

A-NET 51

รหัสวิชา 14 วิชา คณิตศาสตร์

วันเสาร์ที่ 8 มีนาคม 2551 เวลา 12.00 - 14.00 น.

ข้อ 1 - 25 ข้อละ 3 คะแนน

1. พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. ถ้า $(p \vee q) \rightarrow r$ และ $(q \rightarrow r) \rightarrow s$ ต่างมีค่าความจริงเป็นเท็จ

แล้ว $(p \vee q) \rightarrow (r \vee s)$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ข. การอ้างเหตุผลข้างล่างนี้สมเหตุสมผล

เหตุ 1) $\sim p \rightarrow \sim(q \vee r)$ 2) $q \wedge s$ 3) $\sim r$

ผล $s \rightarrow p$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

2. กำหนดให้ $I(a) = \int_{-a}^a (x^2 - 1) dx$ สำหรับ $a \in [0, \infty)$

ประโยคในข้อใดต่อไปนี้มีความจริงเป็นจริง เมื่อเอกภพสัมพัทธ์คือช่วง $[0, \infty)$

1. $\forall a [I(a) > 0]$

2. $\forall a [(I(a) = 0) \rightarrow (a = 0)]$

3. $\exists a [(a > 2) \wedge (I(a) < 0)]$

4. $\exists a [(a \neq 0) \wedge (I(a) = 0)]$

3. กำหนดให้ A เป็นเซตคำตอบของอสมการ $|x^2 + x - 2| \leq |x^2 - 4x + 3|$ และ $B = A - \{1\}$

ถ้า a เป็นสมาชิกของ B ซึ่ง $a - b \geq 0$ ทุก $b \in B$ แล้ว พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\frac{4}{3}a$ เป็นจำนวนคู่

ข. $\frac{5}{a}$ เป็นจำนวนคู่

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

4. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มีค่ามากที่สุด ซึ่งมีสมบัติว่า n หาร 551 และ 731 เหลือเศษ r เท่ากัน หาร 1093 เหลือเศษ $r + 2$ แล้ว $\frac{r-1}{n}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{1}{17}$

2. $\frac{1}{18}$

3. $\frac{1}{19}$

4. $\frac{1}{20}$

5. ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องกับสมการ $z|z| + 2z + i = 0$ แล้ว ส่วนจินตภาพของ z มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -1

2. $\sqrt{2}$

3. $\sqrt{2} - 1$

4. $1 - \sqrt{2}$

6. ถ้า z_1, z_2 เป็นคำตอบที่ไม่ใช่จำนวนจริงของสมการ $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 = 8$ แล้ว $z_1 z_2$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 3 2. $\frac{3}{7}$ 3. -3 4. $-\frac{3}{7}$

7. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย
- $$f(x) = x^2 + 1 \text{ และ } g(x) = ax \text{ เมื่อ } a \in (0, 1)$$

ถ้า k เป็นจำนวนจริงที่ทำให้ $(f \circ g)(k) = (g \circ f)(k)$

แล้ว $(f \circ g^{-1})\left(\frac{1}{k^2}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

8. กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ x^3 - 1 & \text{เมื่อ } x \geq 0 \end{cases} \text{ และ } g(x) = x^2 + 4x + 13$$

ถ้า a เป็นจำนวนจริงบวก ซึ่ง $g(a) = 25$

แล้ว $f^{-1}(-2a) + f^{-1}(13a)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 2. 2 3. 4 4. 6

9. กำหนดให้ $r = \{(x, y) \mid (x - 2)(y - 1) = 1\}$

และ $s = \{(x, y) \mid xy^2 = (y + 1)^2\}$

เซตในข้อใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $R_r \cap R_s$

1. $(-\infty, -1)$

2. $(-2, -\frac{1}{2})$

3. $(\frac{1}{2}, 2)$

4. $(1, \infty)$

10. กำหนดให้ $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$

$B = \{(x, y) \mid 4x^2 + 9y^2 < 1\}$

$C = \{(x, y) \mid y^2 - x^2 > 1\}$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นผิด

1. $A - B = A$

2. $B - C = B$

3. $B \cap (A \cup C) = \emptyset$

4. $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

11. ให้ A และ B เป็นจุดยอดของไฮเพอร์โบลา $4x^2 - y^2 - 24x + 6y + 11 = 0$ สมการของพาราโบลาที่มี \overline{AB}

เป็นเส้นตรงสัมผัส และมีกราฟอยู่ในเหนือแกน X คือสมการในข้อใดต่อไปนี้

1. $(x - 3)^2 = 4(y - 2)$

2. $(x - 3)^2 = 8(y - 1)$

3. $(x - 2)^2 = 4(y - 2)$

4. $(x - 2)^2 = 8(y - 1)$

12. ให้ E เป็นวงรีที่มีแกนเอกขนานกับแกน X, มีจุดศูนย์กลางที่ $(-2, 1)$, สัมผัสเส้นตรง $x = 1$ และ $y = 3$ โดยมี F_1 และ F_2 เป็นจุดโฟกัสของ E ให้ C เป็นวงกลมที่มี $\overline{F_1F_2}$ เป็นเส้นผ่านศูนย์กลาง ถ้าวงรี E ตัดวงกลม C ที่จุด P, Q, R และ S แล้ว พื้นที่รูปสี่เหลี่ยม PQRS มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $\frac{12}{5}$ ตารางหน่วย
 2. $\frac{24}{5}$ ตารางหน่วย
 3. $\frac{36}{5}$ ตารางหน่วย
 4. $\frac{48}{5}$ ตารางหน่วย

13. ผลบวกของรากทั้งหมดของสมการ $\log_3(3^{1/x} + 27) = \log_3 4 + 1 + \frac{1}{2x}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. 0
 2. $\frac{1}{2}$
 3. $\frac{3}{4}$
 4. 1

14. ให้ \vec{A} , \vec{B} และ \vec{C} เป็นเวกเตอร์ ซึ่ง $|\vec{A}| = 3$, $|\vec{B}| = 2$ และ $|\vec{C}| = 1$ ถ้า $\vec{A} + \vec{B} + 4\vec{C} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{B} \cdot \vec{C} + \vec{C} \cdot \vec{A}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้
1. $-\frac{5}{2}$
 2. -1
 3. 0
 4. $\frac{1}{2}$

15. กำหนดทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน มีจุดยอดอยู่ที่จุด $O(0, 0, 0)$, $A(1, 5, 7)$, $B(2a, -b, -1)$ และ $C(a, 3b, 2)$ โดยที่ a และ b เป็นจำนวนเต็ม ถ้า \overrightarrow{OA} ตั้งฉากกับฐานที่ประกอบด้วย \overrightarrow{OB} และ \overrightarrow{OC} และ θ เป็นมุมระหว่าง \overrightarrow{OB} และ \overrightarrow{OC} แล้ว ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $\sin \theta = \frac{5}{3\sqrt{7}}$
2. $|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{21}$
3. พื้นที่ฐานของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน เท่ากับ $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ตารางหน่วย
4. ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน เท่ากับ 75 ลูกบาศก์หน่วย

16. ให้ A, B และ C เป็นจุดยอดของรูปสามเหลี่ยม ABC และ $\hat{A} < \hat{B} < \hat{C}$

โดยที่ $\tan A \tan B \tan C = 3 + 2\sqrt{3}$ และ $\tan B + \tan C = 2 + 2\sqrt{3}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $\tan C = 2 + \sqrt{3}$

ข. $\hat{C} = \frac{5\pi}{12}$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. ก. ถูก และ ข. ถูก | 2. ก. ถูก และ ข. ผิด |
| 3. ก. ผิด และ ข. ถูก | 4. ก. ผิด และ ข. ผิด |

17. กำหนดเมทริกซ์ A และ B ดังนี้

$$A = \begin{bmatrix} x^2 & -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & x \end{bmatrix} \text{ และ } B = \begin{bmatrix} -2 & -4x \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \text{ โดยที่ } x \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ถ้า $\det(2A) = -76$ แล้ว

เมทริกซ์ C ในข้อใดต่อไปนี้ ที่ทำให้ค่าของ $\det(BC)$ อยู่ภายในช่วง $(-100, -50)$

1. $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 2. $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 3. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ 4. $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$

18. กล้องใบหนึ่งมีหลอดไฟอยู่ 10 หลอด เป็นหลอดดี 8 หลอด และหลอดเสีย 2 หลอด สุ่มหยิบหลอดไฟขึ้นมาครั้งละ 1 หลอด 3 ครั้ง โดยที่ในการหยิบแต่ละครั้งให้ใส่คืนหลอดไฟลงไปในกล่องก่อนที่จะหยิบครั้งต่อไป แล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้หลอดเสีย 2 ครั้ง มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{125}$ 2. $\frac{6}{125}$ 3. $\frac{12}{125}$ 4. $\frac{16}{125}$

19. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่นิยามบนช่วง $(0, \infty)$ โดยที่ $f(2) = 2f(1)$ และ $f'(x) = 27x - \frac{1}{x^2}$

ถ้า L เป็นเส้นสัมผัสกราฟของ $y = f(x)$ ที่จุด $(1, f(1))$ แล้ว จุดในข้อใดต่อไปนี้อยู่บน L

1. $(2, 64)$ 2. $(2, 66)$ 3. $(3, 94)$ 4. $(3, 96)$

20. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนามกำลังสาม ซึ่งนิยามบนช่วง $[-2, 2]$ โดยที่ $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ และ f มีค่าต่ำสุดที่ $x = 1$, มีค่าสูงสุดที่ $x = -1$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

ก. $f(-2) \leq f(x)$ ทุก $x \in [-2, 2]$

ข. $f(2) \geq f(x)$ ทุก $x \in [-2, 2]$

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. ก. ถูก และ ข. ถูก

2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิด และ ข. ถูก

4. ก. ผิด และ ข. ผิด

21. กำหนดตารางแสดงเงินค่าอาหารกลางวันที่นักเรียนห้องหนึ่งได้รับจากผู้ปกครองดังนี้

ค่าอาหารกลางวัน (บาท)	จำนวนนักเรียน (คน)
29 - 31	1
32 - 34	4
35 - 37	5
38 - 40	5
41 - 43	5

ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน และส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ ตามลำดับ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 37.35, 37.5 และ 3

2. 37.5, 37.5 และ 3

3. 37.35, 37.5 และ 3.5

4. 37.5, 37.0 และ 3

22. พิจารณาข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมาก ดังต่อไปนี้

8 a 12 17 22 b 26

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 17 และควอร์ไทล์ที่ 1 เท่ากับ 10 แล้ว สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และ สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอร์ไทล์ ตามลำดับ เท่ากับค่าในข้อใดต่อไปนี้

1. 0.35, 0.45 2. 0.35, 0.41 3. 0.42, 0.45 4. 0.42, 0.41

23. นักเรียนห้องหนึ่งเป็นนักเรียนหญิง 20 คน นักเรียนชาย 30 คน มีค่าเฉลี่ยของน้ำหนักของนักเรียนห้องนี้เท่ากับ 24.6 กิโลกรัม สมศรีเป็นนักเรียนหญิงที่มีน้ำหนัก a กิโลกรัม คิดเป็นค่ามาตรฐานของน้ำหนักในกลุ่มนักเรียนหญิงเท่ากับ b สมชายเป็นนักเรียนชายที่มีน้ำหนัก a กิโลกรัม คิดเป็นค่ามาตรฐานของน้ำหนักในกลุ่มนักเรียนชายเท่ากับ b ถ้า สัมประสิทธิ์ของการแปรผันเฉพาะกลุ่มนักเรียนหญิง เท่ากับ 0.125

สัมประสิทธิ์ของการแปรผันเฉพาะกลุ่มนักเรียนชาย เท่ากับ 0.16

ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเฉพาะกลุ่มนักเรียนชาย เท่ากับ 4 แล้ว

ข้อใดต่อไปนี้ถูก

1. $a = 22, b = -1.1$ 2. $a = 22, b = -1$
3. $a = 21, b = -1.1$ 4. $a = 21, b = -1$

ข้อ 1 - 5 ข้อละ 2 คะแนน

- กำหนดให้ $A = \{x \mid x^2 + 2x - 3 < 0\}$ และ $B = \{x \mid x + 1 \geq 2|x|\}$
ถ้า $A - B = (a, b)$ แล้ว $3|a + b|$ มีค่าเท่าใด

- ให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $Q(x) = x^2 + 9$
ถ้า $Q(x)$ ทหาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว $P(a) + P(b)$ มีค่าเท่าใด

- ให้ S แทนปริภูมิตัวอย่าง และ A, B และ C เป็นเหตุการณ์
โดยที่ $A \cup B \cup C = S$ และ $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$
ถ้า $P(A \cup B) = 0.7$ และ $P(B \cup C) = 0.5$ แล้ว $P(A' \cap C')$ มีค่าเท่าใด

4. กำหนดเมทริกซ์ $A = \begin{bmatrix} 2 & x & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1-x & 2 & 2x \end{bmatrix}$ โดยที่ x เป็นจำนวนจริง
ถ้า $C_{22}(A) = 14$ แล้ว $\det(\text{adj}(A))$ มีค่าเท่าใด

5. ถ้า $A = \{x \mid a < x < b\}$ เป็นเซตคำตอบของอสมการ $\log_2(2x - 1) - \log_4\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$
แล้ว $a + b$ มีค่าเท่าใด

ข้อ 6 - 10 ข้อละ 3 คะแนน

6. ให้ θ เป็นจำนวนจริง ซึ่งสอดคล้องกับสมการ $\frac{1}{\tan^2 \theta} + \frac{1}{\cot^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} = 7$ แล้ว
 $\tan^2 2\theta$ มีค่าเท่าใด

7. กำหนดฟังก์ชันจุดประสงค์ และอสมการข้อจำกัด ดังนี้

$$C = 6x + 2y, \quad x + y \geq 2, \quad x + 3y \leq 9, \quad 0 \leq x \leq y$$

ค่าสูงสุดของ C เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ $a_n = \frac{1}{n^k} \left[1 + (2 + 2) + (3 + 3 + 3) + \cdots + \overbrace{(n + \cdots + n)}^{n \text{ พจน์}} \right]$ โดยที่ k เป็นค่าคงตัวที่ทำให้
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad L > 0 \quad \text{แล้ว } 6(L + k) \text{ มีค่าเท่าใด}$$

9. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ x^3 + 1 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ถ้า $f'(1) = 4$ แล้ว $(f \circ f)\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ มีค่าเท่าใด

10. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ -2x^3 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$

พื้นที่ที่ปิดล้อมด้วยกราฟของ f บนช่วง $[-4, 0]$ มีค่าเท่าใด

เฉลย

- | | | | | |
|------|-------|-------|--------|--------|
| 1. 3 | 8. 1 | 15. 4 | 22. 2 | 4. 36 |
| 2. 4 | 9. 3 | 16. 1 | 23. 4 | 5. 2.5 |
| 3. 3 | 10. 4 | 17. 1 | 24. 3 | 6. 8 |
| 4. 2 | 11. 1 | 18. 3 | 25. 2 | 7. 18 |
| 5. 4 | 12. 4 | 19. 2 | 1. 10 | 8. 20 |
| 6. 2 | 13. 3 | 20. 1 | 2. 922 | 9. 1.5 |
| 7. 2 | 14. 1 | 21. 1 | 3. 0.2 | 10. 3 |

แนวคิด

ตอนที่ 1

13. 3

$$\log_3(3^{1/x} + 27) = \log_3 4 + 1 + \frac{1}{2x}$$

$$3^{\log_3(3^{1/x} + 27)} = 3^{\log_3 4 + 1 + \frac{1}{2x}}$$

$$3^{\log_3(3^{1/x} + 27)} = 3^{\log_3 4} \cdot 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$$

$$3^{1/x} + 27 = 4 \cdot 3^1 \cdot 3^{\frac{1}{2x}}$$

ให้ $3^{\frac{1}{2x}} = A$ ดังนั้น $3^{\frac{1}{x}} = A^2$: $A^2 + 27 = 4 \cdot 3^1 \cdot A$

$$A^2 - 12A + 27 = 0$$

$$(A - 9)(A - 3) = 0$$

$$A = 9, 3$$

ดังนั้น $3^{\frac{1}{2x}} = 9, 3 \rightarrow \frac{1}{2x} = 2, 1 \rightarrow x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2} \rightarrow$ ผลบวกคำตอบ $= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

14. 1

คำตอบ $= \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{C} \cdot (\bar{B} + \bar{A}) = \bar{A} \cdot \bar{B} + \bar{C} \cdot (-4\bar{C}) = \bar{A} \cdot \bar{B} - 4|\bar{C}|^2 = \bar{A} \cdot \bar{B} - 4$

จาก $|\bar{A} + \bar{B}|^2 = |\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + 2\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow |-4\bar{C}|^2 = |\bar{A}|^2 + |\bar{B}|^2 + 2\bar{A} \cdot \bar{B} \rightarrow 16 = 9 + 4 + 2\bar{A} \cdot \bar{B}$

จะได้ $\bar{A} \cdot \bar{B} = 4 \rightarrow \frac{3}{2} \rightarrow$ ได้คำตอบ $= \frac{3}{2} - 4 = -\frac{5}{2}$

ตอนที่ 2

5. 2.5

$$\log_2(2x - 1) - \log_4\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\log_2(2x - 1) - \frac{1}{2}\log_2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{คูณ 2 ตลอด}$$

$$2\log_2(2x - 1) - \log_2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < 1$$

$$\log_2(2x - 1)^2 - \log_2\left(x^2 + \frac{1}{2}\right) < 1$$

$$\log_2 \frac{(2x-1)^2}{x^2 + \frac{1}{2}} < 1$$

$$\frac{(2x-1)^2}{x^2 + \frac{1}{2}} < 2^1$$

$$4x^2 - 4x + 1 < 2x^2 + 1$$

$$2x^2 - 4x < 0$$

$$2x(x - 2) < 0$$

ย้าย $x^2 + \frac{1}{2}$ ขึ้นมาคูณได้ เพราะ $x^2 + \frac{1}{2}$ เป็นบวกเสมอ

