

สมาคม (พ.ย. 58)

8. กำหนดให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $z + w^{-1} = \sqrt{2} + i$ และ $z^{-1} + w = 1 + \sqrt{2}i$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนเต็มบวก

ก. $zw + (zw)^{-1}$

ข. $(zw)^2 + (zw)^{-2}$

ค. $(zw)^3 + (zw)^{-3}$

ง. $(zw)^4 + (zw)^{-4}$

11. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $\sqrt{2}z + |z + w| = 1 + i$ และ $\sqrt{2}w + |z - w| = 1 - i$
แล้ว $z^{2015} - w^{2015}$ ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก. $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ข. $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ค. $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ง. $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

28. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน 2 จำนวน โดยที่ $z_1 z_2 \neq 0$ ถ้า $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$ และ $|z_1 - z_2| = 1$ แล้ว $|z_1 + 2z_2|$ จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

32. จำนวนของเมทริกซ์ M ทั้งหมดที่อยู่ในรูป $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้เมทริกซ์ $M^9 + M^7 + M^5 + M^3 + M$ เป็นเมทริกซ์ศูนย์ มีจำนวนเท่าใด

35. กำหนดให้ $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 3003 \text{ และ ห.ร.ม.}(n, 3003) = 1\}$

จงหาค่าของ $\sum_{n \in A} \sin^2\left(\frac{n\pi}{3003}\right)$

สมาคม (พ.ย. 57)

15. สมการของตัวแปรเชิงซ้อนในข้อใดต่อไปนี้มีรากซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1

ก. $z^{2014} - z^{2013} - 1 = 0$

ข. $z^{2557} - z^{2556} - 1 = 0$

ค. $z^{2015} - z^{2014} - 1 = 0$

ง. $z^{2558} - z^{2557} - 1 = 0$

22. กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ $(\bar{z})^{2014} = z$ เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน $z_1, z_2, \dots, z_{2014}$ มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1) $z_j \neq 1$ ทุก $j = 1, 2, \dots, 2014$

(2) มีจำนวนเชิงซ้อน $w = x + iy$ ซึ่ง $y \neq 0$ ที่ทำให้ $\frac{w - \bar{w}z_j}{1 - z_j}$ เป็นจำนวนจริง ทุก $j = 1, 2, \dots, 2014$

(3) $\left| \sum_{j=1}^{2014} \frac{1}{z_j} \right| = \frac{1}{1007}$

จงหาค่าของ $\left| \sum_{j=1}^{2014} z_j \right|$

สมาคม (พ.ย. 56)

18. ให้ $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ จงหาจำนวนเต็มบวก n ต่ำสุดที่ทำให้ w เป็นรากของสมการ $(z + 1)^n - z^n = 0$

20. ให้ A เป็นจำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ $z^{2556} = \bar{z}$ และ B เป็นผลบวกของรากทั้งหมดซึ่งมีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับ 0 ของสมการ $z^{2556} = \bar{z}$ จงหาค่าของ $A - B$

35. กำหนดให้ A เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน 10 จำนวนที่แตกต่างกันหมดและมีสมบัติว่า $\{wz : w, z \in A\} = A$ ให้ $f(A)$ เป็นผลคูณทั้งหมดของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของสมาชิกสองตัวใดๆ ของ A นั่นคือ ถ้า $A = \{z_1, z_2, \dots, z_{10}\}$ แล้ว $f(A) = |z_1 - z_2||z_1 - z_3| \dots |z_2 - z_3| \dots |z_9 - z_{10}|$ จงหาผลบวกของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ $f(A)$

สมาคม (พ.ย. 55)

11. กำหนดให้ p และ q เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่ $q \neq 0$ ซึ่งทำให้สมการ $z^2 + pz + q = 0$ มีรากที่ต่างกันเป็นจำนวนเชิงซ้อน z_1 และ z_2 ถ้า $|z_1| = 1 = |z_2|$ แล้ว ส่วนจริงของ $z_1 \bar{z}_2$ มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- ก. $\frac{p}{2q^2} - 1$ ข. $\frac{p^2}{2q^2} - 1$ ค. $\frac{p}{q^2} - 1$ ง. $\frac{p^2}{2q} - 1$

25. จงหาค่าของ $\left(\frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2555}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2555}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)} \right)^{2555}$ โดยที่ i เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $i^2 = -1$

สมาคม (พ.ย. 54)

10* กำหนดให้ w และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้

(1) $|w|^2 = |z + w|$

(2) $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = i$

(3) $|z - w| = 1$

จงหาค่า $|z|$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

24. กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1| = |z_2|$ ถ้า $z_1 - z_2 = a + i$ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง จงหา $\text{Im} \left(\frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} \right)$ (ตอบในรูปของ a)

33. กำหนดให้ w เป็นรากเชิงซ้อนของสมการ $z^4 - z^3 + z + 1 = 0$ จงหาค่าของ $\left| w + \frac{1}{w} \right|$

เฉลย

สมาคม (พ.ย. 58)	8. ค	11. ๗	28. 7	32. 9
	35. 719.5			
สมาคม (พ.ย. 57)	15. ค	22. 2016	35. $\frac{1}{1007}$	
สมาคม (พ.ย. 56)	18. 6	20. 2559	35. 119683	
สมาคม (พ.ย. 55)	11. ง	25. i		
สมาคม (พ.ย. 54)	10. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	24. $\frac{-2a}{1+a^2}$	33. $\sqrt[4]{8}$	