

วิชาสามัญ คณิตศาสตร์ 1 (อ.ค. 58)

วันอาทิตย์ที่ 27 ธันวาคม 2558 เวลา 8.30 - 10.00 น.

ตอนที่ 1 แบบระบายตัวเลขที่เป็นคำตอบ จำนวน 10 ข้อ ข้อละ 2 คะแนน รวม 20 คะแนน

1. ให้ $S = \{x \mid x \text{ เป็นจำนวนเต็มที่สุดค้ดคล้องกับอสมการ } 6|x - 3| < 5x\}$

จำนวนสมาชิกของ S เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|-------|
| 1. 14 | 2. 15 | 3. 16 |
| 4. 17 | 5. 18 | |

2. กำหนดให้ $P(x) = ax^5 + bx^3 + cx + d$ เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัว ถ้า $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10 และ x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 แล้ว $x + 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|-------|------|
| 1. -10 | 2. -6 | 3. 2 |
| 4. 4 | 5. 6 | |

3. ถ้า \vec{u} และ \vec{v} เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ โดยที่ $|\vec{u}| = \sqrt{5}$ และ $|\vec{v}| = \sqrt{3}$ แล้ว $|\vec{u} \cdot \vec{v}|^2 + |\vec{u} \times \vec{v}|^2$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|----------------------------|--------------------------|------|
| 1. $\sqrt{15}$ | 2. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$ | 3. 8 |
| 4. $5\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ | 5. 15 | |

4. กำหนดให้ a และ b เป็นจำนวนจริงบวก ถ้า $\log_{a^2} b = 5$ แล้ว $\log_{b^2} a$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| 1. $\frac{1}{20}$ | 2. $\frac{1}{10}$ | 3. $\frac{1}{5}$ |
| 4. 10 | 5. 20 | |

5. ถ้า S เป็นเซตของจำนวนจริง a ซึ่งทำให้ระบบสมการ

$$\begin{aligned} ax + 2y - 2z &= -1 \\ x + y - z &= 0 \\ 2x + y + 2z &= 2 \end{aligned}$$

มีคำตอบเพียงคำตอบเดียว แล้ว S คือเซตในข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| 1. $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ | 2. $(-\infty, -1) \cup (0, \infty)$ | 3. $(-\infty, 2) \cup (2, \infty)$ |
| 4. $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$ | 5. $\{-2, -1, 1, 2\}$ | |

6. $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------------------|-------------------|------------------|
| 1. $-\frac{1}{7}$ | 2. $-\frac{1}{9}$ | 3. $\frac{1}{9}$ |
| 4. $\frac{1}{7}$ | 5. 9 | |

7. ตารางแจกแจงความถี่สัมพัทธ์ของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นดังนี้

คะแนนสอบ	ความถี่สัมพัทธ์
0 - 19	0.1
20 - 39	0.1
40 - 59	0.3
60 - 79	0.3
80 - 99	0.2

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มนี้ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 57.5 คะแนน
2. 58.5 คะแนน
3. 60.5 คะแนน
4. 62.5 คะแนน
5. 63.5 คะแนน

8. พิจารณา $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} \right)$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง

1. หาค่าไม่ได้
2. มีค่าเท่ากับ $-\frac{3}{4}$
3. มีค่าเท่ากับ $-\frac{1}{4}$
4. มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{4}$
5. มีค่าเท่ากับ $\frac{3}{4}$

9. ถ้า $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ เป็นลำดับเรขาคณิต โดยที่ $a_1 = 96$ และ $a_4 = 12$

แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 120
2. 128
3. 144
4. 192
5. 288

10. ถ้า $f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 - 5 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ -5 & \text{เมื่อ } -1 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 - 5 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

แล้ว $(f \circ f)'(2)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|-------|------|
| 1. -12 | 2. -8 | 3. 0 |
| 4. 8 | 5. 12 | |

ตอนที่ 2 แบบปรนัย 5 ตัวเลือก เลือก 1 คำตอบที่ถูกต้องที่สุด จำนวน 20 ข้อ ข้อละ 4 คะแนน รวม 80 คะแนน

11. กำหนดให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นรากที่ 3 ของจำนวนเชิงซ้อนจำนวนหนึ่ง

ถ้า z_1 อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 โดยที่ $|z_1| = 2$ และ $z_3 = \bar{z}_1$ แล้ว $z_2 + z_3$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------|
| 1. $1 + \sqrt{3}i$ | 2. $-1 - \sqrt{3}i$ | 3. $-1 + \sqrt{3}i$ |
| 4. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$ | 5. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ | |

12. เศษเหลือที่ได้จากการหาร 11^{111} ด้วย 1,210 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|--------|--------|
| 1. 1 | 2. 11 | 3. 111 |
| 4. 121 | 5. 211 | |

13. ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว ซึ่งอสมการ $\frac{x+a}{(x+b)^2} \geq 0$ มีเซตคำตอบคือช่วง $(1, \infty)$ แล้ว $a + b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. -2
- 2. -1
- 3. 0
- 4. 1
- 5. 2

14. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วซึ่งมีด้าน $AB = AC$ ถ้ามุม $A = 150^\circ$ และด้าน BC ยาวเท่ากับ 16 หน่วย แล้ว พื้นที่สามเหลี่ยม ABC เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. $\frac{64}{3}$ ตารางหน่วย
- 2. $64(2 - \sqrt{3})$ ตารางหน่วย
- 3. $32(3 - \sqrt{2})$ ตารางหน่วย
- 4. 64 ตารางหน่วย
- 5. $64(2 + \sqrt{3})$ ตารางหน่วย

15. ให้ \vec{u}, \vec{v} และ \vec{w} เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในระบบพิกัดฉากสามมิติ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

- ก. $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$
- ข. $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- ค. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2$
- ง. $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$

จำนวนข้อความที่ถูกต้อง เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- 1. 0 (ไม่มีข้อความใดถูก)
- 2. 1
- 3. 2
- 4. 3
- 5. 4

16. ให้ s เป็นวงกลมที่อยู่ในควอดรันต์ที่ 1 ซึ่งสัมผัสแกน X และ แกน Y และเส้นตรง ℓ ซึ่งมีสมการเป็น $3x - 4y + 24 = 0$ ถ้า C เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม s และ P เป็นจุดที่วงกลม s สัมผัสเส้นตรง ℓ แล้วสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด C และจุด P คือข้อใดต่อไปนี้

1. $4x + 3y - 28 = 0$ 2. $4x + 3y - 32 = 0$ 3. $4x + 3y - 40 = 0$
 4. $3x + 4y - 28 = 0$ 5. $3x + 4y - 32 = 0$

17. กำหนดให้ A เป็นเมทริกซ์มิติ 3×3 ซึ่ง $[A : I] \sim [I : P]$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์มิติ 3×3

และ $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ถ้า $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว a มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -17 2. -5 3. $-\frac{17}{5}$
 4. $\frac{5}{17}$ 5. $\frac{17}{5}$

18. ผลบวกของคำตอบของสมการ $9^{\log x} - 10(3^{\log x}) + 9 = 0$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 11 2. 99 3. 101
 4. 111 5. 1001

19. กำหนดให้ $S = \{ x \mid 0 < x < 2\pi \text{ และ } 125(5^{4 \cos 2x}) = 4(5^{4 \cos^2 x}) + 25 \}$

S เป็นสับเซตของเซตในข้อใดต่อไปนี้

- | | |
|--|---|
| 1. $\left\{ \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}, \frac{10\pi}{8}, \frac{12\pi}{8}, \frac{14\pi}{8} \right\}$ | 2. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{6}, \frac{4\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{8\pi}{6}, \frac{9\pi}{6} \right\}$ |
| 3. $\left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{6\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ | 4. $\left\{ \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{8\pi}{6}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ |
| 5. $\left\{ \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4} \right\}$ | |

20. ความสูง (เซนติเมตร) ของเด็กกลุ่มหนึ่งจำนวน 9 คน

152 , 153 , 155 , 158 , 159 , 160 , 162 , 166 , 175

ถ้าสุ่มเลือกเด็กกลุ่มนี้มา 3 คน ความน่าจะเป็นที่เด็กทั้งสามคนเดี๋ยวกว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของความสูงของเด็กกลุ่มนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------------------|--------------------|-------------------|
| 1. $\frac{3}{84}$ | 2. $\frac{5}{42}$ | 3. $\frac{5}{28}$ |
| 4. $\frac{5}{15}$ | 5. $\frac{25}{42}$ | |

21. มีเลขโดด 9 จำนวน คือ $-7, -5, -3, -1, 0, 2, 4, 6, 10$ ถ้าสุ่มเลขโดดนี้มา 4 จำนวน

แล้วความน่าจะเป็นที่ผลคูณของเลขโดด 4 จำนวนนี้ไม่เป็นจำนวนลบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---------------------|---------------------|--------------------|
| 1. $\frac{47}{126}$ | 2. $\frac{70}{126}$ | 3. $\frac{41}{63}$ |
| 4. $\frac{47}{63}$ | 5. $\frac{56}{63}$ | |

22. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าผลต่างของคะแนนที่เปอร์เซ็นต์ไทล์ 67 และเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 33 เท่ากับ 11 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานคือข้อใดต่อไปนี
เมื่อกำหนดตารางแสดงพื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ

z	0.17	0.33	0.44	0.67
พื้นที่ใต้เส้นโค้งปกติ	0.066	0.13	0.17	0.25

1. 9.5 คะแนน
 2. 11 คะแนน
 3. 12.5 คะแนน
 4. 14 คะแนน
 5. 15.5 คะแนน
23. ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$ เป็นข้อมูล 11 จำนวน ซึ่งเรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต
ถ้าผลคูณ $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{11} = 2^{33} \cdot 3^{22}$ แล้วมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี
1. 36
 2. 72
 3. 144
 4. 216
 5. 426

24. ถ้าลำดับ $a_n = \int_n^{\frac{n(n+2)}{2}} \frac{1}{x^2} dx$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี
1. $\frac{1}{4}$
 2. $\frac{1}{2}$
 3. $\frac{3}{4}$
 4. 1
 5. $\frac{5}{4}$

25. กำหนดให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่ง $f'(x) = 3x^2 - 6x$ และ $G(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ f(x) & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$
 ถ้า $G(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|------|
| 1. -2 | 2. -1 | 3. 2 |
| 4. 3 | 5. 4 | |

26. ผลการสอบวิชาประวัติศาสตร์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 20 คะแนนของนักเรียน 10 คน เป็นดังนี้

$x, 16, 8, 12, 13, 7, 9, 11, 18, y$

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 12.7 คะแนน แล้วมัธยฐานของคะแนนสอบเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------------|---------------|---------------|
| 1. 10 คะแนน | 2. 11 คะแนน | 3. 11.5 คะแนน |
| 4. 12 คะแนน | 5. 12.5 คะแนน | |

27. ถ้า $f(x) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot x^{2k-1}$ แล้ว $\frac{1}{\sqrt{2}} f(\sqrt{2})$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---------------------------|----------------------------|---------------------------------|
| 1. $1 + 99 \cdot 2^{99}$ | 2. $1 + 100 \cdot 2^{99}$ | 3. $\sqrt{2} + 99 \cdot 2^{99}$ |
| 4. $1 + 99 \cdot 2^{100}$ | 5. $1 + 100 \cdot 2^{100}$ | |

28. กำหนดให้ $A = \{ 1, 2, 3, \dots, 155 \}$ และ i เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $i^2 = -1$

ถ้า $B = \left\{ x \in A \mid \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{2x-5} = i^{x-2} \right\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ B เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|-------|-------|-------|
| 1. 19 | 2. 20 | 3. 35 |
| 4. 38 | 5. 39 | |

29. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}$ และ $S = \{ 1, 2, 3, \dots, 100 \}$ ถ้าสุ่มสมาชิก 1 ตัวจาก S

แล้วความน่าจะเป็นที่จะได้จำนวนนับ k ซึ่ง $A^k = I$ โดยที่ I เป็นเมทริกซ์เอกลักษณ์ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $\frac{9}{100}$ | 2. $\frac{16}{100}$ | 3. $\frac{18}{100}$ |
| 4. $\frac{24}{100}$ | 5. $\frac{29}{100}$ | |

30. กำหนดให้ $P(x)$ เป็นพหุนามซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $P(1) = 10$ และ $P(10) = 2,116$ แล้ว $P(-1)$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

- | | | |
|--------|----------|-------|
| 1. 4 | 2. 10 | 3. 51 |
| 4. 106 | 5. 1,053 | |

เฉลย

- | | | | | |
|------|-------|-------|-------|-------|
| 1. 3 | 7. 1 | 13. 1 | 19. 3 | 25. 5 |
| 2. 3 | 8. 5 | 14. 2 | 20. 2 | 26. 5 |
| 3. 5 | 9. 4 | 15. 4 | 21. 4 | 27. 4 |
| 4. 1 | 10. 1 | 16. 1 | 22. 3 | 28. 5 |
| 5. 3 | 11. 2 | 17. 5 | 23. 2 | 29. 2 |
| 6. 4 | 12. 4 | 18. 3 | 24. 3 | 30. 1 |

แนวคิด

1. 3

จากสมบัติของค่าสัมบูรณ์ จะได้ $-5x < 6(x-3) < 5x$ และ $5x > 0$
 $x > 0 \dots(3)$

$$\begin{array}{l} -5x < 6x - 18 \quad \text{และ} \quad 6x - 18 < 5x \\ 18 < 11x \qquad \qquad \qquad x < 18 \quad \dots(2) \\ \frac{18}{11} < x \quad \dots(1) \end{array}$$

จาก (1), (2), (3) จะได้ $\frac{18}{11} < x < 18$

ดังนั้น x ที่เป็นจำนวนเต็ม จะมีค่าตั้งแต่ 2, 3, ..., 17 ซึ่งมีจำนวน $17 - 2 + 1 = 16$ ตัว

2. 3

จากทฤษฎีเศษ $x - 1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 10 จะได้ $a(1^5) + b(1^3) + c(1) + d = 10$
 $a + b + c + d = 10 \dots(1)$

x หาร $P(x)$ เหลือเศษ 6 จะได้ $a(0^5) + b(0^3) + c(0) + d = 6$
 $d = 6 \dots(2)$

แทน $d = 6$ ใน (1) จะได้ $a + b + c = 4 \dots(3)$

ดังนั้น $x + 1$ หาร $P(x)$ จะเหลือเศษ $= a(-1)^5 + b(-1)^3 + c(-1) + d$
 $= -a - b - c + d$
 $= -(a + b + c) + d$
 $= -(4) + 6 \quad \left. \begin{array}{l} \text{จาก (2) และ (3)} \\ \end{array} \right\}$
 $= 2$

3. 5

$$\begin{aligned} & | \vec{u} \cdot \vec{v} |^2 + | \vec{u} \times \vec{v} |^2 \quad \left. \begin{array}{l} \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta \\ \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta \end{array} \right\} \\ & = (|\vec{u}||\vec{v}| \cos \theta)^2 + (|\vec{u}||\vec{v}| \sin \theta)^2 \\ & = |\sqrt{5}\sqrt{3} \cos \theta|^2 + (\sqrt{5}\sqrt{3} \sin \theta)^2 \\ & = 15 \cos^2 \theta + 15 \sin^2 \theta \\ & = 15(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \quad \left. \begin{array}{l} \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \end{array} \right\} \\ & = 15 \end{aligned}$$

4. 1

จาก $\log_{a^2} b = 5$ ดังนั้น $\log_{b^2} a = \frac{1}{2} \log_b a$
 $\frac{1}{2} \log_a b = 5$ $\left. \begin{array}{l} \log_b a \text{ กับ } \log_a b \text{ เป็นส่วนกลับกัน} \\ \end{array} \right\}$
 $\log_a b = 10 \quad \longrightarrow \quad = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{10} \right)$
 $= \frac{1}{20}$

5. 3

ระบบสมการจะมีคำตอบเดียว เมื่อ $\det [\text{สปส}] \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} a & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{aligned} (2a - 4 - 2) - (-4 - a + 4) &\neq 0 \\ 3a &\neq 6 \\ a &\neq 2 \\ \rightarrow \text{เขียนเป็นช่วงได้เป็น } &(-\infty, 2) \cup (2, \infty) \end{aligned}$$

6. 4

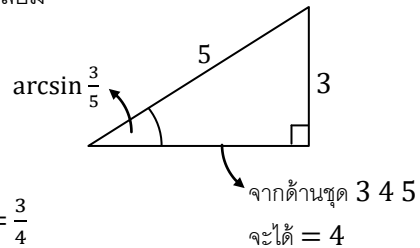
$$\begin{aligned} \tan \left[\frac{\pi}{4} + \arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right] &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)} \\ &= \frac{1 + \tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)}{1 - \tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)} \quad \dots (*) \rightarrow \text{ต้องหา } \tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right) \text{ มาแทน} \end{aligned}$$

1. คิดเครื่องหมายตามจุดภาค : $\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right)$ คือมุมที่ \sin แล้วเป็นลบ $\rightarrow Q_3$ หรือ Q_4

แต่เรนจ์ของ \arcsin คือ Q_1 หรือ Q_4 ดังนั้น $\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right)$ เป็นมุมใน Q_4

ดังนั้น $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right) = \tan (\text{มุมใน } Q_4) \rightarrow \text{เป็นลบ}$

2. หาค่า $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right)$ แบบไม่สนใจเครื่องหมาย \rightarrow ใช้สามเหลี่ยม



รวมสองขั้นตอน จะได้ $\tan \left(\arcsin \left(-\frac{3}{5} \right) \right) = -\frac{3}{4}$

แทนใน (*) จะได้ $= \frac{1 + \left(-\frac{3}{4} \right)}{1 - \left(-\frac{3}{4} \right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{4}} = \frac{1}{7}$

7. 1

ตัวเลขที่เป็นสัดส่วนกับความถี่ (เช่น ความถี่สัมพัทธ์ = $\frac{\text{ความถี่}}{N}$) สามารถใช้หา \bar{x} ได้ในลักษณะเดียวกับความถี่เลย

(เพราะ เศษ และ ส่วน ของ $\frac{\sum x_i}{N}$ จะถูกทอนเท่าๆกัน ทำให้มีค่าเท่าเดิม)

ตารางอันตรภาคชั้นเป็นช่วง \rightarrow ประมาณแต่ละชั้นด้วยจุดกึ่งกลางชั้น

คะแนนสอบ	จุดกึ่งกลางชั้น	ความถี่สัมพัทธ์	ผลคูณ
0 - 19	9.5	0.1	0.95
20 - 39	29.5	0.1	2.95
40 - 59	49.5	0.3	14.85
60 - 79	69.5	0.3	20.85
80 - 99	89.5	0.2	17.90
		1.0	57.50

จะได้ $\bar{x} = \frac{57.5}{1} = 57.5$

8. 5

แทน $x = 2$ จะเห็นว่ามีส่วนที่ส่วน = 0 ลบกันอยู่ ดังนั้น ต้องจัดรูปให้ $x - 2$ ตัดกันก่อน

$$\begin{aligned} \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+2} - \frac{8}{x^2-4} &= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x-2} - \frac{8}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{2(x+2) - 8}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{2x-4}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x+2} + \frac{2}{x+2} \\ &= \frac{3}{x+2} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{2}{x-2}} \right\} \frac{1}{x+2} \text{ ไม่ต้องเอาไปรวมก็ได้ เพราะหา } \lim_{x \rightarrow 2} \text{ ได้}$$

แทน $x = 2$ ใหม่ จะได้ ลิมิต $= \frac{3}{2+2} = \frac{3}{4}$

9. 4

จาก $a_n = a_1 r^{n-1}$ แทน $n = 4$ จะได้ $a_4 = a_1 r^{4-1}$

$$12 = 96r^3$$

$$\frac{1}{8} = r^3$$

$$\frac{1}{2} = r \quad \rightarrow |r| < 1 \text{ ดังนั้น จะใช้สูตร } S_\infty = \frac{a_1}{1-r} \text{ ได้}$$

$$\text{จะได้ } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{96}{1-\frac{1}{2}} = \frac{96}{\frac{1}{2}} = 192$$

10. 1

จากสูตร ดิฟเฟอเรนเชียลในรูปแบบฟังก์ชันคอมโพสิท $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$$\begin{aligned} \text{จะได้ } (f \circ f)'(2) &= f'(f(2)) \cdot f'(2) \\ &= f'((2-1)^2 - 5) \cdot f'(2) \\ &= f'(-4) \cdot f'(2) \dots (*) \end{aligned} \quad \left. \vphantom{(f \circ f)'(2)} \right\} \text{หา } f(2) \text{ ใช้สูตรล่าง เพราะ } 2 > 1$$

หา $f'(-4)$: เมื่อ $x < -1$ จะได้ $f(x) = (x+1)^2 - 5$
 $f'(x) = 2(x+1)(1)$
 $f'(-4) = 2(-4+1) = -6$

หา $f'(2)$: เมื่อ $x > 1$ จะได้ $f(x) = (x-1)^2 - 5$
 $f'(x) = 2(x-1)(1)$
 $f'(2) = 2(2-1) = 2$

} แทนใน (*)
 จะได้ $(f \circ f)'(2) = (-6)(2) = -12$

11. 2

ให้ $z_1 = r \text{ cis } \theta$ เมื่อ $0 < \theta < 90^\circ$ (โจทย์ให้ z_1 อยู่ใน Q_1)

เนื่องจาก $|z_1| = 2$ จะได้ $r = 2$ ดังนั้น $z_1 = 2 \text{ cis } \theta$

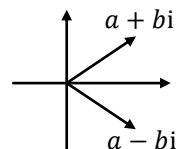
เนื่องจาก รากที่ 3 แต่ละรากจะมีมุมเพิ่มทีละ $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

ดังนั้น อีก 2 รากที่เหลือคือ $2 \text{ cis}(\theta + 120^\circ)$ กับ $2 \text{ cis}(\theta + 240^\circ)$ (ยังไม่รู้ว่าตัวไหนคือ z_2 ตัวไหนคือ z_3)

โจทย์ให้ $z_3 = \bar{z}_1 \rightarrow$ ดังนั้น z_3 อยู่ใน Q_4

\rightarrow แต่ $2 \text{ cis}(\theta + 120^\circ)$ ไม่มีทางอยู่ใน Q_4 ได้ (เพราะ $0 < \theta < 90^\circ$)

\rightarrow ดังนั้น $z_3 = 2 \text{ cis}(\theta + 240^\circ)$



จากสมบัติของคอนจูเกต และขนาดของมุม จะได้ว่ามุมของ z_1 กับ z_3 จะต้องรวมกันได้ 360°

$$\begin{aligned} \theta + (\theta + 240^\circ) &= 360^\circ \\ 2\theta &= 120^\circ \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{แทนค่า } \theta \text{ จะได้ } z_2 + z_3 &= 2 \operatorname{cis}(60^\circ + 120^\circ) + 2 \operatorname{cis}(60^\circ + 240^\circ) \\ &= 2 \operatorname{cis}(180^\circ) + 2 \operatorname{cis}(300^\circ) \\ &= -2 + 2(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ) \\ &= -2 + 2\left(\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \\ &= -2 + 1 - \sqrt{3}i = -1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

12. 4

จะเห็นว่า $\frac{11^{111}}{1210}$ ตัด 11 ได้สองตัว เหลือ $\frac{11^{109}}{10}$ ดังนั้น จะหาว่า 11^{109} หารด้วยด้วย 10 เหลือเศษเท่าไร ก่อน แล้วตอนจบ ค่อยเอา 11 สองตัวที่ตัดไป คูณกลับเข้าไป ให้ตัวหารกลายเป็น 1210 เท่าเดิม

“เศษเหลือจากการหารด้วย 10” จะเท่ากับ “หลักหน่วย”

เนื่องจาก 11 มีหลักหน่วยคือ 1 ดังนั้น ถ้าเอา 11 มาคูณกันเอง ไม่ว่าจะคูณกี่ตัว หลักหน่วยก็ยังเป็น 1 เหมือนเดิม (เพราะ $1 \times 1 = 1$) ดังนั้น 11^{109} จะมีหลักหน่วยคือ 1

$$\begin{aligned} \text{ดังนั้น } 11^{109} \text{ หารด้วย } 10 \text{ จะเหลือเศษ } 1 &\rightarrow 11^{109} = 10q + 1 \\ &\rightarrow 11^{111} = 1210q + 121 \quad \left. \begin{array}{l} \text{คูณ } 11 \times 11 \text{ ตลอด} \\ \text{คูณ } 11 \times 11 \text{ ตลอด} \end{array} \right\} \\ &\rightarrow 11^{111} \text{ หารด้วย } 1210 \text{ จะเหลือเศษ } 121 \end{aligned}$$

13. 1

เนื่องจาก $x + b$ เป็นตัวหาร ดังนั้น $x \neq -b$: $\frac{x+a}{(x+b)^2} \geq 0$ เนื่องจาก $(x+b)^2 > 0$ ดังนั้น จะย้าย $(x+b)^2$ มาคูณทางขวาได้ โดยไม่ต้องเปลี่ยน \geq เป็น \leq

$$\begin{aligned} x + a &\geq 0 \\ x &\geq -a \end{aligned}$$

ดังนั้น คำตอบของอสมการคือ $x \geq -a$ และ $x \neq -b$...(*)

แต่โจทย์ให้คำตอบคือ $(1, \infty)$ ซึ่งเขียนในรูปอสมการได้เป็น $x > 1$

ซึ่งเขียนในรูปแบบเดียวกับ (*) ได้เป็น $x \geq 1$ และ $x \neq 1$

เทียบกับ (*) จะได้ $a = -1$ และ $b = -1$

$$\text{ดังนั้น } a + b = (-1) + (-1) = -2$$

14. 2

$$\text{จะได้มุมที่ฐาน} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$

ลากส่วนสูง AD จาก Δ หน้าจั่ว จะได้ AD แบ่งครึ่งฐาน เป็นฝั่งละ 8 ดังรูป

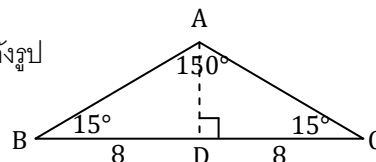
$$\text{จาก } \tan C = \frac{AD}{CD} \text{ จะได้ } \tan 15^\circ = \frac{AD}{8}$$

$$\tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{AD}{8}$$

$$\frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{AD}{8}$$

$$\text{จะได้ } AD = \frac{8(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{8(3-2\sqrt{3}+1)}{2} = 8(2-\sqrt{3})$$



$$\text{ดังนั้น } \Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times 16 \times 8(2-\sqrt{3}) = 64(2-\sqrt{3})$$

15. 4

ก. การ ดอท&ครอส จะได้ผลเท่าเดิมเสมอ ตราบใดที่ตำแหน่ง $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ยังคงเรียงเป็นวงกลมแบบเดียวกัน

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) &= \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) \\ &= (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \times \vec{u}) \cdot \vec{v} \quad \rightarrow \text{ก. ถูก} \end{aligned}$$

ข. เนื่องจาก ผลครอส จะมีทิศตั้งฉากกับระนาบของตัวตั้ง ดังนั้น การเปลี่ยนกลุ่มอาจทำให้ผลลัพธ์มีทิศผิดไปจากเดิมได้ หรือ จะลองแทนด้วยเวกเตอร์ง่ายๆดู เช่น $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$

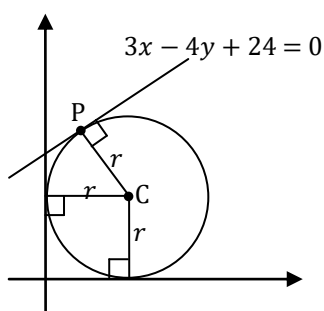
$$\text{แต่ } \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} \neq \vec{0} \quad \rightarrow \text{ข. ผิด}$$

ค. $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v}$
 $= |\vec{u}|^2 - |\vec{v}|^2 \quad \rightarrow \text{ค. ถูก}$

ง. $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{v} \times \vec{u} - \vec{v} \times \vec{v}$
 $= \vec{0} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{v} - \vec{0}$
 $= 2(\vec{u} \times \vec{v}) \quad \rightarrow \text{ง. ถูก}$

$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$

16. 1



จากข้อมูลที่โจทย์ให้ จะวาดได้ดังรูป \rightarrow จะได้พิกัดของ C คือ (r, r)

และจาก CP = r

$$\frac{|3r - 4r + 24|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = r$$

ระยะจากจุด (a, b) ถึงเส้นตรง $Ax + By + C = 0$ คือ $\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

$$|-r + 24| = 5r$$

$$\begin{aligned} -r + 24 &= 5r & -r + 24 &= -5r \\ 4 &= r & -6 &= r \end{aligned}$$

เนื่องจากรัศมีเป็นลบไม่ได้ จะได้ $r = 4$ เท่านั้น ดังนั้นจะได้ พิกัด C คือ $(4, 4)$

หาความชัน CP: เนื่องจาก $CP \perp l$ ดังนั้น ความชันต้องคูณกันได้ -1

หาความชัน l : $3x - 4y + 24 = 0$ \rightarrow ความชัน $l = \frac{3}{4}$
 $\frac{3}{4}x + 6 = y$ \rightarrow ดังนั้น ความชัน CP = $-\frac{4}{3}$

ดังนั้น เส้นตรงที่ผ่าน CP จะมีความชัน $-\frac{4}{3}$ และผ่าน $C(4, 4)$ ซึ่งจะมีสมการคือ $\frac{y-4}{x-4} = -\frac{4}{3}$
 $3y - 12 = -4x + 16$
 $4x + 3y - 28 = 0$

17. 5

จาก $[A : I] \sim [I : P]$ จะได้ $AP = I$ นั่นคือ $P = A^{-1}$

จาก $A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ย้ายข้าง A ทางซ้าย จะได้ $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

จะแปลงเป็นระบบสมการ แล้วแก้หา a ก็ได้ แต่ข้อนี้โจทย์ถาม a ค่าเดียว \rightarrow ใช้กฎของครอเมอร์ จะง่ายกว่า

จากกฎของครอเมอร์ จะได้ $a = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{(1+12+0)-(0+0-4)}{(1+4+0)-(0+0+0)} = \frac{17}{5}$

18. 3

$$\begin{aligned} 9^{\log x} - 10(3^{\log x}) + 9 &= 0 \\ 3^{2\log x} - 10(3^{\log x}) + 9 &= 0 \\ (3^{\log x} - 1)(3^{\log x} - 9) &= 0 \\ 3^{\log x} &= 1, 9 \\ 3^{\log x} &= 3^0, 3^2 \\ \log x &= 0, 2 \\ x &= 10^0, 10^2 = 1, 100 \rightarrow \text{จะได้ผลบวกคำตอบ} = 1 + 100 = 101 \end{aligned}$$

19. 3

$$\begin{aligned} 125(5^4 \cos 2x) &= 4(5^4 \cos^2 x) + 25 \\ 125(5^4(2 \cos^2 x - 1)) &= 4(5^4 \cos^2 x) + 25 \\ 125(5^8 \cos^2 x - 4) &= 4(5^4 \cos^2 x) + 25 \\ \frac{125(5^8 \cos^2 x)}{5^4} &= 4(5^4 \cos^2 x) + 25 \\ \frac{5^8 \cos^2 x}{5} &= 4(5^4 \cos^2 x) + 25 \\ 5^8 \cos^2 x &= 20(5^4 \cos^2 x) + 125 \\ 5^8 \cos^2 x - 20(5^4 \cos^2 x) - 125 &= 0 \\ (5^4 \cos^2 x - 25)(5^4 \cos^2 x + 5) &= 0 \end{aligned}$$

เลขยกกำลังฐาน 5
เป็นลบไม่ได้
↓
~~5~~

$$\begin{aligned} 5^4 \cos^2 x &= 25, \text{ ~~5~~ } \\ 5^4 \cos^2 x &= 5^2 \\ 4 \cos^2 x &= 2 \\ \cos^2 x &= \frac{1}{2} \\ \cos x &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ x &= \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \\ &\rightarrow \text{เป็นลำดับเซตของข้อ 3.} \end{aligned}$$

20. 2

หา $n(S)$: จำนวนแบบทั้งหมด \rightarrow เลือก 3 คน จาก 9 คน ได้ $\binom{9}{3}$ แบบ

หา $n(E)$: จะดูหา \bar{x} เลขก็ได้ แต่ต้องคิดเลขเยอะหน่อย

หรือจะเอาข้อมูลทุกตัวมาห้ 150 ก่อน เพื่อให้คิดเลขน้อยลงก็ได้

152	153	155	158	159	160	162	166	175
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
2	3	5	8	9	10	12	16	25

หาค่าเฉลี่ยได้ $\frac{2+3+5+8+9+10+12+16+25}{9} = \frac{90}{9} = 10 \rightarrow$ บวก 150 กลับ จะได้ $\bar{x} = 10 + 150 = 160$

จะเห็นว่า มีเด็ก 5 คน ที่น้อยกว่า 160 \rightarrow เลือก 3 คน จาก 5 คน ได้ $\binom{5}{3}$ แบบ

$$\text{ดังนั้น ความน่าจะเป็น} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}} = \frac{\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{42}$$

21. 4

ไม่เป็นลบ จะมีหลายกรณี (ศูนย์ หรือ บวก) → จะคำนวณแบบตรงข้าม (คือแบบที่เป็นลบ) แล้วเอา 1 ตั้งลบ

หา $n(S)$: จำนวนแบบทั้งหมด → เลือก 4 จำนวน จาก 9 จำนวน ได้ $\binom{9}{4} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 3 \cdot 7 \cdot 6$ แบบ

หา $n(E)$: เป็นจำนวนลบ → จะมี 2 กรณีดังนี้

กรณี เป็นบวก 3 ตัว ลบ 1 ตัว เลือก 3 ตัว จากเลขบวก 4 ตัว ได้ $\binom{4}{3}$ แบบ

เลือก 1 ตัว จากเลขลบ 4 ตัว ได้ $\binom{4}{1}$ แบบ

→ ได้จำนวนแบบ = $\binom{4}{3} \binom{4}{1} = (4)(4) = 16$ แบบ

กรณี เป็นบวก 1 ตัว ลบ 3 ตัว เลือก 1 ตัว จากเลขบวก 4 ตัว ได้ $\binom{4}{1}$ แบบ

เลือก 3 ตัว จากเลขลบ 4 ตัว ได้ $\binom{4}{3}$ แบบ

→ ได้จำนวนแบบ = $\binom{4}{1} \binom{4}{3} = (4)(4) = 16$ แบบ

รวมได้ $n(E) = 16 + 16 = 32$ แบบ

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ ผลคูณของเลข 4 ตัวเป็นลบ = $\frac{32}{3 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{16}{63}$

ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่ ผลคูณของเลข 4 ตัวไม่เป็นลบ = $1 - \frac{16}{63} = \frac{47}{63}$

22. 3

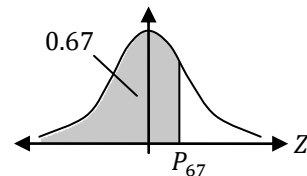
P_{67} คือ มีพื้นที่ 0.67 อยู่ทางซ้าย → จะวาดได้ดังรูป

แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องวัดจากแกนกลาง

ครึ่งซ้าย พื้นที่ = 0.5 → จะได้พื้นที่ที่ล้นไปทางขวา = $0.67 - 0.5 = 0.17$

เปิดตารางตรงพื้นที่ = 0.17 จะได้ $z = 0.44$ ดังนั้น $\frac{P_{67} - \bar{x}}{s} = 0.44$

$$P_{67} - \bar{x} = 0.44s \quad \dots(1)$$



ทำนองเดียวกัน P_{33} คือ มีพื้นที่ 0.33 อยู่ทางซ้าย → จะวาดได้ดังรูป

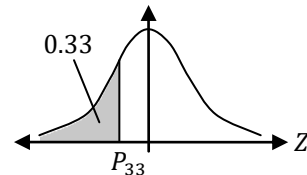
แต่พื้นที่ที่ใช้เปิดตาราง ต้องวัดจากแกนกลาง

ครึ่งซ้าย พื้นที่ = 0.5 → เหลือพื้นที่จากแกนกลาง = $0.5 - 0.33 = 0.17$

เปิดตารางตรงพื้นที่ = 0.17 จะได้ $z = 0.44$ แต่ฝั่งซ้ายของโค้ง จะมี z เป็นลบ

จะได้ $z = -0.44$ ดังนั้น $\frac{P_{33} - \bar{x}}{s} = -0.44$

$$P_{33} - \bar{x} = -0.44s \quad \dots(2)$$



$$(1) - (2) : \left(\frac{P_{67} - \bar{x}}{11} \right) - \left(\frac{P_{33} - \bar{x}}{11} \right) = \frac{0.44s}{11} - \left(\frac{-0.44s}{11} \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{จากโจทย์ จะได้ } P_{67} - P_{33} = 11 \\ \text{จะได้ } \end{array} \right\}$$

$$\text{จะได้ } s = \frac{11}{0.88} = \frac{1100}{88} = \frac{100}{8} = 12.5$$

23. 2

ให้ $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{11}$ มี $a_1 = x_1$ และ อัตราส่วนร่วม = r

$$\text{จากสูตร } a_n = a_1 r^{n-1} \text{ จะได้ } x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{11} = 2^{33} \cdot 3^{22}$$

$$x_1 \cdot x_1 r \cdot x_1 r^2 \cdot \dots \cdot x_1 r^{10} = 2^{33} \cdot 3^{22}$$

$$(x_1)^{11} (r^{1+2+3+\dots+10}) = 2^{33} \cdot 3^{22}$$

$$(x_1)^{11} \left(r^{\frac{10(10+1)}{2}} \right) = 2^{33} \cdot 3^{22}$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{ยกกำลัง } \frac{1}{11} \text{ ทั้งสองฝั่ง } \left(\begin{matrix} (x_1)^{11} \\ x_1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} r^{55} \\ r^5 \end{matrix} \right) = 2^{33} \cdot 3^{22} \\ = 2^3 \cdot 3^2 \dots (*)$$

มีฐาน = ตัวตรงกลาง = $\frac{x_{11+1}}{2} = x_6$

ซึ่งจากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$ จะได้ $x_6 = x_1 r^5$ ซึ่งจาก (*) จะได้เท่ากับ $2^3 \cdot 3^2 = 72$

24. 3

$$\text{อินทิเกรต จะได้ } a_n = \int_n^{\frac{n(n+2)}{2}} x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1} \Big|_n^{\frac{n(n+2)}{2}} = - \left(\left(\frac{n(n+2)}{2} \right)^{-1} - (n)^{-1} \right) \\ = - \left(\frac{2}{n(n+2)} - \frac{1}{n} \right) \\ = - \left(\frac{2 - (n+2)}{n(n+2)} \right) \\ = - \left(\frac{-n}{n(n+2)} \right) \\ = \frac{1}{n+2}$$

$$\text{ดังนั้น } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots \right)$$

จะเห็นว่า ตัวลบ จะตัดกับตัวบวกของพจน์ถัดไปสองพจน์ได้

เหลือตัวบวกสองตัวแรก (คือ $\frac{1}{1}$ และ $\frac{1}{2}$) กับ ตัวลบสองตัวสุดท้าย (ซึ่งเข้าใกล้ 0 เมื่อ $n \rightarrow \infty$)

ดังนั้น จะได้คำตอบ = $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} \right) = \frac{3}{4}$

25. 5

$$\text{อินทิเกรต } f'(x) = 3x^2 - 6x \text{ จะได้ } f(x) = \frac{3x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + c \\ = x^3 - 3x^2 + c \dots (*)$$

$G(x)$ ต่อเนื่องที่ $x = -1$ ดังนั้น บริเวณรอยต่อที่ $x = -1$ ต้องได้ $x + 5 = f(x)$

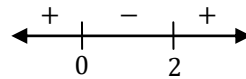
$$\begin{aligned} -1 + 5 &= f(-1) \\ 4 &= (-1)^3 - 3(-1)^2 + c \\ 8 &= c \end{aligned}$$

แทนใน (*) จะได้ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$

ค่า สูงสุด/ต่ำสุด สัมพัทธ์ จะเกิดที่ $f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0, 2$$



ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ จะเกิด ณ จุดที่ $f'(x)$ เปลี่ยนจาก - เป็น + นั่นคือ ที่ $x = 2$

จะได้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ = $f(2) = 2^3 - 3(2^2) + 8 = 4$

26. 5

$$\begin{aligned} \text{ค่าเฉลี่ย} = 12.7 \text{ ดังนั้น } \frac{x+16+8+12+13+7+9+11+18+y}{10} &= 12.7 \\ x + 94 + y &= 127 \\ x + y &= 33 \end{aligned}$$

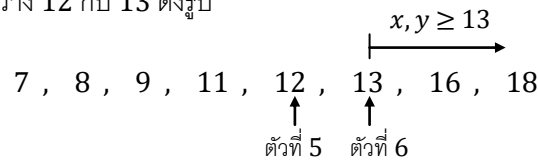
หามัธยฐาน \rightarrow มัธยฐานจะอยู่ตำแหน่งที่ $\frac{10+1}{2} = 5.5 =$ ระหว่างตัวที่ 5 กับ 6

เรียงข้อมูลจากมากไปน้อย จะได้ 7, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 18 เหลือ x กับ y ที่ยังไม่รู้ค่า

เนื่องจาก x, y มากสุดคือ 20 (คะแนนเต็ม 20) และ $x + y = 33$ ดังนั้น x หรือ y จะน้อยกว่า 13 ไม่ได้ (ถ้ามีตัว

ไหนน้อยกว่า 13 อีกตัวต้องมากกว่า 20 ถึงจะบวกกันเป็น 33 ได้) $\rightarrow x, y \geq 13$

ดังนั้น ตัวที่ 5.5 จะอยู่ระหว่าง 12 กับ 13 ดังรูป



$$\text{จะได้ ตัวที่ } 5.5 = \frac{12+13}{2} = 12.5$$

27. 4

$$\begin{aligned} \text{จาก } f(x) &= \sum_{k=1}^{100} k \cdot x^{2k-1} \text{ จะได้ } f(\sqrt{2}) = \sum_{k=1}^{100} k \cdot \sqrt{2}^{2k-1} \\ \text{ดังนั้น } \frac{1}{\sqrt{2}} f(\sqrt{2}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} k \cdot \sqrt{2}^{2k-1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{100} k \cdot \frac{(\sqrt{2}^2)^k}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{100} k \cdot 2^k \\ &= \frac{1}{2} (1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{100}) \\ &= 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + 100 \cdot 2^{99} \end{aligned}$$

เป็นอนุกรมผลรวมเรขาคณิต \rightarrow ต้องใช้วิธีคูณ r ให้ตำแหน่งเลื่อน แล้วหักด้วยตัวมันเอง

$$\begin{aligned} \text{คูณ 2 ให้} & \quad 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + 100 \cdot 2^{99} = x \quad \dots(1) \\ \text{พจน์เลื่อน} & \quad 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + 99 \cdot 2^{99} + 100 \cdot 2^{100} = 2x \quad \dots(2) \end{aligned}$$

$$(1) - (2) : \underbrace{1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + \dots + 1 \cdot 2^{99}} - 100 \cdot 2^{100} = -x$$

อนุกรมเรขาคณิต ($a_1 = 1, r = 2$) ใช้สูตร $S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$ ได้

$$\begin{aligned} \frac{1(2^{100} - 1)}{2 - 1} - 100 \cdot 2^{100} &= -x \\ 2^{100} - 1 - 100 \cdot 2^{100} &= -x \\ -1 - 99 \cdot 2^{100} &= -x \\ 1 + 99 \cdot 2^{100} &= x \end{aligned}$$

28. 5

จัดรูปโดยคูณคอนจูเกตให้ตัวส่วนเป็นจำนวนจริงก่อน จะได้ $\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1^2+2i+i^2}{1^2-i^2} = \frac{2i}{2} = i$

ดังนั้น จะได้สมการคือ $i^{2x-5} = i^{x-2}$

$$\frac{i^{2x-5}}{i^{x-2}} = 1$$

$$i^{(2x-5)-(x-2)} = 1$$

$$i^{x-3} = 1 \rightarrow x - 3 \text{ ต้องหารด้วย } 4 \text{ ลงตัว}$$

นั่นคือ x ต้องหารด้วย 4 เหลือเศษ 3

เนื่องจาก $x \in \{1, 2, 3, \dots, 155\}$ จะได้ $x = 3, 7, 11, \dots, 155 \rightarrow$ มีทั้งหมด $\frac{155-3}{4} + 1 = 39$ จำนวน

29. 2

เมทริกซ์ในรูป $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ที่นิยมนำมาออกข้อสอบ เนื่องจาก มันมีสมบัติพิเศษ คือ หากนำเมทริกซ์ในรูปนี้มาคูณกัน จะสามารถนำมาคูณรวมกันได้เลย ดังนี้

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ซึ่งจะทำให้ได้ด้วยว่า $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$

$$\text{ดังนั้น } A^k = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \cos \frac{k\pi}{3} & -\sin \frac{k\pi}{3} \\ \sin \frac{k\pi}{3} & \cos \frac{k\pi}{3} \end{bmatrix} \text{ ซึ่งจะเท่ากับ } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ เมื่อ } \cos \frac{k\pi}{3} = 1, \sin \frac{k\pi}{3} = 0$$

นั่นคือ เมื่อ $\frac{k\pi}{3} = 2n\pi$
 $k = 6n$

ใน $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ จะมีจำนวนที่หารด้วย 6 ลงตัวอยู่ $\frac{100}{6} = 16.6\dots \rightarrow$ ปัดลง $\rightarrow 16$ จำนวน

ดังนั้น จะได้ความน่าจะเป็น $= \frac{16}{100}$

30. 1

เนื่องจาก $P(x)$ มี สปส เป็นจำนวนเต็มบวก ดังนั้น ถ้า x เป็นบวก จะได้ว่า แต่ละพจน์ของ $P(x)$ เป็นบวกทุกพจน์

จาก $P(10) = 2,116$ จะสรุปได้ว่า $P(x)$ มีดีกรีไม่เกิน 3 (เพราะทุกพจน์เป็นบวก และ 10^4 เกิน 2116)

ให้ $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ เมื่อ $a, b, c, d \in \{0, 1, 2, \dots\}$

$$\begin{aligned} \text{จาก } P(1) = 10 \text{ จะได้ } a(1^3) + b(1^2) + c(1) + d &= 10 \\ a + b + c + d &= 10 \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{จาก } P(10) = 2,116 \text{ จะได้ } a(10^3) + b(10^2) + c(10) + d &= 2116 \\ 1000a + 100b + 10c + d &= 2116 \dots(2) \end{aligned}$$

จาก (1) จะได้ $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ (เป็น 10 ไม่ได้ เพราะถ้ามีตัวไหนใน a, b, c, d เป็น 10

อีก 3 ตัวที่เหลือจะต้องเป็น 0 ซึ่งจะไม่สามารถทำให้ (2) เป็นจริงได้)

เนื่องจาก 2116 เขียนกระจายในฐานสิบได้แบบเดียวคือ $2(1000) + 1(100) + 1(10) + 6$

และจาก $0 \leq a, b, c, d \leq 9$ ดังนั้น จะสรุปได้ว่า $a = 2, b = 1, c = 1, d = 6$ (ซึ่งจะทำให้ (1) จริงด้วย)

ดังนั้น $P(-1) = 2(-1)^3 + 1(-1)^2 + 1(-1) + 6 = 4$

เครดิต

ขอบคุณ ข้อสอบ จาก คุณ สนธยา เสนามนตรี และ อ.ปิง GTRmath ครับ

ขอบคุณ คุณ Hutch LK ที่ช่วยตรวจสอบความถูกต้องของเอกสาร ครับ

ขอบคุณเฉลยวิธีทำ จาก อ.ปิง GTRmath ครับ