

สมาคม (พ.ย. 58)

8. กำหนดให้  $z$  และ  $w$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่  $z + w^{-1} = \sqrt{2} + i$  และ  $z^{-1} + w = 1 + \sqrt{2}i$

ข้อใดต่อไปนี้เป็นจำนวนเต็มบวก

ก.  $zw + (zw)^{-1}$

ข.  $(zw)^2 + (zw)^{-2}$

ค.  $(zw)^3 + (zw)^{-3}$

ง.  $(zw)^4 + (zw)^{-4}$

11. ให้  $z$  และ  $w$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่  $\sqrt{2}z + |z + w| = 1 + i$  และ  $\sqrt{2}w + |z - w| = 1 - i$   
แล้ว  $z^{2015} - w^{2015}$  ตรงกับข้อใดต่อไปนี้

ก.  $-\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ข.  $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

ค.  $-\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

ง.  $\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

28. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกัน 2 จำนวน โดยที่  $z_1 z_2 \neq 0$  ถ้า  $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$  และ  $|z_1 - z_2| = 1$  แล้ว  $|z_1 + 2z_2|$  จะมีค่าเท่ากับเท่าใด

32. จำนวนของเมทริกซ์  $M$  ทั้งหมดที่อยู่ในรูป  $M = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$  โดยที่  $a, b$  เป็นจำนวนจริง ซึ่งทำให้เมทริกซ์  $M^9 + M^7 + M^5 + M^3 + M$  เป็นเมทริกซ์ศูนย์ มีจำนวนเท่าใด

35. กำหนดให้  $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 3003 \text{ และ ห.ร.ม.}(n, 3003) = 1\}$

จงหาค่าของ  $\sum_{n \in A} \sin^2\left(\frac{n\pi}{3003}\right)$

สมาคม (พ.ย. 57)

15. สมการของตัวแปรเชิงซ้อนในข้อใดต่อไปนี้มีรากซึ่งมีขนาดเท่ากับ 1

ก.  $z^{2014} - z^{2013} - 1 = 0$

ข.  $z^{2557} - z^{2556} - 1 = 0$

ค.  $z^{2015} - z^{2014} - 1 = 0$

ง.  $z^{2558} - z^{2557} - 1 = 0$

22. กำหนดให้  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน จำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ  $(\bar{z})^{2014} = z$  เท่ากับเท่าใด

35. กำหนดให้จำนวนเชิงซ้อน  $z_1, z_2, \dots, z_{2014}$  มีสมบัติดังต่อไปนี้

(1)  $z_j \neq 1$  ทุก  $j = 1, 2, \dots, 2014$

(2) มีจำนวนเชิงซ้อน  $w = x + iy$  ซึ่ง  $y \neq 0$  ที่ทำให้  $\frac{w - \bar{w}z_j}{1 - z_j}$  เป็นจำนวนจริง ทุก  $j = 1, 2, \dots, 2014$

(3)  $\left| \sum_{j=1}^{2014} \frac{1}{z_j} \right| = \frac{1}{1007}$

จงหาค่าของ  $\left| \sum_{j=1}^{2014} z_j \right|$

สมาคม (พ.ย. 56)

18. ให้  $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$  จงหาจำนวนเต็มบวก  $n$  ต่ำสุดที่ทำให้  $w$  เป็นรากของสมการ  $(z + 1)^n - z^n = 0$

20. ให้  $A$  เป็นจำนวนรากที่แตกต่างกันทั้งหมดของสมการ  $z^{2556} = \bar{z}$  และ  $B$  เป็นผลบวกของรากทั้งหมดซึ่งมีส่วนจินตภาพไม่เท่ากับ 0 ของสมการ  $z^{2556} = \bar{z}$  จงหาค่าของ  $A - B$

35. กำหนดให้  $A$  เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน 10 จำนวนที่แตกต่างกันหมดและมีสมบัติว่า  $\{wz : w, z \in A\} = A$  ให้  $f(A)$  เป็นผลคูณทั้งหมดของค่าสัมบูรณ์ของผลต่างของสมาชิกสองตัวใดๆ ของ  $A$  นั่นคือ ถ้า  $A = \{z_1, z_2, \dots, z_{10}\}$  แล้ว  $f(A) = |z_1 - z_2||z_1 - z_3| \dots |z_2 - z_3| \dots |z_9 - z_{10}|$  จงหาผลบวกของค่าต่ำสุดและค่าสูงสุดของ  $f(A)$

สมาคม (พ.ย. 55)

11. กำหนดให้  $p$  และ  $q$  เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยที่  $q \neq 0$  ซึ่งทำให้สมการ  $z^2 + pz + q = 0$  มีรากที่ต่างกันเป็นจำนวนเชิงซ้อน  $z_1$  และ  $z_2$  ถ้า  $|z_1| = 1 = |z_2|$  แล้ว ส่วนจริงของ  $z_1 \bar{z}_2$  มีค่าตรงกับข้อใดต่อไปนี้
- ก.  $\frac{p}{2q^2} - 1$       ข.  $\frac{p^2}{2q^2} - 1$       ค.  $\frac{p}{q^2} - 1$       ง.  $\frac{p^2}{2q} - 1$

25. จงหาค่าของ  $\left( \frac{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2555}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{2555}\right) - i \cos\left(\frac{\pi}{2555}\right)} \right)^{2555}$  โดยที่  $i$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง  $i^2 = -1$

สมาคม (พ.ย. 54)

10\* กำหนดให้  $w$  และ  $z$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขทั้งสามข้อต่อไปนี้

(1)  $|w|^2 = |z + w|$

(2)  $\frac{1}{z} + \frac{1}{w} = i$

(3)  $|z - w| = 1$

จงหาค่า  $|z|$  ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

24. กำหนดให้  $z_1$  และ  $z_2$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง  $|z_1| = |z_2|$  ถ้า  $z_1 - z_2 = a + i$  โดยที่  $a$  เป็นจำนวนจริง จงหา  $\text{Im} \left( \frac{z_1 z_2}{|z_1 z_2|} \right)$  (ตอบในรูปของ  $a$ )

33. กำหนดให้  $w$  เป็นรากเชิงซ้อนของสมการ  $z^4 - z^3 + z + 1 = 0$  จงหาค่าของ  $\left| w + \frac{1}{w} \right|$



เฉลย

สมาคม (พ.ย. 58)	8. ค	11. ๗	28. 7	32. 9
	35. 719.5			
สมาคม (พ.ย. 57)	15. ค	22. 2016	35. $\frac{1}{1007}$	
สมาคม (พ.ย. 56)	18. 6	20. 2559	35. 119683	
สมาคม (พ.ย. 55)	11. ง	25. i		
สมาคม (พ.ย. 54)	10. $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$	24. $\frac{-2a}{1+a^2}$	33. $\sqrt[4]{8}$	