} = 2012$$

ค่าของ $1 + 5r + 12r^2 + 22r^3 + \dots$ เท่ากับเท่าใด

35. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่อยู่ในควอดรันต์ (quadrant) ที่หนึ่งบนระนาบเชิงซ้อน

โดยที่ $\left| \frac{(z+1)(1+i)}{z(1+i)+5+i} \right| = 1$ และ $|z| = \sqrt{65}$ แล้วผลบวกของส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z เท่ากับเท่าใด

36. กำหนดให้ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 และ $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ เป็นลำดับเลขคณิตของจำนวนจริงบวก

โดยที่ $a_1 = b_2, a_5 = b_5$ และ $a_1 \neq a_5$ ถ้า $\frac{(b_6-b_4)+(b_6-b_1)}{a_4-a_2} = \frac{x}{y}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ x กับ y เท่ากับ 1 แล้ว $x^2 + y^2$ เท่ากับเท่าใด

37. สำหรับ $n = 2, 3, 4, \dots$ ให้ $a_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

ค่าของ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_2 a_3 a_4 \dots a_n}{(a_2 - 1)(a_3 - 1)(a_4 - 1) \dots (a_n - 1)}$ เท่ากับเท่าใด

38. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} \frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} & , x < 4 \\ \frac{kx}{3} & , x \geq 4 \end{cases}$ โดยที่ k เป็นจำนวนจริง ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = 4$ แล้ว $f(k+1)$ เท่ากับเท่าใด

39. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนและเรนจ์เป็นสับเซตของจำนวนจริง โดยที่อัตราการเปลี่ยนแปลงของ $f(x)$ เทียบกับ x เท่ากับ $ax^3 + bx$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง และให้ $g(x) = (x^3 + 2x)f(x)$ ถ้า $f'(1) = 18$, $f''(0) = 6$ และ $f(2) = f(1) + f(0)$ แล้วค่าของ $g'(-1)$ เท่ากับเท่าใด

40. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นพหุนามกำลังสาม ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง โดยที่มี $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $f(x)$
 $5 + 2i$ เป็นคำตอบของสมการ $f(x) = 0$ และ $f(0) = 58$ ค่าของ $\int_0^2 [f(x) - f(-x)]dx$ เท่ากับเท่าใด

41. ต้องการนำเลขโดด 1, 1, 2, 2, 3, 3 ทั้ง 6 ตัวมาจัดเรียงเป็นจำนวนที่มี 6 หลัก จะสร้างจำนวนที่มี 6 หลักได้ทั้งหมดกี่จำนวน เมื่อ เลข 1 ทั้งสองตัวไม่ติดกันและเลข 3 ทั้งสองตัวไม่ติดกัน

42. กำหนดให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $a < 2b$, $b < 5c$, $c < 6d$ และ $d < 100$
 ค่าของ a มีค่ามากที่สุดเท่ากับเท่าใด

43. กำหนดให้ $a, b, c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ จงหาจำนวน 3 หลัก abc ที่มีค่ามากที่สุด โดยที่สอดคล้องกับสมการ $abc = ab + ba + ac + ca + bc + cb$ (หมายเหตุ abc แทนจำนวน 3 หลัก และ ab, ba, ac, ca, bc, cb แทนจำนวน 2 หลัก)
44. จังหวัดแห่งหนึ่งมีอำเภอ 6 อำเภอ แต่ละอำเภอส่งผู้แทนอำเภอละ 2 คนเป็นชาย 1 คนและเป็นหญิง 1 คน ถ้าต้องการคัดเลือกกรรมการ 4 คน เป็นชาย 2 คน และหญิง 2 คน จากตัวแทนทั้ง 12 คน โดยในบรรดากรรมการ 4 คนนี้จะต้องเป็นชายและหญิงอย่างน้อย 1 คู่ มาจากอำเภอเดียวกัน จะมีวิธีการคัดเลือกกี่วิธี
45. กำหนดให้ \vec{a}, \vec{b} และ \vec{c} เป็นเวกเตอร์บนระนาบซึ่งกำหนดโดย $\vec{a} = x\vec{i} + \frac{12}{5}\vec{j}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + y\vec{j}$ และ $\vec{c} = 2\vec{i} + \vec{j}$ เมื่อ x และ y เป็นจำนวนจริง ถ้า $|\vec{b} - \vec{c}| = 5$, เวกเตอร์ \vec{a} ตั้งฉากกับเวกเตอร์ \vec{b} และ $\vec{a} \cdot \vec{c} > 0$ แล้วค่าของ $|5\vec{a} + \vec{b}|^2$ เท่ากับเท่าใด

46. ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ นาย ก. และนาย ข. เป็นนักเรียนในห้องนี้ ถ้ามีนักเรียนในห้องนี้ ร้อยละ 9.48 สอบได้คะแนนมากกว่าคะแนนสอบของ นาย ก. มีนักเรียนร้อยละ 10.64 สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของ นาย ข. และ นาย ข. สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของนาย ก. อยู่ 51 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับเท่าใด
- เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ ระหว่าง 0 ถึง z ดังตารางต่อไปนี้

z	0.24	0.27	1.24	1.31
พื้นที่	0.0948	0.1064	0.3936	0.4052

47. จากการสำรวจคะแนนสอบของนักเรียน 6 คน ที่มีคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (x_i) และคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (y_i) ปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์เท่ากับ 9 คะแนน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 6 คะแนน และ $\sum_{i=1}^6 x_i y_i = 428$, $\sum_{i=1}^6 x_i^2 = 694$ และ $\sum_{i=1}^6 y_i^2 = 268$
- ถ้าคะแนนสอบวิชาทั้งสองมีความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันแบบเส้นตรง และนักเรียนคนหนึ่งที่มีคะแนนวิชาคณิตศาสตร์เท่ากับ 7.5 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ โดยประมาณควรจะมีค่าเท่ากับเท่าใด

48. สำหรับ $x, y \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ กำหนดให้ $F(x, y)$ เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่

$$F(x, y) = \begin{cases} F(1, y-1) & , x = 0, y \neq 0 \\ x + 1 & , y = 0 \\ F(F(x-1, y), y-1) & , x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

ค่าของ $F(1, 2) + F(3, 1)$ เท่ากับเท่าใด

49. สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ เป็นจำนวนจริงบวก ที่มีสมบัติต่อไปนี้

$$(1) x * (xy) = (x * x)y$$

$$(2) x * (1 * x) = 1 * x$$

$$(3) 1 * 1 = 1$$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

50. กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง ถ้า $f : R \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งสอดคล้องกับ

$$(f \circ f)(x) = 4 + x(4 - f(x)) \text{ สำหรับทุกจำนวนจริง } x \text{ แล้วค่าของ } f(4) \text{ เท่ากับเท่าใด}$$

เฉลย

1. 2	11. 2	21. 1	31. 162	41. 42
2. 1	12. 3	22. 3	32. 2	42. 5927
3. 2	13. 4	23. 1	33. 2	43. 396
4. 3	14. 2	24. 2	34. 16	44. 135
5. 4	15. 4	25. 3	35. 11	45. 200
6. 3	16. 2	26. 7	36. 205	46. 20
7. 1	17. 4	27. 20	37. 3	47. 12
8. 4	18. 1	28. 373	38. 24	48. 10
9. 1	19. 4	29. 5	39. 354	49. 6
10. 3	20. 2	30. 4	40. 168	50. 4

แนวคิด

1. 2

P เป็นเท็จ เช่น $C = \{1\}$, $A = \{1\}$, $B = \{\}$ และ Q ก็เป็นเท็จ เช่น $C = \{1, 2\}$, $A = \{1\}$, $B = \{2\}$
จะได้ (ก) คือ $[(F) \wedge T] \Leftrightarrow F \equiv T$ ถูกต้อง และ (ข) คือ $(T) \Rightarrow (T) \equiv T$ ผิด

2. 1

ก. เนื่องจาก $A \cap B \subset A \cup B \cup C$ ดังนั้น $(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C) = A \cap B$
ดังนั้น $A - [(A \cap B) \cap (A \cup B \cup C)] = A - (A \cap B) = A - B \rightarrow$ ก. ถูก
ข. $A - (B \cup C) = A \cap (B \cup C)' = A \cap B' \cap C' = (A - B) - C \rightarrow$ ข. ถูก

3. 2

เป็นเท็จ เมื่อ $T \rightarrow F$ ข้างหน้า จะได้ $2x + 1 > x - 1$ หรือ $2x + 1 < -(x - 1)$ หรือ $x - 1 \leq 0$ ได้ $(-2, \infty) \cup (-\infty, 0) \cup (-\infty, 1] = \mathbb{R}$ ดังนั้น $\forall x[|2x + 1| > x - 1]$ ยังไงก็จริงข้างหลัง ยกกำลังสองได้ (เพราะเป็นบวกทั้งสองข้าง) ได้ $\left(\frac{x-2}{x+2}\right)^2 < 2^2$ ตัวหารห้ามเป็น 0 $\rightarrow x \neq -2$ คูณ $(x + 2)^2$ ตลอดได้ (เป็นบวก ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย) แล้วย้ายข้างได้ $(x - 2)^2 - (2x + 4)^2 < 0$
 $\rightarrow (3x + 2)(-x - 6) < 0$ ได้คำตอบคือ $(-\infty, -6) \cup (-\frac{2}{3}, \infty)$ ดังนั้น เอกภพสัมพัทธ์ที่จะทำให้ข้างหลังเป็นเท็จ ต้องไม่มีส่วนไหนอยู่ในช่วง $(-\infty, -6) \cup (-\frac{2}{3}, \infty) \rightarrow$ ตอบ 2

4. 3

 A แบ่งกรณี กรณี $(-\infty, 0)$ ได้ $-3x \leq 2 \rightarrow x \geq -\frac{2}{3} \rightarrow [-\frac{2}{3}, 0)$ กรณี $[0, \frac{5}{2})$ ได้ $-x \leq 2 \rightarrow x \geq -2 \rightarrow [0, \frac{5}{2})$ กรณี $[\frac{5}{2}, \infty)$ ได้ $3x \leq 12 \rightarrow x \leq 4 \rightarrow [\frac{5}{2}, 4]$ รวมทุกกรณีได้ $A = [-\frac{2}{3}, 4]$ B แบ่งกรณี กรณี $(-\infty, 0)$ ได้ $x^2 + x - 12 < 0 \rightarrow (x + 4)(x - 3) < 0 \rightarrow x \in (-4, 3) \rightarrow (-4, 0)$ กรณี $[0, \infty)$ ได้ $x^2 - x - 12 < 0 \rightarrow (x - 4)(x + 3) < 0 \rightarrow x \in (-3, 4) \rightarrow [0, 4)$ รวมทุกกรณีได้ $B = (-4, 4)$ $A \cap B = [-\frac{2}{3}, 4) \rightarrow$ ก ผิด, $A - B = \{4\} \rightarrow$ ข ถูก

5. 4

หา D_r : เนื่องจาก ผลรูท ≥ 0 ดังนั้น $\sqrt{12 - |x|} = 3 - \sqrt{y + 1} \leq 3$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง และเนื่องจาก ในรูท ≥ 0 จะได้ $0 \leq 12 - |x| \leq 9$

ลบ 12 แล้วคูณ -1 ได้ $3 \leq |x| \leq 12$ จะได้ $D_r = [-12, -3] \cup [3, 12]$

หา R_r : ทำแบบเดียวกัน จะได้ $\sqrt{y + 1} = 3 - \sqrt{12 - |x|} \leq 3$

และจะได้ $0 \leq y + 1 \leq 9$ จะได้ $R_r = [-1, 8]$

$D_r \cap R_r = [3, 8]$ มี 8 ดังนั้น ก ผิด , $D_r - R_r = [-12, -3] \cup (8, 12]$ มีเลขลบด้วย ดังนั้น ข ผิด

6. 3

ก. $n(A \cap B) = 4 + 5 - 7 = 2 \rightarrow$ มี $2^{2 \times 2} = 16 \rightarrow$ ก ผิด

ข. $n(A - B) = 4 - 2 = 2$, $n(B - A) = 5 - 2 = 3 \rightarrow$ มี $2^{2 \times 3} = 64 \rightarrow$ ข ถูก

7. 1

ก. เป็นวงกลมที่เอียงเฉพาะเส้นภายใน Q_1 กับ Q_3 ลากแนวตั้งตัดไม่เกิน 1 จุด \rightarrow ก. ถูก

ข. หา $f^{-1}(25)$ ให้ $x - 2 = 25$ ได้ $x = 27$ ซัดกับเงื่อนไข $x \leq 0$

ให้ $x^2 = 25$ ได้ $x = \pm 5$ ถ้าจะให้ตรงกับเงื่อนไข $x > 0$ จะได้ $x = 5$ ดังนั้น $f^{-1}(25) = 5$

หา $g(5)$ ให้ $3x - 1 = 5$ ได้ $x = 2$ แทนใน $2x^2 + 3x$ จะได้ 14 \rightarrow ข. ถูก

8. 4

พาราโบลาคือ $(y - 1)^2 = -6(x + \frac{1}{2}) \rightarrow F = (-\frac{1}{2} - \frac{6}{4}, 1) = (-2, 1)$

ลองเอา $(-2, 1)$ แทน จะได้ $28 + 7 \pm (-8) \pm 82 \pm 55 = 0$ ต้องเป็น $28 + 7 + (-8) - 82 + 55 \rightarrow$ ข้อ 4

ถ้าไม่เช็คตัวเลือก ให้วงกลมมี ศก ที่ (a, b) ดังนั้น $(a + 2)^2 + (b - 1)^2 = (a - 4)^2 + (b - 3)^2$

$$\rightarrow a^2 + 4a + 4 + b^2 - 2b + 1 = a^2 - 8a + 16 + b^2 - 6b + 9$$

$$\rightarrow 12a + 4b = 20 \rightarrow 3a + b = 5 \dots(1)$$

$$\text{และจากความชัน จะได้ } \frac{b-3}{a-4} = -\frac{2}{3} \rightarrow 3b - 9 = -2a + 8 \rightarrow 2a + 3b = 17 \dots(2)$$

$$3(1) - (2) : 7a = -2 \rightarrow a = -\frac{2}{7} \rightarrow b = \frac{41}{7} \text{ ได้ } r^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7}\right)^2$$

$$\text{ได้สมการวงกลมคือ } \left(x + \frac{2}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{41}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{34}{7}\right)^2$$

$$\text{จัดรูปได้ } x^2 + y^2 + \frac{4x}{7} - \frac{82y}{7} + \left(\frac{2}{7}\right)^2 + \left(\frac{41}{7}\right)^2 - \left(\frac{12}{7}\right)^2 - \left(\frac{34}{7}\right)^2 = 0$$

$$\rightarrow 7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y - \left(\frac{14 \cdot 10}{7}\right) + \left(\frac{75 \cdot 7}{7}\right) = 0$$

$$\rightarrow 7x^2 + 7y^2 + 4x - 82y + 55 = 0$$

9. 1

$$\text{ก) } \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ + \sin 10^\circ} \cdot \frac{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 10^\circ - \sin 10^\circ} = \frac{\cos^2 10^\circ + \sin^2 10^\circ - 2 \sin 10^\circ \cos 10^\circ}{\cos^2 10^\circ - \sin^2 10^\circ} = \frac{1 - \sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} = \sec 20^\circ - \tan 20^\circ \rightarrow \text{ถูก}$$

$$\text{ข) } \sqrt{3} \cot 20^\circ = \frac{\sqrt{3} \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} = \frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos 20^\circ - \frac{1}{2} \sin 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{2(\sin 60^\circ \cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{2(\sin 40^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ} = \frac{2(2 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \frac{1}{2} \sin 20^\circ)}{\sin 20^\circ}$$

$$= \frac{4 \sin 20^\circ \cos 20^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = 4 \cos 20^\circ + 1 \rightarrow \text{ถูก}$$

10. 3

$$\text{ใส่ tan ตลอด ได้ } \frac{1-x+2x}{1-(1-x)(2x)} = \frac{2\sqrt{2x(1-x)}}{1-2x(1-x)} \rightarrow 1+x = 2\sqrt{2x(1-x)} \rightarrow 1+2x+x^2 = 8x-8x^2$$

$$\rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow (3x-1)^2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3} \rightarrow \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

11. 2

$$\left| -\frac{1}{3} \right| < \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f\left(f\left(f\left(-\frac{1}{3}\right)\right)\right) = f(f(-3))$$

$$|-3| \geq \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f(f(-3)) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{-3}\right) = f\left(\frac{1}{6}\right)$$

$$\left| \frac{1}{6} \right| < \frac{1}{2} \text{ ดังนั้น } f\left(\frac{1}{6}\right) = 6$$

12. 3

หลัง log เป็นลบไม่ได้ ดังนั้น $x > 1$ จะได้ $\frac{2}{x-1} \geq x$
 คูณ $x-1$ ทั้งสองข้างได้ ไม่ต้องกลับเครื่องหมาย เพราะ $x > 1$ ทำให้ $x-1$ เป็นบวก $\rightarrow 2 \geq x^2 - x$
 $\rightarrow 0 \geq (x-2)(x+1) \rightarrow x \in [-1, 2] \rightarrow$ แต่ $x > 1$ ดังนั้น คำตอบคือ $(1, 2]$
 ลองเอา $x = 2$ แทนดู ข้อ 1. ได้ฝั่งขวาติดลบ ไม่จริงแน่นอน ข้อ 2. ได้ $9 > 9$ ไม่จริง ข้อ 3. ได้ $0 \leq 5 \leq 5$ จริง
 ข้อ 4. ได้ $8 > 12$ ไม่จริง \rightarrow ตอบข้อ 3
 หมายเหตุ ถ้าจะแก้ ข้อ 1. อยู่ในรูป $|A| = -A$ จะได้ $A \leq 0$ ดังนั้น $x^2 + 2x - 3 \leq 0$
 แยกได้ $(x+3)(x-1) \rightarrow [-3, 1]$

13. 4

$$\text{ได้ } A(B+3I) = 2I \rightarrow 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & x \\ 0 & -2 & y+3 \end{vmatrix} = 2^3 \rightarrow (2)(8y+24+8x) = 8 \rightarrow x+y = -2.5$$

14. 2

จุดตัดอยู่ใกล้กัน ต้องหาทุกจุดตัด ไม่งั้นรูปจะไม่ถูก

$$3x + 4y = 48 \text{ กับ } x + 2y = 22 \text{ ตัดกันที่ } (4, 9)$$

$$x + 2y = 22 \text{ กับ } 3x + 2y = 42 \text{ ตัดกันที่ } (10, 6)$$

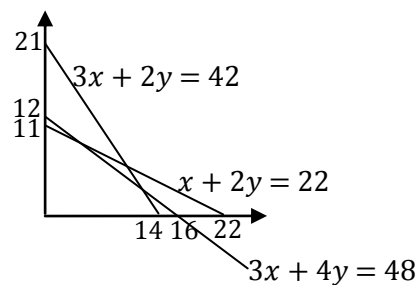
$$3x + 4y = 48 \text{ กับ } 3x + 2y = 42 \text{ ตัดกันที่ } (12, 3)$$

จุดมุม คือ $(0, 0), (0, 11), (4, 9), (12, 3), (14, 0)$

$$\text{ได้ } P = 0, 11a + 66, 13a + 54, 15a + 18, 14a$$

จับแต่ละตัว = 288 แล้วแก้หา a ได้ $a = 18$ จาก $13a + 54$ กับ $a = 18$ จาก $15a + 18$

ลองแทน $a = 18$ จะได้ 288 มากสุดในบรรดา $11a + 66, 13a + 54, 15a + 18, 14a$



15. 4

ก. ตั้งฉาก = ดอททกันได้ 0 $\rightarrow a + 2b + c = 0$ และ $a - b + c = 0$ จับลบกัน ได้ $b = 0$

แทนกลับไป ได้ $a + c = 0$ ดังนั้น $a + b + c = 0 \rightarrow$ ก ผิด

$$\text{ข. } 3 = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \rightarrow \cos \theta = \frac{3}{\sqrt{5}\left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)} = 1 \rightarrow \theta = 0 \rightarrow \text{ข ผิด}$$

16. 2

จากกฎของ sin ได้ $\frac{14}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{16-b}{\sin C}$ และจากที่โจทย์ให้ จะได้ $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{5}{3}$ ได้ $\frac{b}{16-b} = \frac{5}{3} \rightarrow 3b = 80 - 5b$
 $\rightarrow b = 10, c = 6 \rightarrow$ กฎของ cos ได้ $14^2 = 10^2 + 6^2 - 2(10)(6) \cos A \rightarrow \cos A = -\frac{1}{2}$
 มุมในสามเหลี่ยม มี $0^\circ < A < 180^\circ$ ได้ $A = 120^\circ \rightarrow \sin 2A = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. 4

จัดรูปได้ $9(x-1)^2 - 16(y-2)^2 = 199 + 9 - 64 \rightarrow \frac{(x-1)^2}{4^2} - \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1 \rightarrow V = (-3, 2), (5, 2)$
 ผ่าน $(-3, 2), (5, 2)$ แสดงว่าจุดยอด คือ $(1, ?)$ โฟกัสบอกผ่าน $(1, 0)$ แสดงว่าจุดยอดคือ $(1, 0)$
 ได้สมการคือ $(x-1)^2 = 4cy \rightarrow$ แทน $(5, 2)$ ได้ $c = 2 \rightarrow (x-1)^2 = 8y \rightarrow$ ข้อ 4 แทนแล้วไม่จริง

18. 1

$$a_n = \frac{1}{4 \frac{n(n+1)}{2}} = \frac{1}{2n(n+1)} \rightarrow \text{เทเลสโคป ได้ } a_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \rightarrow \text{ได้ผลบวก} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2}$$

19. 4

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x(x-1)}-x)(\sqrt{x(x-1)}+x)}{\sqrt{x(x-1)}+x} + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x}{\sqrt{x(x-1)}+x} + 2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}+1} + 2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

20. 2

$y = 3x - 2x^{-3} \rightarrow y' = 3 + 6x^{-4} \rightarrow$ ที่ $(1, 1)$ ชั้น 9 \rightarrow ผ่าน $(1, 1)$ ได้ $L: y = 9x - 8$
 แก้หาจุดตัด $x^2 - x = 9x - 8 - 1 \rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0 \rightarrow x = 9, 1 \rightarrow (9, 73), (1, 1)$
 ได้ระยะห่าง $= \sqrt{8^2 + 72^2} = 8\sqrt{1+9^2} = 8\sqrt{82}$

21. 1

จากแผนภาพ จะได้ $P(A) + P(B-A) + P(A' \cap B') = 1 \rightarrow P(B-A) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
 จาก $P(B') = \frac{5}{8}$ ได้ $P(B) = \frac{3}{8}$ ได้ $P(A \cap B) = P(B) - P(B-A) = \frac{3}{8} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
 และได้ $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$
 ดังนั้น $P(A' \cup B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} \rightarrow$ ก ถูก และ $P(A \cup B') = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \rightarrow$ ข ถูก

22. 3

กรณีลูกแรกออก 1, 3, 5 \rightarrow ลูกหลังต้องออก 4 \rightarrow 3 แบบ
 กรณีลูกแรกออก 2, 6 \rightarrow ลูกหลังต้องออก 2, 4, 6 \rightarrow 6 แบบ
 กรณีลูกแรกออก 4 \rightarrow ลูกหลังออกอะไรก็ได้ \rightarrow 6 แบบ \rightarrow รวม 15 แบบ

23. 1

6 ปีต่อมา ทั้ง 6 คน อายุเฉลี่ยเพิ่มเป็น 40 ปี แต่ s เท่าเดิม = 8

ดังนั้น $\sqrt{\frac{\sum(x_i-40)^2}{6}} = 8$ จะได้ $\sum(x_i - 40)^2 = 8^2 \cdot 6$

เนื่องจากอีก 2 คนใหม่ที่เพิ่มมา มีอายุ $= \bar{x} = 40$ ดังนั้น $\sum(x_i - 40)^2$ ของทั้ง 8 คน จะยังเท่าเดิม $= 8^2 \cdot 6$

ดังนั้น s ของทั้ง 8 คน คือ $= \sqrt{\frac{8^2 \cdot 6}{8}} = \sqrt{8 \cdot 6} = 4\sqrt{3}$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์การแปรผัน $= \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4\sqrt{3}}{40} = \frac{\sqrt{3}}{10}$

24. 2

เรียงได้ 2, 2, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 9, 12, 18 → Mode = 4, Med = 4.5, $\bar{x} = \frac{74}{12} = 6.17$

25. 3

ยกกำลัง 6 ตลอด ได้ $7^3 \cdot 5, 5^3 \cdot 7, 5^2 \cdot 7, 7^2 \cdot 5$ เอา $5 \cdot 7$ หารตลอด เหลือ $7^2, 5^2, 5, 7$

26. 7

แก้มการ $\binom{a}{2} = 10$ ได้ $n(A) = 5$ กับ $\binom{b}{2} = 6$ ได้ $n(B) = 4$

ย่อนสูตร 2^n สองเที่ยว จะได้ $A \cap B$ มี 2 ตัว ดังนั้น $n(A \cup B) = 5 + 4 - 2 = 7$

27. 20

ข้อนี้ ถ้าจะคิดจริงๆ มีได้หลายคำตอบตอบ คนออกข้อสอบ น่าจะอยากให้เราทำ โดยการเทียบเลขชี้กำลัง

เนื่องจากทางขวา $16^{64} = 2^{256} = 5^0 2^{256}$ ดังนั้น $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ (ปกติทำแบบนี้ไม่ได้นะ --)

จาก $x - 2^A = 0$ จะได้ $x = 2^A$ ยกกำลัง A ทั้งสองข้าง ได้ $x^A = 2^{4^2} \dots(1)$

จาก $A = \frac{\log y}{\log x} = \log_x y$ ดังนั้น $y = x^A$ แทนใน (1) ได้ $y = 2^{4^2}$ ยกกำลัง A อีก ได้ $y^A = 2^{4^3}$

แต่ $y^A = 256$ ดังนั้น $256 = 2^{4^3}$ ได้ $A^3 = 8$ ได้ $A = 2$

แทน $A = 2$ ใน $x - 2^A = 0$ และ $y^A = 256$ ได้ $x = 4, y = 16$ ดังนั้น คำตอบ $x + y$ คือ 20

(แต่จริงๆ ข้อนี้มีคำตอบอื่นอีก เช่น $x = 78.46162, y = 78.46162$)

28. 373

$$(1 + \tan^2 x) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\sin x \cos x}$$

เอาสมการ $\sin x + \cos x = \frac{4}{3}$ มายกกำลังสองสองข้าง จะได้ $1 + 2 \sin x \cos x = \frac{16}{9}$ จะได้ $\frac{1}{\sin x \cos x} = \frac{18}{7}$

จะได้ $a^2 + b^2 = 18^2 + 7^2 = 373$

29. 5

A: $\frac{(x-1)^2}{(x-1)^3} = 3 \rightarrow x = \frac{4}{3}, B: x + 1 = 4 + x - 1 - 4\sqrt{x-1} \rightarrow x = \frac{5}{4} \rightarrow$ ตอบ 5

30. 4

ให้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = k \rightarrow 5^{1+k} + 5^{\frac{4-k^2}{2+k}} = 126 \rightarrow 5^{1+k} + 5^{2-k} = 126 \rightarrow$ คูณ 5^k ตลอด
 ได้ $5(5^{2k}) - 126(5^k) + 25 = 0 \rightarrow (5(5^k) - 1)(5^k - 25) = 0 \rightarrow k = -1, 2$ แต่ k เป็นราก ≥ 0
 ได้ $\sqrt{x^2 - 4x - 1} = 2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow x = -1, 5 \rightarrow$ ตอบ 4

31. 162

ได้แกนเอก $= 6\sqrt{2} \rightarrow a = 3\sqrt{2} \rightarrow$ ผ่าน $(4, 1)$ แสดงว่า $\frac{4^2}{(3\sqrt{2})^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \rightarrow b = 3$
 L ชั้น $\frac{1-0}{4-4.5} = -2$ ผ่านจุด $(4, 1)$ ได้ $y = -2x + 9 \rightarrow 2x + y - 9 = 0 \rightarrow d = \frac{|2(0)+0-9|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$
 วงรี มี $c = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 3^2} = 3 \rightarrow$ โฟกัส $(3, 0), (-3, 0) \rightarrow |AF_1||AF_2| = (\sqrt{2})(\sqrt{50}) = 10$
 ได้ $d^2|AF_1||AF_2| = \left(\frac{9}{\sqrt{5}}\right)^2 10 = 162$

32. 2

ใส่ \tan ตลอด ได้ $\tan \theta = \frac{\frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{1 + \left(\frac{\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x}}\right)(\sqrt{x})} = \frac{\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}}{\frac{1-\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}} = \frac{1+x}{1+x} = 1$ และ $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = 1$
 ดังนั้น $\tan \theta + \cot \theta = 1 + 1 = 2$

33. 2

จะได้ $-4x - 12 + 14 + 2x^2 = 0 \rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow y = 1$
 ดังนั้น $\det(((A^t)^{-1})^t)^{-1} = \det A = 1 + 1 = 2$

34. 16

ตั้ง r ออกจากตัวส่วน ได้ $\frac{a_1+a_3}{r(a_1+a_3)} + \frac{a_3+a_5}{r(a_3+a_5)} + \frac{a_5+a_7}{r(a_5+a_7)} + \dots + \frac{a_{2011}+a_{2013}}{r(a_{2011}+a_{2013})} = 2012$
 ฝั่งซ้ายได้ $\frac{1}{r}$ บวกกัน $= \frac{2011-1}{2} + 1 = 1006$ ตัว $\rightarrow r = \frac{1006}{2012} = \frac{1}{2}$
 ให้ $x = 1 + \frac{5}{2} + \frac{12}{2^2} + \frac{22}{2^3} + \dots$ (1) \rightarrow ทหาร 2 จะได้ $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2^2} + \frac{12}{2^3} + \frac{22}{2^4} + \dots$ (2)
 (1) - (2): $\frac{x}{2} = 1 + \frac{4}{2} + \frac{7}{2^2} + \frac{10}{2^3} + \dots$ (3) \rightarrow ทหาร 2 จะได้ $\frac{x}{4} = \frac{1}{2} + \frac{4}{2^2} + \frac{7}{2^3} + \frac{10}{2^4} + \dots$ (4)
 (3) - (4): $\frac{x}{4} = 1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \dots = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4 \rightarrow x = 16$

35. 11

$\left| \frac{(z+1)(1+i)}{z(1+i)+5+i} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{5+i}{1+i}} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{(5+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} \right| = \left| \frac{z+1}{z + \frac{6-4i}{2}} \right| = \left| \frac{z+1}{z+3-2i} \right| = \frac{\sqrt{(a+1)^2+b^2}}{\sqrt{(a+3)^2+(b-2)^2}} = 1$
 $\rightarrow (a+1)^2 + b^2 = (a+3)^2 + (b-2)^2 \rightarrow 2a+1 = 6a+9-4b+4 \rightarrow b = a+3$
 จาก $|z| = \sqrt{65}$ จะได้ $a^2 + (a+3)^2 = 65 \rightarrow a^2 + 3a - 28 = 0 \rightarrow (a+7)(a-4) = 0$
 z อยู่ Q_1 ได้ $a = 4, b = 7 \rightarrow$ ตอบ $4 + 7 = 11$

36. 205

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_5 - a_1 &= b_5 - b_2 \rightarrow 4d_a = 3d_b \rightarrow \frac{d_b}{d_a} = \frac{4}{3} \\ \frac{(b_6 - b_4) + (b_6 - b_1)}{a_4 - a_2} &= \frac{2d_b + 5d_b}{2d_a} = \frac{7d_b}{2d_a} = \frac{7}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{14}{3} \rightarrow 14^2 + 3^2 = 205 \end{aligned}$$

37. 3

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } a_n &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ ดังนั้น } \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)-1}{2}} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n^2+n-2}{2}} = \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \\ \text{ดังนั้น } \frac{a_2 a_3 a_4 \dots a_n}{(a_2-1)(a_3-1)(a_4-1)\dots(a_n-1)} &= \frac{a_2}{a_2-1} \cdot \frac{a_3}{a_3-1} \cdot \frac{a_4}{a_4-1} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_n-1} \\ &= \frac{(2)(3)}{(4)(1)} \cdot \frac{(3)(4)}{(5)(2)} \cdot \frac{(4)(5)}{(6)(3)} \cdot \frac{(5)(6)}{(7)(4)} \cdot \dots \cdot \frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)} \text{ จะตัดกันได้ เหลือ } \frac{3}{1} \cdot \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

ดังนั้น ลิมิตของลำดับ = 3

38. 24

$$\begin{aligned} \frac{2x-8}{2x-\sqrt{4x^2-3x+12}} \cdot \frac{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}}{2x+\sqrt{4x^2-3x+12}} &= \frac{(2x-8)(2x+\sqrt{4x^2-3x+12})}{4x^2-4x^2+3x-12} = \frac{2(2x+\sqrt{4x^2-3x+12})}{3} \\ \text{ดังนั้น } \frac{2(2(4)+\sqrt{4(4)^2-3(4)+12})}{3} &= k \cdot \frac{4}{3} \rightarrow k = 8 \rightarrow f(8+1) = \frac{8(9)}{3} = 24 \end{aligned}$$

39. 354

$$\begin{aligned} f'(x) &= ax^3 + bx, f''(x) = 3ax^2 + b \text{ จาก } f''(0) = 6 \text{ จะได้ } b = 6 \\ \text{จาก } f'(1) &= 18 \text{ จะได้ } a + 6 = 18 \rightarrow a = 12 \rightarrow f(x) = 3x^4 + 3x^2 + c \\ \text{จาก } f(2) &= f(1) + f(0) \text{ จะได้ } 48 + 12 + c = 3 + 3 + c + c \rightarrow c = 54 \\ g'(x) &= (x^3 + 2x)(12x^3 + 6x) + (3x^2 + 2)(3x^4 + 3x^2 + 54) \\ \text{จะได้ } g'(-1) &= (-1 - 2)(-12 - 6) + (3 + 2)(3 + 3 + 54) = 354 \end{aligned}$$

40. 168

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } 5 - 2i \text{ เป็นคำตอบด้วย } \rightarrow f(x) &= k(x+1)(x-(5+2i))(x-(5-2i)) \\ &= k(x+1)(x^2 - 10x + 29) \text{ จาก } f(0) = 58 \text{ จะได้ } k(0+1)(0-0+29) = 58 \rightarrow k = 2 \\ \text{ดังนั้น } f(x) &= 2(x+1)(x^2 - 10x + 29) = 2x^3 - 18x^2 + 38x + 58 \\ \text{จะได้ } f(-x) &= -2x^3 - 18x^2 - 38x + 58 \text{ ดังนั้น } f(x) - f(-x) = 4x^3 + 76x \\ \text{อินทิเกรตได้ } x^4 + 38x^2 &\rightarrow \text{ตอบ } (2^4 + 38(2^2)) - (0 + 0) = 168 \end{aligned}$$

41. 42

$$\begin{aligned} &= \text{แบบทั้งหมด} - \text{แบบที่ 1 ติดกัน} - \text{แบบที่ 3 ติดกัน} + \text{แบบที่ 1 ติดกันและ 3 ติดกัน} \\ &= \frac{6!}{2!2!2!} - \frac{5!}{2!2!} - \frac{5!}{2!2!} + \frac{4!}{2!} = 90 - 30 - 30 + 12 = 42 \text{ แบบ} \end{aligned}$$

42. 5927

$$d \text{ มากสุด } 99 \rightarrow c < 594 \rightarrow c \text{ มากสุด } 593 \rightarrow b < 2965 \rightarrow b \text{ มากสุด } 2964 \rightarrow a < 5928$$

43. 396

$$100a + 10b + c = 10a + b + 10b + a + 10a + c + 10c + a + 10b + c + 10c + b$$

$$78a = 12b + 21c \rightarrow 26a = 4b + 7c \leq 36 + 63 = 99 \rightarrow a \leq 3$$

$a = 3$ ได้ $4b + 7c = 78$ ไล่แทน $b = 9$ ลงมา จนกว่าจะเจอที่หารด้วย 7 ลงตัว ได้ $b = 9, c = 6$

44. 135

= แบบทั้งหมด - แบบที่ไม่มีคู่อื่นมาจากอำเภอเดียวกัน

$$= \binom{6}{2}\binom{6}{2} - \binom{6}{2}\binom{4}{2} = 225 - 90 = 135$$

45. 200

$$|\bar{b} - \bar{c}| = \sqrt{4^2 + (y-1)^2} = 5 \rightarrow y = 4, -2 \text{ และจาก } \bar{a} \perp \bar{b} \text{ จะได้ } 6x + \frac{12y}{5} = 0 \rightarrow x = -\frac{8}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\text{แต่ } \bar{a} \cdot \bar{c} > 0 \text{ จะได้ } 2x + \frac{12}{5} > 0 \rightarrow x > -\frac{6}{5} \rightarrow \text{เหลือ } x = \frac{4}{5} \text{ และ } y = -2$$

$$5\bar{a} + \bar{b} = (4\bar{i} + 12\bar{j}) + (6\bar{i} - 2\bar{j}) = 10\bar{i} + 10\bar{j} \rightarrow |5\bar{a} + \bar{b}|^2 = 10^2 + 10^2 = 200$$

46. 20

$$\text{จะได้พื้นที่ของนาย ก. คือ } 0.5 - 0.0948 = 0.4052 \rightarrow z_n = 1.31$$

$$\text{จะได้พื้นที่ของนาย ข. คือ } -(0.5 - 0.1064) = -0.3937 \rightarrow z_n = -1.24$$

$$z_n - z_n = 1.31 - (-1.24) = 2.55 = \frac{x_n - x_n}{s} = \frac{51}{s} \rightarrow s = \frac{51}{2.55} = 20$$

47. 12

ทำนาย ฟิสิกส์ (x_i) จาก คณิตศาสตร์ (y_i) ต้องใช้ $\hat{X} = a + bY$

$$\text{จะได้ } \sum x_i = 54 \text{ และ } \sum y_i = 36 \text{ จะได้ระบบสมการคือ } 54 = 6a + 36b \text{ และ } 428 = 36a + 268b$$

$$\text{ตัดเป็นอย่างต่ำ ได้ } 9 = a + 6b \text{ และ } 107 = 9a + 67b \text{ แทน } a \text{ จากสมการแรก ได้ } 107 = 9(9 - 6b) + 67b$$

$$\rightarrow 26 = 13b \rightarrow b = 2, a = -3 \rightarrow \text{ตอบ } -3 + 2(7.5) = 12$$

48. 10

ค่อยๆ หาไล่จาก y น้อยๆ เริ่มจากกลุ่ม $y = 0$ ใช้เงื่อนไขที่สอง

$$F(0,0) = 1, F(1,0) = 2, F(2,0) = 3, F(3,0) = 4, F(4,0) = 5$$

$$\text{พวก } y = 1: F(0,1) = F(1,0) = 2$$

$$F(1,1) = F(F(0,1), 0) = F(2, 0) = 3$$

$$F(2,1) = F(F(1,1), 0) = F(3, 0) = 4$$

$$F(3,1) = F(F(2,1), 0) = F(4, 0) = 5$$

$$\text{พวก } y = 2: F(0,2) = F(1,1) = 3$$

$$F(1,2) = F(F(0,2), 1) = F(3,1) = 5$$

$$\text{ดังนั้น } F(1,2) + F(3,1) = 5 + 5 = 10$$

49. 6

จาก (1) แทน $x = 1$ จะได้ $1 * y = (1 * 1)y = y$ เปลี่ยนชื่อ y เป็น x ได้ $1 * x = x$

แทน $1 * x = x$ ในข้อ (2) ได้เป็น $x * x = x$

แทน $x * x = x$ ในข้อ (1) ได้เป็น $x * (xy) = xy$

ถ้าจะหา $5 * 6$ ก็แทน $x = 5$, $y = \frac{6}{5}$ จะได้ $5 * 6 = 5 * \left(5 \cdot \frac{6}{5}\right) = 5 \cdot \frac{6}{5} = 6$

จะเห็นว่า เครื่องหมาย $*$ คือให้ตอบตัวหลังนั่นเอง ดังนั้น $2 * (5 * (5 * 6)) = 6$

50. 4

จะได้ $f(f(x)) = 4 + x(4 - f(x)) \dots(1)$

แทน x ด้วย 0 จะได้ $f(f(0)) = 4 + 0(4 - f(0)) = 4 \dots(2)$

จาก (2) ใส่ f ทั้งสองข้าง ได้ $f(f(f(0))) = f(4) \dots(3)$

แทน x ใน (1) ด้วย $f(0)$ จะได้ $f(f(f(0))) = 4 + f(0)(4 - f(f(0))) \dots(4)$

แต่จาก (2) จะได้ $f(f(0)) = 4$ ดังนั้น $f(f(f(0))) = 4 + f(0)(4 - 4) = 4 \dots(5)$

จาก (3) และ (5) จะได้ $f(4) = 4$

เครดิต

ขอบคุณ คุณ สนธยา เสนามนตรี , คุณ ณัฐสรณ์ เส็งเฮ้า , คุณ Quest Internal , คุณ Ntt Dks และ อีกคนหนึ่งที่มา
โพสต์ข้อสอบบนวอลด้อม (เค้าบอกผมว่าถ้าผมโหดเสริ้จให้ลบทิ้ง ผมจำชื่อเค้าไม่ได้ เพราะผมลบโพสต์เค้าไปแล้ว = ="

ขอโทษนะครับ _/_) ขอบคุณ คุณ Kue Kung สำหรับข้อสอบฉบับเต็ม

ขอบคุณ ท่านอาจารย์ Sila Sookrasamee และ คุณ Weetip Tanarat ที่ช่วยตรวจคำตอบ ด้วยนะครับ