วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ (ม.ค. 57)

วันเสาร์ที่ 4 มกราคม 2557 เวลา 11.00 - 12.30 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน $z = i^{-7} + i^{-5} + i^{-3} + i$ ค่าของ $|z^2|$ เท่ากับเท่าใด

2. ถ้า n เป็นจำนวนเต็มที่มากที่สุดที่หาร 166 และ 1101 ได้เศษเหลือ 1 แล้ว n มีค่าเท่ากับเท่าใด

3. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $2\arcsin(x^2 - 3x + 1) + \pi = 0$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

4. กำหนดให้ m เป็นจำนวนจริงบวก ถ้าเวกเตอร์ $m\bar{a} + \bar{b}$ ตั้งฉากกับเวกเตอร์ $m\bar{a} - \bar{b}$
โดยที่ $|\bar{a}| = 2$ และ $|\bar{b}| = 5$ แล้ว m มีค่าเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

ถ้า $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ โดยการดำเนินการตามแถว $R_2 - 3R_1$

แล้ว $a + b + c$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. ค่าของ $\log_2\left(3^{\log_3 16}\right)$ เท่ากับเท่าใด

7. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งมีนักเรียนอยู่ 4 ห้อง ครูบันทึกค่าเฉลี่ยของน้ำหนักของนักเรียนแต่ละห้องไว้ตามตาราง ต่อไปนี้

ห้องที่	จำนวนนักเรียน (คน)	ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักนักเรียน (กิโลกรัม)
1	22	17
2	23	16
3	25	14
4	30	15

ค่าเฉลี่ยของน้ำหนักของนักเรียนทั้งโรงเรียนมีค่าเท่ากับกี่กิโลกรัม

8. $\sum_{r=0}^{6} (-1)^r \binom{6}{r} 7^{6-r} 5^r$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

9. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+6x)-1}{x}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

10. ถ้า $x = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$ แล้ว $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n}$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. ถ้า x_1 , x_2 , x_3 เป็นรากของสมการ $8x^3 + 6x^2 - 5x - 3 = 0$ โดยที่ $x_1 < x_2 < x_3$ แล้ว $x_1 + x_3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{3}{2}$
2. $-\frac{1}{4}$
3. $\frac{1}{4}$
4. $\frac{1}{2}$
5. $\frac{3}{4}$

12. กำหนดให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง ถ้า $z_1 = \sqrt{2}(\cos 15° + \mathrm{i}\sin 15°)$ แล้วผลคูณ $z_2 z_3$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2
2. $\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{2}$
3. $\sqrt{2} + \mathrm{i}\sqrt{2}$
4. $\sqrt{3} - \mathrm{i}$
5. $\sqrt{3} + \mathrm{i}$

13. ถ้า m, n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $m = n + 2$ และ ค.ร.น. ของ m และ n เท่ากับ 180 แล้ว ผลคูณ mn มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 180
2. 270
3. 360
4. 540
5. 720

14. กำหนดให้ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆในสามมิติที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ และไม่ขนานกัน จงพิจารณาข้อความ 4 ข้อความต่อไปนี้

(ก) $|\bar{u} \times \bar{v}| \leq |\bar{u}||\bar{v}|$

(ข) $\bar{u} \times (\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u} \times \bar{v}$

(ค) $|\bar{u} \times \bar{v}|^2 + |\bar{u} \cdot \bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2$

(ง) $(5\bar{u} \times \bar{v}) \cdot 5\bar{v} = 25$

จำนวนข้อความที่ถูกต้องเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

15. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $\hat{\mathrm{C}}$ เป็นมุมฉาก และ $\hat{\mathrm{A}} \leq \hat{\mathrm{B}}$

ถ้า $(\cos 2\mathrm{A} + \cos \mathrm{B})^2 + (\sin 2\mathrm{A} + \sin \mathrm{B})^2 = 3$ แล้ว $\tan 3\mathrm{A}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\sqrt{3}$
2. -1
3. $\frac{1}{\sqrt{3}}$
4. 1
5. $\sqrt{3}$

16. ถ้า F เป็นโฟกัสที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ของไฮเพอร์โบลา $\frac{x^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$ แล้ว วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ F และสัมผัสกับเส้นกำกับทั้งสองของไฮเพอร์โบลานี้ มีรัศมียาวเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 2 หน่วย
2. 4 หน่วย
3. $3\sqrt{3}$ หน่วย
4. 6 หน่วย
5. $4\sqrt{3}$ หน่วย

17. ค่าในข้อใดต่อไปนี้เป็นคำตอบของสมการ $2^x \cdot 2^{x+1} \cdot 2^{x+2} = 4^x + 4^{x+1} + 4^{x+2}$

1. $\log_2 \frac{21}{10}$
2. $\log_2 \frac{21}{8}$
3. $\log_2 \frac{21}{6}$
4. $\log_2 \frac{21}{4}$
5. $\log_2 \frac{21}{2}$

18. ผลบวกของคำตอบทั้งหมดของสมการ $\log_2 x + 6\log_x 2 - 5 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 8
2. 10
3. 12
4. 14
5. 16

19. กำหนดให้ $A = [a_{ij}]$ เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $\det(A) > 0$

และ $M_{ij}(A)$ เป็นไมเนอร์ของ a_{ij} โดยที่ $[M_{ij}(A)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

ถ้า $A^{-1} = [b_{ij}]$ แล้ว $b_{11} + b_{12} + b_{13}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{3}{25}$
2. $\frac{4}{25}$
3. $\frac{3}{5}$
4. $\frac{4}{5}$
5. $\frac{9}{5}$

20. ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์ ณ โรงเรียนแห่งหนึ่ง ครูได้กำหนดไว้ว่า ผู้ที่จะได้เกรด A จะต้องสอบให้ได้คะแนนอยู่ในกลุ่มคะแนนสูงสุด 10 เปอร์เซ็นต์ ถ้าผลการสอบของนักเรียน 80 คน สรุปได้ตามตารางต่อไปนี้

คะแนน	จำนวนนักเรียน
31 – 40	6
41 – 50	x
51 – 60	18
61 – 70	25
71 – 80	10
81 – 90	y
91 – 100	3

โดยที่เปอร์เซ็นไทล์ที่ 20 ของคะแนนนักเรียนทั้งหมดเท่ากับ 50.5 คะแนน แล้ว คะแนนต่ำสุดที่นักเรียนจะได้เกรด A คิดเป็นเปอร์เซ็นต์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 72.75
2. 76.75
3. 80.25
4. 84.25
5. 88.55

21. กำหนดให้ $S = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ และ $M = \{ (x, y) \mid x, y \in S \}$ ถ้าสุ่มหยิบ (x, y) จาก M มาหนึ่งตัวแล้ว ความน่าจะเป็นที่จะได้ (x, y) ซึ่ง $x^2 + y^2 < 25$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{13}{100}$
2. $\frac{15}{100}$
3. $\frac{17}{100}$
4. $\frac{19}{100}$
5. $\frac{21}{100}$

22. ในการสอบครั้งหนึ่ง คะแนนสอบมีการแจกแจงปกติ ถ้าจำนวนนักเรียนที่สอบได้มากกว่า 80 คะแนน มี 10% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด และจำนวนนักเรียนที่สอบได้น้อยกว่า 40 คะแนน มี 10% ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด แล้วนักเรียนที่สอบได้มากกว่า 65 คะแนน มีจำนวนคิดเป็นเปอร์เซ็นต์ของจำนวนนักเรียนทั้งหมดเท่ากับข้อใดต่อไปนี้ เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติดังนี้

Z	0.1	0.32	0.4	1	1.28
พื้นที่	0.0398	0.1255	0.1554	0.3413	0.4

1. 37.45%
2. 46.12%
3. 57.45%
4. 62.55%
5. 77.45%

23. กำหนดให้ $g(x)$ เป็นพหุนามที่ทำให้ฟังก์ชัน f นิยามโดย $f(x)=\begin{cases} g(x) & ;\ x\le 1 \\ x^3+2x & ;\ x>1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ $x=1$ ถ้า $(f\circ g)'(1)=58$ แล้ว $g'(1)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. -1
3. 0
4. 1
5. 2

24. กำหนดให้เส้นโค้ง $y=f(x)$ ผ่านจุด $(1,0)$ และมีความชันของเส้นโค้งที่จุด (x,y) ใดๆ เท่ากับ $4x+1$ ถ้า $F(x)$ เป็นปฏิยานุพันธ์หนึ่งของฟังก์ชัน $f(x)$ แล้ว $F(x)$ มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -2
2. $-\frac{3}{2}$
3. -1
4. 1
5. $\frac{3}{2}$

25. กำหนดให้ a เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $|a| < 1$

ถ้า $S_n = (a+1)^2 + (a^2+1)^2 + (a^3+1)^2 + \ldots + (a^n+1)^2$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} (S_n - n)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{a^2+a}{1-a^2}$
2. $\frac{a^2+3a}{1-a^2}$
3. $\frac{2a^2+a}{1-a^2}$
4. $\frac{2a^2+3a}{1-a^2}$
5. $\frac{3a^2+2a}{1-a^2}$

26. กำหนดให้ $a_1, a_2 \ldots, a_9$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง ถ้า $a_1, a_2 \ldots, a_9$ เป็นลำดับเลขคณิต และมีมัธยฐานเท่ากับ 15 แล้ว ผลบวกของ $a_1, a_2, \ldots, a_9$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 117
2. 125
3. 135
4. 145
5. 153

27. เศษเหลือที่ได้จากการหาร $4^{999} + 9^{555}$ ด้วย 5 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 0
2. 1
3. 2
4. 3
5. 4

28. กำหนดให้ $S = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix} \middle| \; x, y, z \in \{1, 2, \dots, 10\} \right\}$ สุ่มหยิบเมทริกซ์จากเซต S มา 1 เมทริกซ์ ความน่าจะเป็นที่จะได้เมทริกซ์ $\begin{bmatrix} x & y \\ z & x \end{bmatrix}$ ซึ่ง $x < y$ และ $x < z$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{235}{10000}$
2. $\frac{245}{10000}$
3. $\frac{265}{1000}$
4. $\frac{275}{1000}$
5. $\frac{285}{1000}$

29. กำหนดให้ $A = \{-13, -11, -7, -5, -3, -2, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$ ถ้า $S = \{\, a|b| + |a|b \;\mid\; a, b \in A \,\}$ แล้ว จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 43
2. 44
3. 53
4. 64
5. 72

30. กำหนดให้ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{vmatrix} x & x & x \\ 0 & x-3 & x \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix}$

ถ้า m และ M คือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ และค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f ตามลำดับ

และ $S = \left\{ a \;\middle|\; a \text{ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง } m \le f(a) \le M \right\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 4
2. 5
3. 6
4. 7
5. 8

เฉลย

1. 4	7. 15.42	13. 3	19. 3	25. 5
2. 55	8. 64	14. 4	20. 4	26. 3
3. 3	9. 7	15. 3	21. 1	27. 4
4. 2.5	10. 0.75	16. 2	22. 1	28. 5
5. 5	11. 2	17. 2	23. 5	29. 1
6. 4	12. 5	18. 3	24. 2	30. 4

แนวคิด

1. 4

i^n จะวนซ้ำเดิมทุกๆ 4 ตัว คือ $i, -1, -i, 1$

ดังนั้น เอา 4 หาร แล้วหาเศษมาดูว่าตกตัวไหน ก็จะหา i^n ได้

เศษ 1	เศษ 2	เศษ 3	ลงตัว
i	-1	$-i$	1

$i^{-7}+i^{-5}+i^{-3}+i \;=\; \frac{1}{i^7}+\frac{1}{i^5}+\frac{1}{i^3}+i$ → ทำส่วนให้เลขชี้กำลัง ÷ 4 ลงตัว $= \frac{i^1}{i^8}+\frac{i^3}{i^8}+\frac{i^1}{i^4}+i$

$= \frac{i}{1}+\frac{-i}{1}+\frac{i}{1}+i \;=\; 2i$

ดังนั้น $|z^2| \;=\; |z|^2 \;=\; |2i|^2 \;=\; 2^2 \;=\; 4$

2. 55

ข้อนี้ต้องระวังเรื่องวิธีอ่านการหาร : "n หาร 166" จะหมายถึง $166 \div n$

ถ้าจะหมายถึง $n \div 166$ ต้องอ่านว่า "n หารด้วย 166"

$166 \div n$ และ $1101 \div n$ เหลือเศษ 1 แสดงว่า ถ้าหัก 1 ออก เหลือ 165 และ 1100 จะหาร n ลงตัว นั่นเอง

จำนวนที่มากที่สุดที่หาร 165 และ 1100 ลงตัว คือ ห.ร.ม. นั่นเอง

$$\begin{array}{r|rr} 5 & 165 & 1100 \\ \hline 11 & 33 & 220 \\ \hline & 3 & 20 \end{array}$$

ดังนั้น $n =$ ห.ร.ม. $= 5 \times 11 = 55$

3. 3

ย้ายข้าง จะได้ $\arcsin(x^2-3x+1) = -\frac{\pi}{2}$

ใส่ sin ทั้งสองฝั่ง ฝั่งซ้ายจะตัดกับ arcsin ได้ เหลือ

$$\begin{aligned} x^2-3x+1 &= -1 \\ x^2-3x+2 &= 0 \\ (x-1)(x-2) &= 0 \\ x &= 1, 2 \end{aligned}$$

ข้อนี้ไม่ต้องตรวจคำตอบก็ได้ เพราะเราแก้สมการ $x^2-3x+1 \;=\; -1$ มา ซึ่ง $\arcsin(-1)$ จะหาค่าได้แน่นอน

ดังนั้น ผลบวกคำตอบ $= 1+2 = 3$

4. 2.5

ตั้งฉากกัน แสดงว่า ดอทกันได้ 0 และเนื่องจากการดอท มีสมบัติสลับที่และกระจายในการบวกลบได้

ดังนั้น $(m\bar{a}+\bar{b})\cdot(m\bar{a}-\bar{b}) \;=\; m^2(\bar{a}\cdot\bar{a}) - \cancel{m(\bar{a}\cdot\bar{b})} + \cancel{m(\bar{b}\cdot\bar{a})} - (\bar{b}\cdot\bar{b})$

$= m^2\;|\bar{a}|^2 \quad - \;|\bar{b}|^2 \;=\; 4m^2-25$

ดังนั้น $4m^2-25=0$ แก้จะได้ $m = \pm\frac{5}{2} = \pm 2.5$ แต่ m เป็นบวก ดังนั้น ตอบ 2.5

5. 5

$3R_1$ คือ 3 คูณแถวหนึ่ง $3[1 \quad 2 \quad a]$ ได้เป็น $[3 \quad 6 \quad 3a]$

$R_2 - 3R_1$ คือเอาแถวสอง $[3 \quad 1 \quad b]$ ตั้งลบ $[3 \quad 6 \quad 3a]$ ได้เป็น $[0 \quad -5 \quad b-3a]$

ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 3 & 1 & b \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & -5 & b-3a \\ -1 & 0 & c \end{bmatrix}$ เทียบกับที่โจทย์ให้จะได้ $a = -1$, $b - 3a = 7$, $c = 2$

จะได้ $b = 7 + 3a = 7 + 3(-1) = 4$ ดังนั้น $a + b + c = -1 + 4 + 2 = 5$

6. 4

จากกฎ $a^{\log_a m} = m$ จะได้ $\log_2(3^{\log_3 16}) = \log_2(16) = \log_2(2^4) = 4$

7. 15.42

คิดตรงๆจาก $\frac{(22\times17)+(23\times16)+(25\times14)+(30\times15)}{22+23+25+30} = \frac{1542}{100} = 15.42$ ก็ได้ แต่ก็ต้องคิดเลขเยอะ

อีกวิธีคือ เราสามารถลดทอนข้อมูลได้ โดยเอาข้อมูล 17, 16, 14, 15 มาลบ 15 ก่อน ได้เป็น 2, 1, −1, 0

แล้วหาค่าเฉลี่ยได้เป็น $\frac{(22\times2)+(23\times1)+(25\times-1)+(30\times0)}{22+23+25+30} = \frac{44+23-25+0}{100} = 0.42$

แล้วค่อย บวก 15 กลับไปเป็นเลขในระบบเดิม จะได้ ค่าเฉลี่ย $= 15 + 0.42 = 15.42$

หมายเหตุ : จะใช้เลขอื่นที่ไม่ใช่ 15 ก็ได้ แต่ถ้าใช้ 15 ซึ่งมาจากห้องที่นักเรียนเยอะสุด จะทำให้ห้องนักเรียนเยอะสุด มีผลรวมน้ำหนัก $= 30\times0 = 0$ ทำให้คิดเลขน้อยกว่า

8. 64

กระจายออกมา จะได้เป็น $\binom{6}{0}7^6 - \binom{6}{1}7^5 5^1 + \binom{6}{2}7^4 5^2 - \binom{6}{3}7^3 5^4 + \cdots + \binom{6}{6}5^6$

ซึ่งจะเห็นว่า เข้าสูตรทวินามได้เป็น $(7-5)^6$ ได้พอดี

ดังนั้น ตอบ $(7-5)^6 = 2^6 = 64$

9. 7

แทนแล้วเป็น $\frac{0}{0}$ ต้องจัดรูปให้ x ตัดกันก่อน

$\frac{(1+x)(1+6x)-1}{x} = \frac{1+7x+6x^2-1}{x} = \frac{7x+6x^2}{x} = \frac{x(7+6x)}{x} = 7 + 6x$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to0} \frac{(1+x)(1+6x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} 7 + 6x = 7 + 6(0) = 7$

10. 0.75

กระจาย $\sum$ ได้เป็น $1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots$

จะเห็นว่าเป็นอนุกรมเรขาคณิตอนันต์ ที่มี $r = -x^3 = -\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^3 = -\frac{1}{3}$

เนื่องจาก $|r| = \frac{1}{3} < 1$ ดังนั้น อนุกรมอนันต์นี้จะหาค่าได้ด้วยสูตร $S_\infty = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = 1 \times \frac{3}{4} = 0.75$

11. 2

ต้องแยกตัวประกอบด้วยทฤษฎีเศษ โดยแทน $x = \pm\frac{\text{ตัวประกอบของ } 3}{\text{ตัวประกอบของ } 8}$ ซึ่งได้แก่ $\pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{3}{4}, \pm\frac{1}{8}, \pm\frac{3}{8}$

แล้วดูว่าตัวไหนได้ 0 : $x = 1:\ 8(1)^3 + 6(1)^2 - 5(1) - 3 = 6$ ใช้ไม่ได้

$x = -1:\ 8(-1)^3 + 6(-1)^2 - 5(-1) - 3 = 0$ ใช้ได้

เอา -1 ไปหารสังเคราะห์ $\begin{array}{r|rrrr} -1 & 8 & 6 & -5 & -3 \\ & & -8 & 2 & 3 \\ \hline & 8 & -2 & -3 & 0 \end{array}$

ดังนั้น $8x^3+6x^2-5x-3 \;=\; \big(x-(-1)\big)(8x^2-2x-3)$

$\;=\; (x+1)(4x-3)(2x+1)$

จะได้คำตอบคือ $-1\,,\ \frac{3}{4},\ -\frac{1}{2}$ ดังนั้น $x_1+x_3 \;=$ ตัวน้อยสุด $+$ ตัวมากสุด $\;=\; -1+\frac{3}{4} \;=\; -\frac{1}{4}$

12. 5

รากอีก 2 ค่าที่เหลือ จะได้จากการนำรากตัวแรกมาบวกมุมเพิ่มไปทีละ $\frac{360^\circ}{3}=120^\circ$

รากตัวแรก คือ $\sqrt{2}\angle 15^\circ$ ดังนั้น รากอีกสองตัวที่เหลือคือ $\sqrt{2}\angle 135^\circ$ และ $\sqrt{2}\angle 255^\circ$

ดังนั้น $z_2z_3 \;=\; \big(\sqrt{2}\angle 135^\circ\big)\big(\sqrt{2}\angle 255^\circ\big) \;=\; \big(\sqrt{2}\times\sqrt{2}\big)\angle(135^\circ+255^\circ) \;=\; 2\angle 390^\circ \;=\; 2\angle 30^\circ$

$\;=\; 2(\cos 30^\circ + \mathrm{i}\sin 30^\circ) \;=\; 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right) \;=\; \sqrt{3}+\mathrm{i}$

13. 3

จาก $m=n+2$ ดังนั้น ห.ร.ม. ของ m และ n $=$ ห.ร.ม. ของ $n+2$ และ n

$\begin{array}{r|c|c|} 1 & n+2 & n \\ & \underline{n} & \\ & 2 & \end{array}$

ถ้าเอา $n+2$ กับ n ไปหา ห.ร.ม. ด้วยวิธีตั้งสองแถว จะเห็นว่ารอบแรกก็เหลือ 2 แล้ว

ดังนั้น ห.ร.ม. ของ m และ n จะไม่มีทางเกิน 2 ไปได้ ...(1)

และเนื่องจาก ค.ร.น. $=180$ เป็นเลขคู่ ดังนั้น m และ n ต้องมีเลขคู่อยู่อย่างน้อย 1 ตัว

จาก $m=n+2$ จะเห็นว่า ถ้า n เป็นคี่ จะได้ m เป็นคี่ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (เพราะเลขคี่สองตัว จะมี ค.ร.น. เป็นคู่ไม่ได้)

ดังนั้น n ต้องเป็นคู่ และจะได้ m เป็นคู่ด้วย ทำให้ ห.ร.ม. จะมี 2 เป็นอย่างน้อย ...(2)

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า ห.ร.ม. $=2$ ได้สถานเดียว

จากสมบัติของ ห.ร.ม. และ ค.ร.น. จะได้ $mn \;=$ ห.ร.ม. $\times$ ค.ร.น. $=\; 2\times 180 \;=\; 360$

14. 4

(1) $|\bar{u}\times\bar{v}| \;=\; |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ แต่ $\sin\theta\le 1$ ดังนั้น $|\bar{u}\times\bar{v}|\le|\bar{u}||\bar{v}|$ $\rightarrow$ ถูก

(2) $\bar{u}\times(\bar{u}+\bar{v}) \;=\; \bar{u}\times\bar{u} \;+\; \bar{u}\times\bar{v} \;=\; \bar{0}+\bar{u}\times\bar{v} \;=\; \bar{u}\times\bar{v}$ $\rightarrow$ ถูก

(3) $|\bar{u}\times\bar{v}|^2+|\bar{u}\cdot\bar{v}|^2 \;=\; (|\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta)^2+(|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta)^2$

$\;=\; |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta) \;=\; |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2(1) \;=\; |\bar{u}|^2|\bar{v}|^2$ $\rightarrow$ ถูก

(4) $5\bar{u}\times\bar{v}$ จะได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์ในทิศตั้งฉากกับระนาบที่ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ วางอยู่ ดังนั้น $5\bar{u}\times\bar{v}$ จะตั้งฉากกับ $\bar{v}$
ดังนั้น $5\bar{u}\times\bar{v}$ จะตั้งฉากกับ $5\bar{v}$ ด้วย จึง dot กันเป็น 0 เสมอ ดังนั้น $(5\bar{u}\times\bar{v})\cdot 5\bar{v} \;=\; 0$ $\rightarrow$ ผิด

15. 3

กระจาย ได้

$$\begin{aligned} \cos^2 2\mathrm{A}+2\cos 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\cos^2\mathrm{B}+\sin^2 2\mathrm{A}+2\sin 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{B} &= 3 \\ (\cos^2 2\mathrm{A}+\sin^2 2\mathrm{A})+(\cos^2\mathrm{B}+\sin^2\mathrm{B})+2\cos 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+2\sin 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B} &= 3 \\ 1 \qquad\quad + \qquad\quad 1 \qquad\quad +2(\cos 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B}+\sin 2\mathrm{A}\cos\mathrm{B}) &= 3 \\ \cos(2\mathrm{A}-\mathrm{B}) &= \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

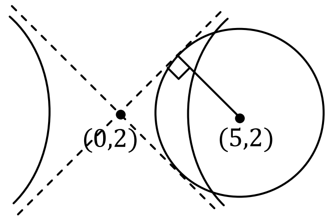
เนื่องจาก $\hat{\mathrm{C}}$ เป็นมุมฉาก ดังนั้น $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ เหลือ 90° และเนื่องจาก $\mathrm{A}\le\mathrm{B}$ ดังนั้น $0\le\mathrm{A}\le 45^\circ$ และ $45^\circ\le\mathrm{B}\le 90^\circ$

ดังนั้น $2\mathrm{A}-\mathrm{B}$ มากสุด เมื่อ A มากสุด และ B น้อยสุด $=2(45^\circ)-45^\circ=45^\circ$

$2\mathrm{A}-\mathrm{B}$ น้อยสุด เมื่อ A น้อยสุด และ B มากสุด $=2(0)-90^\circ=-90^\circ$ ดังนั้น $-90^\circ\le 2\mathrm{A}-\mathrm{B}\le 45^\circ$

แต่ $\cos(2A-B)=\frac{1}{2}$ พิจารณาจากช่วงค่าที่เป็นไปได้ของ $2A-B$ จะได้ $2A-B=-60°$ ...(1)
แต่ $A+B=90°$ ...(2) บวกสองสมการ จะได้ $3A=30°$ ดังนั้น $\tan 3A=\tan 30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$

16. 2



จากรูปแบบสมการ จะเป็นไฮเพอร์โบลาแนวนอน จุดศูนย์กลาง $(0,2)$
โดย $a=3$, $b=4$ ดังนั้น $c=\sqrt{3^2+4^2}=5$
ดังนั้น โฟกัสอยู่ที่ $(5,2)$ และ $(-5,2)$ แต่ F อยู่ Q_1 ดังนั้น $F(5,2)$
และจากสูตรเส้นกำกับ $\frac{x-h}{a}=\pm\frac{y-k}{b}$ จะได้เส้นกำกับ คือ $\frac{x}{3}=\pm\frac{y-2}{4}$
วงกลม สัมผัสเส้นกำกับ แสดงว่า ระยะจากศูนย์กลางวงกลม ไปยังเส้นกำกับ = รัศมี
ศูนย์กลางวงกลม คือ $F(5,2)$ และเลือกเส้นกำกับมาหนึ่งเส้น → เอา $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{4}$ ซึ่งจัดรูปได้เป็น $4x-3y+6=0$
ดังนั้น รัศมี = ระยะจาก $(5,2)$ ไป $4x-3y+6=0$ $=\frac{|4(5)-3(2)+6|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{20}{5}=4$

17. 2

แก้สมการ ดังนี้

$$\begin{aligned}2^x\cdot 2^{x+1}\cdot 2^{x+2} &= 4^x+4^{x+1}+4^{x+2}\\ 2^{x+x+1+x+2} &= 4^x(1+4^1+4^2)\\ 2^{3x+3} &= 2^{2x}(21)\\ \frac{2^{3x}\cdot 2^3}{2^{2x}} &= 21\\ 2^x &= \frac{21}{8}\\ x &= \log_2\frac{21}{8}\end{aligned}$$

18. 3

จากสมบัติของ log จะได้ $\log_2 x$ และ $\log_x 2$ เป็นส่วนกลับของกันและกัน
ดังนั้น ถ้าให้ $\log_2 x=A$ จะได้ $\log_x 2=\frac{1}{A}$ ดังนั้น สมการคือ $A+\frac{6}{A}-5=0$
คูณ A ตลอด ได้

$$\begin{aligned}A^2+6-5A &= 0\\ (A-2)(A-3) &= 0\\ A &= 2,3\end{aligned}$$

แทนค่า A กลับ จะได้ $\log_2 x=2,3$ ดังนั้น $x=2^2,2^3$ และจะได้ผลบวกคำตอบ $=2^2+2^3=12$

19. 3

เอาไมเนอร์มาเปลี่ยนเครื่องหมายตรงที่ $i+j$ เป็นคี่ จะได้โคแฟกเตอร์ คือ $\begin{bmatrix}1&1&2\\-3&2&4\\5&-1&3\end{bmatrix}$
เอาโคแฟกเตอร์ มาทรานสโพส จะได้ $\operatorname{adj}(A)=\begin{bmatrix}1&-3&5\\1&2&-1\\2&4&3\end{bmatrix}$
ซึ่งจาก $\operatorname{adj}(A)$ เราจะหา $\det(A)$ ได้จากสูตร $\det(\operatorname{adj}(A))=(\det(A))^{n-1}$
$\det(\operatorname{adj}(A))=(6+6+20)-(20-4-9)=25$ ดังนั้น $(\det(A))^{3-1}=25$ จะได้ $\det(A)=\pm 5$
แต่โจทย์บอก $\det(A)>0$ ดังนั้น $\det(A)=5$
จะได้ $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\cdot\operatorname{adj}(A)=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1&-3&5\\1&2&-1\\2&4&3\end{bmatrix}$ กระจาย $\frac{1}{5}$ เข้าไป จะได้ $\frac{1}{5}+\frac{-3}{5}+\frac{5}{5}=\frac{3}{5}$

20. 4

$\mathrm{P}_{20} = 50.5 =$ ขอบบนของชั้นที่ 2 พอดี เนื่องจากขอบบนของชั้น จะเท่ากับตัวสุดท้ายของชั้น

ดังนั้น $\mathrm{P}_{20} =$ ตัวสุดท้ายของชั้นที่ $2 =$ ตัวที่ $6 + x$

แต่มีคน 80 คน ดังนั้น $\mathrm{P}_{20} =$ ตัวที่ $\frac{20}{100} \times 80 = 16$

ดังนั้น $6 + x = 16$ จะได้ $x = 10$

มี 80 คน ดังนั้น $6 + x + 18 + 25 + 10 + y + 3 = 80$

แทน $x = 10$ จะแก้สมการได้ $y = 8$ จะสร้างช่องความถี่สะสมได้ดังรูป

คะแนนสอบ	ความถี่	ความถี่สะสม
31 – 40	6	6
41 – 50	10	16
51 – 60	18	34
61 – 70	25	59
71 – 80	10	69
81 – 90	8	77
91 – 100	3	80

เกรด A มี 10% ดังนั้น ต่ำสุดของเกรด A คือ P_{90}

ซึ่ง P_{90} จะอยู่ตัวที่ $\frac{90}{100} \times 80 = 72$ ซึ่งจะอยู่ในชั้นรองสุดท้าย (เพราะความถี่สะสมถึง 72 ในชั้นนี้)

ดังนั้น $\mathrm{P}_{90} = L + \left(\frac{\frac{90(80)}{100} - F_L}{f_P}\right) \times I = 80.5 + \left(\frac{72 - 69}{8}\right) \times 10 = 80.5 + 3.75 = 84.25$

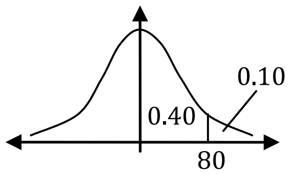
21. 1

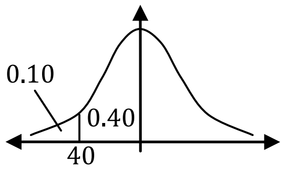
จำนวนแบบทั้งหมด : เลือก x และ y ได้อย่างละ 10 ตัว ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= 10 \times 10 = 100$

จำนวนแบบที่ $x^2 + y^2 < 25$ ต้องใช้แรงลุยนับ
(1,1) , (1,2) , (1,3) , (1,4)
(2,1) , (2,2) , (2,3) , (2,4)
(3,1) , (3,2) , (3,3)
(4,1) , (4,2)

จะมีทั้งหมด 13 แบบ ดังนั้น ความน่าจะเป็น $= \frac{13}{100}$

22. 1





10% ได้มากกว่า 80 จะวาดได้ดังรูป

พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง จะเป็นพื้นที่ที่วัดจากแกนกลางไปทางขวา

เนื่องจากพื้นที่ใต้โค้งแบ่งเป็นฝั่งซ้ายขวาฝั่งละ 0.5 ดังนั้น $A = 0.5 - 0.1 = 0.4$

เปิดตาราง จะได้ $z = 1.28$ ดังนั้น $\frac{80-\bar{x}}{s} = 1.28 \quad \rightarrow \quad 80 - \bar{x} = 1.28s \quad ...(1)$

ถัดมา 10% ได้น้อยกว่า 40 จะวาดได้ดังรูป

ทำแบบเดิม แต่ฝั่งซ้ายจะใช้ z ติดลบ จะได้ $z = -1.28$

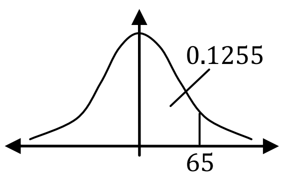
ดังนั้น $\frac{40-\bar{x}}{s} = -1.28 \quad \rightarrow \quad 40 - \bar{x} = -1.28s \quad ...(2)$

แก้ (1) และ (2) จะหา $\bar{x}$ และ s ได้ : (1) + (2) จะได้ $120 - 2\bar{x} = 0$ ดังนั้น $\bar{x} = 60$

แทน $\bar{x} = 60$ ใน (1) จะได้ $s = \frac{20}{1.28}$

ดังนั้น 65 คะแนน คิดเป็น $z = \frac{65-60}{\frac{20}{1.28}} = 5 \times \frac{1.28}{20} = 0.32$

ซึ่งจากตารางที่โจทย์ให้ จะได้ $A = 0.1255$ และจะวาดได้ดังรูป



ดังนั้น พื้นที่ทางขวาของ 65 จะเท่ากับ $0.5 - 0.1255 = 0.3745 = 37.45\%$

23. 5

ต่อเนื่องที่ $x = 1$ แสดงว่า ถ้าแทน $x = 1$ ลงไปตรงรอยต่อของสูตร คือ $g(x)$ กับ $x^3 + 2x$ ต้องได้ค่าเท่ากัน

ดังนั้น จะได้ $g(1) = 1^3 + 2(1) = 3$

เนื่องจาก $(f\circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ ดังนั้น $(f\circ g)'(x) = \frac{d}{dx}f\big(g(x)\big)$ กฎลูกโซ่

$$= \frac{d}{d\,g(x)}f\big(g(x)\big)\cdot\frac{d}{dx}g(x)$$

$$= \frac{d}{d\,g(x)}f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$$

แต่โจทย์ให้ $(f\circ g)'(1)=58$ ดังนั้น $\frac{d}{d\,g(x)}f\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ ขณะที่ $x=1$ จะต้องได้ 58 ...(*)

เนื่องจาก $g(1)=3$ ดังนั้น ถ้าจะหา $f\big(g(x)\big)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 1 จะต้องใช้สูตรที่สองของ f

จะได้ $f\big(g(x)\big)=\big(g(x)\big)^3+2g(x)$ ดังนั้น $\frac{d}{d\,g(x)}f\big(g(x)\big)=3\big(g(x)\big)^2+2$

แทนใน (*) และคิดขณะที่ $x=1$ จะได้ $\Big(3\big(g(1)\big)^2+2\Big)\cdot g'(1) = 58$

$(3(\ 3\ )^2+2)\cdot g'(1) = 58$ แก้สมการ จะได้ $g'(1)=2$

24. 2

จาก ความชัน $=f'(x)$ แต่โจทย์บอกว่าความชันคือ $4x+1$ ดังนั้น $f'(x)=4x+1$

อินทิเกรต จะได้ $f(x)=2x^2+x+C$ ...(*)

แต่ f ผ่านจุด $(1,0)$ แสดงว่าถ้าแทน $x=1$ ใน (*) จะได้ $2(1)^2+1+C = 0$ แก้สมการได้ $C=-3$

ดังนั้น $f(x)=2x^2+x-3$

ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชัน F จะหาได้จากการดิฟ F แล้วจับเท่ากับ 0

เนื่องจาก F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f ดังนั้น ดิฟ F จะย้อนกลับไปเป็น f จับ f เท่ากับ 0 ได้ $2x^2+x-3 = 0$

$$(2x+3)(x-1)=0$$

$$x=-\tfrac{3}{2},\ 1$$

ถัดมา ต้องตัดสินว่า $-\frac{3}{2}$ กับ 1 อันไหนเป็นสูงสุดสัมพัทธ์ อันไหนเป็นต่ำสุดสัมพัทธ์

วิธีการคือ ดิฟต่อไปอีกเที่ยว แล้วแทน $-\frac{3}{2}$ กับ 1 ลงไป ถ้าได้ค่าบวกเป็นต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้าได้ค่าลบเป็นสูงสุดสัมพัทธ์

ดิฟ $2x^2+x-3$ ได้เป็น $4x+1$ จะเห็นว่า $4\left(-\frac{3}{2}\right)+1 = -5$ เป็นลบ → สูงสุดสัมพัทธ์

$4(\ 1\ )+1 = 5$ เป็นบวก → ต่ำสุดสัมพัทธ์

ดังนั้น $x=-\frac{3}{2}$ จะเป็นตำแหน่งที่ทำให้ F มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์

25. 5

กระจาย $S_n = a^2+2a+1+a^4+2a^2+1+a^6+2a^3+1+\ldots+a^{2n}+2a^n+1$

$$=(a^2+a^4+a^6+\ \ldots+a^{2n})+(2a+2a^2+2a^3+\ \ldots+2a^n)+(1+1+1+\ \ldots+1)$$

$$=(a^2+a^4+a^6+\ \ldots+a^{2n})+2(a+a^2+a^3+\ \ldots+a^n)+\qquad n$$

ดังนั้น S_n-n จะตัด n ได้ เหลือ $(a^2+a^4+a^6+\ \ldots+a^{2n})+2(a+a^2+a^3+\ \ldots+a^n)$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-n)$ จะกลายเป็นอนุกรมอนันต์ 2 อัน ที่มีอัตราส่วนร่วมคือ a^2 และ a

ซึ่งโจทย์บอกว่า $|a|<1$ ดังนั้น $|a^2|<1$ จะได้อนุกรมลู่เข้า และ ใช้สูตร $\frac{a_1}{1-r}$ ได้

จะได้คำตอบ $= \frac{a^2}{1-a^2}+2\left(\frac{a}{1-a}\right) = \frac{a^2}{1-a^2}+\frac{2a(1+a)}{(1-a)(1+a)} = \frac{3a^2+2a}{1-a^2}$

26. 3

มัธยฐาน จะอยู่ตัวตรงกลาง คือตัวที่ $\frac{9+1}{2}=5$ ดังนั้น $a_5=15$

จากสูตรลำดับเลขคณิต จะได้ $a_5=a_1+4d$ ดังนั้น $a_1+4d=15$

จากสูตรอนุกรมเลขคณิต จะได้ผลบวกที่โจทย์ถาม $= S_9 = \frac{9}{2}(2a_1 + 8d)$

$= \frac{9}{2} \cdot 2(a_1 + 4d) = \frac{9}{2} \cdot 2(15) = 135$

27. 4

วิธีที่ 1 : เนื่องจากเลขยกกำลัง จะมีหลักหน่วยที่วนรอบซ้ำเป็นจังหวะสั้นๆ เราจะหาหลักหน่วยของ $4^{999} + 9^{555}$ ก่อน

คิดเฉพาะหลักหน่วย $4^1 = 4$ ลงท้ายด้วย 4 $\qquad 9^1 = 9$ ลงท้ายด้วย 9

$4^2 = 4 \times 4$ ลงท้ายด้วย 6 $\qquad 9^2 = 9 \times 9$ ลงท้ายด้วย 1

$4^3 = 6 \times 4$ ลงท้ายด้วย 4 ซ้ำแล้ว $\qquad 9^3 = 1 \times 9$ ลงท้ายด้วย 9 ซ้ำแล้ว

จะเห็นว่า 4^m และ 9^n มีจังหวะการวนของหลักหน่วยทุก 2 ตัว : 999 เป็นเลขคี่ ดังนั้น 4^{999} ลงท้ายด้วย 4

555 เป็นเลขคี่ ดังนั้น 9^{555} ลงท้ายด้วย 9

ดังนั้น $4^{999} + 9^{555}$ ลงท้ายด้วย $4 + 9 = 13$ ลงท้ายด้วย 3

ซึ่งจำนวนที่ลงท้ายด้วย 3 จะหารด้วย 5 เหลือเศษ 3 เสมอ

วิธีที่ 2 : $4^{999} + 9^{555} = (5-1)^{999} + (10-1)^{555}$

จากทฤษฎีบททวินาม : $(5-1)^{999} = 5^{999} + \binom{999}{1}5^{998}(-1)^1 + \dots + \binom{999}{998}5^1(-1)^{998} + (-1)^{999}$

$(10-1)^{555} = 10^{555} + \binom{555}{1}10^{554}(-1)^1 + \dots + \binom{555}{554}10^1(-1)^{554} + (-1)^{555}$

จะเห็นว่าทุกตัวที่กระจายออกมา หารด้วย 5 ลงตัวหมด ยกเว้นตัวสุดท้าย $(-1)^{999}$ กับ $(-1)^{555}$ ซึ่งรวมกันได้ -2

ดังนั้น $4^{999} + 9^{555} =$ จำนวนที่หารด้วย 5 ลงตัว $- 2$

นั่นคือ ถ้าบวก $4^{999} + 9^{555}$ เพิ่มไปอีก 2 มันจะหารด้วย 5 ลงตัว ดังนั้น $4^{999} + 9^{555}$ หารด้วย 5 เหลือเศษ 3

28. 5

หาจำนวนแบบทั้งหมดก่อน เนื่องจาก x, y, z เลือกเป็น $1, 2, 3, \dots, 10$ ได้ตัวละ 10 แบบ

ดังนั้น จำนวนแบบทั้งหมด $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$

ถัดมา หาจำนวนแบบที่โจทย์ต้องการ จะแบ่งกรณีนับ ตามความสัมพันธ์ของ y กับ z $(y < z,\ y > z,\ y = z)$

กรณี $y < z$: จะได้ $x < y < z \rightarrow$ เลือก 3 ตัว จาก 1 ถึง 10 แล้วเอาตัวน้อยเป็น x , ตัวกลางเป็น y , ตัวมากเป็น z

จะเลือกได้ $\binom{10}{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1} = 120$ แบบ

กรณี $y > z$: จะได้ $x < z < y \rightarrow$ ทำเหมือนกรณีที่แล้ว คือเลือก 3 ตัว จาก 1 ถึง 10 แต่คราวนี้เอาตัวน้อยเป็น x , ตัวกลางเป็น z , ตัวมากเป็น y จะเลือกได้ $\binom{10}{3} = 120$ แบบ เท่ากรณีแรก

กรณี $y = z$: จะได้ $x < y = z \rightarrow$ เลือก 2 ตัว จาก 1 ถึง 10 แล้วเอาตัวน้อยเป็น x , เอาตัวมากเป็น y กับ z

จะเลือกได้ $\binom{10}{2} = \frac{10\cdot9}{2\cdot1} = 45$ แบบ

รวมสามกรณี จะได้ จำนวนแบบ $= 120 + 120 + 45 = 285$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็น $= \frac{285}{1000}$

29. 1

จะเห็นว่า A มีจำนวนบวกอยู่ 6 จำนวน จำนวนลบอยู่ 6 จำนวน และตัวเลขของทุกตัวเป็นจำนวนเฉพาะ

กรณี a, b เป็นบวกทั้งคู่ : จะได้ $a|b| + |a|b = ab + ab = 2ab$

กรณี $a \neq b$: เนื่องจากลำดับก่อนหลังของ a, b ไม่มีผลกับค่า $2ab$ จึงต้องนับจำนวนแบบของ a, b แบบไม่สนลำดับ ซึ่งจะมีจำนวนแบบ $= \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$ แบบ เนื่องจาก จำนวนบวกทั้ง 6 จำนวนเป็นจำนวนเฉพาะ ดังนั้น ใน 15 แบบนี้ จะไม่มีแบบไหนที่ $2ab$ เท่ากันได้

กรณี $a = b$: มีจำนวนบวก 6 จำนวน จะเลือก a ได้ 6 แบบ แต่ b ต้องตาม a ได้แบบเดียว ดังนั้น จำนวนแบบ $= 6$ แบบ

รวมสองกรณี จะได้กรณีที่ a, b เป็นบวกทั้งคู่ มีค่า $a|b| + |a|b$ ทั้งหมด $15 + 6 = 21$ แบบ

กรณี a, b เป็นลบทั้งคู่ : จะได้ $a|b|$ และ $|a|b$ เป็นลบทั้งสองจำนวน ดังนั้น $a|b| + |a|b$ จะเหมือน กรณีแรก เพียงแต่จะได้ค่า $a|b| + |a|b$ ติดลบ ดังนั้น จะได้จำนวนแบบเพิ่มอีก 21 แบบ

กรณี a, b เป็นบวกหนึ่งตัว ลบหนึ่งตัว : จะได้ $a|b|$ และ $|a|b$ เป็นบวกหนึ่งตัว ลบหนึ่งตัว ดังนั้น $a|b| + |a|b$ จะหักกันกลายเป็น 0 เสมอ ดังนั้น กรณีนี้ จะได้ $a|b| + |a|b$ แบบเดียว คือ ศูนย์

รวมทุกกรณี จะได้จำนวนแบบ $= 21 + 21 + 1 = 43$ แบบ

30. 4

จะเห็นว่าสมาชิกใต้แนวเส้นแทยงมุมหลักเป็น 0 หมด → จะได้ det เท่ากับผลคูณตัวเลขที่อยู่ในแนวเส้นแทยงมุมหลัก

ดังนั้น $f(x) = x(x-3)(x+3) = x^3 - 9x$

หาค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ต้องดิฟ แล้วจับ $= 0$ จะได้
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 9 = 0 \\ x^2 &= 3 \\ x &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

แทน $x = \pm\sqrt{3}$ เพื่อหาค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ จะได้ $f(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^3 - 9(\sqrt{3}) = -6\sqrt{3} \rightarrow m$

และ $f(-\sqrt{3}) = (-\sqrt{3})^3 - 9(-\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \rightarrow M$

ดังนั้น ต้องหาจำนวนเต็ม a ที่ทำให้
$$\begin{aligned} -6\sqrt{3} &\leq f(a) \leq 6\sqrt{3} \\ -6(1.73) &\leq f(a) \leq 6(1.73) \\ -10.38 &\leq f(a) \leq 10.38 \end{aligned}$$

เนื่องจาก ค่าสูงสุดต่ำสุดสัมพัทธ์ เกิดที่ $\pm\sqrt{3}$ ดังนั้น จำนวนเต็ม a ที่อยู่ในช่วง $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ ซึ่งได้แก่ $-1, 0, 1$ จะสอดคล้องกับ $m \leq f(a) \leq M$ อย่างแน่นอน

ที่เหลือต้องแทนค่าดู
$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 - 9(-2) = 10 & f(2) &= (2)^3 - 9(2) = -10 \\ f(-3) &= (-3)^3 - 9(-3) = 0 & f(3) &= (3)^3 - 9(3) = 0 \\ f(-4) &= (-4)^3 - 9(-4) = -28 & f(4) &= (4)^3 - 9(4) = 28 \end{aligned}$$

ถ้าเลยจาก -4 กับ 4 ไป จะไม่มีจุดสัมพัทธ์ให้ $f(a)$ วกกลับแล้ว

ดังนั้น จะมีแค่ $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ ทั้งหมด 7 จำนวนเท่านั้น ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขของ S

<u>เครดิต</u>

ขอบคุณ อาจารย์ศิลา สุขรัศมี สำหรับ ข้อสอบ และเฉลย

ขอบคุณ คุณ ติวเตอร์อุ๋ย

และ คุณ Ty Pongsatorn สำหรับ เฉลยวิธีทำ

ขอบคุณ คุณ Tarm Chaidirek

และ คุณ Punyapat Makul

และ คุณ Soruth Kuntikul ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร